**Θεώρημα Bolzano**

**Θεώρημα Bolzano**

Αν μία συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα και επιπλέον

* η είναι συνεχής στο 
* (δηλ. οι τιμές είναι ετερόσημες)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα έτσι ώστε .

Με άλλα λόγια η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο ανοικτό διάστημα .

(Δηλαδή η τέμνει τον άξονα xx΄ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη ).

Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano

Γεωμετρικά μπορούμε να ερμηνεύσουμε το παραπάνω θεώρημα ως εξής:

Το τμήμα της γραφικής παράστασης της f που περιέχεται μεταξύ των ευθειών και τέμνει τον xx΄ τουλάχιστον μία φορά.



Σημαντικές Παρατηρήσεις

1. Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον μίας πραγματικής ρίζας της εξίσωσης στο . Ωστόσο δεν αποκλείετεται η ύπαρξη περισσοτέρων ριζών στο . Αυτό που κυρίως όμως μας εξασφαλίζει είναι «το ΑΔΥΝΑΤΟΝ ΤΗΣ ΜΗ ΥΠΑΡΞΗΣ ΡΙΖΑΣ στο »







2. Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι αν για μία πραγματική συνάρτηση υπάρχει τουλάχιστον ένα έτσι ώστε δεν συνεπάγεται αναγκαία ότι η είναι συνεχής ή ότι οι τιμές είναι ετερόσημες δηλαδή .





3. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και ισχύει για όλα τα τότε συνάγουμε ότι ή για κάθε . Αυτό σημαίνει ότι η διατηρεί σταθερό πρόσημο στο .





**Απόδειξη:**

Αν η δεν διατηρούσε σταθερό πρόσημο τότε θα υπήρχαν ,με τέτοια ώστε και ή και δηλαδή , που σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, θα υπήρχε μία τουλάχιστον ρίζα στο που είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης μας,άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

4. Μία συνεχής συνάρτηση διατηρεί το πρόσημο της σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(Από την έκφραση «διαδοχικές ρίζες» συμπεραίνουμε ότι για κάθε όπου είναι δύο διαδοχικές ρίζες της ).



5. Αν η είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο και επί πλέον ισχύει , τότε η έχει ακριβώς μία ρίζα στο .

6. Αν η είναι συνεχής στο και ισχύει:

για κάθε 

με 

τότε για κάθε .

7. Αν η είναι συνεχής στο και ισχύει:

για κάθε 

με 

τότε για κάθε .

8. Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

**Απόδειξη**

Έστω

  

με ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Έστω , τότε έχουμε:



οπότε υπάρχει τέτοιο ώστε να ισχύει και



οπότε υπάρχει τέτοιο ώστε να ισχύει 

Συνεπώς για την πολυωνυμική συνάρτηση , με πεδίο ορισμού το, ισχύουν:

1. Είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο διάστημα .
2. 

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο , συνεπώς και στο .

ii) Oμοίως εργαζόμαστε αν 