

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ  
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

**Άσκηση 1**

α) Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ , να δείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

β) Έστω  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;

Λύση

α) Έστω ότι  $f(\alpha) < f(\beta)$  και  $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ . Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \eta$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$  παρατηρούμε ότι:

Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $g(\alpha)g(\beta) < 0$ , αφού  $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$  και  $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$ . Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$  οπότε  $f(x_0) = \eta$ .

β) Έστω  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$  μια διαδικασία (κανόνα)  $f$ , με την οποία κάθε στοιχείο  $x \in A$  αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό  $y$ . Το  $y$  ονομάζεται τιμή της  $f$  στο  $x$  και συμβολίζεται με  $f(x)$ .

## Άσκηση 2

- i. Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;
- ii. Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;
- iii. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $A$  και  $x_0 \in A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

### Λύση

- i. Δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες όταν: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού  $A$  και για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = g(x)$ .
- ii. Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- iii. Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού  $A$ . Λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 \in A$ , όταν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

### Άσκηση 3

α) Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

β) Τι ονομάζουμε σύνθεση  $g \circ f$  δύο συναρτήσεων  $f, g$  με πεδία ορισμού  $A, B$  αντίστοιχα; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$ ;

γ) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

#### Λύση

α) Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:  $f(x_1) > f(x_2)$ .

β) Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της  $f$  με την  $g$ , και τη συμβολίζουμε με  $g \circ f$ , τη συνάρτηση με τύπο  $g \circ f : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου το πεδίο ορισμού  $A_1$  της  $g \circ f$  αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $x$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία το  $f(x)$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $g$ .

Δηλαδή είναι το σύνολο  $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ . Είναι φανερό ότι η  $g \circ f$  ορίζεται αν  $A_1 \neq \emptyset$ , δηλαδή αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

γ) Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$ . Αν  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

#### Άσκηση 4

- i. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_0 \in A$  το  $f(x_0)$ ;
- ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano
- iii. Πότε μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1;

#### Λύση

- i. Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι:

παρουσιάζει στο  $x_0$  ολικό ελάχιστο, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

- ii. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και επιπλέον, ισχύει  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$  τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ . Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

- iii. Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση "1-1", όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:

αν  $x_1 \neq x_2$  τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

### Άσκηση 5

- i. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.
- ii. Πότε μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

### Λύση

- i. Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .
- ii. Μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της όταν α) Δεν υπάρχει το όριό της στο  $x_0$  ή β) Υπάρχει το όριό της στο  $x_0$ , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της  $f(x_0)$ , στο σημείο  $x_0$ .

### Άσκηση 6

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και πότε σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

#### Λύση

Μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$ .

Μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$  και επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$  και  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$ .

### Άσκηση 7

i. Τι ονομάζεται ακολουθία;

ii. Πότε μπορούμε να αναζητήσουμε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;

### Λύση

i. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση  $\alpha : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$

ii. Για να έχει νόημα το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  πρέπει η  $f$  να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής  $(\alpha, +\infty)$ . Για να έχει νόημα το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  πρέπει η  $f$  να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής  $(-\infty, \beta)$ .

### Άσκηση 8

- i. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία;
- ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $|\eta\mu x|$  και  $|x|$ . Πότε ισχύει η ισότητα;

### Λύση

i. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και επιπλέον, ισχύει  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ . Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Bolzano είναι ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον  $x'x$  σε ένα τουλάχιστον σημείο.

- ii. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$   $|\eta\mu x| \leq |x|$ . Η ισότητα ισχύει μόνο όταν  $x = 0$ .

### Άσκηση 9

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

#### Λύση

Έστω το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0)$$

Επομένως  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

### Άσκηση 10

Δίνεται η ρητή συνάρτηση  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , όπου  $P(x)$ ,  $Q(x)$  πολυώνυμα του  $x$  και  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $Q(x_0) \neq 0$ .

Να αποδείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ .

### Λύση

Είναι:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ .

Επομένως,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ , εφόσον  $Q(x_0) \neq 0$ .

## ΘΕΜΑ Β

### Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3.$$

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της  $f$ .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια λύση στο  $\mathbb{R}$ .

### Λύση

α) Η συνάρτηση έχει  $D_f = \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow$$

$$e^{2x_1+1} < e^{2x_2+1} \Rightarrow -3e^{2x_1+1} > -3e^{2x_2+1}$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2 \Rightarrow -5x_1 + 3 > -5x_2 + 3$$

$$\text{άρα } -3e^{2x_1+1} - 5x_1 + 3 > -3e^{2x_2+1} - 5x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right).$$

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3e^{2x+1} - 5x + 3) =$$

$$-3 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x+1} - 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 = -\infty - \infty + 3 = -\infty$$

$$(\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x+1} = e \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)^2 = e(+\infty) = +\infty).$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3e^{2x+1} - 5x + 3) =$

$$-3 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1} - 5 \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 = 0 + \infty + 3 = +\infty$$

$$(\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1} = e \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^2)^x = e \cdot 0 = 0).$$

Επομένως είναι  $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$ .

γ) Αφού το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$  που περιέχει το 0, θα υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = 0$ . Επειδή επιπλέον η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , η  $x_0$  είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

## Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7, x \in \mathbb{R}$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $f$ .

### Λύση

i. Η συνάρτηση  $f$  έχει  $D_f = \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ . Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2011} < x_2^{2011} \Rightarrow 2x_1^{2011} < 2x_2^{2011}$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 < 5x_2 \Rightarrow 5x_1 - 7 < 5x_2 - 7 \text{ άρα}$$

$$2x_1^{2011} + 5x_1 - 7 < 2x_2^{2011} + 5x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

ii. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Εξάλλου  $f(1) = 2 + 5 - 7 = 0$  και επομένως:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

iii. Είναι:  $f(1) = 0$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε:

- Για κάθε  $x < 1$ , έχουμε:  $f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για κάθε  $x > 1$ , έχουμε:  $f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$

### Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$ .

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .

#### Λύση

i. Πρέπει:  $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$

Άρα  $D_f = [\ln 2, +\infty)$ .

ii. Για κάθε  $x_1, x_2 \in [\ln 2, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 2 < e^{x_2} - 2 \Rightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} < \sqrt{e^{x_2} - 2} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{e^{x_1} - 2} < 4\sqrt{e^{x_2} - 2} \Rightarrow 4\sqrt{e^{x_1} - 2} + 3 < 4\sqrt{e^{x_2} - 2} + 3 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[\ln 2, +\infty)$ . Οπότε αφού η  $f$  είναι και συνεχής (πράξεις συνεχών) το σύνολο τιμών της είναι:

$$f([\ln 2, +\infty)) = \left[ f(\ln 2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Έχουμε:

$$f(\ln 2) = 4\sqrt{e^{\ln 2} - 2} + 3 = 4 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4\sqrt{e^x - 2} + 3) = +\infty$$

Άρα  $f([\ln 2, +\infty)) = [3, +\infty)$

iii. Η  $f$  είναι 1-1 ως γνήσια αύξουσα (ii) και επομένως αντιστρέφεται.

Για κάθε  $x \in [\ln 2, +\infty)$  έχουμε:  $f(x) = y \Leftrightarrow$

$$4\sqrt{e^x - 2} + 3 = y \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{e^x - 2} = \frac{y-3}{4} \\ \frac{y-3}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^x - 2 = \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 \\ y \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \left[ \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2 \right] \\ y \geq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Αρα } f^{-1}(x) = \ln \left( \left( \frac{x-3}{4} \right)^2 + 2 \right) \text{ με } D_{f^{-1}} = [3, +\infty).$$

#### Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι “1-1”.
- iii. Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .
- iv. Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(1+x) = 2$ .

#### Λύση

i. Πρέπει:

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-1}+1 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ άρα } D_f = [1, +\infty)$$

ii. Έστω  $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ . Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2\ln(\sqrt{x_1-1}+1)+3 = 2\ln(\sqrt{x_2-1}+1)+3 \Rightarrow$$

$$2\ln\sqrt{x_1-1} = 2\ln\sqrt{x_2-1} \Rightarrow$$

$$\ln\sqrt{x_1-1} = \ln\sqrt{x_2-1} \Rightarrow x_1-1 = x_2-1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $f$  είναι “1-1”.

iii. Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = 2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3 \Leftrightarrow \frac{y-3}{2} = \ln(\sqrt{x-1}+1) \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{y-3}{2}} = \sqrt{x-1}+1 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{y-3}{2}} - 1\right)^2 = x-1, \text{ πρέπει } e^{\frac{y-3}{2}} - 1 \geq 0, \text{ επομένως}$$

$$x = (e^{\frac{y-3}{2}} - 1)^2 + 1, y \geq 3.$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = (e^{\frac{x-3}{2}} - 1)^2 + 1, x \in [3, +\infty)$$

$$\text{iv. } f^{-1}(1+x) = 2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x+1-3}{2}} - 1)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x-2}{2}} - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$(e^{\frac{x-2}{2}} - 1 = 1 \text{ ή } e^{\frac{x-2}{2}} - 1 = -1) \Leftrightarrow$$

$$(e^{\frac{x-2}{2}} = 2 \text{ ή } e^{\frac{x-2}{2}} = 0 \text{ αδύνατον}) \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2\ln 2 + 2.$$

### Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$ .

- i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της  $f$
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός  $x \in \mathbb{R}$  για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση:  $3x2^x + 2^x < 1$

### Λύση

i. Η συνάρτηση έχει  $D_f = \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x_1, x_2$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 + 2 > -3x_2 + 2$$

$$\text{άρα } \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} - 3x_1 + 2 > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} - 3x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = +\infty - (-\infty) - 2 = +\infty, \text{ αφού } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = 0 - \infty + 2 = -\infty, \text{ αφού } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Επειδή  $2011 \in f(\mathbb{R})$  και η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικός  $x \in \mathbb{R}$  για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Η ανίσωση γίνεται:

$$3x2^x + 2^x < 1 \Leftrightarrow 3x + 1 < \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 > 3 \Leftrightarrow f(x) > 3 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x < 0$$

(αφού  $f(0) = 3$ ) και  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

## Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα τη  $x = 1$ .
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .

### Λύση

i. Η συνάρτηση έχει  $D_f = \mathbb{R}$ . Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2011} < x_2^{2011} \Rightarrow 3x_1^{2011} < 3x_2^{2011}$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 5 < 2x_2 - 5.$$

$$\text{Άρα } 3x_1^{2011} + 2x_1 - 5 < 3x_2^{2011} + 2x_2 - 5 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

ii. Έχουμε:  $f(1) = 0$  άρα  $x = 1$  ρίζα της  $f(x) = 0$  και επειδή η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

iii. Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική και  $x = 1$  η μοναδική της ρίζα, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα  $(-\infty, 1)$  και  $(1, +\infty)$ .

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  άρα για κάθε  $x < 1$  ισχύει  $f(x) < f(1) = 0$ , ενώ για κάθε  $x > 1$  ισχύει  $f(x) > f(1) = 0$ .

## Άσκηση 7

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , όταν:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{f(x)} = +\infty$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{4x+3} = -\infty$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x+4)] = +\infty$

### Λύση

i. Θέτουμε  $\frac{2x-1}{f(x)} = g(x)$  και επειδή  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$  είναι  $g(x) \neq 0$  για τιμές κοντά στο 1.

Επίσης:  $\frac{2x-1}{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x-1}{g(x)}$

Οπότε:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ (2x-1) \frac{1}{g(x)} \right] = 0$

ii. Θέτουμε:  $\frac{f(x)}{4x+3} = h(x)$ , οπότε  $f(x) = (4x+3)h(x)$

Επίσης  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -\infty$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(4x+3)h(x)] = 7 \cdot (-\infty) = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$f(x)(3x+4) = \kappa(x)$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1} \kappa(x) = +\infty$

Επίσης  $3x+4 \neq 0$  για τιμές κοντά στο 1, οπότε  $f(x) = \frac{\kappa(x)}{3x+4}$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{3x+4} \kappa(x) \right] = \frac{1}{7} (+\infty) = +\infty$ .

### Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f : [1, 5]$  της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία  $A(1, 8)$  και  $B(5, 12)$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παίρνει την τιμή  $\frac{29}{3}$
- iii. Υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (1, 5)$  τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9}$$

### Λύση

i. Είναι:  $f(1) = 8$  και  $f(5) = 12$  και αφού γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα ( $1 < 5$  και  $f(1) < f(5)$ ).

ii. Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο  $[1, 5]$  άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f([1, 5]) = [f(1), f(5)] = [8, 12]$$

$$\frac{29}{3} \in f([1, 5])$$

iii. Επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα για κάθε  $x_1, x_2 \in D_f$  με  $x_1 < x_2$  θα είναι  $f(x_1) < f(x_2)$ . Έτσι έχουμε:

$$1 < 2 < 5 \Leftrightarrow f(1) < f(2) < f(5) \Leftrightarrow 8 < f(2) < 12 \Leftrightarrow 16 < 2f(2) < 24$$

$$1 < 3 < 5 \Leftrightarrow f(1) < f(3) < f(5) \Leftrightarrow 8 < f(3) < 12 \Leftrightarrow 24 < 3f(3) < 36$$

$$1 < 4 < 5 \Leftrightarrow f(1) < f(4) < f(5) \Leftrightarrow 8 < f(4) < 12 \Leftrightarrow 32 < 4f(4) < 48$$

οπότε:

$$72 < 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) < 108 \Leftrightarrow$$

$$8 < \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} < 12$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει  $x_0 \in (1, 5)$  τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \text{ και αφού } f \text{ γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδικό.}$$

### Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$ .

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- iii. Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .
- iv. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2$ .

#### Λύση

i. Για να ορίζεται η  $f$ , πρέπει:  $3e^x + 1 > 0$  που αληθεύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι:  $D_f = \mathbb{R}$

ii. Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} < 3e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} + 1 < 3e^{x_2} + 1 \Rightarrow$$

$$\ln(3e^{x_1} + 1) < \ln(3e^{x_2} + 1) \Rightarrow \ln(3e^{x_1} + 1) - 2 < \ln(3e^{x_2} + 1) - 2 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

iii. Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow y + 2 = \ln(3e^x + 1) \Leftrightarrow e^{y+2} = 3e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{e^{y+2} - 1}{3}, \frac{e^{y+2} - 1}{3} > 0 \text{ οπότε } x = \ln \frac{1}{3}(e^{y+2} - 1), y > -2.$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \ln \frac{1}{3}(e^{x+2} - 1), x \in (-2, +\infty)$$

iv. Έχουμε:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2 \Leftrightarrow \ln(3e^x + 1) - 2 < \ln \frac{1}{3}(e^{\ln 5 - 2} - 1) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(3e^x + 1) < \ln \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3e^x + 1 < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 9e^x + 3 < 4 \Leftrightarrow$$

$$e^x < \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < \ln \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < -\ln 9$$

## Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$

- i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της  $f$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- iii. Να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(x) = 2$
- iv. Να λυθεί η ανίσωση  $f^{-1}(x) \geq x - 1$

### Λύση

i. Η συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -2x_1^3 > -2x_2^3$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 - 1 > -3x_2 - 1$$

άρα

$$-2x_1^3 - 3x_1 - 1 > -2x_2^3 - 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$\text{iii. } f^{-1}(x) = 2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(2) \Leftrightarrow x = -23$$

iv. Επειδή η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει:

$$f^{-1}(x) \geq x + 1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) \leq f(x + 1) \Leftrightarrow$$

$$x \leq -2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3(x + 1) - 1 \Leftrightarrow$$

$$2x^3 + 6x^2 + 10x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (\text{Σχήμα Horner})$$

$$(x + 1)(2x^2 + 4x + 6) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ (αφού } 2x^2 + 4x + 6 > 0 \text{ διότι } \Delta = 16 - 48 = -32 < 0)$$

### Άσκηση 11

Δίνεται η 1-1 συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) + f(x) = 3x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 3$$

i. Να βρείτε το  $f^{-1}(1)$ .

ii. Να βρείτε το  $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(x) = 3$

iv. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2}$

### Λύση

i. Η  $f$  είναι 1-1 στο  $\mathbb{R}$  οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε όπου  $x$  το  $f^{-1}(1)$  στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$f(f(f^{-1}(1))) + f(f^{-1}(1)) = 3f^{-1}(1) + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(1) + 1 = 3f^{-1}(1) + 2 \Leftrightarrow 4 - 2 = 3f^{-1}(1) \Leftrightarrow f^{-1}(1) = \frac{2}{3}$$

ii. Για  $x = 1$  η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f(f(1)) + f(1) = 3 \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow f(3) + 3 = 5 \Leftrightarrow f(3) = 2$$

iii. Είναι:

$$f^{-1}(x) = 3 \Leftrightarrow x = f(3) \Leftrightarrow x = 2 \text{ (από ii)}$$

iv. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

αφού είναι:  $\left| \frac{\sigma \nu x}{x} \right| = \frac{|\sigma \nu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sigma \nu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma \nu x}{x} = 0$ . Όμοια και για το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x}$ .

## Άσκηση 12

Δίνεται η συνεχής στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} = 2$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  περνάει από το σημείο  $M(1,1)$

ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{x^2 - 1}$

### Λύση

i. Θέτουμε:  $g(x) = \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} \Leftrightarrow f(x) = (x^2 - 1)g(x) + \sqrt{x} - \eta\mu(x-1)$ .

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ g(x)(x^2 - 1) + \sqrt{x} - \eta\mu(x-1) \right] = 1$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  θα ισχύει:  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Άρα η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο  $M(1,1)$

ii. Είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x) - 2] = 1 > 0$ , οπότε  $3f(x) - 2 > 0$ , κοντά στο  $x_0$

Άρα

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 1)g(x) + 3\sqrt{x} - 3\eta\mu(x-1) - 3}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} [3g(x)] + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\sqrt{x} - 1)}{(x-1)(x+1)} - 3 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= 6 + \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{3}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = \\ &= 6 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

### Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 2\ln \frac{x+1}{1-x} + 3$ .

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να μελετήσετε την  $f^{-1}$  ως προς τη συνέχεια.
- Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

### Λύση

i. Για να ορίζεται η  $f$ , πρέπει:

$$\frac{x+1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το:  $D_f = (-1, 1)$

ii. Η  $f$  είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων  $f_2$  και  $f_1$  με

$f_1(x) = 2\ln x + 3$  και  $f_2(x) = \frac{x+1}{1-x}$ , αφού για κάθε  $x \in (-1, 1)$ , ισχύει:

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = 2\ln f_2(x) + 3 = 2\ln \frac{x+1}{1-x} + 3$$

iii. Για κάθε  $x_1, x_2 \in (-1, 1)$  με  $f(x_1) = f(x_2)$  έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2\ln \frac{x_1+1}{1-x_1} + 3 = 2\ln \frac{x_2+1}{1-x_2} + 3 \Rightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1} = \frac{x_2+1}{1-x_2} \Rightarrow$$

$$x_1 - x_1x_2 + 1 - x_2 = x_2 + 1 - x_1x_2 - x_1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η  $f$  αντιστρέφεται.

- Είναι:

$$f(x) = y \Rightarrow y = 2\ln \frac{x+1}{1-x} + 3 \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} = e^{\frac{y-3}{2}} \Rightarrow$$

$$x+1 = e^{\frac{y-3}{2}} - x \cdot e^{\frac{y-3}{2}} \Rightarrow (1 + e^{\frac{y-3}{2}}) \cdot x = e^{\frac{y-3}{2}} - 1 \Rightarrow x = \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{e^{\frac{y-3}{2}} + 1}$$

Επειδή:

$$-1 < x < 1 \Rightarrow -1 < \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{e^{\frac{y-3}{2}} + 1} < 1 \Rightarrow \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{e^{\frac{y-3}{2}} + 1} < 1$$

$$\text{και } \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{e^{\frac{y-3}{2}} + 1} > -1$$

ή  $-1 < 1$  και  $2e^{\frac{y-3}{2}} > 0$  που αληθεύουν για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ , παίρνουμε:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x-3}{2}} - 1}{e^{\frac{x-3}{2}} + 1}, x \in \mathbb{R}$$

- Η  $f^{-1}$  είναι συνεχής ως πηλίκος των συνεχών συναρτήσεων  $f_1(x) = e^{\frac{x-3}{2}} - 1$  και  $f_2(x) = e^{\frac{x-3}{2}} + 1$ . Η  $f_1$  είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών  $g_1(x) = e^x - 1$  και  $g_2(x) = \frac{x-3}{2}$

Πράγματι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει:

$$(g_1 \circ g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = e^{\frac{x-3}{2}} - 1 = f_1(x)$$

Η  $f_2$  είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών  $h_1(x) = e^x + 1$  και  $h_2(x) = \frac{x-3}{2}$ .

Πράγματι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει:

$$(h_1 \circ h_2)(x) = h_1(h_2(x)) = e^{\frac{x-3}{2}} + 1 = f_2(x)$$

iv. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3)$$

Αν θέσουμε  $u = \frac{x+1}{1-x}$  και αφού για  $x \rightarrow 1^- \Leftrightarrow u \rightarrow +\infty$ , θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2 \ln u + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3 \right)$$

Αν θέσουμε  $u = \frac{x+1}{1-x}$  και αφού για  $x \rightarrow -1^+ \Leftrightarrow u \rightarrow 0$ , έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} (2 \ln u + 3) = -\infty$$

#### Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = \ln \frac{x+2}{2-x}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f \circ g$ .
- Να βρείτε συνάρτηση  $h$  για την οποία να ισχύει:  $(h \circ g)(x) = x$ .
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι περιττή.

#### Λύση

i. Για να ορίζεται η  $g$ , πρέπει:  $\frac{x+2}{2-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$ . Άρα το πεδίο ορισμού της  $g$  είναι το:

$$D_g = (-2, 2).$$

Επίσης έχουμε:  $D_f = \mathbb{R}^*$  οπότε το πεδίο ορισμού της  $f \circ g$  είναι:

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in (-2, 2) / \ln \frac{x+2}{2-x} \neq 0 \right\} = \left\{ x \in (-2, 2) / \frac{x+2}{2-x} \neq 1 \right\} =$$

$$\{x \in (-2, 2) / x \neq 0\} = (-2, 0) \cup (0, 2).$$

ii. Ισχύει  $(h \circ g)(x) = x \Leftrightarrow h(g(x)) = x \Leftrightarrow h\left(\ln \frac{x+2}{2-x}\right) = x$  (1)

Θέτουμε  $u = \ln \frac{x+2}{2-x}$ , οπότε έχουμε:

$$u = \ln \frac{x+2}{2-x} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2-x} = e^u \Rightarrow 2e^u - xe^u = x+2 \Rightarrow x = \frac{2e^u - 2}{e^u + 1} \text{ αφού } e^u + 1 \neq 0, \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται: } h(u) = \frac{2e^u - 2}{e^u + 1} \text{ ή } h(x) = \frac{2e^x - 2}{e^x + 1}.$$

iii.

- Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $-x \in \mathbb{R}$ .

- Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε: 
$$h(-x) = \frac{2e^{-x} - 2}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{2}{e^x} - 2}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{2 - 2e^x}{1 + e^x} = -\frac{2e^x - 2}{1 + e^x} = -h(x).$$

Άρα η  $h$  περιττή.

## ΘΕΜΑ Γ

### Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις  $f$  και  $g$  για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο  $A(2, -1)$ .
- $\rho_1 = -1$  και  $\rho_2 = 5$  είναι δύο διαδοχικές ρίζες της  $g(x) = 0$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

β)  $g(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-1, 5)$ .

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$$

### Λύση

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ .

Τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$  που είναι άτοπο.

Άρα η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

β) Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $(-1, 5)$  και  $g(x) \neq 0$  στο  $(-1, 5)$  αφού  $-1$  και  $5$  είναι διαδοχικές ρίζες της  $g(x) = 0$ .

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(-1, 5)$ . Επίσης  $g(2) = -1 < 0$ . Οπότε  $g(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-1, 5)$ .

γ) Είναι:  $f(2) = -1 < 0$ . Άρα από α) είναι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Οπότε  $f(3) < 0$ . Επίσης από β)  $g(2) < 0$ .

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(3)}{g(2)} \cdot x \right) = -\infty.$$

## Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 1.$$

- i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .
- iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση  $f(x) = \alpha$  έχει μοναδική ρίζα.
- iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός  $\lambda > 0$  για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$$

### Λύση

i. Η συνάρτηση  $f$  έχει  $D_f = (0, +\infty)$ . Για κάθε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με

$$x_1 < x_2 \text{ έχουμε: } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^4 < x_2^4 \Rightarrow 2x_1^4 < 2x_2^4 \text{ και}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow 3\ln x_1 < 3\ln x_2 \Rightarrow 3\ln x_1 + 1 < 3\ln x_2 + 1$$

$$\text{άρα } 2x_1^4 + 3\ln x_1 + 1 < 2x_2^4 + 3\ln x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

ii. Η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f((0, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)).$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^4 + 3\ln x + 1) = 0 - \infty + 1 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^4 + 3\ln x + 1) = (+\infty) + (+\infty) + 1 = +\infty$

Επομένως είναι:  $f((0, +\infty)) = (-\infty, +\infty)$ .

iii. Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ , άρα η εξίσωση  $f(x) = \alpha$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ , έχει μοναδική ρίζα.

iv. Έχουμε:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow 2\lambda^4 + 1 = 3(\ln 1 - \ln \lambda) \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4 + 1 = -3\ln \lambda \Leftrightarrow 2\lambda^4 + 3\ln \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει μοναδικό  $\lambda > 0$  τέτοιο ώστε  $f(\lambda) = 0$ . Αυτό ισχύει αφού  $0 \in f((0, +\infty))$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

### Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει η σχέση:  $2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$  και στη συνέχεια να βρείτε την  $f^{-1}$ .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

#### Λύση

i.  $2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x) \Leftrightarrow 2f^3(x) + 3f(x) = 2x + 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Για  $x = x_0$  είναι  $2f^3(x_0) + 3f(x_0) = 2x_0 + 3$ .

Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2[f^3(x) - f^3(x_0)] + 3[f(x) - f(x_0)] = 2(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$2[f(x) - f(x_0)][f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)] + 3[f(x) - f(x_0)] = 2(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{2(x - x_0)}{2[f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)] + 3}$$

Αφού  $2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3 \neq 0$ , διότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς  $f(x)$  με διακρίνουσα:

$$\Delta = 4f^2(x_0) - 4 \cdot 2(2f^2(x_0) + 3) = 4f^2(x_0) - 16f^2(x_0) - 24 =$$

$$-12f^2(x_0) - 24 = -12[f^2(x_0) + 2] < 0$$

$$\text{Άρα: } |f(x) - f(x_0)| = \frac{2|x - x_0|}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3} \leq 2|x - x_0|.$$

$$\text{Οπότε } -2|x - x_0| \leq f(x) - f(x_0) \leq 2|x - x_0|$$

Αλλά  $\lim_{x \rightarrow x_0} [-2|x - x_0|] = \lim_{x \rightarrow x_0} [2|x - x_0|] = 0$  οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

ii. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία  $y = \alpha$  έχει με τη  $C_f$  ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση  $\alpha = f(x)$  έχει για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  λύση στο  $\mathbb{R}$ .

$$\alpha = f(x) \Leftrightarrow f(x) - \alpha = 0 \Leftrightarrow (f(x) - \alpha) \left( 2 \underbrace{\left( \overbrace{f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2}^* \right)}_{>0} + 3 \right) = 0, \quad (1)$$

(\*) την παράσταση  $f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2$  την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς  $f(x)$  έτσι έχουμε  $\Delta = -3\alpha^2 \leq 0 \Rightarrow f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 \geq 0 \Rightarrow f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 + 3 \geq 3 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow 2(f^3(x) - \alpha^3) + 3(f(x) - \alpha) = 0 \Leftrightarrow 2f^3(x) + 3f(x) = 2\alpha^3 + 3\alpha \Leftrightarrow$$

$$2x + 3 = 2\alpha^3 + 3\alpha \Leftrightarrow x = \frac{2\alpha^3 + 3\alpha - 3}{2}, \text{ δηλαδή για κάθε } \alpha \in \mathbb{R} \text{ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το } \mathbb{R}.$$

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \text{ τότε } f^3(x_1) = f^3(x_2) \Rightarrow 2f^3(x_1) = 2f^3(x_2).$$

$$\text{Επίσης } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3f(x_1) = 3f(x_2) \text{ και προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:}$$

$$2f^3(x_1) + 3f(x_1) = 2f^3(x_2) + 3f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Η  $f^{-1}$  έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της  $f$  που είναι το  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Είναι: } f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\text{Οπότε: } 2f^3(x) + 3f(x) = 2x + 3 \Leftrightarrow 2y^3 + 3y = 2f^{-1}(y) + 3$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{2x^3 + 3x - 3}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{iii. } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = f^{-1}(0) = \frac{2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0 - 3}{2} = -\frac{3}{2}$$

iv. Η  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  άρα και η  $f$ , οπότε τα κοινά τους σημεία είναι στην  $y = x$ .

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 3x - 3}{2} = x$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x - 3 = 2x \Leftrightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Παρατήρηση: Τις προτάσεις

A) Αν η  $f$  είναι γνησίως μονότονη τότε και η  $f^{-1}$  είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

B) Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ , (αν υπάρχουν), βρίσκονται στην ευθεία  $y = x$ .

Πρέπει να τις αποδεικνύουμε για να τις χρησιμοποιήσουμε σε μία άσκηση.

#### Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $2f(x) - \eta\mu f(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Να αποδείξετε ότι  $|2f(x) - x| \leq |f(x)|$ .

2. Να αποδείξετε ότι  $|f(x)| \leq |x|$ .

3. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

4. Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

#### Λύση

1. Από την υπόθεση έχουμε:

$$2f(x) - \eta\mu f(x) = x \Rightarrow 2f(x) - x = \eta\mu f(x) \Rightarrow |2f(x) - x| = |\eta\mu f(x)| \leq |f(x)| \quad (1)$$

2. Ισχύει

$$\begin{aligned} \|2f(x) - x\| &\leq |2f(x) - x| \stackrel{(1)}{\leq} |f(x)| \Rightarrow \|2f(x) - x\| \leq |f(x)| \Rightarrow \\ \Leftrightarrow -|f(x)| &\leq |2f(x) - x| \leq |f(x)| \Rightarrow |2f(x) - f(x)| \leq |x| \Rightarrow |f(x)| \leq |x| \end{aligned}$$

3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:  $|f(x)| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq f(x) \leq |x|$ , (2) όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \text{ οπότε η (2) από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

4. Θέτουμε  $f(x) = u$  και αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , τότε  $u \rightarrow 0$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

$$2f(x) - \eta\mu f(x) = x \stackrel{\gamma\iota\alpha\ x \neq 0}{\Rightarrow} 2 \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \left( 2 - \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right) = 1.$$

Όμως  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right) = 2 - 1 = 1 \neq 0$ , οπότε για  $x$  κοντά στο 0 θα ισχύει:

$$\frac{f(x)}{x} \left( 2 - \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right) = 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2 - \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 - \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}} = 1.$$

### Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(-1, 0)$  και  $B(2, 3)$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση  $f(2e^x + 1) = 3$ .
- iv. Να λύσετε την ανίσωση  $f(3x + 5) \leq 0$ .

### Λύση

i. Επειδή η  $f$  είναι γνησίως μονότονη και με  $-1 < 2$  είναι  $f(-1) = 0 < f(2) = 3$ , η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι:  $f(-1) = 0$  και επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα (άρα και 1-1) η τιμή που μηδενίζει την  $f$  είναι μοναδική. Επομένως για:

$$x < -1 \Rightarrow f(x) < f(-1) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$x > -1 \Rightarrow f(x) > f(-1) \Rightarrow f(x) > 0.$$

Άρα  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, -1)$  και  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (-1, +\infty)$ .

iii. Αφού η  $f$  είναι 1-1 έχουμε:

$$f(2e^x + 1) = 3 \Leftrightarrow f(2e^x + 1) = f(2) \Leftrightarrow 2e^x + 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

iv. Αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(3x + 5) \leq 0 \Leftrightarrow f(3x + 5) \leq f(-1) \Leftrightarrow 3x + 5 \leq -1 \Leftrightarrow 3x \leq -6 \Leftrightarrow x \leq -2.$$

## Άσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x + 1}{x - 1} = 2017$ .
- $|g(x) - 2| \leq |f(x) - 1|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 1.
- $f(x) = f(x+1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Να βρείτε τον αριθμό  $f(1)$ .
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο 1.
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 2.
4. Αν η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^2 g(x) = 3$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(1, 2)$ .

### Λύση

1. Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει:  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

Θέτουμε  $\frac{f(x) - 2x + 1}{x - 1} = h(x) \Rightarrow f(x) = (x - 1)h(x) + 2x - 1$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2017$ .

Έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)h(x) + 2x - 1] = 0 \cdot 2017 + 2 - 1 = 1$ . Άρα  $f(1) = 1$ .

2. Αφού η σχέση  $|g(x) - 2| \leq |f(x) - 1|$ , ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , θέτοντας  $x = 1$  παίρνουμε:  
 $|g(1) - 2| \leq |f(1) - 1| = 0 \Rightarrow g(1) - 2 = 0 \Rightarrow g(1) = 2$ .

Επίσης έχουμε:

$$|g(x) - 2| \leq |f(x) - 1| \Leftrightarrow -|f(x) - 1| \leq g(x) - 2 \leq |f(x) - 1| \Leftrightarrow 2 - |f(x) - 1| \leq g(x) \leq 2 + |f(x) - 1| \quad (1).$$

Όμως χρησιμοποιώντας ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$ , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2 - |f(x) - 1|) = \lim_{x \rightarrow 1} (2 + |f(x) - 1|) = 2, \text{ οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής η (1) μας}$$

δίνει:  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 = g(1)$ . Άρα η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο 1.

3. Αφού η σχέση  $f(x) = f(x+1)$ , ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , θέτοντας  $x = 1$  παίρνουμε:  
 $f(2) = f(1) = 1$ .

Θέτω:  $x+1=u$ , όταν  $x \rightarrow 1$  τότε  $u \rightarrow 2$   
Έχουμε:  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x+1) = \lim_{u \rightarrow 2} f(u)$ , οπότε

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 = f(2)$  που σημαίνει ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 2.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $t(x) = x^2 g(x) - 3$  που είναι συνεχής στο  $[1, 2]$ , ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης για  $x=2$  η σχέση  $|g(x) - 2| \leq |f(x) - 1|$  μας δίνει:  $|g(2) - 2| \leq |f(2) - 1| = 0 \Rightarrow g(2) = 2$ .

Έχουμε:  $t(1) = 1^2 g(1) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$  και  $t(2) = 2^2 g(2) - 3 = 4 \cdot 2 - 3 = 5 > 0$ , οπότε  $t(1)t(2) < 0$ . Άρα ισχύει το Θ. Bolzano οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε  $t(\xi) = 0 \Rightarrow \xi^2 g(\xi) = 3$ .

## Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

1. Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$ .
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή.
3. Αν η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι:
  - a. Η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται.
  - b. Ισχύει:  $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Λύση

1. Αφού η σχέση  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  ισχύει για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ , θέτουμε  $x = y = 0$  έτσι έχουμε:  $f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ .

2. Έστω  $x \in \mathbb{R}$ , τότε και  $-x \in \mathbb{R}$ . Θέτουμε στη σχέση  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  όπου  $y = -x$  και παίρνουμε:

$f(x-x) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ ,  
άρα η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή.

3.

a. Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ . (1)

Η σχέση  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  για  $x = x_1$  και  $y = -x_2$  γίνεται

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) + f(-x_2) \Leftrightarrow f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1 - x_2) = 0.$$

Αφού όμως η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$ , θα είναι υποχρεωτικά

$x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ , που σημαίνει ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

b. Έστω  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $f(x) = \alpha \Leftrightarrow x = f^{-1}(\alpha)$ ,  $f(y) = \beta \Leftrightarrow y = f^{-1}(\beta)$ , έτσι έχουμε  
 $\alpha + \beta = f(x) + f(y) = f(x+y) \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha + \beta) = x + y \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha + \beta) = f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta)$

Άρα  $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[-3, 3]$  για την οποία ισχύει  $3x^2 + 4f^2(x) = 27$  για κάθε  $x \in [-3, 3]$ .

- Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .
- Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $(-3, 3)$ .
- Να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .

iv. Αν επιπλέον  $f(1) = \sqrt{6}$  να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$ .

### Λύση

i. Αν  $\rho$  ρίζα της  $f(x) = 0$ , τότε έχουμε:

$$3\rho^2 + 4f^2(\rho) = 27 \Leftrightarrow \rho^2 = 9 \Leftrightarrow \rho = 3 \text{ ή } \rho = -3.$$

ii. Επειδή η συνάρτηση  $f$ , ως συνεχής στο  $[-3, 3]$ , είναι συνεχής στο  $(-3, 3)$  και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, διατηρεί πρόσημο στο  $(-3, 3)$ .

iii.

- Αν  $f(x) < 0$ , τότε από τη σχέση  $3x^2 + 4f^2(x) = 27$  έχουμε:

$$f(x) = -\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}, x \in [-3, 3]$$

- Αν  $f(x) > 0$ , τότε από τη σχέση  $3x^2 + 4f^2(x) = 27$  έχουμε:

$$f(x) = \frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}, x \in [-3, 3]$$

iv.  $f(1) = \sqrt{6} > 0$  άρα από το ερώτημα (Γ3) έχουμε:

$$f(x) = \frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}, x \in [-3, 3].$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{27-3x^2} - 3\sqrt{3}}{2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{27-3x^2-27}{2x(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{2(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})} = 0$$

### Άσκηση 9

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε:}$$

i. Το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x}.$

ii. Το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} x^7 \eta \mu \frac{2}{x}.$

iii. Το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

iv. Το  $f(0).$

### Λύση

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x + 9 - 9}{2x(\sqrt{x^2 + 2x + 9} + 3)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{2x(\sqrt{x^2 + 2x + 9} + 3)} = \frac{1}{6}$$

ii. Επειδή  $\left| \eta \mu \frac{2}{x} \right| \leq 1$  για κάθε  $x \neq 0$ , έχουμε:

$$\left| x^7 \eta \mu \frac{2}{x} \right| = |x^7| \cdot \left| \eta \mu \frac{2}{x} \right| \leq |x^7| \Leftrightarrow -|x^7| \leq x^7 \eta \mu \frac{2}{x} \leq |x^7|$$

Αλλά  $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x^7|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x^7| = 0$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^7 \eta \mu \frac{2}{x} \right) = 0$

iii. Για κάθε  $x > 0$  έχουμε:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3}}{x}$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x} = \frac{1}{3} \text{ (από i ερώτημα).}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^7 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{1}{3} \right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (από ii ερώτημα)}$$

$$\text{Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}$$

iv. Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$ , είναι συνεχής και στο  $x = 0$ . Άρα

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}.$$

### Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(2) = 5$ .

- i. Να βρείτε το  $f(5)$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- iii. Να βρείτε το  $f^{-1}(2)$ .
- iv. Να λύσετε την εξίσωση:  $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$ .

### Λύση

i. Η σχέση  $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$  ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  οπότε για  $x = 2$  έχουμε:

$$f(f(2)) + 2f(2) = 2 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow f(5) + 10 = 5 \Leftrightarrow f(5) = -5$$

ii. Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ , τότε έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \text{ (επειδή η } f \text{ είναι συνάρτηση) και}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2)$$

$$\text{άρα } f(f(x_1)) + 2f(x_1) = f(f(x_2)) + 2f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

οπότε η  $f$  είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

iii. Θέτουμε όπου  $x$  το  $f^{-1}(2)$  και έχουμε:

$$f(f(f^{-1}(2))) + 2f(f^{-1}(2)) = 2f^{-1}(2) + 1 \Rightarrow f(2) + 4 = 2f^{-1}(2) + 1 \Rightarrow$$

$$5 + 4 - 1 = 2f^{-1}(2) \Rightarrow f^{-1}(2) = 4.$$

iv. Έχουμε:

$$f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1 = f^{-1}(2) \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(2x^2 + 7x) = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x = f(5) \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -1 \text{ ή } x_2 = -\frac{5}{2}.$$

## Άσκηση 11

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε να ισχύει  $f(\alpha) = 2\beta$  και  $f(\beta) = 2\alpha$  με  $0 < \alpha < \beta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[\alpha, \beta]$ .
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  έτσι ώστε  $f(x_0) = \alpha + \beta$ .
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2x$ , έχει ακριβώς μια λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .

### Λύση

1. Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο  $[\alpha, \beta]$  και

$0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow 2\alpha < 2\beta \stackrel{\text{υπόθεση}}{\Leftrightarrow} f(\beta) < f(\alpha)$ , τότε η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[\alpha, \beta]$ .

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - \alpha - \beta$ , η οποία είναι συνεχής ( $f$  συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο  $[\alpha, \beta]$  γιατί αν,

$$x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \text{ με } x_1 < x_2 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - \alpha - \beta > f(x_2) - \alpha - \beta \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2).$$

Οπότε το σύνολο τιμών της  $g$  είναι

$$g([\alpha, \beta]) = [g(\beta), g(\alpha)] = [f(\beta) - \alpha - \beta, f(\alpha) - \alpha - \beta] = [\alpha - \beta, \beta - \alpha] \text{ και επειδή το}$$

$$0 \in \left[ \begin{array}{cc} \alpha - \beta & \beta - \alpha \\ - & + \end{array} \right], \text{ τότε υπάρχει ακριβώς (} g \text{ γνησίως φθίνουσα) ένα } x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ έτσι ώστε}$$

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \alpha + \beta$$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) - 2x$ , η οποία είναι συνεχής (αφού  $f$  συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο  $[\alpha, \beta]$  γιατί αν,

$$x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \text{ με } x_1 < x_2 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \text{ (1) και } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -2x_1 > -2x_2 \text{ (2).}$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) έχουμε:  $f(x_1) - 2x_1 > f(x_2) - 2x_2 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$

Οπότε το σύνολο τιμών της  $h$  είναι

$$h([\alpha, \beta]) = [h(\beta), h(\alpha)] = [f(\beta) - 2\beta, f(\alpha) - 2\alpha] = [2(\alpha - \beta), 2(\beta - \alpha)] \text{ και επειδή το}$$

$$0 \in \left[ \underbrace{2(\alpha - \beta)}_{-}, \underbrace{2(\beta - \alpha)}_{+} \right], \text{ τότε υπάρχει ακριβώς (} h \text{ γνησίως φθίνουσα) ένα } x_1 \in (\alpha, \beta) \text{ έτσι}$$

$$\text{ώστε } h(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 2x_1.$$

## Άσκηση 12

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει:  $f(x)g(x) = -e^x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Αν  $f(2017) > 0$ , να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

2. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(2017)x^4 + 3x^3 + 1}{(|\theta| - |\eta\mu\theta|)x^3 + (\theta - 1)x - 1}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

3. Αν  $f(1) < e$  και  $g(-2) > -2$ , να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  τέμνει την ευθεία  $y = x$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (-2, 1)$ .

### Λύση

1. Είναι  $f(x)g(x) = -e^x < 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα  $f(x)g(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επομένως οι συναρτήσεις  $f, g$  δεν έχουν ρίζες στο  $\mathbb{R}$  και αφού είναι και συνεχείς θα διατηρούν σταθερό πρόσημο, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και μάλιστα ετερόσημες.

Η συνάρτηση  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το  $\mathbb{R}$  και επειδή  $f(2017) > 0$ , θα είναι  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα η  $g(x) < 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Αφού  $g(x) < 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε  $g(2017) < 0$ .

- Αν  $\theta = 0$  τότε  $|\eta\mu\theta| = |\theta| \Leftrightarrow |\theta| - |\eta\mu\theta| = 0$  και το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(2017)x^4 + 3x^3 + 1}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(2017)x^4}{-x} = -g(2017) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = -g(2017)(+\infty) \stackrel{g(2017) < 0}{=} +\infty$$

- Αν  $\theta \neq 0$  τότε  $|\eta\mu\theta| < |\theta| \Leftrightarrow |\theta| - |\eta\mu\theta| > 0$  και το όριο γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(2017)x^4 + 3x^3 + 1}{(|\theta| - |\eta\mu\theta|)x^3 + (\theta - 1)x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(2017)x^4}{(|\theta| - |\eta\mu\theta|)x^3} = \frac{g(2017)}{|\theta| - |\eta\mu\theta|} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \\ &= \frac{g(2017)}{|\theta| - |\eta\mu\theta|} (+\infty) \stackrel{g(2017) < 0}{=} \stackrel{|\theta| - |\eta\mu\theta| > 0}{=} -\infty. \end{aligned}$$

3. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση  $g(x) = x$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο  $(-2, 1)$ .

Έστω η συνάρτηση  $h(x) = g(x) - x$ , η οποία είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) στο  $[-2, 1]$ .

Είναι  $h(1) = g(1) - 1 < -1 - 1 = -2 < 0$ , γιατί:  $f(1)g(1) = -e \Leftrightarrow g(1) = \frac{-e}{f(1)} < -1$  αφού

$$f(1) < e \Leftrightarrow \frac{e}{f(1)} > 1 \Leftrightarrow -\frac{e}{f(1)} < -1.$$

Επίσης  $h(-2) = g(-2) + 2 > -2 + 2 = 0 \Leftrightarrow h(-2) > 0$ .

Άρα η  $h$  είναι συνεχής στο  $[-2,1]$  και  $h(-2)h(1) < 0$ , οπότε ισχύει το Θ.Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (-2,1)$  τέτοιο ώστε  $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = x_0$ .

### Άσκηση 13

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) = \alpha^{2x} + 2\alpha^x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ .

i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

ii. Αν  $f(0) = -2$  να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

iii. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$ ,  $\alpha < 2$ .

iv. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$ ,  $\alpha > 3$

### Λύση

i. Είναι  $f^2(x) = \alpha^{2x} + 2\alpha^x + 1 = (\alpha^x + 1)^2 \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα, η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

ii. Επειδή  $f(0) = -2$  είναι  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Άρα  $f(x) = -(\alpha^x + 1) = -\alpha^x - 1$

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2\alpha^x - 2 - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \cdot \left[ -2\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x - 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 \right]}{3^x \cdot \left[ 3\left(\frac{2}{3}\right)^x + 4 \right]} = \frac{-1}{4}$ , αφού  $0 < \frac{\alpha}{3} < 1$ ,  $0 < \frac{1}{3} < 1$  και  $0 < \frac{2}{3} < 1$  άρα

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{3}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^x - 2 - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x \cdot \left[ -2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)^x - 2 \left( \frac{1}{2} \right)^x - \left( \frac{3}{2} \right)^x \right]}{2^x \left[ 3 + 4 \left( \frac{3}{2} \right)^x \right]} = -\infty, \text{ αφού } \frac{\alpha}{2} > 1, \frac{3}{2} > 1 \text{ και } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{2} \right)^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^x = +\infty$$

### Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

i. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$  και  $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$ .

ii. Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$ .

iii. Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}$ .

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in [0, 1]$  τέτοιο, ώστε  $f(\xi) - \xi = 0$ .

### Λύση

i. Η σχέση  $x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2$  ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Για  $x = 0$ , έχουμε:

$$1 \leq 4f(0) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$$

Για  $x = 1$ , έχουμε:

$$2 \leq 4f(1) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$$

ii. Για  $x \neq 0$ , θέτουμε όπου  $x$  το  $\frac{1}{x}$  στη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4 + 1 \leq 4f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^4 \leq x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^4$$

Είναι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^4\right) = \frac{1}{4}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^4\right) = \frac{1}{4}$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4 \frac{\eta\mu 3x}{x}}{2x + 3 \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{\frac{1}{4} + 4 \cdot 3}{0 + 3} = \frac{49}{12}$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0} x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4} \text{ (από ii), } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 3 \cdot 1 = 3$$

iv. Έστω  $g(x) = f(x) - x$

Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ . Επίσης ισχύει:

$$g(0) \cdot g(1) = f(0) \cdot [f(1) - 1] < 0 \text{ αφού } \frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(0) > 0 \text{ και } \frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4} \Rightarrow f(1) < 1.$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο ώστε  $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \xi = 0$

### Άσκηση 15

i. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 4}{x} = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

ii. Δίνεται η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$xg(x) + 2 \leq 2\sin x - \eta\mu x + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ , αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2 x + x^2 g(x)}$

### Λύση

i. Θέτουμε:  $h(x) = \frac{2f(x) - 4}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{xh(x) + 4}{2}$

Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xh(x) + 4}{2} = 2$$

ii. Είναι:

$$xg(x) + 2 \leq 2\sin x - \eta\mu x + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε έχουμε: } xg(x) \leq 2\sin x - \eta\mu x + x - 2$$

- Αν  $x > 0$ , τότε:  $g(x) \leq \frac{2\sin x - \eta\mu x + x - 2}{x} \Leftrightarrow g(x) \leq \frac{2(\sin x - 1)}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} + 1$  και

$$\text{επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \leq 2 \cdot 0 - 1 + 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \leq 0.$$

- Αν  $x < 0$ , τότε:  $g(x) \geq \frac{2\sin x - \eta\mu x + x - 2}{x} \Leftrightarrow g(x) \geq \frac{2(\sin x - 1)}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} + 1$  και

επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \geq 2 \cdot 0 - 1 + 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \geq 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta \mu^2(2x)}{\epsilon \phi^2 x + x^2 g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \left[ f^2(x) + \frac{\eta \mu^2(2x)}{x^2} \right]}{x^2 \left[ \left( \frac{\epsilon \phi x}{x} \right)^2 + g(x) \right]} = \frac{4+4}{1+0} = 8.$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2(2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\eta \mu^2(2x)}{(2x)^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta \mu(2x)}{(2x)} \right)^2 = 4 \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{\eta \mu u}{u} \right)^2 = 4 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\epsilon \phi x}{x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = 1$$

## Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $3f(x) + 2f^3(x) = 4x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$  και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.
- Να αποδείξετε ότι η  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ , αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση  $y = x$ .
- Να λυθεί η εξίσωση:  $f(2e^{x-1}) = f(3-x)$ .

### Λύση

i. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία  $y = \alpha$  έχει με τη  $C_f$  ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση  $\alpha = f(x)$  έχει για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  λύση στο  $\mathbb{R}$ .

$$\alpha = f(x) \Leftrightarrow f(x) - \alpha = 0 \Leftrightarrow (f(x) - \alpha) \left( 2 \underbrace{\left( \overbrace{f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2}^* \right)}_{>0} + 3 \right) = 0, \quad (1)$$

(\*) την παράσταση  $f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2$  την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς  $f(x)$  έτσι έχουμε  $\Delta = -3\alpha^2 \leq 0 \Rightarrow f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 \geq 0 \Rightarrow f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 + 3 \geq 3 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow 2f^3(x) - 2\alpha^3 + 3f(x) - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow 2f^3(x) + 3f(x) = 2\alpha^3 + 3\alpha \Leftrightarrow$$

$4x + 1 = 2\alpha^3 + 3\alpha \Leftrightarrow x = \frac{2\alpha^3 + 3\alpha - 1}{4}$ , δηλαδή για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το  $\mathbb{R}$ .

Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ , τότε έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2) \Rightarrow 2f^3(x_1) = 2f^3(x_2)$$

$$\text{και } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3f(x_1) = 3f(x_2)$$

$$\text{άρα } 2f^3(x_1) + 3f(x_1) = 2f^3(x_2) + 3f(x_2) \Rightarrow 4x_1 + 1 = 4x_2 + 1$$

οπότε η  $f$  είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε όπου  $x$  το  $f^{-1}(x)$  στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$3f(f^{-1}(x)) + 2[f(f^{-1}(x))]^3 = 4f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow$$

$$3x + 2x^3 = 4f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x^3 + 3x - 1}{4}.$$

ii. Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1$$

άρα

$$2x_1^3 + 3x_1 - 1 < 2x_2^3 + 3x_2 - 1 \Rightarrow \frac{2x_1^3 + 3x_1 - 1}{4} < \frac{2x_2^3 + 3x_2 - 1}{4} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2),$$

οπότε  $f^{-1}$  γνησίως αύξουσα.

iii. Έχουμε:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^3 + 3x - 1}{4} = x \Leftrightarrow 2x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

iv. Η  $f$  είναι 1-1, οπότε έχουμε:

$$f(2e^{x-1}) = f(3-x) \Leftrightarrow 2e^{x-1} = 3-x \Leftrightarrow 2e^{x-1} + x - 3 = 0 \quad (1)$$

Η (1) έχει προφανή ρίζα την  $x = 1$ .

Έστω  $g(x) = 2e^{x-1} + x - 3$ . Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow e^{x_1-1} < e^{x_2-1} \Rightarrow 2e^{x_1-1} < 2e^{x_2-1}$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3$$

$$\text{άρα } 2e^{x_1-1} + x_1 - 3 < 2e^{x_2-1} + x_2 - 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Οπότε  $g$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . Επομένως η ρίζα  $x = 1$  είναι μοναδική.

### Άσκηση 17

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε να ισχύει

$$f^2(x) + 4\eta\mu^2 x = x^2 - 3x + 4f(x)\eta\mu x + 10, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 2\eta\mu x$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$  αν  $f(0) = \sqrt{10}$ .

iii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - 1 - \sqrt{10}}{x}$ .

### Λύση

i. Είναι:

$$f^2(x) + 4\eta\mu^2 x = x^2 - 3x + 4f(x)\eta\mu x + 10 \Leftrightarrow$$

$[f(x) - 2\eta\mu x]^2 = x^2 - 3x + 10 > 0$ , (1) γιατί  $\Delta = 9 - 40 = -31 < 0$  που σημαίνει ότι το τριώνυμο  $x^2 - 3x + 10$  είναι ομόσημο του  $1 > 0$ . Οπότε  $f(x) - 2\eta\mu x \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και αφού η  $g(x) = f(x) - 2\eta\mu x$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

ii. Είναι:  $f(0) = \sqrt{10}$ , οπότε  $g(0) = f(0) - 2\eta\mu 0 = f(0) = \sqrt{10} > 0$  και από (i) έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - 2\eta\mu x > 0. \text{ Άρα } f(x) - 2\eta\mu x = \sqrt{x^2 - 3x + 10} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 10} + 2\eta\mu x.$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{10} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 10} + 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{10} - 1}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 10} - \sqrt{10}}{x} + 2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) \stackrel{(*)}{=} -\frac{3\sqrt{10}}{20} + 2 + 0 = -\frac{3\sqrt{10}}{20} + 2.$$

$$\stackrel{(*)}{\lim_{x \rightarrow 0}} \left( \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 10} - \sqrt{10}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 10} - \sqrt{10})(\sqrt{x^2 - 3x + 10} + \sqrt{10})}{x(\sqrt{x^2 - 3x + 10} + \sqrt{10})} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 3x}{x(\sqrt{x^2 - 3x + 10} + \sqrt{10})} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 3x + 10} + \sqrt{10}} \right) = \frac{-3}{2\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

$$\stackrel{(*)}{\lim_{x \rightarrow 0}} \left( 2 \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 2 \cdot 1 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 0$$

### Άσκηση 18

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$  και  $g(x) = 2 - x$ .

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .
- Να ορισθεί η συνάρτηση  $fo g$ .
- Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ .
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης  $fofo g$ .

#### Λύση

i. Για να ορίζεται η  $f$ , πρέπει:  $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το:  $D_f = [-1, +\infty)$ .

Το πεδίο ορισμού της  $g$  είναι το:  $D_g = \mathbb{R}$  (πολυωνυμική)

ii. Το πεδίο ορισμού της  $fo g$  είναι:

$$D_{fo g} = \{x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq -1\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\} = (-\infty, 3] \neq \emptyset$$

Άρα για κάθε  $x \in (-\infty, 3]$  έχουμε:

$$(fo g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2-x+1} - 1 = \sqrt{3-x} - 1$$

iii. Για κάθε  $x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$  έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1+1} - 1 = \sqrt{x_2+1} - 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα, η  $f$  αντιστρέφεται.

Έστω  $f(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1} - 1 \Leftrightarrow y+1 = \sqrt{x+1}$ , (πρέπει  $y \geq -1$ )  $\Leftrightarrow x = (y+1)^2 - 1$  οπότε  $f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 1$  με  $x \geq -1$

iv. Για κάθε  $x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x_1+1} - 1 < \sqrt{x_2+1} - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) .$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα.

$$D_{f \circ f \circ g} = D_{f \circ (f \circ g)} = \left\{ x \in (-\infty, 3] / \sqrt{3-x} - 1 \geq -1 \right\} = (-\infty, 3] \neq \emptyset .$$

Για κάθε  $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$  με

$$x_1 < x_2 \quad \overset{g \text{ γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} \quad g(x_1) > g(x_2) \quad \overset{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} \quad f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow$$

$$f(f(g(x_1))) > f(f(g(x_2))) .$$

Άρα η συνάρτηση  $f \circ f \circ g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 3]$ .

### Άσκηση 19

$$\text{Δίνεται η συνεχής συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa \eta \mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

- Να βρείτε τα  $\kappa, \lambda$ .
- Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2 \ln(8x + 1)$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

### Λύση

i. Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο  $x_0 = 0$

$$f : \text{συνεχής στο } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2x + \kappa \eta \mu x}{x - x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + \kappa \cdot \frac{\eta \mu x}{x}}{1 - x} = \frac{2 + \kappa \cdot 1}{1} = 2 + \kappa$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x \right) = 4$$

$$f(0) = \lambda$$

$$\text{Άρα: } \lambda = 4 \text{ και } 2 + \kappa = 4 \Leftrightarrow \kappa = 2$$

$$\text{ii. Για } \kappa = 2 \text{ και } \lambda = 4 \text{ έχουμε: } f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 2\eta \mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ 4, & x = 0 \text{ οπότε:} \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 + x + 16 - 9x^2}{\sqrt{8x^2 + x + 16} + 3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( -1 + \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2} \right)}{x \left( \sqrt{8 + \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}} + 3 \right)} = (+\infty) \left( \frac{-1}{\sqrt{8} + 3} \right) = -\infty$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 2\eta\mu x}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + 2\frac{\eta\mu x}{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{1 - x} \left( 2 + 2\frac{\eta\mu x}{x} \right) \right] = 0,$$

$$\text{αφού: } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \frac{-1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0, \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 2\ln(8x+1)$ ,  $x \in [0,1]$

Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  (ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών)

Επίσης:

$$g(0) = f(0) = 4 > 0$$

$$g(1) = f(1) - 2\ln 9 = 2 - 2\ln 9 = 2\ln \frac{e}{9} < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2\ln(8x+1)$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0,1)$ .

## Άσκηση 20

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{\kappa x + 1}{2(x^2 - 4)}, & x \in (2, +\infty) \end{cases} \quad \text{και η } g: \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x \cdot g(x) + 2x}{3x} = 5 \text{ και } g(x+3) = g(x) + f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- i. Το  $\kappa$  αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .
- ii. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
- iii. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .
- iv. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ .

### Λύση

$$\text{i. Είναι: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)} = -\frac{1}{16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\kappa x + 1}{2(x-2)(x+2)}$$

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 2^+} (\kappa x + 1) = 2\kappa + 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 2^+} 2(x-2)(x+2) = 0$$

$$\text{Αν } 2\kappa + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq -\frac{1}{2} \text{ τότε το } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty.$$

$$\text{Αν } 2\kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{2} \text{ τότε έχουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{1}{2}x + 1}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{16}.$$

Δηλαδή υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  αν και μόνο αν  $\kappa = -\frac{1}{2}$

ii. Είναι:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)} = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$$h(x) = \frac{\eta\mu x g(x) + 2x}{3x} \Leftrightarrow \eta\mu x g(x) = 3xh(x) - 2x \text{ και για } x \neq 0 \text{ έχουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3xh(x) - 2x}{\eta\mu x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 15 - 2 = 13$$

iv. Είναι:  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) \stackrel{x=u+3}{=} \lim_{u \rightarrow 0} g(u+3) = \lim_{u \rightarrow 0} [g(u) + f(u)] = 13 + (-\infty) = -\infty$

## ΘΕΜΑ Δ

### Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = -2x^5 - 2kx^3 + 2k^5$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $k > 0$ .

α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0, k)$ .

δ) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x) + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lambda^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τη καμπύλη στην οποία βρίσκονται τα σημεία  $M(k, \lambda)$ .

### Λύση

α) Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow -2x_1^5 > -2x_2^5 \quad (1) \text{ και}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \xRightarrow{-2k < 0} -2kx_1^3 > -2kx_2^3 \Rightarrow -2kx_1^3 + 2k^5 > -2kx_2^3 + 2k^5. \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) έχουμε:  $-2x_1^5 - 2kx_1^3 + 2k^5 > -2x_2^5 - 2kx_2^3 + 2k^5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

β) Η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right). \text{ Είναι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^5 - 2kx^3 + 2k^5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^5) = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 - 2kx^3 + 2k^5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5) = -2(-\infty) = +\infty$$

Επομένως είναι:  $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$

γ) Για τη συνεχή συνάρτηση  $f$  στο  $[0, k]$ , ισχύουν:

- $f(0) = 2k^5 > 0$
- $f(k) = -2k^5 - 2k^4 + 2k^5 = -2k^4 < 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, k)$  και επειδή η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  η ρίζα είναι μοναδική.

δ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x) + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 + 2kx^3 - 2k^5 + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(2x^2 + 2k)}{\eta\mu^3 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2k}{\frac{\eta \mu^3 x}{x^3}} = 2k = \lambda^2, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1.$$

Δηλαδή οι συντεταγμένες των σημείων  $M(k, \lambda)$ , ικανοποιούν την εξίσωση:  $y^2 = 2x$ .

Άρα ανήκουν σε μία παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 2x$ .

## Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 3\ln 2x + e^{3x} + 4x - 2$ .

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την  $f$ .

ii. Να υπολογίσετε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

iii. Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = e^{\frac{3}{2}}$

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό  $\mu$  για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu - 3\ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2 + 1)} - e^{6\mu} - 8\mu$$

### Λύση

i. Η συνάρτηση  $f$  έχει  $D_f = (0, +\infty)$ . Για κάθε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow \ln 2x_1 < \ln 2x_2 \Rightarrow 3\ln 2x_1 < 3\ln 2x_2$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow e^{3x_1} < e^{3x_2}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2 \Rightarrow 4x_1 - 2 < 4x_2 - 2.$$

$$\text{Άρα } 3\ln 2x_1 + e^{3x_1} + 4x_1 - 2 < 3\ln 2x_2 + e^{3x_2} + 4x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

ii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3\ln 2x + e^{3x} + 4x - 2) = -\infty + 1 + 0 - 2 = -\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \ln 2x = \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty, \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} e^{3x} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3\ln 2x + e^{3x} + 4x - 2) = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 2x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

iii.  $f(x) = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ , (αφού η  $f$  γνησίως αύξουσα άρα και 1-1) και η ρίζα είναι μοναδική.

iv. Είναι:

$$3\ln 4\mu - 3\ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2 + 1)} - e^{6\mu} - 8\mu \Leftrightarrow$$

$$3\ln 4\mu + e^{6\mu} + 8\mu = 3\ln 2(\mu^2 + 1) + e^{3(\mu^2 + 1)} + 4(\mu^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$3\ln 2 \cdot (2\mu) + e^{3(2\mu)} + 4 \cdot (2\mu) - 2 = 3\ln 2(\mu^2 + 1) + e^{3(\mu^2 + 1)} + 4(\mu^2 + 1) - 2 \Leftrightarrow$$

$$f(2\mu) = f(\mu^2 + 1) \Leftrightarrow \mu^2 + 1 = 2\mu \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ (Διπλή ρίζα).}$$

### Άσκηση 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

i. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

ii. Να βρείτε το  $f(1)$ .

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = x - 1$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0,1)$ .

### Λύση

i. Ισχύει:  $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

- Για  $x > 0$ , έχουμε:  $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 \leq 3\eta\mu x - 2xf(x) \leq \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\text{αλλά: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \frac{3}{2} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \frac{3}{2}$$

- Για  $x < 0$ , έχουμε:  $\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x}$  αλλά  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \frac{3}{2}$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \frac{3}{2}$$

οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{2}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{2} \text{ και επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}.$$

ii. Η σχέση  $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$  ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα και για  $x = 0$  οπότε έχουμε:  $4f(0) + 3f(1) = -2013$ . Αλλά  $f$  συνεχής οπότε:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Άρα } 4 \cdot \frac{3}{2} + 3f(1) = -2013 \Leftrightarrow f(1) = -673.$$

iii. Αρκεί να υπάρχει  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0$

Έστω  $h(x) = f(x) - g(x)$ ,  $x \in [0,1]$ . Είναι:

$$h(0) = f(0) - g(0) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$$

$$h(1) = f(1) - g(1) = -673 < 0$$

$$\text{Οπότε: } h(0)h(1) = -\frac{673}{2} < 0$$

Επειδή η  $h$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = g(x_0)$ .

#### Άσκηση 4

Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $4\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4$ , για κάθε  $x \in (0, 2)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = 5$ .

1. Να βρείτε τους αριθμούς  $f(0)$  και  $f(2)$ .

2. Αν  $g(x) = 4 - e^x - f(x)$ ,  $x \in (0, 2)$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $t(x) = \ln(-f(x) + 4)$ ,  $x \in (0, 2)$  τέμνει την  $y = x$  σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 2)$ .

#### Λύση

1. Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  θα είναι συνεχής και στα άκρα 0 και 2, οπότε θα ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .

- $4\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4 \xrightarrow{x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0} x+2 \leq f(x) \leq 4 \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}$  (1)  
Όμως  $\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} 4 \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \xrightarrow{x-2=u, x \rightarrow 2 \Rightarrow u \rightarrow 0} = 4 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 4$ , οπότε η (1) από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ . Άρα  $f(2) = 4$ .
- Θέτουμε  $\frac{f(x)+1}{x} = s(x) \Rightarrow f(x) = xs(x) - 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = 5$ .  
Έχουμε:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xs(x) - 1) = 0 \cdot 5 - 1 = -1$ . Άρα  $f(0) = -1$ .

2. Έστω  $x_1, x_2 \in (0, 2)$  με  $x_1 < x_2$ .

Τότε:  $x_1 < x_2 \xrightarrow{f \uparrow} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) > -f(x_2)$  (2) και

$x_1 < x_2 \xrightarrow{e^x \uparrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 4 - e^{x_1} > 4 - e^{x_2}$  (3).

Προσθέτοντας τις (2) και (3) έχουμε:  $4 - e^{x_1} - f(x_1) > 4 - e^{x_2} - f(x_2) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$  που σημαίνει ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A = (0, 2)$ .

Αφού η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής (άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) και γνησίως φθίνουσα στο  $A = (0, 2)$ , το σύνολο τιμών της θα είναι:  $g(A) = \left( \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right) = (-e^2, 4)$  γιατί

$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - e^x - f(x)) = 4 - e^2 - 4 = -e^2$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - e^x - f(x)) = 4 - e^0 + 1 = 4$ .

3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, 2)$  έτσι ώστε να ισχύει:  $t(x_0) = x_0$ . Είναι:

$$t(x_0) = x_0 \Leftrightarrow \ln(-f(x_0) + 4) = x_0 \Leftrightarrow e^{x_0} = -f(x_0) + 4 \Leftrightarrow 4 - f(x_0) - e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = 0$$

Επειδή το  $0 \in g(A) = (-e^2, 4)$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $A = (0, 2)$ , υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, 2)$  τέτοιο ώστε  $g(x_0) = 0$ . Άρα και  $t(x_0) = x_0$ .

### Άσκηση 5

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) = x^2 + x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$ .

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα  $x'x$ .
2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = -\sqrt{x^2 + x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - f(x))$ .
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο  $g(x) = x - f(x)$ , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(-\infty, 0)$ .

### Λύση

1. Είναι  $x^2 + x + 1 > 0$  γιατί  $\Delta = -3 < 0$  που σημαίνει ότι το τριώνυμο είναι ομόσημο του  $1 > 0$ .  
Άρα  $f^2(x) = x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow f^2(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$  και επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , τότε:  $f(x) < 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ή  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα η  $f$  δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα  $x'x$ .

2. Αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+f(x)}{x} \cdot x - 1 \right) = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1 < 0$ , θα υπάρχει  $x_1$  (κοντά στο 0) με  $f(x_1) < 0$  και λαμβάνοντας υπόψη το (1) ερώτημα θα έχουμε  $f(x) < 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
Οπότε:  $f^2(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{x^2 + x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - f(x)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x + 1})(x + \sqrt{x^2 + x + 1})}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 1}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. Αφού,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - f(x)) = -\frac{1}{2} < 0$ , υπάρχει  $\rho_1$  κοντά στο  $(-\infty)$  έτσι ώστε  $g(\rho_1) < 0$ .

Αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - f(x)) = 0 + 1 = 1 > 0$ , υπάρχει  $\rho_2$  κοντά στο 0 έτσι ώστε  $g(\rho_2) > 0$ .

Έχουμε  $g(\rho_1)g(\rho_2) < 0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[\rho_1, \rho_2] \subseteq (-\infty, 0)$ , οπότε ισχύει το Θ. Bolzano άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα  $x_0 \in (\rho_1, \rho_2): g(x_0) = 0$ .

## Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Αν  $1 < f(x) < e$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = e^x$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0,1)$ .

2. Αν  $f(0) > 1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = e^x + x \eta \mu \frac{1}{x}$  έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

3. Αν  $f(k) + f(2k) = 4k$ ,  $k > 0$  και η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση:  $\frac{f(x) - k}{x - 2k} = \frac{f(x) - 2k}{x - k}$ , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(k, 2k)$ .

4. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $g: [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f(x) - x$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in [1,3]$  έτσι ώστε  $g(\xi) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6} - \frac{7}{3}$ .

## Λύση

1. Έστω  $h(x) = f(x) - e^x$ ,  $x \in [0,1]$ .

- Αφού η σχέση  $1 < f(x) < e$ , ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  θέτοντας  $x = 0$  και  $x = 1$  παίρνουμε:  $1 < f(0) < e$  και  $1 < f(1) < e$ , αντίστοιχα.
- Είναι  $h(0) = f(0) - e^0 > 1 - 1 = 0 \Rightarrow h(0) > 0$  και  $h(1) = f(1) - e^1 < e - e = 0 \Rightarrow h(1) < 0$ , οπότε ισχύει:  $h(0)h(1) < 0$ .
- Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Από τα παραπάνω ισχύει το Θ. Bolzano για την  $h$ , οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο ώστε  $h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = e^{x_0}$ .

2. Έστω  $\varphi(x) = f(x) - e^x - x \eta \mu \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$  η οποία είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο  $(0, +\infty)$ .

- Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \eta \mu \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x} = u, u \rightarrow +\infty}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu u}{u} = 0$ , αφού:  
 $\left| \frac{\eta \mu u}{u} \right| \leq \frac{1}{|u|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|u|} \leq \frac{\eta \mu u}{u} \leq \frac{1}{|u|}$  και  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|u|}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|u|}\right) = 0$ , οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu u}{u} = 0$ .

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - e^x - x\eta\mu \frac{1}{x}) = f(0) - 1 - 0 = f(0) - 1 > 0$ . Τότε θα υπάρχει  $x_1$  κοντά στο 0 ώστε  $\varphi(x_1) > 0$ .

$$\bullet \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\eta\mu \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x}=u, u \rightarrow 0}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - e^x - x\eta\mu \frac{1}{x}) = 0 - (+\infty) - 1 = -\infty$ . Τότε θα υπάρχει  $x_2$  κοντά στο  $+\infty$  ώστε  $\varphi(x_2) < 0$ .

- Είναι  $\varphi(x_1)\varphi(x_2) < 0$  και η συνάρτηση  $\varphi$  συνεχής στο  $[x_1, x_2] \subseteq (0, +\infty)$ , ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (0, +\infty)$ , με  $x_0 > 0$ , τέτοιο ώστε  $\varphi(x_0) = 0$ .

3. Έστω  $t(x) = (f(x) - k)(x - k) - (f(x) - 2k)(x - 2k)$ ,  $x \in [k, 2k]$ ,  $k > 0$ .

- Είναι  $t(k) = -(f(k) - 2k)(k - 2k) = k(f(k) - 2k) < 0$ , γιατί  
 $k < 2k \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(k) < f(2k) = 4k - f(k) \Leftrightarrow 2f(k) < 4k \Leftrightarrow f(k) - 2k < 0$  και  $k > 0$ .
- $t(2k) = (f(2k) - k)(2k - k) = k(f(2k) - k) > 0$ , γιατί:  
 $k < 2k \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(k) < f(2k) \Leftrightarrow f(2k) > f(k) = 4k - f(2k) \Leftrightarrow 2f(2k) > 4k \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow f(2k) > 2k > k \Leftrightarrow f(2k) - k > 0$  και  $k > 0$ .
- Είναι  $t(k)t(2k) < 0$  και η συνάρτηση  $t$  συνεχής στο  $[k, 2k]$ , ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει  $\xi \in (k, 2k)$ , τέτοιο ώστε  $t(\xi) = 0$ .

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x$ , η οποία είναι συνεχής στο  $[1, 3]$ . Τότε θα υπάρχει μια ελάχιστη τιμή  $m$  και μία μέγιστη τιμή  $M$  δηλαδή υπάρχουν  $x_1, x_2 : m = g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2) = M$  (1), για κάθε  $x \in [1, 3]$ .

Θέτουμε στην (1), όπου  $x = 1, 2, 3$ , έτσι έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} g(x_1) \leq g(1) \leq g(x_2) \\ g(x_1) \leq g(2) \leq g(x_2) \\ g(x_1) \leq g(3) \leq g(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g(x_1) \leq g(1) \leq g(x_2) \\ 2g(x_1) \leq 2g(2) \leq 2g(x_2) \\ 3g(x_1) \leq 3g(3) \leq 3g(x_2) \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 6g(x_1) \leq g(1) + 2g(2) + 3g(3) \leq 6g(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1) \leq \frac{g(1) + 2g(2) + 3g(3)}{6} \leq g(x_2)$$

$$1^{\text{η}} \text{ Περίπτωση: Αν } g(x_1) = \frac{g(1) + 2g(2) + 3g(3)}{6} \Rightarrow \xi = x_1$$

$$2^{\text{η}} \text{ Περίπτωση: Αν } g(x_2) = \frac{g(1) + 2g(2) + 3g(3)}{6} \Rightarrow \xi = x_2$$

3<sup>η</sup> Περίπτωση: Αν  $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow g = \text{σταθερή}$ , οπότε  $\xi$  είναι κάθε σημείο του διαστήματος  $[1, 3]$ .

**4<sup>η</sup> Περίπτωση:** Αν  $g(x_1) < \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} < g(x_2)$ .

Δηλαδή το  $\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} \in (g(x_1), g(x_2))$ , οπότε από Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα

υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, 3)$  έτσι ώστε

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} = \frac{f(1)-1+2(f(2)-2)+3(f(3)-3)}{6} = \\ &= \frac{f(1)-1+2f(2)-4+3f(3)-9}{6} = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in [1, 3]$  έτσι ώστε

$$g(\xi) = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - \frac{7}{3}.$$

## Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύουν:

- $f(e^{f(x)}) = \ln x + 2$ , για κάθε  $x > 0$  και
- $(f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln x + 1)^2$  για κάθε  $x > \frac{1}{e}$ .

1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

2. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2\ln(x-1)$ ,  $x > 1$ .

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(f \circ f)(x) = f(e^{-x} + 2)$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο  $(1+e, 1+e^{\frac{3}{2}})$ .

### Λύση

1. Έστω

$$x_1, x_2 > 0 \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \Rightarrow f(e^{f(x_1)}) = f(e^{f(x_2)}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x_1 + 2 = \ln x_2 + 2 \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1.

$$2. (f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln x + 1)^2 \Leftrightarrow f(f(e^{f(x)})) = 2\ln(\ln x + 1) \Leftrightarrow f(\ln x + 2) = 2\ln(\ln x + 1) \quad (1)$$

Θέτουμε:  $\ln x + 2 = y \Leftrightarrow \ln x + 1 = y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1$  και η (1) γίνεται:

$$f(\ln x + 2) = 2\ln(\ln x + 1) \Rightarrow f(y) = 2\ln(y-1), \quad y > 1. \text{ Άρα } f(x) = 2\ln(x-1), \quad x > 1.$$

3. Το πεδίο ορισμού της  $f \circ f$  είναι:

$$\{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f\} = \{x > 1 \text{ και } 2\ln(x-1) > 1\} = \{x > 1 \text{ και } x > 1 + \sqrt{e}\} = (1 + \sqrt{e}, +\infty)$$

$$(f \circ f)(x) = f(e^{-x} + 2) \Leftrightarrow f(f(x)) = f(e^{-x} + 2) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow 2\ln(x-1) = e^{-x} + 2$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x-1) - e^{-x} - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = 2\ln(x-1) - e^{-x} - 2$  και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο

διάστημα  $[1+e, 1+e^{\frac{3}{2}}]$

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[1+e, 1+e^{\frac{3}{2}}] \subseteq (1+\sqrt{e}, +\infty)$ , ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

- $g(e+1) = 2\ln(e+1-1) - e^{-(e+1)} - 2 = 2 \cdot 1 - \frac{1}{e^{e+1}} - 2 = -\frac{1}{e^{e+1}} < 0$

- $g(1+e^{\frac{3}{2}}) = 2\ln(1+e^{\frac{3}{2}}-1) - e^{-1-e^{\frac{3}{2}}} - 2 = 3 - e^{-1-e^{\frac{3}{2}}} - 2 = 1 - \frac{1}{e^{1+e^{\frac{3}{2}}}} > 0$ , δηλαδή

$g(1+e^{\frac{3}{2}})g(e+1) < 0$ , οπότε ισχύει το Θ.Bolzano. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0 \in (1+e, 1+e^{\frac{3}{2}})$  έτσι ώστε  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (f \circ f)(x_0) = f(e^{-x_0} + 2)$ .

### Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:  $\kappa\eta\mu^2x = x^2f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2x} - \lambda$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (1) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

- Να βρείτε τα  $\kappa$  και  $\lambda$ .
- Αν  $\kappa=1$  και  $\lambda=1$  να βρείτε την  $f$ .
- Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x}$ .

### Λύση

i.  $A \in C_f$ , άρα  $f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1$

Η σχέση (1) για  $\lambda=1$  γίνεται:  $\kappa\eta\mu^2x = x^2f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2x} - 1$  και για  $x \neq 0$  έχουμε:

$$f(x) = \frac{\kappa\eta\mu^2x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2x}}{x^2} \text{ οπότε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \kappa \left( \frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 \right] + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu^2x}{x^2(1+\sqrt{1+\eta\mu^2x})} = \kappa - \frac{1}{2}$$

Αλλά η  $f$  είναι συνεχής στο 0, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \kappa - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

ii. Η σχέση (1) για  $\kappa=\lambda=1$  γίνεται:  $\eta\mu^2x = x^2f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2x} - 1$ .

Για  $x \neq 0$  η τελευταία γίνεται:  $f(x) = \frac{\eta\mu^2x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2x}}{x^2}$ .

Επίσης έχουμε:  $f(0) = \frac{1}{2}$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x + 1 - \sqrt{1 + \eta \mu^2 x}}{x^2 \sigma \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sigma \nu x} \cdot \left( \frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 \right] + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + \eta \mu^2 x}}{x^2 \sigma \nu x} =$$

$$1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta \mu^2 x}{x^2 \sigma \nu x (1 + \sqrt{1 + \eta \mu^2 x})} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

### Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$

- Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \kappa$  έχει μία ακριβώς ρίζα στο  $\mathbb{R}$  για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

### Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ , αφού  $2^x \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Είναι:

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x} = x^3 + 3 - 4 \left( \frac{1}{2} \right)^x$$

Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:  $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow x_1^3 + 3 < x_2^3 + 3$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow \left( \frac{1}{2} \right)^{x_1} > \left( \frac{1}{2} \right)^{x_2} \Rightarrow -4 \left( \frac{1}{2} \right)^{x_1} < -4 \left( \frac{1}{2} \right)^{x_2},$$

αφού η συνάρτηση  $\left( \frac{1}{2} \right)^x$  είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$$x_1^3 + 3 - 4 \left( \frac{1}{2} \right)^{x_1} < x_2^3 + 3 - 4 \left( \frac{1}{2} \right)^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x^3 + 3 - 4 \left( \frac{1}{2} \right)^x \right] = (-\infty) + 3 - 4(+\infty) = -\infty,$$

$$\text{αφού } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^x = +\infty.$$

iii. Είναι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^3 + 3 - 4 \left( \frac{1}{2} \right)^x \right] = (+\infty) + 3 - 4 \cdot 0 = +\infty,$

αφού  $0 < \frac{1}{2} < 1$  οπότε:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^x = 0.$

iv. Η  $f$  είναι συνεχής (πράξεις συνεχών), είναι και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty).$$

Το  $\kappa \in \mathbb{R}$  περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών της  $f$ , οπότε η εξίσωση  $f(x) = \kappa$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $\mathbb{R}$  και επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

Ημερομηνία τροποποίησης: 25/01/2019