

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΘΕΩΡΙΑ

Σώμα είναι μια λογική ενότητα που αποτελείται από ένα ή περισσότερα αντικείμενα που απομονώνουμε με τη σκέψη μας από το υπόλοιπο σύμπαν, το οποίο ονομάζουμε “περιβάλλον του σώματος”.

Κάθε σώμα που ασκεί επίδραση σε άλλα σώματα του περιβάλλοντος του, δέχεται ταυτόχρονα επίδραση από τα σώματα αυτά. Η αμοιβαία επίδραση μεταξύ των σωμάτων ονομάζεται αλληλεπίδραση. Για την περιγραφή της αλληλεπίδρασης χρησιμοποιούμε την έννοια της δύναμης.

Δύναμη λέγεται η **αιτία**, που μπορεί να **αλλάζει** την κινητική κατάσταση ενός σώματος ή να **παραμορφώσει** ή και τα δύο. Η δύναμη είναι **διανυσματικό** μέγεθος.

Για να την ορίσουμε πλήρως πρέπει να γνωρίζουμε:

- i) Το σημείο εφαρμογής της.
- ii) Τη διεύθυνση της
- iii) Τη φορά της.
- iv) Το μέτρο της.

Ελαστική παραμόρφωση παρουσιάζουν τα σώματα τα οποία τείνουν να αποκτήσουν το αρχικό τους σχήμα που τα έχει παραμορφώσει.

Πλαστική παραμόρφωση παρουσιάζουν τα σώματα τα οποία δεν αποκτούν το αρχικό τους σχήμα όταν πάψει να επιδρά η αιτία που τα παραμόρφωσε.

ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ HOOKE

Οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι ανάλογες προς τις αιτίες που τις προκαλούν.

Ο νόμος του Hooke εκφράζεται μαθηματικά με τη σχέση:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{x}$$

F: η δύναμη

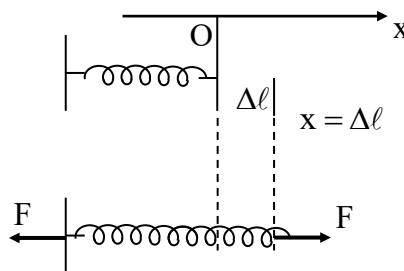
Δx: παραμόρφωση

K: σταθερά

Ας θεωρήσουμε ότι σε ένα ελατήριο ασκείται δύναμη μέτρου F . Το μήκος του ελατηρίου μεταβάλλεται κατά $x = \Delta \ell$. Το αίτιο είναι η δύναμη και η παραμόρφωση είναι η μεταβολή του μήκους. Ο νόμος του Hooke γράφεται:

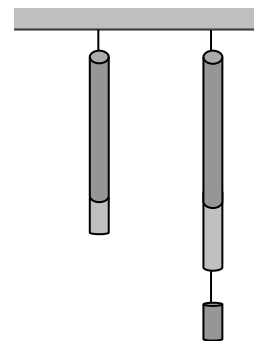
$$F = k\Delta \ell \text{ ή } F = kx$$

όπου k είναι μια σταθερά που ονομάζεται **σταθερά ελατηρίου** και εκφράζει τη σκληρότητα του ελατηρίου.



Δυναμόμετρο λέγεται το όργανο που μετράμε τη δύναμη.

Το δυναμόμετρο αποτελείται από ένα ελατήριο κλεισμένο μέσα σε κάποιο περίβλημα, το οποίο είναι εφοδιασμένο με μία κλίμακα. Για να βαθμολογήσουμε την κλίμακα, κρεμάμε όμοια σώματα με βάρος ακριβώς 1 N. Όταν κρεμαστούν δύο, τρία, τέσσερα ή περισσότερα σώματα, τότε η ολική δύναμη θα είναι 2N, 3N, 4N κ.ο.κ. Έτσι μπορούμε να σημειώσουμε στις αντίστοιχες θέσεις του δείκτη 2N, 3N, 4N κ.ο.κ. Κατόπιν, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το όργανο για τη μέτρηση μιας άγνωστης δύναμης. Η παραμόρφωση που προκαλεί η άγνωστη δύναμη συγκρίνεται με την παραμόρφωση που προκαλεί η μονάδα της δύναμης.



Συνισταμένη δύο ή περισσότερων δυνάμεων που ασκούνται σ' ένα σώμα ονομάζεται η δύναμη η οποία προκαλεί το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που προκαλούν όλες μαζί οι δυνάμεις.

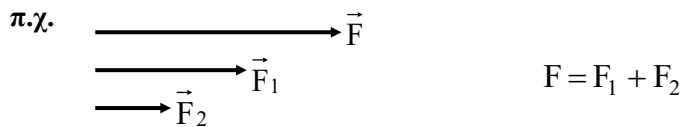
Σύνθεση δυνάμεων λέγεται η διαδικασία υπολογισμού της συνισταμένης πολλών δυνάμεων.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Συγγραμμικές λέγονται οι δυνάμεις όταν τα διανύσματα στα οποία αντιστοιχούν έχουν την ίδια διεύθυνση ή είναι μεταξύ τους παράλληλα.

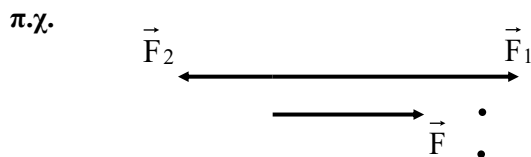
Η συνισταμένη δύο ομόρροπων δυνάμεων έχει:

- i) Ίδιο σημείο εφαρμογής με τις δύο δυνάμεις
- ii) Ίδια διεύθυνση με τις δύο δυνάμεις
- iii) Ίδια φορά με τις δύο δυνάμεις
- iv) Μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο δυνάμεων.



Η συνισταμένη δύο αντίρροπων δυνάμεων έχει:

- i) Ίδιο σημείο εφαρμογής με τις δύο δυνάμεις
- ii) Ίδια διεύθυνση με τις δύο δυνάμεις
- iii) Ίδια φορά με τη μεγαλύτερη δύναμη
- iv) Μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων των δύο δυνάμεων.



1^{ος} ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ (ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ)

Αδράνεια είναι η φυσική τάση ενός σώματος να παραμείνει ακίνητο ή να διατηρεί την ευθύγραμμη ομαλή κίνησή του (δηλαδή κίνηση με σταθερή ταχύτητα).

Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται σ' ένα σώμα είναι μηδέν, τότε το σώμα παραμένει ακίνητο ή εξακολουθεί να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά δηλαδή με σταθερή ταχύτητα.

Ένα σώμα **ισορροπεί** όταν το σώμα δε κινείται ή όταν κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Όταν ένα σώμα ισορροπεί τότε η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό είναι μηδέν.

$$\vec{F}_{ολ} = 0 \text{ Συνθήκη ισορροπίας}$$

2^{ος} ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ (ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ)

Μάζα αδράνειας ονομάζεται το μέτρο της αδράνειας του σώματος.

Η επιτάχυνση που αποκτά ένα σώμα:

i) Έχει την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά με τη συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται.

ii) Είναι ανάλογη με τη συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται

και iii) Είναι αντίστροφη ανάλογη με τη μάζα αδρανείας του

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{ολ}}{m_a}$$

Η μάζα αδράνειας ορίζεται από τη σχέση:

$$m_a = \frac{F_{ολ}}{a}$$

Η μάζα αδράνειας και η μάζα βαρύτητας ενός σώματος είναι ίσες.

☆ **Μονάδα δύναμης** είναι το **1N** (Νιούτον)

Αν στην σχέση $F_{ολ} = m \cdot a$ θέσουμε $m = 1\text{kg}$ και $a = 1\text{m/s}^2$ προκύπτει: $1\text{N} = 1\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

1N ορίζεται ως η δύναμη που όταν ασκείται σε σώμα μάζας 1kg του προσδίδει επιτάχυνση 1m/s^2 .

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ

Ελεύθερη πτώση λέγεται η κίνηση που κάνει ένα σώμα όταν ενεργεί σ' αυτό μόνο το βάρος του.

Η ελεύθερη πτώση είναι κίνηση κατακόρυφη ομαλά επιτάχυνση που είναι η ίδια για όλα τα σώματα σε ένα τόπο και μεταβάλλεται από τόπο σε τόπο.

Η επιτάχυνση σώματος που πραγματοποιεί ελεύθερη πτώση λέγεται επιτάχυνση της βαρύτητας και συμβολίζεται g .

Η επιτάχυνση της βαρύτητας εξαρτάται: i) Από το γεωγραφικό πλάτος.

ii) Από το ύψος πάνω από την επιφάνεια της γης

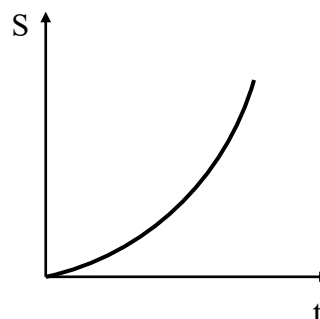
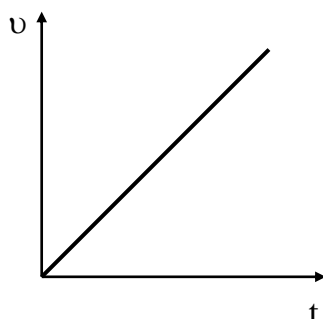
Όταν κινούμαστε από τον Ισημερινό προς τους πόλους η βαρυτική επιτάχυνση μεγαλώνει. Όταν απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια της Γης η βαρυτική επιτάχυνση μικραίνει.

Από τη σχέση $F_{ολ} = m \cdot a$ εάν θέσουμε όπου $F_{ολ} = B$ και $a = g$ προκύπτει **$B = m \cdot g$** .

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΠΤΩΣΗΣ

$$v = g \cdot t \quad \text{και} \quad S = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Διαγράμματα ταχύτητας – χρόνου και διαστήματος – χρόνου στην ελεύθερη πτώση.



ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΒΟΛΗ ΠΡΟΣ ΤΑ ΚΑΤΩ

Όταν ένα σώμα ρίχνεται από ύψος H κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα $\vec{u}_0$ και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, λέμε ότι κάνει **κατακόρυφη βολή προς τα κάτω**.

Η κατακόρυφη βολή προς τα κάτω είναι **κίνηση επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση** $\vec{a} = \vec{g}$

και ισχύουν οι σχέσεις: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{g} \cdot t$ και $\mathbf{y} = \mathbf{u}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot t^2$

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΒΟΛΗ ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΑΝΩ

Όταν ένα σώμα το ρίχνουμε προς τα πάνω με ταχύτητα $\vec{U}_0$ και δεχόμαστε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, τότε την κίνηση του σώματος τη λέμε **κατακόρυφη βολή προς τα πάνω**.

Στην κατακόρυφη βολή προς τα πάνω η επιτάχυνση $\vec{a} = -\vec{g}$ είναι πάντα αρνητική ενώ η ταχύτητα $\vec{u}$ είναι θετική όταν το σώμα ανεβαίνει και αρνητική όταν το σώμα κατεβαίνει, δηλαδή ισχύουν:

$$u = u_0 - g \cdot t$$

και

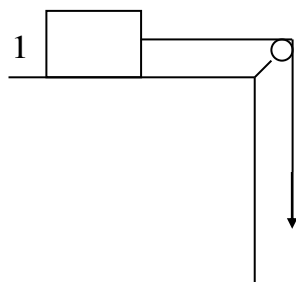
$$y = u_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

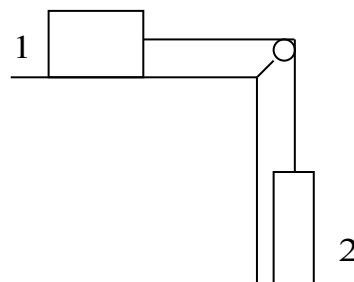
1. Σώμα μάζας $m_1 = 2 \text{ kg}$ βρίσκεται ακίνητο πάνω σε τραπέζι χωρίς τριβές. Το σώμα είναι δεμένο με νήμα που περνά από την τροχαλία στερεωμένη στην άκρη του τραπεζιού. Στην άλλη άκρη του νήματος α) εξασκείται δύναμη $F = 20 \text{ N}$ β) κρέμεται σώμα μάζας $m_2 = 3 \text{ kg}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήματα. Να υπολογιστεί:

- η επιτάχυνση του σώματος
- η τάση του νήματος και
- η μετατόπιση του σώματος σε 2sec

α)



β)



ΛΥΣΗ

α) Στο σώμα ασκούνται το βάρος του B_1 η κάθετη δύναμη F_K και η F που 0. Μεταφέρεται στο σώμα μέσω της τροχαλίας.

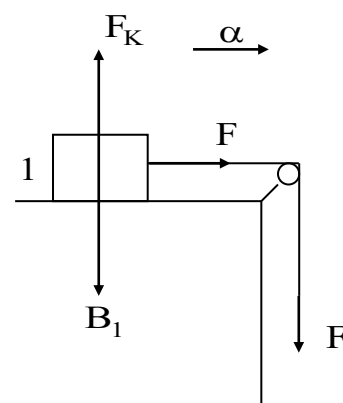
i) Το σώμα κινείται υπό την επίδραση της F

$$F = m_1 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m_1} \Rightarrow \alpha = \frac{20}{2} = 10 \text{ m/sec}^2$$

ii) Η τάση του νήματος είναι η F

iii) Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

$$x = \frac{1}{2} \alpha t^2 = x = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = 20 \text{ m}$$



β) Στο σώμα 1 ασκούνται το B_1 , η F και η τάση του νήματος T και στο 2 το βάρος του B_2 και η τάση T .

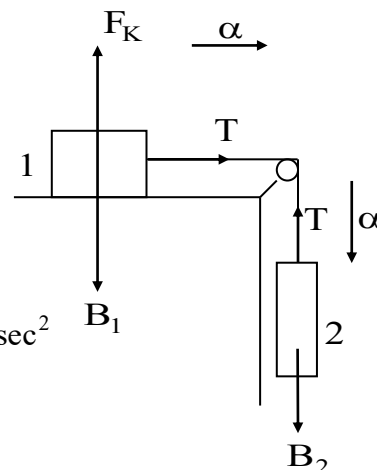
i) **Σώμα 2:** $\Sigma F = m_2 \alpha \Rightarrow B_2 - T = m_2 \alpha \Rightarrow T = m_2 g - m_2 \alpha$ (1)

Σώμα 1: Κινείται οριζοντίως από την επίδραση της T

$$T = m_1 \alpha$$
 (2)

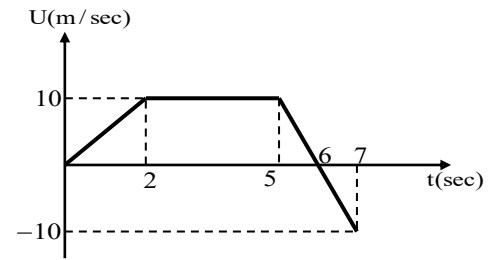
$$(1), (2) \Rightarrow m_2 g - m_2 \alpha = m_1 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \Rightarrow \alpha = \frac{3 \cdot 10}{2 + 3} = 6 \text{ m/sec}^2$$

ii) (2) $\Rightarrow T = 2 \cdot 6 = 12 \text{ N}$



$$\text{iii) } x = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2^2 = 12\text{m}$$

2. Σε σώμα μάζας $m = 1\text{kg}$ ασκείται οριζόντια δύναμη F που έχει μεταβλητό μέτρο. Το διάγραμμα της ταχύτητας με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε την ολική μετατόπιση $x_{\text{ολ}}$ και να κάνετε τα διαγράμματα $F(t)$ και $x(t)$



ΛΥΣΗ

0 – 2 sec: κίνηση ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη

$$x_1 = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10\text{m}$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{2} = 5\text{m/sec}^2$$

$$F_1 = m\alpha_1 = 1 \cdot 5 = 5\text{N}$$

2 – 5 sec: κίνηση ευθύγραμμη ομαλή

$$x_2 = 3 \cdot 10 = 30\text{m}$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$F_2 = m\alpha_2 = 0$$

5 – 6 sec: κίνηση ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη

$$x_3 = \frac{1 \cdot 10}{2} = 5\text{m}$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 10}{6 - 5} = -10\text{m/sec}^2$$

$$F_3 = m\alpha_3 = 1(-10) = -10\text{N}$$

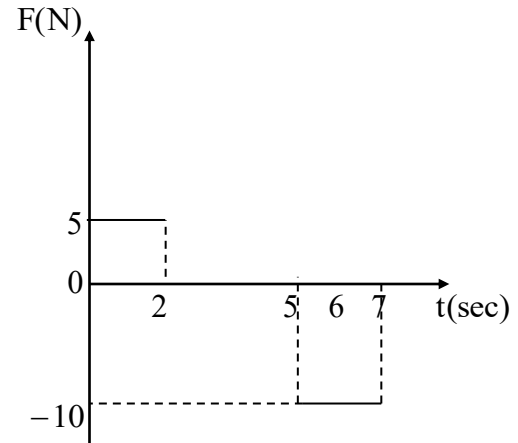
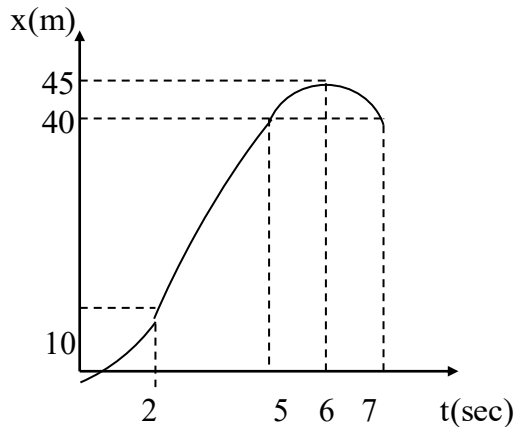
6 – 7 sec: κίνηση ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη

$$x_4 = \frac{1(-10)}{2} = -5\text{m}$$

$$\alpha_4 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-10 - 0}{7 - 6} = -10\text{m/sec}^2$$

$$F_4 = m\alpha_4 = 1(-10) = -10\text{N}$$

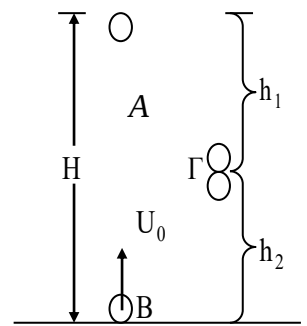
$$x_{\text{ολ}} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 + 30 + 5 - 5 = 40\text{m}$$



3. Από ύψος $H=100\text{m}$ αφήνουμε ένα σώμα να πέσει ελεύθερα. Από το έδαφος και στην ίδια κατακόρυφη εκτοξεύουμε ταυτόχρονα ένα άλλο σώμα προς τα πάνω με $v_0=50\text{ m/sec}$. Να βρείτε που και πότε θα συναντηθούν.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι θα συναντηθούν στο Γ σε χρόνο t .



Το πρώτο σώμα κάνει ελεύθερη πτώση, άρα σε χρόνο t έχει μετατοπιστεί κατά $h_1 = A\Gamma = \frac{1}{2}gt^2$.

Το δεύτερο σώμα κάνει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω.

$$\text{Άρα } h_2 = B\Gamma = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

Όμως

$$H = h_1 + h_2 \Rightarrow H = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow H = v_0t \Rightarrow t = \frac{H}{v_0} \Rightarrow t = \frac{100}{50} = 2 \text{ sec}$$

$$\text{Τότε } h_1 = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2}10 \cdot 2^2 = 20 \text{ m}$$

Δηλαδή θα συναντηθούν $100 - 20 = 80 \text{ m}$ από το έδαφος.

4. Μελέτη της κατακόρυφης βολής προς τα πάνω

ΛΥΣΗ

Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα με ταχύτητα v_0 προς τα πάνω. Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

Για την ταχύτητα: $v = v_0 + at$

$$\text{και αν όπου } a \text{ θέσω το } -g \text{ θα έχω } \boxed{v = v_0 - gt} \quad (1)$$

Ενώ για την μετατόπιση ομοίως: $x = x_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

$$\text{και αν } x_0 = 0 \text{ τότε } \boxed{x = v_0t - \frac{1}{2}gt^2} \quad (2)$$

Χρόνος ανόδου: Όταν το σώμα φτάσει στο μέγιστο ύψος του τότε $v = 0$ και η (1) δίνει:

$$v = v_0 - gt \Rightarrow 0 = v_0 - gt_{av} \Rightarrow \boxed{t_{av} = \frac{v_0}{g}} \quad (3)$$

Μέγιστο ύψος: Αν στη (2) θέσω όπου t το t_{av} θα έχω $x = h_{\max}$. Άρα:

$$h_{\max} = v_0t_{av} - \frac{1}{2}gt_{av}^2 \stackrel{(3)}{=} v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 \Rightarrow \boxed{h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}} \quad (4)$$

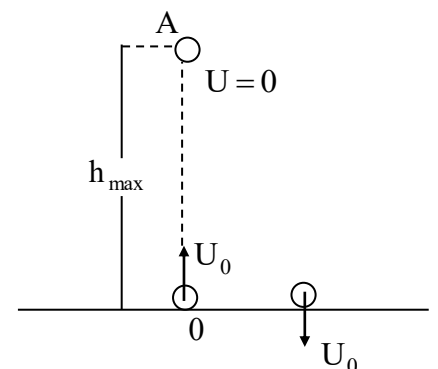
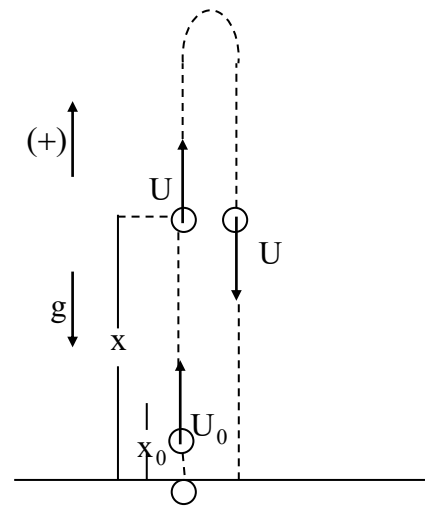
Χρόνος καθόδου: Απ' το Α στο 0 η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος $h_{\max}$. Άρα:

$$h_{\max} = \frac{1}{2}gt_{καθ.} \Rightarrow t_{καθ.} = \frac{v_0}{g} = t_{av}$$

Ολικός χρόνος από 0 → Α → 0:

$$t_{ολ.} = t_{av} + t_{καθ.} \Rightarrow t_{ολ.} = 2t_{av} \Rightarrow t_{ολ.} = \frac{2v_0}{g} \quad (5)$$

Ο τύπος (5) προκύπτει και ως εξής:



$$\text{Ισχύει } x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Όταν το σώμα φτάνει στο έδαφος τότε $x = 0$, άρα:

$$0 = v_0 t_{\text{ολ}} - \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 = 0$$

(αντιστοιχεί στη στιγμή που φεύγει το σώμα)

$$\text{ή } t_{\text{ολ}} = \frac{2v_0}{g} \quad (5) \text{ οπότε } t_{\text{καθ}} = t_{\text{ολ}} + t_{\text{αν}} \stackrel{(5),(3)}{=} \frac{v_0}{g} = t_{\text{αν}}$$

Ταχύτητα επιστροφής στο σημείο βολής: Αν στον τύπο $v = v_0 - gt$ θέσω όπου t το $t_{\text{ολ}}$ έχω

$$v = v_0 - g \frac{2v_0}{g} = -v_0 \quad (\text{ίδιο μέτρο αλά αντίθετη φορά με την ταχύτητα εκτόξευσης}).$$

Παρατηρήσεις:

- i) Όταν στον τύπο $v = v_0 - gt$ μετά από αντικατάσταση του t η ταχύτητα βγει αρνητική, αυτό σημαίνει ότι το σώμα κατεβαίνει.
- ii) Όταν $x < 0$ βρίσκουμε κάτω απ' το σημείο εκτόξευσης.

Γραφικές παραστάσεις $a(t)$, $v(t)$, $x(t)$ της κατακόρυφης βολής απ' το έδαφος με αρχική ταχύτητα v_0 .

