

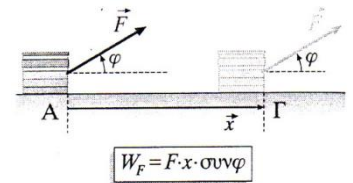
ΘΕΩΡΙΑ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ

Θεωρούμε ένα σώμα το οποίο μετατοπίζεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο από τη θέση Α στη θέση Γ. η μετατόπιση $\vec{x}$ του σώματος είναι ένα διάνυσμα που έχει αρχή το σημείο Α και τέλος το σημείο Γ.

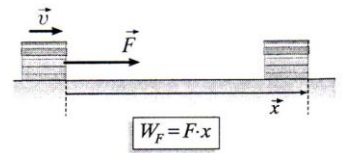
Στο σώμα ασκείται μια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ που σχηματίζει με τη μετατόπιση γωνία φ .

Ορίζουμε ως έργο της δύναμης $\vec{F}$ για τη μετατόπιση $\vec{x}$ το μονόμετρο μέγεθος που δίνεται από τη σχέση:

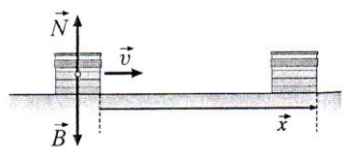
$$W_F = F \cdot x \cdot \sin\varphi$$



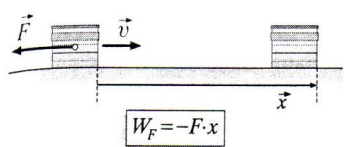
1. Αν $\varphi = 0^\circ$, δηλαδή **τα διανύσματα $\vec{F}$ και $\vec{x}$ έχουν ίδια διεύθυνση και φορά**, τότε $W_F = F \cdot x$ (διότι $\sin 0^\circ = 1$).



2. Αν $\varphi = 90^\circ$, δηλαδή **η δύναμη $\vec{F}$ είναι κάθετη στη μετατόπιση**, τότε $W_F = 0$ (γιατί $\sin 90^\circ = 0$). Στο σχήμα μας είναι $W_B = 0$ και $W_N = 0$, γιατί το βάρος $\vec{B}$ και η $\vec{N}$ είναι κάθετες στη μετατόπιση $\vec{x}$.

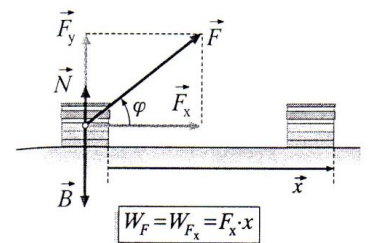


3. Αν $\varphi = 180^\circ$, δηλαδή **η δύναμη $\vec{F}$ έχει την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά από τη μετατόπιση του σώματος**, τότε είναι $W_F = F \cdot x \cdot \sin 180^\circ$ ή $W_F = -F \cdot x$ (γιατί $\sin 180^\circ = -1$).



4. Αν $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, δηλαδή **η δύναμη $\vec{F}$ σχηματίζει γωνία φ με τη μετατόπιση**, τότε για τον υπολογισμό του W_F ή χρησιμοποιούμε τον ορισμό του έργου, $W_F = F \cdot x \cdot \sin\varphi$, ή αναλύουμε τη δύναμη σε δύο συνιστώσες, την $\vec{F}_x$ στη διεύθυνση της μετατόπισης με μέτρο $F_x = F \cdot \sin\varphi$ και την $\vec{F}_y$ στη διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της μετατόπισης με μέτρο $F_y = F \cdot \cos\varphi$. Ισχύει:

$$W_{F_x} = F_x \cdot x \cdot \sin 0^\circ = F_x \cdot x \quad W_{F_y} = F_y \cdot x \cdot \sin 90^\circ = 0$$



*Μονάδα μέτρησης έργου είναι το $1\text{J}=1\text{N}\cdot\text{m}$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΒΑΡΟΥΣ

Το βάρος $\vec{B}$ ενός σώματος μάζας m δίνεται από τη σχέση: $\vec{B} = m\vec{g}$

1. Όταν ένα σώμα κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω (κατεβαίνει) κατά h , τότε η δύναμη του βάρους $\vec{B}$ έχει την κατεύθυνση της μετατόπισης, οπότε το έργο της είναι **θετικό** και δίνεται από τη σχέση:

$$W_B = +Bh = +mgh$$

2. Όταν ένα σώμα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω (ανεβαίνει) κατά h , τότε η δύναμη του βάρους $\vec{B}$ έχει κατεύθυνση αντίθετη από εκείνη της μετατόπισης, οπότε το έργο της είναι **αρνητικό** και δίνεται από τη σχέση:

$$W_B = -Bh = -mgh$$

3. Όταν ένα σώμα κινείται **οριζόντια** τότε η δύναμη του βάρους είναι συνεχώς κάθετη στη μετατόπιση, οπότε το έργο της είναι **μηδέν**.
4. Όταν ένα σώμα κινείται τυχαία, τότε η μετακίνηση μπορεί να θεωρηθεί ότι πραγματοποιείται με διαδοχικές στοιχειώδεις οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις, οπότε το έργο του βάρους υπολογίζεται ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχειωδών έργων. Αφού στις οριζόντιες μετατοπίσεις το έργο του βάρους είναι μηδέν, το έργο του βάρους για τη συνολική μετατόπιση θα δίνεται από τη σχέση:

$$W_B = mg \cdot \Delta h = mg(h_1 - h_2)$$

Όπου $h_1 - h_2$ η υψομετρική διαφορά μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης.

Όταν ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα πάνω σ' ένα επίπεδο και δέχεται δύναμη τριβής ολίσθησης, τότε γνωρίζουμε ότι η τριβή $\vec{T}$ έχει πάντοτε αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα του σώματος, δηλαδή η τριβή $\vec{T}$ έχει την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά από τη μετατόπιση, συνεπώς για το έργο της θα ισχύει:

$$W_T = T \cdot x \cdot \sin 180^\circ = -Tx$$

Δηλαδή **το έργο της τριβής ολίσθησης είναι αρνητικό**.

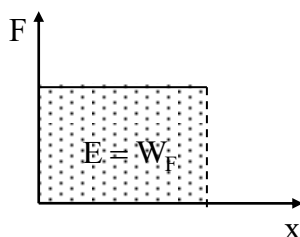
Το έργο, γενικά, εκφράζει μια **ποσότητα μεταβιβαζόμενης ενέργειας**.

Όταν σ' ένα σώμα ασκείται μια δύναμη $\vec{F}$ και **το έργο της είναι θετικό**, αυτό σημαίνει ότι μεταβιβάζεται ενέργεια στο σώμα, δηλαδή **το σώμα κερδίζει ενέργεια**.

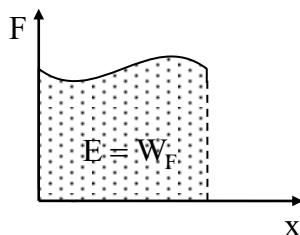
Όταν το έργο μιας δύναμης είναι μηδέν, αυτό σημαίνει ότι δεν μεταβιβάζεται ενέργεια μέσω της δύναμης αυτής.

Όταν το έργο μιας δύναμης που ασκείται σ' ένα σώμα είναι αρνητικό, τότε το σώμα μεταβιβάζει ενέργεια στον υπεύθυνο της δύναμης.

Το έργο δύναμης είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που περικλείεται από τη γραμμή που αποδίδει τη δύναμη και τους αντίστοιχους άξονες.



Αν η δύναμη δεν είναι σταθερή, το έργο υπολογίζεται από το εμβαδόν του αντίστοιχου σχήματος.



ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Κάθε σημειακό αντικείμενο μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ έχει κινητική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος, σε αντίθεση με την ορμή που είναι διανυσματικό μέγεθος, και έχει την ίδια μονάδα μέτρησης με το έργο, δηλαδή μονάδα μέτρησης της κινητικής ενέργειας είναι το 1J.

Για να **αποκτήσει ένα σώμα κινητική ενέργεια**, πρέπει να εκτελέσουμε έργο, δηλαδή να **προσφέρουμε στο σώμα ενέργεια**.

Διατύπωση: Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που δρουν πάνω του.

Δηλαδή: $\Delta K = \Sigma W_F = W_{F_{ολ}}$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Διατηρητική (ή συντηρητική) θα λέμε μια δύναμη όταν το έργο της σε μια κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

Μη διατηρητική θα λέμε μια δύναμη όταν το έργο της σε μια κλειστή διαδρομή δεν είναι μηδέν.

Η τριβή είναι μη διατηρητική δύναμη, γιατί το έργο της σε μια κλειστή διαδρομή δεν είναι μηδέν, αφού σε όλη τη διαδρομή είναι συνέχεια αρνητικό.

Βαρυτική δυναμική ενέργεια (ή απλά δυναμική ενέργεια) U ενός σώματος το οποίο βρίσκεται σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης ονομάζουμε την ενέργεια που έχει το σώμα λόγω της θέσης του.

Η ποσότητα mgh είναι στην πραγματικότητα η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώμα – Γη.

Η ενέργεια που ξοδεύουμε για να φέρουμε ένα σώμα σε κάποιο ύψος είναι ίση με τη αύξηση της βαρυτική δυναμικής του ενέργειας.

Πράγματι, αν δεχθούμε ότι στο A το σώμα έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια μηδέν ($U_{(A)} = 0$), τότε στο Γ θα έχει: $U_{(\Gamma)} = mgh$

Όταν στην επιφάνεια της Γης πάρουμε ένα οριζόντιο επίπεδο ως **επίπεδο μηδενικής βαρυτική δυναμικής ενέργειας**, $U = 0$, τότε η βαρυτική δυναμική ενέργεια μιας μάζας m που βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το επίπεδο αυτό δίνεται από τη σχέση: $U = mgh$

Η τιμή της U εξαρτάται από το επίπεδο **μηδενικής βαρυτική δυναμικής ενέργειας** που αυθαίρετα παίρνουμε και είναι ανεξάρτητη από το αν το σώμα είναι ακίνητο ή κινείται στο συγκεκριμένο ύψος.

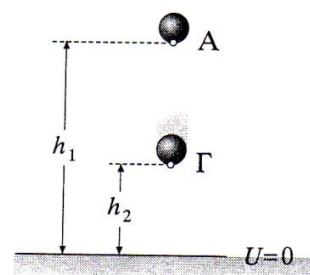
Στη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$ το έργο του βάρους του σώματος είναι:

$$W_B^{(A \rightarrow \Gamma)} = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2 \quad \text{ή} \quad W_B^{(A \rightarrow \Gamma)} = U_{(A)} - U_{(\Gamma)}$$

δηλαδή για οποιαδήποτε κίνηση μέσα στο πεδίο βαρύτητας ισχύει:

$$\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} \quad \text{ή} \quad U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} = -W_B \quad \text{ή} \quad \Delta U = -W_B$$

σχέσεις που ισχύουν για όλες τις διατηρητικές δυνάμεις.



Όταν ένα σώμα βρίσκεται **πάνω** από το επίπεδο που επιλέξαμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτική δυναμικής ενέργειας, έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια **θετική**, ενώ όταν είναι **κάτω** από το επίπεδο όπου πήραμε $U = 0$, έχει βαρυτική ενέργεια **αρνητική**.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ως **μηχανική ενέργεια** E ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων ορίζουμε το άθροισμα της κινητικής ενέργειας K και της δυναμικής ενέργειας U αυτού, δηλαδή: $E = K + U$

Όταν σ' ένα σώμα ασκείται μόνο το βάρος του (συντηρητική δύναμη), η μηχανική του ενέργεια διατηρείται (μένει σταθερή).

ΙΣΧΥΣ P

Η ισχύς ενός κινητήρα και γενικότερα οποιαδήποτε μηχανής είναι το πηλίκο του έργου που παράγει προς το χρονικό διάστημα στο οποίο αυτό παράγεται.

$$P = \frac{W}{t}$$

Μονάδα ισχύος το $1 \text{ Watt} = \frac{1 \text{ Joule}}{\text{sec}}$

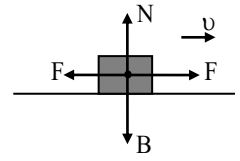
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ένα σώμα το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα v .

Άρα $\Sigma F = 0$ δηλαδή $F = T$.

$$v = \frac{x}{t} \quad (1)$$

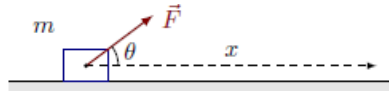
$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot x}{t} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} P = F \cdot v$$



4.1 ΈΡΓΟ

4.1.1 Έργο σταθερής δύναμης

Το έργο W μίας σταθερής δύναμης $\vec{F}$, που μετατοπίζει σώμα κατά x , είναι $W = F \cdot x \cdot \cos\theta$



- ▷ Δυνάμεις κάθετες στη μετατόπιση x δεν παράγουν έργο αφού $\cos 90^\circ = 0$.
- ▷ Δυνάμεις με γωνία $\theta > 90^\circ$ ως προς τη μετατόπιση x παράγουν αρνητικό έργο αφού τότε $\cos\theta < 0$.
- ▷ Το έργο της τριβής T είναι $W_T = -T \cdot x$ αφού $\cos 180^\circ = -1$.