

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ

Τα φυσικά μεγέθη χωρίζονται σε θεμελιώδη και παράγωγα.

Τα θεμελιώδη δεν ορίζονται με τη βοήθεια κανενός άλλου φυσικού μεγέθους. π.χ. μήκος, μάζα κ.τ.λ.

Τα παράγωγα μεγέθη ορίζονται με τη βοήθεια άλλων θεμελιωδών φυσικών μεγεθών. π.χ. ταχύτητα, πυκνότητα κ.τ.λ.

Τα φυσικά μεγέθη χωρίζονται επίσης σε μονόμετρα (βαθμωτά) και διανυσματικά.

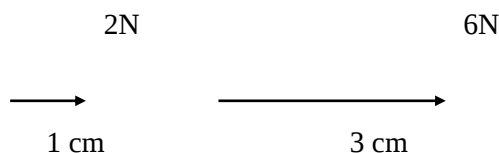
Μονόμετρο λέγεται το φυσικό μέγεθος που είναι πλήρως καθορισμένο αν είναι γνωστό το μέτρο του (αριθμητική τιμή και τη μονάδα μέτρησης).

Διανυσματικό λέγεται το φυσικό μέγεθος που είναι πλήρως καθορισμένο αν είναι γνωστό το μέτρο του, η διεύθυνση, η φορά και το σημείο εφαρμογής του.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Κάθε διανυσματικό μέγεθος περιγράφεται με ένα βέλος (διάνυσμα).

- Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το βέλος καθορίζει τη διεύθυνση.
- Η αιχμή του βέλους, τη φορά.
- Το μήκος του (σχεδιασμένο υπό κλίμακα), το μέτρο του.

π.χ.



Δύο διανύσματα είναι ίσα όταν έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση.

π.χ. $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ διανυσματική ισότητα
 $F_1 = F_2$ ισότητα μέτρων

Δύο διανύσματα είναι αντίθετα, αν έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση

π.χ. $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ διανυσματική ισότητα
 $F_1 = F_2$ ισότητα μέτρων

ΔΙΕΘΝΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΟΝΑΔΩΝ S.I.

Το S.I. είναι ένα σύστημα που περιλαμβάνει επτά θεμελιώδεις μονάδες και χρησιμοποιείται διεθνώς.

ΦΥΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

ΜΟΝΑΔΕΣ

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ	ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΣΥΜΒΟΛΟ
Μήκος	s, ℓ , d	Μέτρο	1 m
Μάζα	m	Χιλιόγραμμα	1 Kg
Χρόνος	t	Δευτερόλεπτο	1 sec
Ένταση ηλ. ρεύματος	I	Αμπέρ	1 A
Θερμοκρασία	T	Βαθμός Κέλβιν	1 K
Φωτεινή ένταση	Iv	Καντέλα	1 Cd
Ποσότητα ύλης	n	Μολ	1 mol

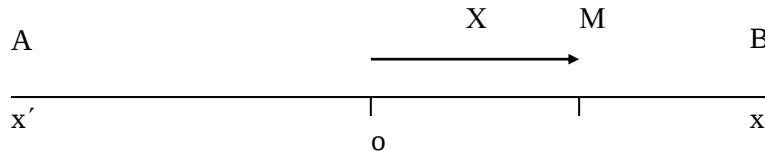
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Σημειακό αντικείμενο πάνω σε μια ευθεία

Έστω σημειακό αντικείμενο που βρίσκεται πάνω σε ευθεία AB. Αν την κατεύθυνση από το A στο B τη θεωρήσουμε αυθαίρετα σαν θετική και την παραστήσουμε μ' ένα βέλος λέμε τότε ότι η ευθεία είναι προσανατολισμένη. Το που βρίσκεται το σημειακό μας αντικείμενο προσδιορίζεται από τη συντεταγμένη του σημείου στο οποίο βρίσκεται το αντικείμενο.

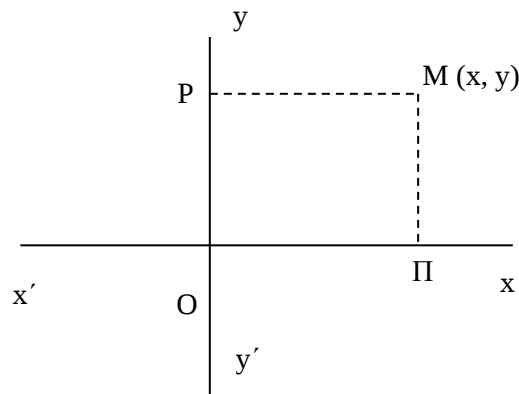
Η συντεταγμένη αυτή ονομάζεται θέση X του αντικειμένου.

Ο άξονας $x'ox$ αποτελεί σύστημα αναφοράς για σημειακά αντικείμενα που κινούνται σ' ευθεία



Σημειακό αντικείμενο πάνω σ' επίπεδο

Για σημειακό αντικείμενο που κινείται σ' επίπεδο παίρνουμε ως σύστημα αναφοράς σύστημα καθέτων ορθογωνίων αξόνων $x'ox$ και $y'oy$. Η θέση του σημειακού αντικειμένου προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο βρίσκεται το σημειακό αντικείμενο.



Κίνηση ενός αντικειμένου ονομάζεται η χρονική αλλαγή της θέσης του ως προς ένα σύστημα αναφοράς.

Υλικό σημείο (ή σημειακό αντικείμενο) ονομάζεται κάθε αντικείμενο που έχει τόσο μικρές διαστάσεις ώστε να μπορούμε να τις θεωρούμε ασήμαντες και επομένως μπορεί να αγνοηθεί το ενδεχόμενο μιας ιδιαίτερης κίνησης (π.χ. περιστροφική).

Το σύνολο των διαδοχικών θέσεων, από τις οποίες περνάει κινούμενο ένα σημειακό αντικείμενο, σχηματίζουν μια συνεχή γραμμή που τη λέμε τροχιά της κίνησης.

Όταν η τροχιά είναι ευθεία η κίνηση χαρακτηρίζεται ως ευθύγραμμη.

Όταν η τροχιά είναι καμπύλη η κίνηση χαρακτηρίζεται ως καμπυλόγραμμη (στην ειδική περίπτωση που η τροχιά αποτελεί περιφέρεια κύκλου η κίνηση χαρακτηρίζεται κυκλική).

Εξισώσεις κίνησης είναι οι χρονικές συναρτήσεις των συντεταγμένων του κινητού (δηλαδή οι εξισώσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες του με το χρόνο).

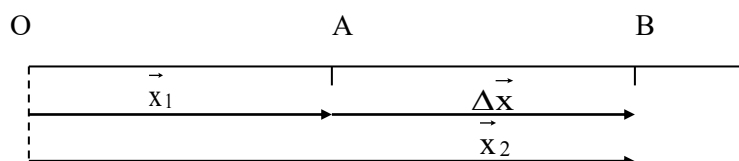
Αν η κίνηση γίνεται σε ευθεία, τότε η εξίσωση κίνησης είναι μία: $x = x(t)$.

Αν η κίνηση γίνεται σε επίπεδο τότε οι εξισώσεις κίνησης είναι δύο $x = x(t)$ και $y = y(t)$.

Όταν λέμε ότι η κίνηση είναι σχετική εννοούμε ότι η κίνηση ενός αντικειμένου περιγράφεται πάντοτε σε σχέση με ορισμένο σύστημα αναφοράς. Αν αλλάξουμε το σύστημα αναφοράς, τότε η κίνηση θα περιγραφεί με διαφορετικές εξισώσεις και θα εμφανίζει διαφορετική τροχιά.

Η μετατόπιση σ' ένα χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι ένα διάνυσμα, που έχει αρχή τη θέση Α του κινητού τη χρονική στιγμή t_1 και τέλος τη θέση Β, στην οποία βρίσκεται το κινητό τη χρονική στιγμή t_2 .

Ισχύει: $\vec{\Delta x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$



Θετική μετατόπιση σημαίνει ότι, η κατεύθυνση της κίνησης είναι προς τα θετικά του άξονα των συντεταγμένων ($x_2 > x_1$).

Αρνητική μετατόπιση σημαίνει ότι, η κατεύθυνση της κίνησης είναι προς τα αρνητικά του άξονα των συντεταγμένων ($x_2 < x_1$).

Διάστημα που διατρέχει ένα κινητό, είναι το μήκος της τροχιάς που διαγράφει

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ – ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

1. Διανυσματικό μέγεθος
2. Εξαρτάται από την αρχική και τελική θέση και είναι ανεξάρτητη της τροχιάς του κινητού
3. Η αλγεβρική της τιμή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική

ΔΙΑΣΤΗΜΑ

1. Μονόμετρο μέγεθος
2. Εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το κινητό
3. Είναι πάντα ένας θετικός αριθμός

Ταχύτητα (υ) είναι ένα φυσικό μέγεθος που εκφράζει πόσο γρήγορα κινείται ένα σώμα.

Η ταχύτητα ορίζεται ως προς το πηλίκο του διαστήματος (s) που διανύει το κινητό προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια.(t).

$$\text{Ταχύτητα } (v) = \frac{\text{Διάστημα } (s)}{\text{Χρόνος } (t)}$$

☆ Μονάδα ταχύτητας είναι το $1\text{m} / \text{s}$

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΗ

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ονομάζουμε την κίνηση στην οποία η ταχύτητα του κινητού είναι σταθερή κατά μέτρο και κατεύθυνση δηλαδή $\vec{v} = \text{σταθερή}$.

Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση σε **ίσα χρονικά διαστήματα** αντιστοιχούν **ίσες μετατοπίσεις**.

Η ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ορίζεται ως το σταθερό πηλίκο της μετατόπισης του κινητού προς τη χρονική διάρκεια που απαιτήθηκε για την μετατόπιση αυτή: $\vec{v} = \frac{\vec{\Delta x}}{\Delta t}$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{\text{τελ.}} - x_{\text{αρ.}}}{t_{\text{τελ.}} - t_{\text{αρ.}}}$$

Εάν $x_{\text{τελ.}} > x_{\text{αρ.}}$, τότε η ταχύτητα έχει θετική τιμή

Εάν $x_{\text{τελ.}} < x_{\text{αρ.}}$, τότε η ταχύτητα έχει αρνητική τιμή

Εξίσωση κίνησης στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Στην εξίσωση ορισμού της ταχύτητας $v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ (1) παίρνουμε $t_1 = t_0$ την αρχή μέτρησης του χρόνου και

$t_2 = t$ μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $x_1 = x_0$ για τη θέση στην αρχική στιγμή t_0 . Η θέση τη στιγμή t είναι $x_2 = x$

$$(1) \Rightarrow v = \frac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow x - x_0 = v \cdot (t - t_0) \Rightarrow x = x_0 + v \cdot (t - t_0) \quad \text{Εξίσωση κίνησης στην}$$

ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

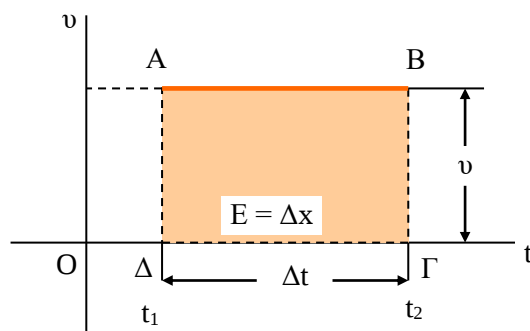
Αν πάρουμε $t_0 = 0$ τότε η εξίσωση γράφεται $x = x_0 + v \cdot t$

Αν πάρουμε $x_0 = 0$ τότε η εξίσωση γράφεται $x = v \cdot t$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΗ

Διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου (v, t)

Επειδή η ταχύτητα είναι σταθερή το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου (v, t) θα είναι ευθεία γραμμή παράλληλη στον άξονα t.



Από το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου προκύπτει ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα του χρόνου είναι σε κάθε στιγμή ίσο με το γινόμενο $v \cdot \Delta t$, δηλαδή είναι ίσο με τη μετατόπιση. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει και αναλυτικά ως ακολούθως:

$$E = \text{Εμβαδόν (ABΓΔ)} = (\text{ΑΔ}) \cdot (\text{ΔΓ}) = v \cdot (t_2 - t_1) = v \cdot \Delta t \stackrel{v = \Delta x / \Delta t}{\Rightarrow} E = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta t \quad \text{ή}$$

$$\text{Εμβαδόν} = E = \Delta x$$

Το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης ταχύτητας – χρόνου και του άξονα των χρόνων είναι ίσο αριθμητικά με τη μετατόπιση. Το συμπέρασμα αυτό είναι πολύ σημαντικό, γιατί ισχύει σε κάθε διάγραμμα (v, t) είτε η ταχύτητα είναι σταθερή, είτε όχι.

Διάγραμμα θέσεως – χρόνου (x, t)

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κίνησης: $x = x_0 + vt$ ($t_0 = 0$)

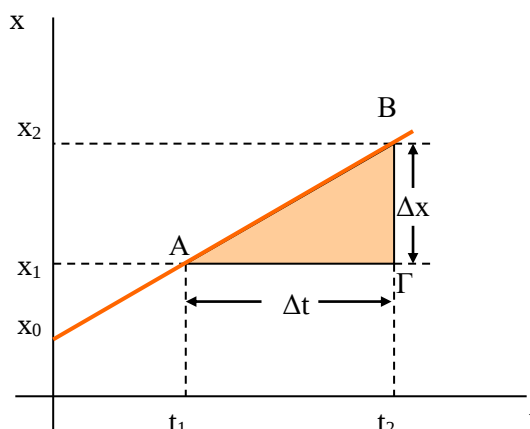
Η παραπάνω εξίσωση είναι πρωτοβάθμια. Επομένως το διάγραμμα (x, t) θα είναι ευθεία γραμμή.

Αν πάρουμε $x_0 = 0$, τότε η εξίσωση κίνησης γράφεται: $x = v \cdot t$ και παριστάνει ευθεία γραμμή που περνάει από την αρχή των αξόνων.

Ας θεωρήσουμε ότι τη στιγμή t_1 το κινητό βρίσκεται στη θέση x_1 και τη στιγμή t_2 βρίσκεται στη θέση x_2 . Οι κάθετες πλευρές του σκιασμένου τριγώνου έχουν μήκη $\Delta x = x_2 - x_1$ και $\Delta t = t_2 - t_1$ αντίστοιχα. Η μέση ταχύτητα στην

ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα και ορίζεται από τη σχέση: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (1)

Η κλίση της ευθείας ορίζεται σαν το πηλίκο της μεταβλητής Δx προς τη μεταβλητή Δt : $\text{κλίση} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$



Επομένως, η κλίση του διαγράμματος (x, t) στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι ίση αριθμητικά με την ταχύτητα.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ ΜΕ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Μέση αριθμητική ταχύτητα ενός κινητού ($\vec{v}$) ονομάζεται το πηλίκο του διαστήματος που διέτρεξε το κινητό, σε ορισμένη χρονική διάρκεια, προς αυτή τη χρονική διάρκεια.

$$\vec{v} = \frac{S_{ολ}}{t_{ολ}}$$

Μέση διανυσματική ταχύτητα ενός κινητού ($\vec{v}_μ$) ονομάζεται το πηλίκο της μετατόπισης του κινητού σε ορισμένη χρονική διάρκεια, προς τη χρονική διάρκεια.

$$\vec{v}_μ = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$$

Η στιγμιαία ταχύτητα κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με μεταβλητή ταχύτητα, είναι ίση με την κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην γραφική παράσταση θέσεως – χρόνου τη συγκεκριμένη στιγμή.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στην περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης η στιγμιαία και η μέση ταχύτητα συμπίπτουν.

Το φυσικό μέγεθος που αποδίδει το πόσο γρήγορα πραγματοποιούνται μεταβολές στην ταχύτητα ενός κινητού ονομάζεται **επιτάχυνση** του κινητού α και ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής ταχύτητας που συνέβη σε κινητό σε μια χρονική διάρκεια κίνησης, προς αυτή τη χρονική διάρκεια.

$$\text{επιτάχυνση } (\alpha) = \frac{\text{Μεταβολή ταχύτητας } (\Delta v)}{\text{Αντίστοιχη χρονική διάρκεια } (\Delta t)}$$

☆ Μονάδα επιτάχυνσης 1 m/s^2

Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη, ονομάζεται η ευθύγραμμη κίνηση στην οποία η επιτάχυνση παραμένει σταθερή κατά μέτρο και κατεύθυνση.

Στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση το κινητό εμφανίζει **ίσες μεταβολές ταχύτητας σε ίσες χρονικές διάρκειες**.

Επιταχυνόμενη λέγεται η κίνηση στην οποία η ταχύτητα αυξάνεται.

Επιβραδυνόμενη λέγεται η κίνηση στην οποία η ταχύτητα μειώνεται.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Εξίσωση ταχύτητας - χρόνου ($v - t$)

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης παίρνουμε : $\alpha = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

- Θεωρούμε ότι για $t_1 = t_0$ η αρχική ταχύτητα είναι $v_1 = v_0$ και σε οποιαδήποτε κατοπινή χρονική στιγμή $t_2 = t$ η ταχύτητα είναι $v_2 = v$.

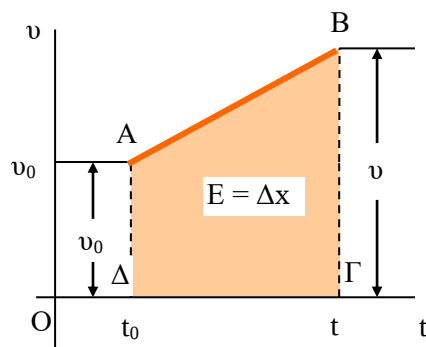
Η παραπάνω εξίσωση γράφεται: $\alpha = \frac{v - v_0}{t - t_0} \Rightarrow v - v_0 = \alpha \cdot (t - t_0) \Rightarrow v = v_0 + \alpha \cdot (t - t_0)$

- Αν δεχθούμε ότι $t_0 = 0$, τότε η σχέση γίνεται:

$$\boxed{v = v_0 + \alpha t} \quad \text{Ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση}$$

Εξίσωση θέσεως - χρόνου ($x - t$)

Η συνολική μετατόπιση Δx είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.



Συνεπώς ισχύει: $\Delta x = E_{ABGD} = \frac{(A\Delta) + (B\Gamma)}{2} \cdot (\Gamma\Delta)$, όπου $(A\Delta) = v_0$, $(B\Gamma) = v$, $(\Gamma\Delta) = t - t_0 = \Delta t$

Οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται: $\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \Delta t \quad (1)$

Αντικαθιστώντας $v = v_0 + \alpha \Delta t$, παίρνουμε:

$$\Delta x = \frac{v_0 + v_0 + \alpha \Delta t}{2} \cdot \Delta t = \frac{2v_0 + \alpha \Delta t}{2} \cdot \Delta t = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \cdot (\Delta t)^2 \quad \text{ή}$$

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2 \Rightarrow x - x_0 = v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha \cdot (t - t_0)^2 \quad \text{ή}$$

$$\Delta x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha \cdot (t - t_0)^2$$

Αν συμφωνήσουμε ότι σε $t_0 = 0$ είναι $x_0 = 0$, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} \cdot \alpha t^2$$

Εξίσωση κίνησης στην

ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

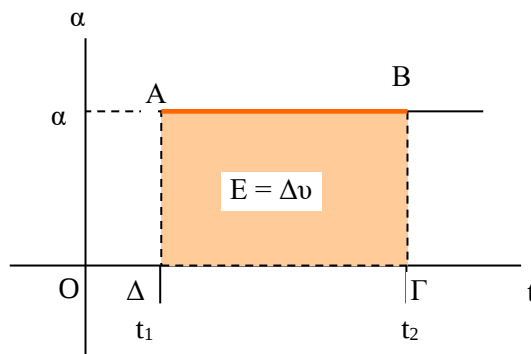
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου

Η επιτάχυνση του κινητού είναι σταθερή. Επομένως, το διάγραμμα (a, t) είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των χρόνων. Το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης (a, t) και του άξονα των χρόνων είναι:

$$E = (A\Delta) \cdot (\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \Delta t \quad \alpha = \Delta v / \Delta t \Rightarrow E = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta t = \Delta v$$

Επομένως, το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης (a, t) και του άξονα των χρόνων είναι ίσο αριθμητικά με τη μεταβολή της ταχύτητας. $\rightarrow E = \Delta v$



Διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου

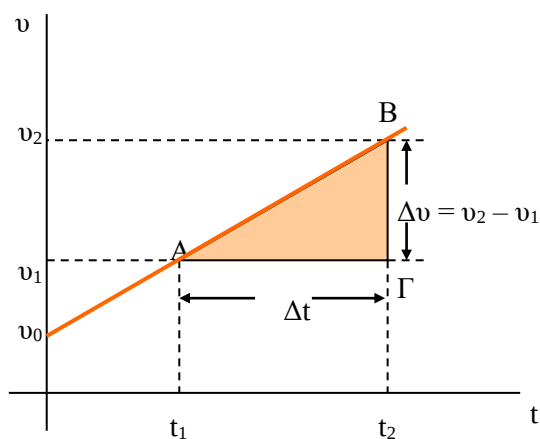
Η ταχύτητα του κινητού δίνεται από τη σχέση: $v = v_0 + \alpha t$

Επειδή η εξίσωση $v = f(t)$ είναι πρωτοβάθμια, το διάγραμμα (v, t) είναι ευθεία γραμμή. Όπως έχουμε προαναφέρει, το εμβαδόν μεταξύ του διαγράμματος (v, t) και του άξονα των χρόνων είναι ίσο αριθμητικά με τη μετατόπιση.

Η **κλίση** $\Delta v / \Delta t$ του διαγράμματος (v, t) είναι ίση αριθμητικά με την επιτάχυνση.

Η **μέση επιτάχυνση** συμπίπτει με τη στιγμιαία επιτάχυνση.

$$\text{κλίση} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \alpha = \text{επιτάχυνση} \quad , \quad \text{Εμβαδόν} = E = \Delta x = \text{μετατόπιση}$$

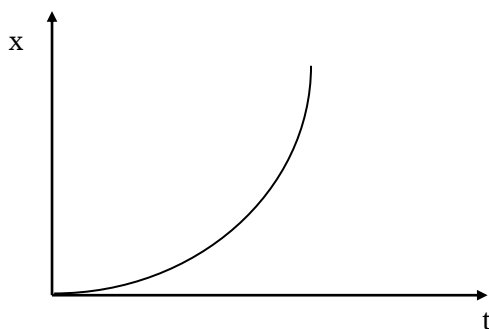


Διάγραμμα θέσεως – χρόνου

Η θέση του κινητού δίνεται από την εξίσωση: $x = v_0 t + \frac{1}{2} \cdot \alpha t^2$ ($t_0 = 0, x_0 = 0$)

Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς t .

Η γραφική παράσταση (x, t) είναι παραβολή.



ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΕΠΙΒΡΑΔΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Εξισώσεις κίνησης στην ευθύγραμμη ομαλή επιβραδυνόμενη κίνηση:

$$v = v_0 - \alpha t$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} \cdot \alpha t^2$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΗ

Συνάντηση – Τρόπος Εργασίας

1. Παίρνουμε τον άξονα x πάνω στην τροχιά των κινητών. Ορίζουμε την αρχή και τη θετική κατεύθυνση του άξονα και επιλέγουμε την αρχή μέτρηση των χρόνων. Αυτές οι επιλογές γίνονται με όποιο τρόπο μας διευκολύνει. Συνήθως παίρνουμε το ένα κινητό ώστε σε $t_0 = 0$ να έχει $x_0 = 0$. Κατασκευάζουμε ένα σχήμα στο οποίο να φαίνονται οι αρχικές θέσεις και οι θέσεις σε μια τυχαία χρονική στιγμή.
2. Εφαρμόζουμε την εξίσωση της κίνησης $x = x_0 + v \cdot (t - t_0)$ για καθένα από τα δύο κινητά:

$$\text{Πρώτο κινητό:} \quad x_1 = x_{01} + v_1 \cdot (t - t_{01}) \quad (1)$$

$$\text{Δεύτερο κινητό:} \quad x_2 = x_{02} + v_2 \cdot (t - t_{02}) \quad (2)$$

3. Τη στιγμή που τα δύο κινητά συναντώνται, θα έχουν τις ίδιες συντεταγμένες.
Δηλαδή θα ισχύει: $x_1 = x_2$ (3)
Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1) και (2) και (3), προσδιορίζουμε το άγνωστο μέγεθος. Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τα πρόσημα των ταχυτήτων και των συντεταγμένων της θέσης.

Διαγράμματα – Τρόπος Εργασίας

1. Από το διάγραμμα (v, t) στο διάγραμμα (x, t)

Μπορούμε να προσδιορίσουμε το εμβαδόν E μεταξύ του διαγράμματος (v, t) και του άξονα t σε οποιαδήποτε φάση της κίνησης. Το εμβαδόν αυτό είναι ίσο αριθμητικά με τη μετατόπιση Δx :

$$\text{Εμβαδόν } E = \Delta x \Rightarrow \Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$$

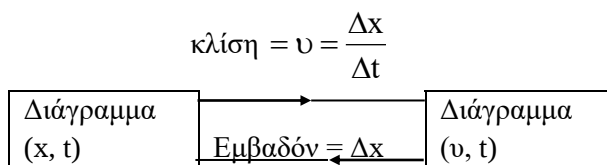
Αν γνωρίζουμε την αρχική θέση x_0 , μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση $x = x_0 + \Delta x$ σε οποιαδήποτε στιγμή και με τη βοήθεια των τιμών (x, t) να κατασκευάσουμε το διάγραμμα (x, t) .

2. Από το διάγραμμα (x, t) στο διάγραμμα (v, t)

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ταχύτητα σε κάθε φάση της κίνησης από τη σχέση: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Η μέση ταχύτητα συμπίπτει με τη στιγμιαία στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Γνωρίζοντας την ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή, μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα (v, t) .



ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Τρόπος Εργασίας

Μελέτη της κίνησης ενός κινητού που κινείται με σταθερή επιτάχυνση

1. Επιλέγουμε σαν άξονα x την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το αντικείμενο. Στη συνέχεια επιλέγουμε την αρχή του άξονα, τη θετική φορά και την αρχή μέτρησης του χρόνου. Μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε σημείο σαν αρχή του άξονα και οποιαδήποτε φορά σαν θετική. Συνήθως είναι βολικότερο να επιλέξουμε ότι το κινητό βρίσκεται στην αρχή του άξονα τη στιγμή $t_0 = 0$. Δηλαδή επιλέγουμε $x_0 = 0$ για $t_0 = 0$.

2. Σχεδιάζουμε ένα σχήμα, στο οποίο φαίνεται η αρχική θέση, η αρχική ταχύτητα, η τελική θέση, η τελική ταχύτητα και η επιτάχυνση.

3. Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις:

$$v = v_0 + at \quad (1)$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} \cdot at^2 \quad (2)$$

Τα πρόσημα των μεγεθών v_0 , v , a και x καθορίζονται από την κατεύθυνση των μεγεθών αυτών σε σχέση με τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Όσα έχουν την κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα x , έχουν θετικό πρόσημο, ενώ όσα έχουν την κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα έχουν αρνητικό πρόσημο. Δηλαδή η επιλογή της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x , καθορίζει και τα πρόσημα της θέσης x , της ταχύτητας v και της επιτάχυνσης a .

4. Καταγράφουμε τα μεγέθη που δίνονται, που ζητούνται και τις πληροφορίες που προκύπτουν από τα δεδομένα του προβλήματος.

Π.χ.: α) Όταν ξεκινάει ένα αρχικά σταματημένο αυτοκίνητο, θα είναι $v_0 = 0$.

β) Όταν ο οδηγός ενός αυτοκινήτου πατάει φρένο και το αυτοκίνητο τελικά σταματάει θα είναι $v = 0$.

γ) Όταν ζητείται η θέση του αυτοκινήτου, τότε ζητείται η συντεταγμένη x .

5. Οι εξισώσεις (1) και (2) περιέχουν πέντε φυσικά μεγέθη: v_0 , a , t , v , και x . Επομένως, μπορούμε να βρούμε οποιαδήποτε δύο από αυτά τα πέντε μεγέθη, αν είναι γνωστά τα υπόλοιπα τρία. Αν μια από τις δύο εξισώσεις περιέχει έναν άγνωστο, τότε λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς τον άγνωστο. Αν σε κάθε εξίσωση περιέχονται δύο άγνωστοι, τότε χρειάζεται να λύσουμε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Διαγράμματα – Τρόπος Εργασίας

1. **Διάγραμμα $(a, t) \rightarrow$** Η επιτάχυνση είναι σταθερή. Επομένως η γραφική παράσταση (a, t) είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα t . Αν $a = 0$ η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή και η γραφική παράσταση (a, t) συμπίπτει με τον άξονα t .

2. **Διάγραμμα $(v, t) \rightarrow$** Η εξίσωση $v = v_0 + at \quad (t_0 = 0) \quad (1)$ είναι εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς t

και επομένως, η γραφική παράσταση (v, t) είναι ευθεία γραμμή. Αν $a = 0$ η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή, οπότε η γραφική παράσταση (v, t) είναι ευθεία παράλληλη προς τον άξονα t .

3. **Διάγραμμα $(x, t) \rightarrow$** Η εξίσωση $x = v_0 t + \frac{1}{2} \cdot at^2 \quad (t_0 = 0, x_0 = 0) \quad (2)$ είναι εξίσωση δευτέρου

βαθμού ως προς t . Η γραφική παράσταση (x, t) είναι παραβολή, η οποία έχει το κοίλο μέρος τα πάνω, αν η επιτάχυνση είναι θετική και προς τα κάτω, αν η επιτάχυνση είναι αρνητική. Αν $a = 0$ η εξίσωση (2) γράφεται $x = vt$ και η γραφική παράσταση (x, t) είναι ευθεία γραμμή.

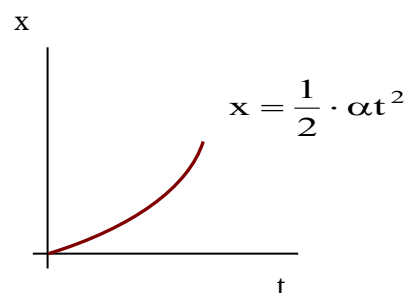
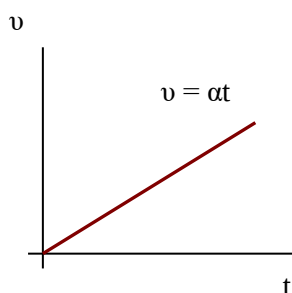
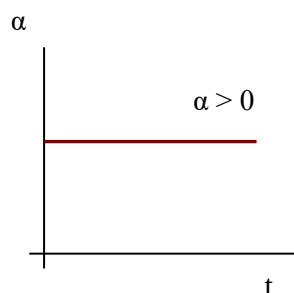
Διαγράμματα (a, t) , (v, t) , (x, t)

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Η αρχική ταχύτητα είναι ίση με μηδέν ($v_0 = 0$)

Οι εξισώσεις (1) και (2) γράφονται:

$$v = at \quad \text{και} \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} \cdot at^2 \quad (t_0 = 0, x_0 = 0)$$



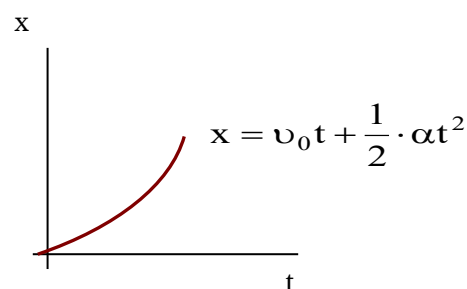
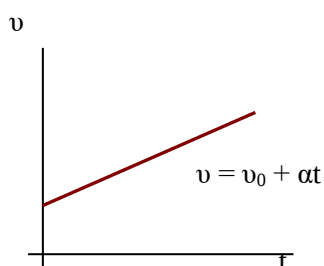
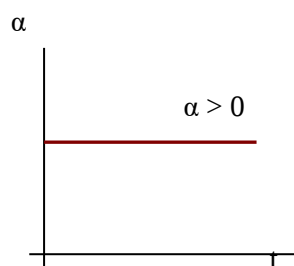
β) Η αρχική ταχύτητα δεν είναι μηδέν ($v_0 > 0$)

Είναι

$$v = v_0 + at \quad \text{και} \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} \cdot at^2 \quad (t_0 = 0, x_0 = 0)$$

Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

i) Η επιτάχυνση είναι θετική



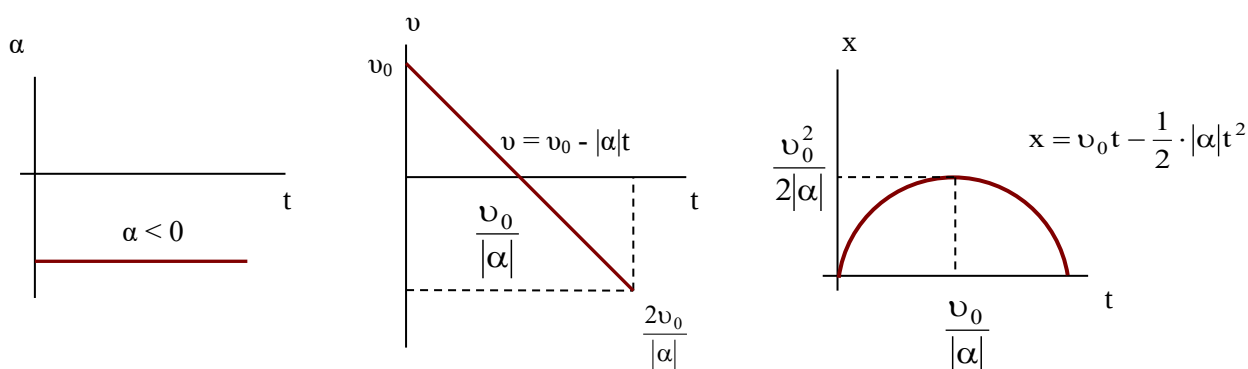
ii) Η επιτάχυνση είναι αρνητική

Η ταχύτητα και η θέση δίνονται από τις εξισώσεις:

$$v = v_0 + at \quad \text{και} \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} \cdot at^2, \quad a < 0 \quad \text{ή}$$

$$v = v_0 - |a|t \quad \text{και} \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} \cdot |a|t^2, \quad a < 0 \quad (t_0 = 0, x_0 = 0)$$

Η κίνηση ονομάζεται ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με αρνητική επιτάχυνση ή ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.



Κλίση – Εμβαδόν

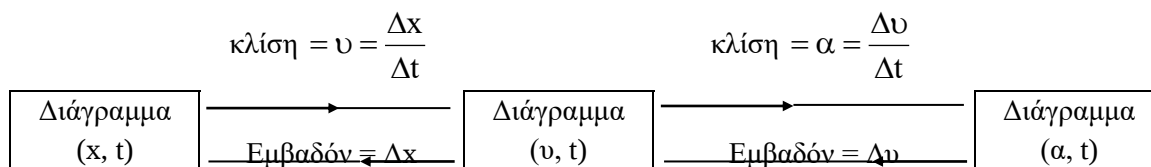
α) Η κλίση της γραφικής παράστασης ταχύτητας – χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση είναι ίση αριθμητικά με την επιτάχυνση του κινητού. $\rightarrow$ κλίση = $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \alpha$ (1)

β) Η κλίση της γραφικής παράστασης θέσης – χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι ίση με την ταχύτητα του κινητού. $\rightarrow$ κλίση = $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$ (2)

γ) Το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση ταχύτητας – χρόνου και στον άξονα των χρόνων είναι ίσο αριθμητικά με τη μετατόπιση του κινητού. $\rightarrow$ $E = \Delta x$ (3)

δ) Το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στη γραφική παράσταση επιτάχυνσης – χρόνου και στον άξονα των χρόνων είναι ίσο αριθμητικά με τη μεταβολή της ταχύτητας του κινητού. $\rightarrow$ $E = \Delta v$ (4)

Οι εξισώσεις $E = \Delta x$ και $E = \Delta v$ χρησιμοποιούνται σε οποιαδήποτε ευθύγραμμη κίνηση είτε η επιτάχυνση είναι σταθερή είτε όχι.



Αν δοθεί ένα από τα τρία διαγράμματα (α, t), (v, t), ή (x, t), τότε χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους (1), (2), (3) και (4), μπορούμε να υπολογίσουμε τα μεγέθη α, v και x σε κάθε χρονική στιγμή και να κατασκευάσετε τα υπόλοιπα διαγράμματα.

Η κίνηση αποτελείται από πολλές φάσεις

Αν δίνεται ένα από τα τρία διαγράμματα (α, t), (v, t), ή (x, t), ενός κινητού, το οποίο κινείται σε ευθεία και η κίνησή του αποτελείται από πολλές φάσεις, στις οποίες η επιτάχυνση μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν, τότε, για να σχεδιάσουμε τα υπόλοιπα διαγράμματα, εργαζόμαστε ως εξής:

α) Προσδιορίζουμε τα μεγέθη α, v, x σε κάθε φάση της κίνησης χρησιμοποιώντας την κλίση ή το εμβαδόν ανάμεσα στο διάγραμμα που μας έχει δοθεί και τον άξονα των χρόνων.

β) Με τη βοήθεια των τιμών που βρήκαμε, προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα σημεία που αντιστοιχούν στην αρχή και στο τέλος κάθε φάσης της κίνησης.

γ) Ενώνουμε τα σημεία που αντιστοιχούν στην αρχή και στο τέλος κάθε κίνησης ως εξής:

Διάγραμμα (α, t).

Αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στον άξονα των χρόνων. Αν η επιτάχυνση είναι θετική, τότε το αντίστοιχο τμήμα του διαγράμματος βρίσκεται πάνω από τον άξονα t, αν είναι αρνητική βρίσκεται κάτω από τον άξονα t, και αν είναι μηδέν βρίσκεται πάνω στον άξονα t.

Διάγραμμα (υ, t).

Αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα. Επομένως, θα ενώσουμε με ευθύγραμμα τμήματα τα σημεία που αντιστοιχούν στην αρχή και στο τέλος κάθε φάσης.

Διάγραμμα (x, t).

Αν η επιτάχυνση είναι θετική, τότε το διάγραμμα στην αντίστοιχη φάση είναι καμπύλη με τα κοίλα προς τα πάνω. Αν είναι αρνητική, τότε το διάγραμμα είναι καμπύλη με τα κοίλα προς τα κάτω, και αν είναι μηδέν, είναι ευθύγραμμο τμήμα.

Συνάντηση – Τρόπος Εργασίας

1. Παίρνουμε σαν άξονα x την ευθεία πάνω στην οποία κινούνται τα αντικείμενα. Στη συνέχεια επιλέγουμε τη θετική φορά, την αρχή του άξονα και την αρχή του χρόνου.
2. Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο για κάθε κίνηση. Αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οι εξισώσεις είναι:

$$x = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (t - t_0)^2 \quad (1)$$

$$v = v_0 + \alpha \cdot (t - t_0) \quad (2)$$

Αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή, τότε περιγράφεται από την εξίσωση:

$$x = x_0 + v \cdot (t - t_0) \quad (3)$$

3. Τη στιγμή που τα δύο κινητά συναντώνται θα βρίσκονται στην ίδια θέση και επομένως, θα έχουν ίσες συντεταγμένες. Δηλαδή θα ισχύει: $x_1 = x_2$, όπου οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στο πρώτο και στο δεύτερο κινητό αντίστοιχα

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δύο πεζοπόροι κινούνται στον ίδιο ευθύ δρόμο με σταθερές ταχύτητες που έχουν μέτρα 5 km/h και 3 km/h αντίστοιχα. Σε κάποια στιγμή περνούν από τις θέσεις Α και Β, οι οποίες απέχουν απόσταση $d = (AB) = 12$ km.
 - α) Που και πότε θα συναντηθούν οι πεζοπόροι, αν κινούνται με την ίδια κατεύθυνση;
 - β) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα της απόστασης κάθε πεζοπόρου από το σημείο Α σε συνάρτηση με το χρόνο.
 - γ) Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα, αν οι πεζοπόροι κινούνται με αντίθετες κατευθύνσεις.

ΛΥΣΗ

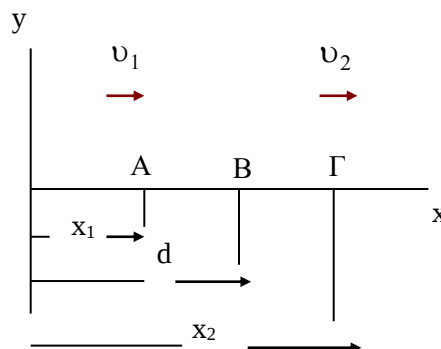
Παίρνουμε τον άξονα x πάνω στην ευθεία ΑΒ με αρχή τη θέση Α και θετική φορά από το σημείο Α προς το σημείο Β. Σαν αρχή μέτρησης του χρόνου παίρνουμε τη χρονική στιγμή που οι πεζοπόροι περνούν από τις θέσεις Α και Β αντίστοιχα.

Η εξίσωση (1) για κάθε πεζοπόρο διαμορφώνεται ως εξής:

Πρώτος πεζοπόρος: Ο πρώτος πεζοπόρος περνάει από τη θέση $x_0 = 0$ τη στιγμή $t_0 = 0$ και κινείται με ταχύτητα $v_1 = 5 \text{ km/h}$.

Η εξίσωση (1) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + (5 \text{ km/h}) t \\ x_1 &= 5t \end{aligned} \quad (2)$$



Δεύτερος πεζοπόρος: Ο δεύτερος πεζοπόρος περνάει από τη θέση $x_0 = (AB) = 12 \text{ km}$, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και κινείται με ταχύτητα $v_2 = 3 \text{ km/h}$. Η εξίσωση (1) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} x_2 &= 12 \text{ km} + (3 \text{ km/h}) t \\ x_2 &= 12 + 3t \end{aligned} \quad (3)$$

Στις εξισώσεις (2) και (3) ο χρόνος μετρείται σε ώρες (h) και οι συντεταγμένες x_1, x_2 σε km.

α) Τη στιγμή που θα συναντηθούν οι πεζοπόροι, θα βρίσκονται στην ίδια θέση. Επομένως θα ισχύει: $x_1 = x_2$ (4)

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2) και (3) στην (4), παίρνουμε: $5t = 12 + 3t \Rightarrow 2t = 12 \Rightarrow t = 6 \text{ h}$

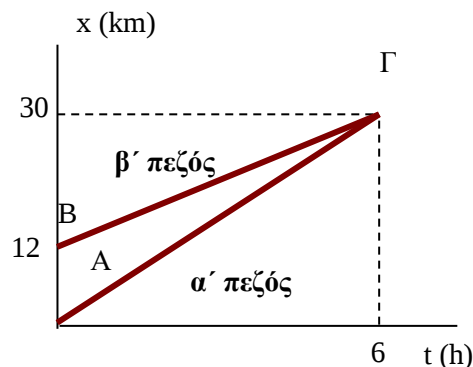
Αντικαθιστώντας $t = 6 \text{ h}$ στην εξίσωση (2), βρίσκουμε: $x_1 = 5 \cdot 6 \text{ km} = 30 \text{ km}$

$$(4) \Rightarrow x_2 = x_1 = 30 \text{ km}$$

Η τιμή $x_2 = 30 \text{ km}$ μπορεί να υπολογισθεί (επαληθευθεί) και από την εξίσωση (3).

β) **Διαγράμματα.** Η κίνηση κάθε πεζοπόρου είναι ευθύγραμμη ομαλή. Επομένως, η γραφική παράσταση θέσης – χρόνου για κάθε πεζοπόρο

είναι ευθεία γραμμή. Από τις εξισώσεις (2) και (3) προσδιορίζουμε τη θέση x στην αρχή και στο τέλος της κίνησης.



Πρώτος πεζοπόρος: Για $t_0 = 0$, $x_1 = 0$. Για $t = 6 \text{ h}$, $x_1 = 30 \text{ km}$. Προσδιορίζουμε τα σημεία $A(0,0)$ και $\Gamma(6 \text{ h}, 30 \text{ km})$ και τα ενώνουμε με ευθεία γραμμή.

Δεύτερος πεζοπόρος: Για $t_0 = 0$, $x_2 = 12 \text{ km}$. Για $t = 6 \text{ h}$, $x_2 = 30 \text{ km}$. Προσδιορίζουμε τα σημεία $B(0, 12 \text{ km})$ και $\Gamma(6 \text{ h}, 30 \text{ km})$ και τα ενώνουμε με ευθεία γραμμή.

Από την γραφική παράσταση (x, t) φαίνεται ότι τη στιγμή $t = 6 \text{ h}$ οι δύο πεζοπόροι βρίσκονται στην ίδια θέση Γ .

γ) Οι πεζοπόροι κινούνται με αντίθετες κατευθύνσεις. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο άξονα x με την ίδια αρχή μέτρησης του χρόνου. Η εξίσωση:

$$x = x_0 + vt \quad (5)$$

διαμορφώνεται ως εξής:

Πρώτος πεζοπόρος: Ο πρώτος πεζοπόρος περνάει από τη θέση $x_0 = 0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_1 = 5 \text{ km/h}$.

Η εξίσωση (5) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + (5 \text{ km/h}) \cdot t \quad \text{ή} \\ x_1 &= 5t \quad (6) \end{aligned}$$

Δεύτερος πεζοπόρος: Ο δεύτερος πεζοπόρος περνάει από τη θέση $x_0 = (AB) = 12 \text{ km}$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_2 = -3 \text{ km/h}$. Η εξίσωση (1) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} x_2 &= 12 \text{ km} + (-3 \text{ km/h}) \cdot t \quad \text{ή} \\ x_2 &= 12 - 3t \quad (7) \end{aligned}$$

Στις εξισώσεις (6) και (7) ο χρόνος μετριέται σε ώρες (h) και οι συντεταγμένες x_1, x_2 σε km

Τη στιγμή που θα συναντηθούν οι πεζοπόροι, θα βρίσκονται στην ίδια θέση και επομένως θα έχουν την ίδια τεταγμένη. Δηλαδή θα είναι: $x_1 = x_2$ (8)

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (6) και (7) στην (8), βρίσκουμε: $5t = 12 - 3t \Rightarrow 8t = 12 \Rightarrow t = 1,5 \text{ h}$

Αντικαθιστώντας $t = 1,5 \text{ h}$ στην εξίσωση (6), βρίσκουμε: $x_1 = 5 \cdot 1,5 \text{ km} = 7,5 \text{ km}$ (8) $\Rightarrow x_2 = x_1 = 7,5 \text{ km}$

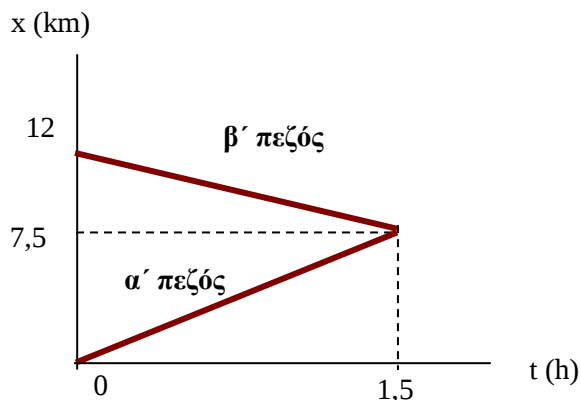
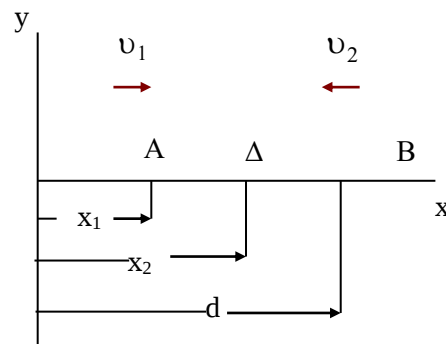
Γραφικές παραστάσεις. Προσδιορίζουμε τις θέσεις κάθε πεζοπόρου τις στιγμές $t_0 = 0$ και $t = 1,5 \text{ h}$ και τα σημεία

που αντιστοιχούν στην αρχική και τελική θέση για κάθε πεζοπόρο.

Πρώτος πεζοπόρος: Για $t_0 = 0, x_1 = 0$
Για $t = 1,5 \text{ h}, x_1 = 7,5 \text{ km}$

Δεύτερος πεζοπόρος: Για $t_0 = 0, x_2 = 12 \text{ km}$
Για $t = 1,5 \text{ h}, x_2 = 7,5 \text{ km}$

Προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα σημεία στο επίπεδο (x, t) για κάθε πεζοπόρο και τα ενώνουμε με ευθεία γραμμή.



Από το διάγραμμα (v, t) στο διάγραμμα (x, t) .

2. Ένα σώμα κινείται πάνω στον άξονα x . Η ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από το διάγραμμα του σχήματος. Τη στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$.

α) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα θέσης – χρόνου.

β) Να υπολογιστεί η μετατόπιση του σώματος από 0 έως 8 s.

γ) Να υπολογιστεί το διάστημα από 0 έως 8 s

δ) Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα στη διάρκεια:

i) Από 0 έως 8s

ii) Από 0 έως 6 s

ε) Σε ποια διάρκεια το σώμα ηρεμεί; κινείται προς τη θετική φορά; προς την αρνητική φορά του άξονα x; βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα; στον αρνητικό ημιάξονα;

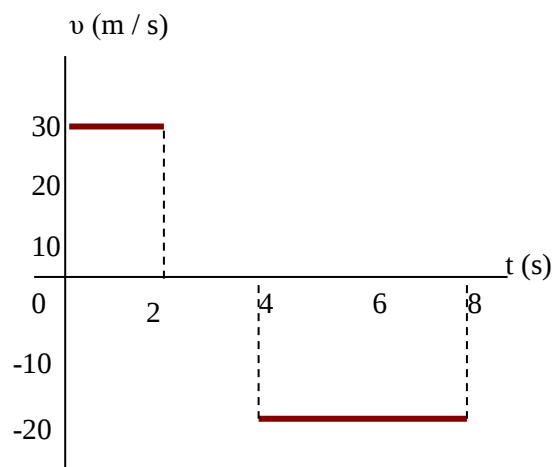
ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν, που περικλείεται μεταξύ της

γραφικής παράστασης $v = f(t)$ και του άξονα t, είναι ίσο με την αντίστοιχη μετατόπιση Δx . Η θέση του σώματος σε

οποιαδήποτε στιγμή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$$



$$\text{Από } t_0 = 0 \text{ έως } t_1 = 2\text{s: } E_1 = \text{Εμβαδόν} = \Delta x_1 = (2\text{s} - 0)(30\text{ m/s} - 0) = 60\text{ m}$$

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x_1 = 60\text{ m}$$

$$\text{Από } t_1 = 2\text{s} \text{ έως } t_2 = 4\text{s: } E_2 = \text{Εμβαδόν} = \Delta x_2 = 0 \cdot (4\text{s} - 2\text{s}) = 0\text{ m}$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x_2 = 60\text{ m}$$

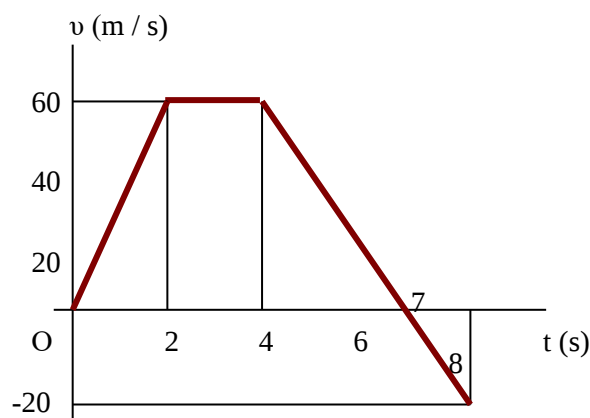
$$\text{Από } t_2 = 4\text{s} \text{ έως } t_3 = 8\text{s: } E_3 = \text{Εμβαδόν} = \Delta x_3 = (8\text{s} - 4\text{s})(-20\text{ m/s}) = -80\text{ m}$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 \Rightarrow x_3 = x_2 + \Delta x_3 = 60\text{ m} + (-80\text{ m}) = -20\text{ m}$$

Αφού προσδιορίσαμε τη θέση x στις διάφορες χρονικές στιγμές, κατασκευάζουμε τον πίνακα θέσης – χρόνου:

Χρόνος t (s)	0	2	4	8
Θέση x (m)	0	60	60	-20

Με τη βοήθεια των παραπάνω τιμών (x, t) του πίνακα προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα σημεία O (0, 0), A (2s, 60 m), B (4s, 60 m), Γ (8s, -20 m). Επειδή η ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή, τα τμήματα OA, AB και BΓ της γραφικής παράστασης $x = f(t)$ θα είναι ευθύγραμμα.



β) Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι τις στιγμές $t_0 = 0$ και $t_3 = 8\text{ s}$ η θέση x του σώματος είναι $x_0 = 0$ και $x_3 = -20\text{ m}$ αντίστοιχα. Η μετατόπιση Δx στη διάρκεια από 0 έως 8s είναι:

$$\Delta x = x_3 - x_0 = -20\text{ m} - 0 = -20\text{ m}$$

Η μετατόπιση μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής:

$$\Delta x = x_1 + x_2 + x_3 = 60\text{ m} + 0\text{ m} + (-80\text{ m}) = -20\text{ m}$$

γ) Το διάστημα s είναι ίσο με το μήκος της τροχιάς που διαγράφει το σώμα. Το διάστημα υπολογίζεται από τη σχέση: $s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 60\text{m} + 0\text{m} + 80\text{m} = 140\text{m}$

δ) Η μέση ταχύτητα δίνεται από τη σχέση: $v_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Στη διάρκεια από 0 έως 8s ($\Delta t = 8\text{s}$) η μετατόπιση έχει υπολογιστεί και είναι $\Delta x = -20\text{ m}$. Επομένως, η μέση ταχύτητα είναι: $v_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-20\text{m}}{8\text{s}} = -2,5\text{m/s}$

Στη διάρκεια από 0 έως 6s ($\Delta t = 6\text{s}$) η μετατόπιση Δx είναι ίση με το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση (v, t) και τον άξονα t . Είναι:

$$\begin{aligned}\Delta x &= E_{(0-2\text{s})} + E_{(2\text{s}-4\text{s})} + E_{(4\text{s}-6\text{s})} = \\ &= (2-0)(30)\text{ m} + 0 + (6-4)(-20)\text{ m} = \\ &= 60\text{ m} + (-40\text{ m}) = 20\text{ m}\end{aligned}$$

Επομένως, η μέση ταχύτητα είναι: $v_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20\text{m}}{6\text{s}} = 3,33\text{m/s}$

ε) Το σώμα ηρεμεί στη διάρκεια από 2s έως 4s, γιατί η ταχύτητα είναι ίση με μηδέν. Η κίνηση έχει θετική φορά στη διάρκεια 0 έως 2s, γιατί η ταχύτητα είναι θετική, και αρνητική φορά στη διάρκεια από 4s έως 8s, γιατί η ταχύτητα είναι αρνητική. Από τη γραφική παράσταση $x = f(t)$, προκύπτει ότι η τετμημένη x είναι θετική στη διάρκεια από 0 έως 7s και αρνητική στη διάρκεια από 7s έως 8s. Δηλαδή, στη διάρκεια από 0 έως 7s, το σώμα βρίσκεται πάνω στο θετικό ημιάξονα x και στη διάρκεια από 7s έως 8s βρίσκεται πάνω στο αρνητικό ημιάξονα x .

Από το διάγραμμα (x, t) στο διάγραμμα (v, t)

3. Το διάγραμμα (x, t) παριστάνει την κίνηση ενός παίκτη του τένις πάνω σε ευθεία τροχιά.

α) Ποια είναι η μέση ταχύτητα σε κάθε φάση της διαδρομής;

β) Ποια είναι η μέση ταχύτητα από 0 έως 8s; από 2s έως 6s;

γ) Ποια είναι η στιγμιαία ταχύτητα τις στιγμές 0,5s, 1,5s, 3s, 7s;

δ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα (v, t)

ε) Σε ποια χρονικά διαστήματα ο παίκτης

i) Είναι ακίνητος

ii) Κινείται προς τα δεξιά (θετική κατεύθυνση)

iii) Κινείται προς τα αριστερά (αρνητική κατεύθυνση)

στ) Σε ποιες φάσεις της διαδρομής η ταχύτητα έχει το μεγαλύτερο μέτρο;

ζ) Ποια είναι η μεγαλύτερη απόσταση από την αρχική του θέση;

η) Σε ποιες χρονικές στιγμές περνάει από την αρχή του άξονα και σε ποια χρονική διάρκεια βρίσκεται;

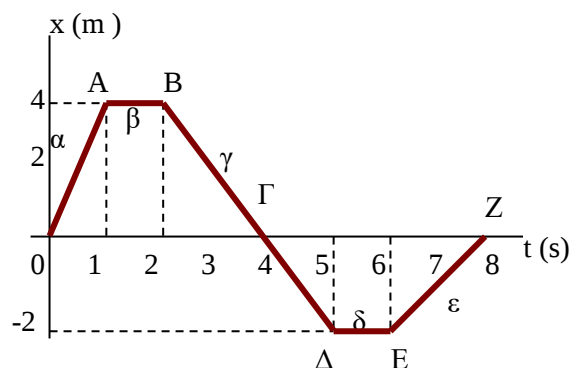
i) στο θετικό

ii) στον αρνητικό άξονα;

ΛΥΣΗ

Η μέση ταχύτητα υπολογίζεται από τα σχέση: $v_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (1)

Εφαρμόζουμε την εξίσωση (1) για κάθε φάση της κίνησης:



$$\text{φάση α: } v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4\text{m} - 0}{1\text{s} - 0} = 4\text{m/s}$$

$$\text{φάση β: } v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4\text{m} - 4\text{m}}{2\text{s} - 1\text{s}} = 0$$

$$\text{φάση γ: } v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-2\text{m} - 4\text{m}}{5\text{s} - 2\text{s}} = -2\text{m/s}$$

$$\text{φάση δ: } v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-2\text{m} - (-2\text{m})}{6\text{s} - 5\text{s}} = 0$$

$$\text{φάση ε: } v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - (-2\text{m})}{8\text{s} - 6\text{s}} = 1\text{m/s}$$

$$\text{β) Η μέση ταχύτητα στη διάρκεια 0 έως 8s είναι: } v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 0}{8\text{s} - 0} = 0\text{m/s}$$

$$\text{και στη διάρκεια από 2s έως 6s είναι: } v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\text{m} - 4\text{m}}{6\text{s} - 2\text{s}} = -1,5\text{m/s}$$

γ) Επειδή η γραφική παράσταση (x, t) αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα, συμπεραίνουμε ότι η κίνηση σε καθεμιά από τις φάσεις α, γ, ε είναι ευθύγραμμη ομαλή και επομένως η μέση ταχύτητα θα είναι ίση με την αντίστοιχη στιγμιαία ταχύτητα. Δηλαδή θα είναι:

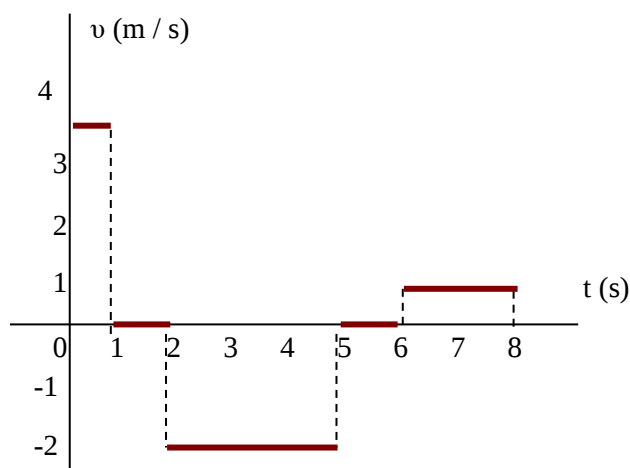
$$t = 0,5\text{s}, \quad v = 4\text{ m/s}$$

$$t = 1,5\text{s}, \quad v = 0$$

$$t = 3\text{s}, \quad v = -2\text{ m/s}$$

$$t = 7\text{s}, \quad v = 1\text{ m/s}$$

δ) Η ταχύτητα σε κάθε φάση είναι σταθερή. Με τη βοήθεια των παραπάνω τιμών (v, t) σχεδιάζουμε το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου.



- ε) i) Ο παίκτης είναι σε ηρεμία, όταν η ταχύτητά του είναι μηδέν (από 1s έως 2s και από 5s έως 6s).
 ii) Ο παίκτης κινείται προς τα δεξιά (με θετική κατεύθυνση), όταν η ταχύτητά του είναι θετική (από 0 έως 1s και από 6s έως 8s).
 iii) Ο παίκτης κινείται προς τα αριστερά (με αρνητική κατεύθυνση), όταν η ταχύτητά του είναι αρνητική (από 2s έως 5s).

στ) Από το διάγραμμα (v, t) προκύπτει ότι το μεγαλύτερο μέτρο της ταχύτητας είναι 4 m/s. Ο παίκτης έχει ταχύτητα 4 m/s στη διάρκεια από 0 έως 1s.

ζ) Από το διάγραμμα (x, t) προκύπτει ότι η μεγαλύτερη απόσταση του παίκτη από την αρχή του άξονα είναι $x = 4$ m και αντιστοιχεί στη φάση β (από 1s έως 2s).

η) Ο παίκτης περνάει από την αρχή του άξονα τη στιγμή που η τετμημένη x είναι ίση με μηδέν. Αυτό συμβαίνει τις στιγμές 0,4s και 8s.

- i) Ο παίκτης βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα όταν η τετμημένη x είναι θετική (από 0 έως 4s) και
 ii) Στον αρνητικό ημιάξονα όταν η τετμημένη x είναι αρνητική (από 4s έως 8s).

Κίνηση με πολλές φάσεις

4. Το υπόγειο τρένο ξεκινάει από κάποιο σταθμό από την ηρεμία και επιταχύνεται κατά 2 m/s^2 επί 10 s. Στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα επί 10 s και μετά επιβραδύνεται κατά -4 m/s^2 μέχρι να σταματήσει στο επόμενο σταθμό. Να υπολογιστεί η ολική διάρκεια κίνησης και η ολική απόσταση που καλύφθηκε.

ΛΥΣΗ

Η κίνηση του τρένου εξελίσσεται σε τρεις φάσεις:

α) **Κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη.** Το τρένο επιταχύνεται με επιτάχυνση $a = 2 \text{ m/s}^2$ για χρόνο $t_1 = 10 \text{ s}$, αποκτά τελική ταχύτητα v και καλύπτει διάστημα s_1 . Το διάστημα s_1 και η ταχύτητα v δίνονται από τις σχέσεις:

$$v = a_1 t_1 \Rightarrow 2 \cdot 10 \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$$

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 = 100 \text{ m}$$

β) **Κίνηση ευθύγραμμη ομαλή.** Το τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 10 \text{ m/s}$ για χρόνο $t_2 = 10 \text{ s}$ και καλύπτει διάστημα s_2 . Το διάστημα s_2 δίνεται από τη σχέση:

$$s_2 = v \cdot t_2 \Rightarrow s_2 = 10 \cdot 20 \text{ m} = 200 \text{ m}$$

γ) **Κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.** Το τρένο έχει αρχική ταχύτητα $v_0 = v = 20 \text{ m/s}$ και κινείται με επιτάχυνση $a_3 = -4 \text{ m/s}^2$. Ας θεωρήσουμε ότι το τρένο σταματάει μετά από χρόνο t_3 και καλύπτει απόσταση s_3 . Ο χρόνος κίνησης και το διάστημα s_3 υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$t_3 = -\frac{v_0}{a_3} = \frac{20 \text{ m/s}}{-4 \text{ m/s}^2} = 5 \text{ s}$$

$$s_3 = -\frac{v_0^2}{2a_3} = -\frac{(20 \text{ m/s})^2}{2(-4 \text{ m/s}^2)} = 50 \text{ m}$$

Το ολικό διάστημα είναι:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 100 \text{ m} + 200 \text{ m} + 50 \text{ m} = 350 \text{ m}$$

και η ολική διάρκεια κίνησης:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 10 \text{ s} + 10 \text{ s} + 5 \text{ s} = 25 \text{ s}$$

β) Οι γραφικές παραστάσεις $a = f(t)$, $v = f(t)$ και $x = f(t)$ φαίνονται στο σχήμα (Διαγράμματα $a-t$, $v-t$, $x-t$).

Από το διάγραμμα (a , t) στα διαγράμματα (v , t) και (x , t).

5. Ένα αυτοκίνητο κινείται πάνω στον άξονα x . Το διάγραμμα της επιτάχυνσης του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με το χρόνο παρουσιάζεται στο σχήμα. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα της ταχύτητας και της θέσης x σε συνάρτηση με το χρόνο, αν για $t_0 = 0$ είναι $x_0 = 40 \text{ m}$ και $v_0 = 4 \text{ m/s}$.

ΛΥΣΗ

Το εμβαδόν E μεταξύ της γραφικής παράστασης $a = f(t)$ και του άξονα t είναι ίσο με τη μεταβολή της ταχύτητας Δv . Επομένως βρίσκουμε;

$$0 - 4 \text{ s} \quad E_1 = \Delta v_1 = (4 \text{ s}) (3 \text{ m/s}^2) = 12 \text{ m/s}$$

$$4 \text{ s} - 8 \text{ s} \quad E_2 = \Delta v_2 = 0$$

$$8 \text{ s} - 16 \text{ s} \quad E_3 = \Delta v_3 = (16 \text{ s} - 8 \text{ s}) (-2 \text{ m/s}^2) = -16 \text{ m/s} \quad \dots\dots\dots (\text{Διάγραμμα } a-t)$$

Η τελική τιμή της ταχύτητας υπολογίζετε από τη σχέση: $\Delta v = v - v_0 \Rightarrow v = v_0 + \Delta v$

Η παραπάνω σχέση διαμορφώνεται ως εξής:

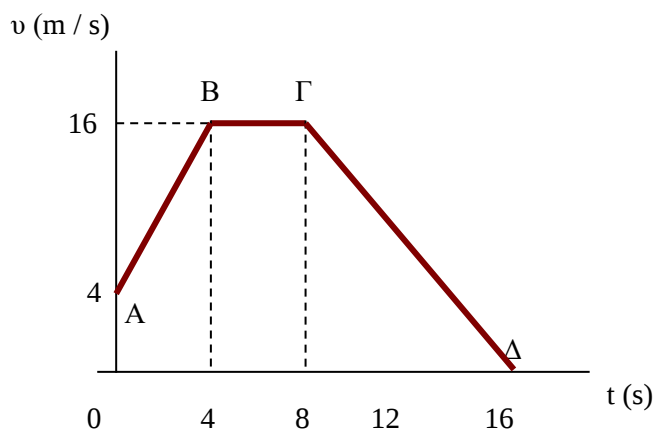
$$0 \text{ s} \quad v_0 = 4 \text{ m/s}$$

$$4 \text{ s} \quad v_1 = v_0 + \Delta v_1 = 4 \text{ m/s} + 12 \text{ m/s} = 16 \text{ m/s}$$

$$8 \text{ s} \quad v_2 = v_1 + \Delta v_2 = 16 \text{ m/s} + 0 = 16 \text{ m/s}$$

$$16 \text{ s} \quad v_3 = v_2 + \Delta v_3 = 16 \text{ m/s} + (-16 \text{ m/s}) = 0$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω τιμών κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση ταχύτητας χρόνου.



Το εμβαδόν E της γραφικής παράστασης $v = f(t)$ και του άξονα t είναι ίσο με τη μετατόπιση Δx .

$$AB: 0 - 4 \text{ s}: \quad E_1 = \Delta x_1 = \frac{4 \text{ m/s} + 16 \text{ m/s}}{2} \cdot 4 \text{ s} = 40 \text{ m}$$

$$B\Gamma: 4 \text{ s} - 8 \text{ s}: \quad E_2 = \Delta x_2 = (8 \text{ s} - 4 \text{ s}) \cdot (16 \text{ m/s}) = 64 \text{ m}$$

$$\Gamma\Delta: 8 \text{ s} - 16 \text{ s}: \quad E_3 = \Delta x_3 = \frac{1}{2} \cdot (16 \text{ s} - 8 \text{ s}) \cdot (16 \text{ m/s}) = 64 \text{ m}$$

Η τιμή της θέσης x υπολογίζεται από τη σχέση: $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$

Είναι: $t_0 = 0 \text{ s}$ $x_0 = 40 \text{ m}$

$$t_1 = 4 \text{ s} \quad x_1 = x_0 + \Delta x_1 = 40\text{m} + 40\text{m} = 80\text{m}$$

$$t_2 = 8 \text{ s} \quad x_2 = x_1 + \Delta x_2 = 80\text{m} + 64\text{m} = 144\text{m}$$

$$t_3 = 16 \text{ s} \quad x_3 = x_2 + \Delta x_3 = 144\text{m} + 64\text{m} = 208\text{m}$$

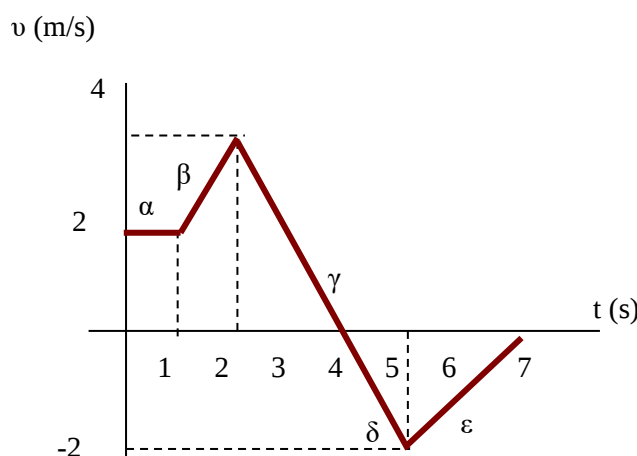
Με τη βοήθεια των παραπάνω τιμών (x, t) βρίσκουμε τα αντίστοιχα σημεία στο επίπεδο (x, t) . Η γραφική παράσταση (x, t) σε κάθε φάση της κίνησης είναι: (Διάγραμμα $x-t$)

i) ευθεία για ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και

ii) καμπύλη για ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με τα κοίλα προς τα πάνω όταν η επιτάχυνση είναι θετική, και με τα κοίλα προς τα κάτω, όταν η επιτάχυνση είναι αρνητική.

Από το διάγραμμα (v, t) στα διαγράμματα (a, t) και (x, t) .

6. Ένας παίκτης του τένις κινείται πάνω στην ίδια ευθεία. Η ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο σχήμα. Τη στιγμή $t_0 = 0$ ο παίκτης βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$. Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα (a, t) και (x, t)



ΛΥΣΗ

Επειδή το διάγραμμα (v, t) αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα, η επιτάχυνση είναι σταθερή και ίση με την αντίστοιχη μέση επιτάχυνση. Δηλαδή:

$$\alpha = \alpha_{\mu} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) εφαρμόζεται ως εξής:

φάση α: $\alpha_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 0}{1} \text{ m/s}^2 = 0 \text{ m/s}^2$

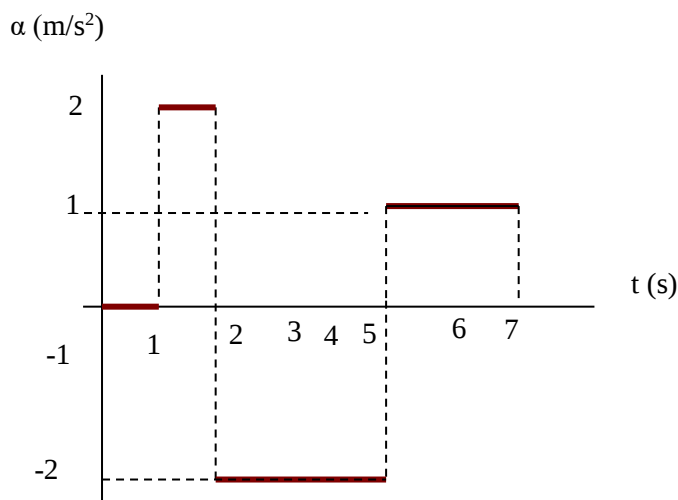
φάση β: $\alpha_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s}}{2 \text{ s} - 1 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}^2$

φάση γ: $\alpha_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 4 \text{ m/s}}{4 \text{ s} - 2 \text{ s}} = -2 \text{ m/s}^2$

φάση δ: $\alpha_4 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-2 \text{ m/s} - 0}{5 \text{ s} - 4 \text{ s}} = -2 \text{ m/s}^2$

φάση ε: $\alpha_5 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-2 \text{ m/s})}{7 \text{ s} - 5 \text{ s}} = 1 \text{ m/s}^2$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τιμές σχεδιάζουμε το διάγραμμα επιτάχυνσης – χρόνου.



Η μετατόπιση Δx είναι ίση αριθμητικά με το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση (α, t) και τον άξονα t .

φάση α: $E_1 = \Delta x_1 = 2 \cdot 1\text{m} = 2\text{m}$

φάση β: $E_2 = \Delta x_2 = \frac{2+4}{2} \cdot 1\text{m} = 3\text{m}$

φάση γ: $E_3 = \Delta x_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4-2)\text{m} = 4\text{m}$

φάση δ: $E_4 = \Delta x_4 = \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (5-4)\text{m} = -1\text{m}$

φάση ε: $E_5 = \Delta x_5 = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot (7-5)\text{m} = -2\text{m}$

Η θέση x του παίκτη προσδιορίζεται από τη σχέση: $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$, ως εξής:

$t_0 = 0 \text{ s}$ $x_0 = 0$

$t_1 = 1 \text{ s}$ $x_1 = x_0 + \Delta x_1 = 2 \text{ m}$

$t_2 = 2 \text{ s}$ $x_2 = x_1 + \Delta x_2 = 5 \text{ m}$

$t_3 = 4 \text{ s}$ $x_3 = x_2 + \Delta x_3 = 9 \text{ m}$

$t_4 = 5 \text{ s}$ $x_4 = x_3 + \Delta x_4 = 8 \text{ m}$

$t_5 = 7 \text{ s}$ $x_5 = x_4 + \Delta x_5 = 6 \text{ m}$

Με τη βοήθεια των παραπάνω τιμών (t, x) προσδιορίζουμε τα σημεία Ο, Α, Β, Γ, Δ και Ε στο επίπεδο $(x - t)$. Η γραφική παράσταση (x, t) σε κάθε φάση κίνησης σχεδιάζεται εύκολα, αν λάβουμε υπόψη μας ότι είναι:
(Διάγραμμα $x-t$)

- i) Ευθεία, όταν η επιτάχυνση είναι μηδέν (φάση α, δηλαδή στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση),
- ii) Καμπύλη με τα κοίλα προς τα πάνω, όταν η επιτάχυνση είναι θετική (φάση β και ε)
- iii) Καμπύλη με τα κοίλα προς τα κάτω, όταν η επιτάχυνση είναι αρνητική (φάση γ και δ).

Η σχέση $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

7. Ένα σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Ναδειχθεί ότι η ταχύτητα σε συνάρτηση με τη θέση δίνεται από τη σχέση: $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$. Πως διαμορφώνεται η παραπάνω εξίσωση στις περιπτώσεις: i) $x_0=0$ ii) $x_0=0, v_0=0$

ΛΥΣΗ

Ας θεωρήσουμε ότι ένα σώμα κινείται πάνω στον άξονα x τη στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση x_0 . Η ταχύτητα και η θέση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο δίνονται από τις εξισώσεις:

$$v = v_0 + at \quad (1)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \cdot at^2 \quad (2)$$

Θα συνδυάσουμε τις εξισώσεις (1) και (2) ώστε να πάρουμε μια σχέση για τα μεγέθη v_0, v, x, x_0 και a , η οποία δεν περιέχει το χρόνο t . Λύνουμε πρώτα την εξίσωση (1) ως προς t και αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην εξίσωση (2):

$$(1) \Rightarrow at = v - v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \quad (3)$$

$$(2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} x = x_0 + v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} \cdot a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $2a$:

$$2a(x - x_0) = 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2 \quad \text{ή}$$

$$2a(x - x_0) = 2v_0 \cdot v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0 \cdot v + v_0^2 \quad \text{ή}$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (4)$$

Αν τη στιγμή $t_0 = 0$ το κινητό βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$, τότε η εξίσωση (4) γράφεται:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \quad (5)$$

Αν τη στιγμή $t_0 = 0$ είναι $v_0 = 0$, τότε η εξίσωση (4) γράφεται:

$$v^2 = 2ax$$

Ολικός χρόνος και ολικό διάστημα στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση

8. Ένα όχημα κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το όχημα έχει ταχύτητα $\vec{v}_0$ και αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερό μέτρο επιβράδυνσης a , να βρείτε:

- Τη χρονική στιγμή t που θα σταματήσει το όχημα, δηλαδή τον ολικό χρόνο της επιβραδυνόμενης κίνησης
- Το ολικό διάστημα επιβραδυνόμενης κίνησης.

ΛΥΣΗ

Το όχημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, οπότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$v = v_0 - at \quad \text{και} \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} \cdot at^2$$

- Αν τη χρονική στιγμή t το όχημα σταματήσει, δηλαδή τη στιγμή εκείνη είναι $v = 0$, τότε ο ολικός χρόνος $t_{ολ}$ της επιβραδυνόμενης κίνησης του οχήματος είναι $t_{ολ} = t - 0 = t$, οπότε από τη σχέση $v = v_0 - at$ παίρνουμε:

$$0 = v_0 - \alpha t_{\text{ολ}} \quad \text{ή} \quad t_{\text{ολ}} = \frac{v_0}{\alpha}$$

όπου v_0 το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του οχήματος και α το μέτρο της επιβράδυνσης.

ii) Αν $\vec{\Delta x}$ η μετατόπιση του οχήματος μέχρι να σταματήσει, τότε το ολικό διάστημα $s_{\text{ολ}}$ της επιβραδυνόμενης κίνησης θα είναι ίσο με τη τιμή Δx της μετατόπισης.

Από τη σχέση $\Delta x = v_0 t - \frac{1}{2} \cdot \alpha t^2$, για $t = t_{\text{ολ}} = \frac{v_0}{\alpha}$ είναι $\Delta x = s_{\text{ολ}}$, οπότε έχουμε:

$$s_{\text{ολ}} = v_0 \cdot \frac{v_0}{\alpha} - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left(\frac{v_0}{\alpha} \right)^2 \quad \text{ή} \quad s_{\text{ολ}} = \frac{v_0^2}{\alpha} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{\alpha} \quad \text{ή} \quad s_{\text{ολ}} = \frac{v_0^2}{2\alpha}$$