**Θεώρημα Bolzano**

**Θεώρημα Bolzano**

Αν μία συνάρτηση https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWείναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα https://lh6.googleusercontent.com/proxy/q2T4aCTyMl2v4ehkJW1hibjmAQppGEkmyDo76ddzMSkg1TcSExkWsU17eL9DL7cOT1qcYli_QvIdGW1qQLns-9Qq6B08NhTEpJbkH-SuJf_eqGYCjmDqoe4brVb4hX2-dJithEuEκαι επιπλέον

* η https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWείναι συνεχής στο https://lh6.googleusercontent.com/proxy/q2T4aCTyMl2v4ehkJW1hibjmAQppGEkmyDo76ddzMSkg1TcSExkWsU17eL9DL7cOT1qcYli_QvIdGW1qQLns-9Qq6B08NhTEpJbkH-SuJf_eqGYCjmDqoe4brVb4hX2-dJithEuE
* https://lh3.googleusercontent.com/proxy/cn_ZVNpvX1n1HY15PwcXN5fXMiroLG1bJEQ6g5q_cDDSI-Shba1p9O61XzozPhRaozGt7C6ZPzN27R8g0yFmaxyPSulxUwFv7gA0ob6aPMYFg15_0xR_UgKhyppNqJB_fOV10vnY(δηλ. οι τιμές https://lh5.googleusercontent.com/proxy/jVQnNAUiY4py1bmEtyVGsiaJI9c-ZqDIxKoi9lkaBzFjqei7snufzQ6tFdHuwd7ctlJdw81eW_ahgYAa1HiMA9DX7FOQ0hYJ3cn3UKmtyPV-Jo_Y43QlFDxFk1aVtWQk1fjry2cQείναι ετερόσημες)

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα https://lh5.googleusercontent.com/proxy/xjb0Clg-n3eCOTfyXkej-nYBxAIxW9vRhydOxACVTxFm8bU-ydV1P_-zFdOT3Pukad30jBwONvDy-w0Z7Sx9jyuXkr6oKctCzFCdD0GQXUvqYEio2d86R1xjevKjPgP0zvvuFktIέτσι ώστε https://lh5.googleusercontent.com/proxy/an_gTP99HiJRZJgiOYbYaEc28FA-iikxIxoQvoI4zi6Bj6XeQpg4Q3wtDlsvIZCQvB1MW0kHGlzgY38k1J8aF2uQopL5cbxPkziooRC8_fXRFfRd9dv1CST2rKwgt7iSUwnkXtfq.

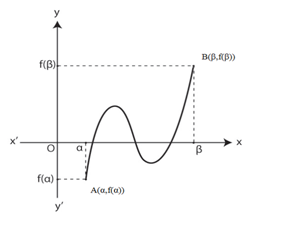
Με άλλα λόγια η εξίσωση https://lh4.googleusercontent.com/proxy/0lgOW_f1w154dNVT_r-BgnZpKojw1isKRZVox1kmfcjmk2F0Pa99QI4amNAl_yP099lAHL1r9-dzXA2DZy_nGo3jqTzhjQ43PlZ3PfGvSSDmxP_tw5Gh5pns1OC2jiLjSKaGkvDLέχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο ανοικτό διάστημα https://lh5.googleusercontent.com/proxy/0WSzd_xz7i_0D87Jnv6vbpamMch063yVYT5vBYL5mAa-2NIMwAwtha72ddxIZCfQGyVFxhdN3pm3xsp8iCg4_6M92_de5egC-dLoAypu4yWyluClixfZ-yxDw0ttZ7fsiE21B_XC.

(Δηλαδή η https://lh3.googleusercontent.com/proxy/abD7VqgKbWgF3eReYpVqxM-mr6L0GgLEhta-0weR2IpsOfjSBeVU7VzdwG1udn2gRGQU0pXc3hrpr-yovgUExqX-WLrYLrF-zlqUvokLkZXCv0RvY9J3xm0xcAw6iau6d4wPpjMbτέμνει τον άξονα xx΄ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη https://lh5.googleusercontent.com/proxy/_ohJ033BViy-ZoIRgrEwA9O0E4pomyenNxYyhVPWvNDrtF5JRbeu8aLgeTbXsSvn2aKZguC7Qn8-d6S0mjXGxh_y1pJ_M8bXnOFyVy5AprHrVD7B7txqbDNt_bUiIWqYPz7wKgUy).

Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano

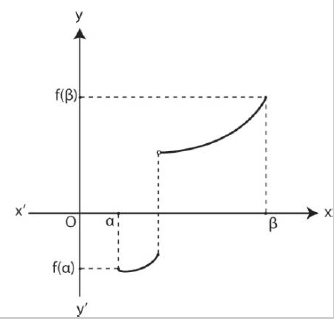
Γεωμετρικά μπορούμε να ερμηνεύσουμε το παραπάνω θεώρημα ως εξής:

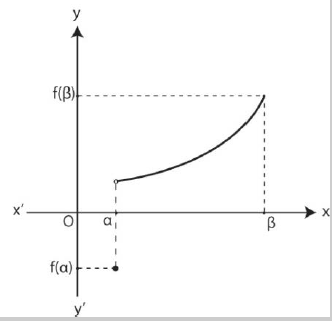
Το τμήμα της γραφικής παράστασης της f που περιέχεται μεταξύ των ευθειών https://lh3.googleusercontent.com/proxy/eFz2CBf1nUZ_G0ts1ckzX3GIT-o5ppeaUwfOmfGc4H6kWb76U3xKeTXZGbYmBAeSLYOUBLcGECEQZA9zvmcgDKUXpJ4-h9jnZ2t6WrELLYcQCYpZHZUcodL2RyKAuK1TY5Ve26PIκαι https://lh4.googleusercontent.com/proxy/LPdubGMgSuXeN1tifB_aR3sFcGGYbk-UUdv3x1hbEZ0zHsCLK3DtewUotJtnuSWCp7wiwmNtXcMVdQHqaOhpZ2c5ZLXGAR8FWfWOQ936EZMJIbvTkVa27t8UA2ML5cYET96UsjXKτέμνει τον xx΄ τουλάχιστον μία φορά.

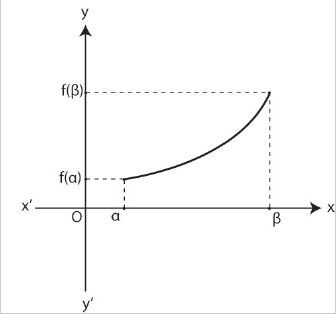


Σημαντικές Παρατηρήσεις

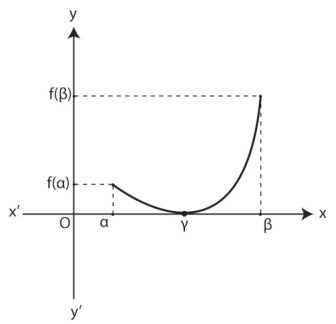
1. Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον μίας πραγματικής ρίζας της εξίσωσης https://lh4.googleusercontent.com/proxy/0lgOW_f1w154dNVT_r-BgnZpKojw1isKRZVox1kmfcjmk2F0Pa99QI4amNAl_yP099lAHL1r9-dzXA2DZy_nGo3jqTzhjQ43PlZ3PfGvSSDmxP_tw5Gh5pns1OC2jiLjSKaGkvDLστο https://lh5.googleusercontent.com/proxy/0WSzd_xz7i_0D87Jnv6vbpamMch063yVYT5vBYL5mAa-2NIMwAwtha72ddxIZCfQGyVFxhdN3pm3xsp8iCg4_6M92_de5egC-dLoAypu4yWyluClixfZ-yxDw0ttZ7fsiE21B_XC. Ωστόσο δεν αποκλείετεται η ύπαρξη περισσοτέρων ριζών στο https://lh5.googleusercontent.com/proxy/0WSzd_xz7i_0D87Jnv6vbpamMch063yVYT5vBYL5mAa-2NIMwAwtha72ddxIZCfQGyVFxhdN3pm3xsp8iCg4_6M92_de5egC-dLoAypu4yWyluClixfZ-yxDw0ttZ7fsiE21B_XC. Αυτό που κυρίως όμως μας εξασφαλίζει είναι «το ΑΔΥΝΑΤΟΝ ΤΗΣ ΜΗ ΥΠΑΡΞΗΣ ΡΙΖΑΣ στο https://lh5.googleusercontent.com/proxy/0WSzd_xz7i_0D87Jnv6vbpamMch063yVYT5vBYL5mAa-2NIMwAwtha72ddxIZCfQGyVFxhdN3pm3xsp8iCg4_6M92_de5egC-dLoAypu4yWyluClixfZ-yxDw0ttZ7fsiE21B_XC»

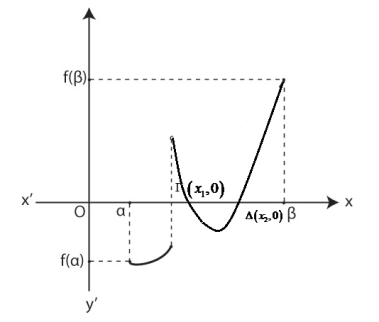




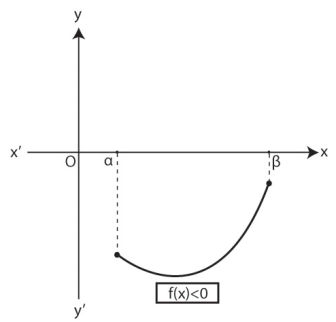


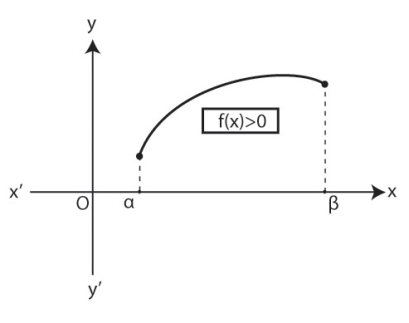
2. Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι αν για μία πραγματική συνάρτηση https://lh4.googleusercontent.com/proxy/KcpBWxYJ22ccB76D6wXxPr8NO6qCjZ9V_CIcvrpaW6ogC_shiC7haxjSrfEQHmoXnbQpI0OjZNkLDe2b0OVpeioOxBz1ZW5mQlQPPEKnGf1i0dVM-gYrolG-1PFsMEcfNkjyOEQUυπάρχει τουλάχιστον ένα https://lh5.googleusercontent.com/proxy/xjb0Clg-n3eCOTfyXkej-nYBxAIxW9vRhydOxACVTxFm8bU-ydV1P_-zFdOT3Pukad30jBwONvDy-w0Z7Sx9jyuXkr6oKctCzFCdD0GQXUvqYEio2d86R1xjevKjPgP0zvvuFktIέτσι ώστε https://lh5.googleusercontent.com/proxy/an_gTP99HiJRZJgiOYbYaEc28FA-iikxIxoQvoI4zi6Bj6XeQpg4Q3wtDlsvIZCQvB1MW0kHGlzgY38k1J8aF2uQopL5cbxPkziooRC8_fXRFfRd9dv1CST2rKwgt7iSUwnkXtfqδεν συνεπάγεται αναγκαία ότι η https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWείναι συνεχής ή ότι οι τιμές https://lh6.googleusercontent.com/proxy/XocOtGz60wIuA8fMDE7wUfd6mUpZzRwCbLIbug8Rkk935HaD_E6vEbN2EkGUWLVutuTxVRMnvNxYmaIj4kmvYHkqC6L5qjVGsUhHl_gS4X0XzBG_CpXt8ERyPYzGkKSfjO0DtgJFείναι ετερόσημες δηλαδή https://lh3.googleusercontent.com/proxy/cn_ZVNpvX1n1HY15PwcXN5fXMiroLG1bJEQ6g5q_cDDSI-Shba1p9O61XzozPhRaozGt7C6ZPzN27R8g0yFmaxyPSulxUwFv7gA0ob6aPMYFg15_0xR_UgKhyppNqJB_fOV10vnY.





3. Αν μία συνάρτηση https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWείναι συνεχής σε ένα διάστημα https://lh5.googleusercontent.com/proxy/aaDZWfDrv3gUvJyBlvOZ-ICu-MTNMsKIfeQV7D7KD7L3RWlwLj5J8AqN12nGA_gemxVMhl3xLHTrxB7WKopuJ21lTNCzjnVC9en2BPMUJyJYu96oo68xqxRzU9_ToxaIWM04KChVκαι ισχύει https://lh4.googleusercontent.com/proxy/u8z-_aF9NANFYZcYdPGSuKA0-VZb3H7hiAXXZ83DkPtSP6zRVCOzt6uzdFXvh0RDPfvGsBj4eBRy78q8KjaZrgI7dDlTq9FFs_nqom_1SwwhRMwjWhdI9mt6StK0YEzBw8DQ7dhJγια όλα τα https://lh5.googleusercontent.com/proxy/IdJd91UFBFx3q45RYsnduqbDEUAqxq67M3Gz4X6rd_ADUJnGSKlE8sQgTHpFa1_0DmZmyAV_keuFmzmY29b2E9ztj_-z3b9vBO25nr1JIQVRvlXaDRKCcgNJuw9SrY48609yvudOτότε συνάγουμε ότι https://lh4.googleusercontent.com/proxy/D1p-l1xo6ZCxls11wNqS4zbVVLp8YuK_etE4-FPCKdcbAqdyt8sjZGe4fX5ZMyGC75Hx_0TrcI8kllcfK3UnJsajeGoEcHxuKlwT8p0bqYLtov8HUEbEpU_P8CFAkk__dPzMNfMaή https://lh6.googleusercontent.com/proxy/hMI1LldUSuUQ8eAdpHm1nP7DeAelrcxnyhPui7-nNvz8Q5kTTzt892EB9ecpdDUqHEjROy7FNUePFwBADp_GiM1rf7814LbfQuRLC6lkQKuV1G9H5r5YJFHAo5WQvRLCRNiEI7Njγια κάθε https://lh5.googleusercontent.com/proxy/IdJd91UFBFx3q45RYsnduqbDEUAqxq67M3Gz4X6rd_ADUJnGSKlE8sQgTHpFa1_0DmZmyAV_keuFmzmY29b2E9ztj_-z3b9vBO25nr1JIQVRvlXaDRKCcgNJuw9SrY48609yvudO. Αυτό σημαίνει ότι η https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWδιατηρεί σταθερό πρόσημο στο https://lh5.googleusercontent.com/proxy/aaDZWfDrv3gUvJyBlvOZ-ICu-MTNMsKIfeQV7D7KD7L3RWlwLj5J8AqN12nGA_gemxVMhl3xLHTrxB7WKopuJ21lTNCzjnVC9en2BPMUJyJYu96oo68xqxRzU9_ToxaIWM04KChV.



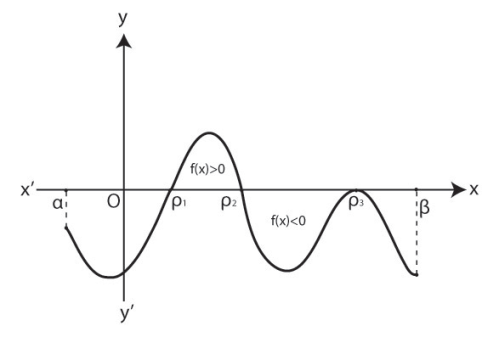


**Απόδειξη:**

Αν η https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWδεν διατηρούσε σταθερό πρόσημο τότε θα υπήρχαν https://lh4.googleusercontent.com/proxy/p4icHxXR7pZAMrH1NX-0QxDBBHI63wpgL2p708j5l602iTchNStU0CPVtkaz0QrID1D3XNjFubeYV77gRyQig0BJnERlwRZJ2iInS3_vabjR6iiWa3EqoWEMjEiLO_AsY7CsSCSZ,με https://lh5.googleusercontent.com/proxy/IDhOKyHMbhCLJiKXGz1V0yCAnLEt79y7UaFXjFV0dy0m9G3--EtuMCV4c6tt7ICocgqj9Wpg7hKt52Z7pR-NJYhSE9L0DQ5jXfeuudmag6PBRf1x25LhQlA7645IrPLcnERisesHτέτοια ώστε https://lh4.googleusercontent.com/proxy/Bb2VIubzOoJ2zUcCs-mQ1N8PdPHCMdBrqehbgvQbJG0hLrkxiNnwKREvKJyTLyC1dcgfW4I1mDq7Avc2uL_iwMgG9sPXGO_7bc1mA-AQk4FgifzTS-UGyEq6WZwx0YRXnc9IGZJOκαι https://lh4.googleusercontent.com/proxy/eT0GW_E0N4uAVnhaNKQ70O79WB1wUftMpHM0gJrkUyzhsERKXbyOdjtKOhTY0wAIS91xPp19q4YgL-TK4dlyzEQyk99MRCjPbz1OijkKE0FoEKwWJwBog_m2IwD2TVNecgcGVfZaή https://lh4.googleusercontent.com/proxy/nreRFCc4HljACBZ5IVMmIDXKzRvlkmE87EQA8jLLRUflkZ0tBHiF6WYcYTxXIksDQB352aHE5OL3yPKos_AcQ8BoiSdmXQWwrTrhJJyVSjKKz1OJkJvP8e5508YocfZ3Oey5lvVnκαι https://lh6.googleusercontent.com/proxy/yXQqo_AN-tVrEgxfKI_el6kMnnk5GAZD-h-TN8XsBdvvQhNmFinamzgNPp31HWnhuLJ3rKq7Fi1FlL3cvRpU-hVO2KUol5XJryPi-HBKhu5w_9mvjZIXslXo88_ZlXD_kfxDODrAδηλαδή https://lh3.googleusercontent.com/proxy/cn_ZVNpvX1n1HY15PwcXN5fXMiroLG1bJEQ6g5q_cDDSI-Shba1p9O61XzozPhRaozGt7C6ZPzN27R8g0yFmaxyPSulxUwFv7gA0ob6aPMYFg15_0xR_UgKhyppNqJB_fOV10vnY, που σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, θα υπήρχε μία τουλάχιστον ρίζα στο https://lh5.googleusercontent.com/proxy/Vy3jfHWYJGT5Zv-vBe-TbeKjFhzBiaFgUetBz-_g1QMnGIBfjWJvJ21waOOonjqSzDewssCBR2Er7FJndbedx5cAryIR94hopoL4Bm07OyMFJEdPPo3pOOpb7y1h_fjbbvNxn7YYπου είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης μας,άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

4. Μία συνεχής συνάρτηση https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWδιατηρεί το πρόσημο της σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(Από την έκφραση «διαδοχικές ρίζες» συμπεραίνουμε ότι https://lh4.googleusercontent.com/proxy/u8z-_aF9NANFYZcYdPGSuKA0-VZb3H7hiAXXZ83DkPtSP6zRVCOzt6uzdFXvh0RDPfvGsBj4eBRy78q8KjaZrgI7dDlTq9FFs_nqom_1SwwhRMwjWhdI9mt6StK0YEzBw8DQ7dhJγια κάθε https://lh3.googleusercontent.com/proxy/wCW4nu2lEATaOi6YJXIFrHRfNNZQSag1cH7qSCLYFjzZ8QGMN8J6mpvcTpLpK4xtks6M8MUTmZmlOxUTzHqQrGWOdkxaWJnCw1ZpLG2LxhHNTBGVyGpMrRIgr9869PfrbjLTKK1qόπου https://lh5.googleusercontent.com/proxy/dOI93uG-eLb1es_KtM5D1GVdSc63n6PnNESr4LpCFz-RwKiFAJQrZ9SjTrNqZzO_W90EjNs1Jk35q9o5wYnVw67Vpy9QCjjyFTjofN5jWsATPhg8wItt86O-f_fnVtqS3ImZgP9dείναι δύο διαδοχικές ρίζες της https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvW).



5. Αν η https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWείναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο https://lh4.googleusercontent.com/proxy/1x1ck_q9p1zWFVPhCM5a0ueHfhtYzpNddlMB58I0HznqRICknZqWjOKZGGrE7xlvXqrGSZIir2vEcnLAaEO5Rz6-dK8AY76NMWzFF6xhBDrDnwPTtGsOUubQiCOII-ZmwP4vdYESκαι επί πλέον ισχύει https://lh3.googleusercontent.com/proxy/cn_ZVNpvX1n1HY15PwcXN5fXMiroLG1bJEQ6g5q_cDDSI-Shba1p9O61XzozPhRaozGt7C6ZPzN27R8g0yFmaxyPSulxUwFv7gA0ob6aPMYFg15_0xR_UgKhyppNqJB_fOV10vnY, τότε η https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWέχει ακριβώς μία ρίζα στο https://lh4.googleusercontent.com/proxy/NQxFEKriDksTWnhW7k5ZzBclHXsMyd2FPoIJTGqpWcgTnLPKCCfvpweNuIKDVzWvDTJimZej3OYx3TxdAmWJ77P1em8BYmrcX3X-UyUdwSPNroZJ2qepwIPNxaxn6SW25-VU-Keq.

6. Αν η https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWείναι συνεχής στο https://lh5.googleusercontent.com/proxy/aaDZWfDrv3gUvJyBlvOZ-ICu-MTNMsKIfeQV7D7KD7L3RWlwLj5J8AqN12nGA_gemxVMhl3xLHTrxB7WKopuJ21lTNCzjnVC9en2BPMUJyJYu96oo68xqxRzU9_ToxaIWM04KChVκαι ισχύει:

https://lh4.googleusercontent.com/proxy/u8z-_aF9NANFYZcYdPGSuKA0-VZb3H7hiAXXZ83DkPtSP6zRVCOzt6uzdFXvh0RDPfvGsBj4eBRy78q8KjaZrgI7dDlTq9FFs_nqom_1SwwhRMwjWhdI9mt6StK0YEzBw8DQ7dhJγια κάθε https://lh5.googleusercontent.com/proxy/IdJd91UFBFx3q45RYsnduqbDEUAqxq67M3Gz4X6rd_ADUJnGSKlE8sQgTHpFa1_0DmZmyAV_keuFmzmY29b2E9ztj_-z3b9vBO25nr1JIQVRvlXaDRKCcgNJuw9SrY48609yvudO

https://lh5.googleusercontent.com/proxy/r5DwZzS25_bfwkJ6KzWCb-JlR2EcocjZiwQgAPrkHz8dHVtG4c9hiQHiUDmhT_XX_rnUMQBTNC0TAFGBG3NIhGyvfjHIm8h_ppTKu8VPoyAm7vO-xl9MgSl_xSs_lEJpmHlFcxJWμε https://lh4.googleusercontent.com/proxy/RVo-MyKNMiQQCK1Z0JSGVdnnBCHfs1sOWW2_uqlkHNCdbwUUMhxS7sbJochK8Z_pQAmuKuGfhjJf7kO1TiGNdF7DXXi_Weoi_SMQFg9HxgTJ-kmLD7gCCID_e77TCyqu6sQ_RdTx

τότε https://lh6.googleusercontent.com/proxy/hMI1LldUSuUQ8eAdpHm1nP7DeAelrcxnyhPui7-nNvz8Q5kTTzt892EB9ecpdDUqHEjROy7FNUePFwBADp_GiM1rf7814LbfQuRLC6lkQKuV1G9H5r5YJFHAo5WQvRLCRNiEI7Njγια κάθε https://lh5.googleusercontent.com/proxy/IdJd91UFBFx3q45RYsnduqbDEUAqxq67M3Gz4X6rd_ADUJnGSKlE8sQgTHpFa1_0DmZmyAV_keuFmzmY29b2E9ztj_-z3b9vBO25nr1JIQVRvlXaDRKCcgNJuw9SrY48609yvudO.

7. Αν η https://lh5.googleusercontent.com/proxy/2XHVzw7A37oyrJzKgJTlLJ-Iu8oy96tkmQnaVCMn3pN9aQuduhMPfw-6pI79E-wOzEItrUplKws5Htna2ShqWRnvJLS85yXX7JF6n0WvGAUCqC2kjtLqUBy1a3R6QlpXdkki8UvWείναι συνεχής στο https://lh5.googleusercontent.com/proxy/aaDZWfDrv3gUvJyBlvOZ-ICu-MTNMsKIfeQV7D7KD7L3RWlwLj5J8AqN12nGA_gemxVMhl3xLHTrxB7WKopuJ21lTNCzjnVC9en2BPMUJyJYu96oo68xqxRzU9_ToxaIWM04KChVκαι ισχύει:

https://lh4.googleusercontent.com/proxy/u8z-_aF9NANFYZcYdPGSuKA0-VZb3H7hiAXXZ83DkPtSP6zRVCOzt6uzdFXvh0RDPfvGsBj4eBRy78q8KjaZrgI7dDlTq9FFs_nqom_1SwwhRMwjWhdI9mt6StK0YEzBw8DQ7dhJγια κάθε https://lh5.googleusercontent.com/proxy/IdJd91UFBFx3q45RYsnduqbDEUAqxq67M3Gz4X6rd_ADUJnGSKlE8sQgTHpFa1_0DmZmyAV_keuFmzmY29b2E9ztj_-z3b9vBO25nr1JIQVRvlXaDRKCcgNJuw9SrY48609yvudO

https://lh5.googleusercontent.com/proxy/t-z7YD4CUY3MYyBr1rIyChb77FaGI2de8nzlgnpZwOp-vm-zaZJVYbpVXRTg8AhdUg-_dBOJj2l8fDZc4cpjTEy4hcwajNwbJAM70KKBPiaWrVwfozqzI9QX1OkFcP8YKv8kvdcFμε https://lh4.googleusercontent.com/proxy/RVo-MyKNMiQQCK1Z0JSGVdnnBCHfs1sOWW2_uqlkHNCdbwUUMhxS7sbJochK8Z_pQAmuKuGfhjJf7kO1TiGNdF7DXXi_Weoi_SMQFg9HxgTJ-kmLD7gCCID_e77TCyqu6sQ_RdTx

τότε https://lh4.googleusercontent.com/proxy/D1p-l1xo6ZCxls11wNqS4zbVVLp8YuK_etE4-FPCKdcbAqdyt8sjZGe4fX5ZMyGC75Hx_0TrcI8kllcfK3UnJsajeGoEcHxuKlwT8p0bqYLtov8HUEbEpU_P8CFAkk__dPzMNfMaγια κάθε https://lh5.googleusercontent.com/proxy/IdJd91UFBFx3q45RYsnduqbDEUAqxq67M3Gz4X6rd_ADUJnGSKlE8sQgTHpFa1_0DmZmyAV_keuFmzmY29b2E9ztj_-z3b9vBO25nr1JIQVRvlXaDRKCcgNJuw9SrY48609yvudO.

8. Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

**Απόδειξη**

Έστω

https://lh3.googleusercontent.com/proxy/zYVr75u5PYhqcYE8Do_ENYRKIyK8kVtRsyrhkYuPPAhJ1GddGx5YSgtnZGQzLYP4UBR_A51Jwm-gMieUGaK_dmKxp6KcmzXEU4bfUggM7zZOrQY6KLq2zcie6oj3hy5noE0950_D

με https://lh6.googleusercontent.com/proxy/K3r5buZDvSX6rp-fAnqIjhs9VKf7ddeH8fI7kEuUsXdNuWwypHlC3Rt5i0wAwWf7Jebb9FPqUgdL94uEjLHZ8pI7OfYhhuvnqPTv0k_b79Uoa2-lbKClJqWoKlKluvK7FOAOlmfoένα πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Έστω https://lh4.googleusercontent.com/proxy/_KEewQJiQnHDjhjc1N6zAMpHD800UMdK1dY4piDWuk8XVGXnRT8KNSDFl0HsNzUES3mk5xj2KaufzODWROp4bnffE84o2vgfTgDlU4CNgiKYirC5CocpWGOOoOYuI6yXe1UMlz9V, τότε έχουμε:

https://lh3.googleusercontent.com/proxy/H_cL3BuJ3uZXa4hYTCzDzdGqFo4w8qHA0DBoURVDc9FfNTKFqgmZipWlbcPe8_5i0V-1ZsVZ4gXWzmsWqHcH_1CDFgp2070pyVSdOqyWxp-3ZOdoQPLhCFWCH2kRCQS1zNtwMjID

οπότε υπάρχει https://lh5.googleusercontent.com/proxy/YtnPS9KejlCYcWXb1C7LhCpOTE5MFqsY4ZrGM0j19oDTDHndr7lKiQgx40V8j4uEAKddwrladdq0j_uGutCbzhMOTDF-vH5O7Kt-TGp1xIr7FZ24LpXwvXvQJpMV6n3XoS_T7aCiτέτοιο ώστε να ισχύει https://lh5.googleusercontent.com/proxy/dz5xzUg9mSerf669ZO3zGP3ebAs7ZCPg4i-kYAVAuupp-aUd7EPqhifjboC6_WcL7cwbDg2PiQcZdegCywKObQstDUz-GQ0xIIbvcR2dCkBm2ggHY5Rn3_BaQWPNBawesQ22Yrncκαι

https://lh6.googleusercontent.com/proxy/hhQtN76fEF4xLXUUcY9Fl_Orv_by31xYa9SFMbQ-Po8r7eiv_TMDrxIyoM2AW0HTzbj_lC7M8lqbz9QnjP2PL5NsKK-nYoLnGtjalT_SJ1lYbw8snbmz2jKecHpzHo6qE3pZuFaA

οπότε υπάρχει https://lh3.googleusercontent.com/proxy/zhU-UedrZaZijFq1ZDFwe7spO2XDWASmkPQ3Z_PCgavHqWTshwA0m2V2LW5r6UOGuJ6-0au-kqL2cgpfN7Onc4cWClmqxvv3i9Sl2UTyoSLQjXe9kSWc_shhcPoja55C_zTI9dEXτέτοιο ώστε να ισχύει https://lh4.googleusercontent.com/proxy/EJwMPte_wjKyUEfidBL6E18YjSGwDTOJ-US44qpQ2iImiTO0hsyhklBPksPZZyZXL7w9XRnsiLHxhiWHuWg_ajkaVa_lRUFsUJZ2mLtJw2Y5Q0vZKD2QYV-ImMQJSJalvEN2rIuV

Συνεπώς για την πολυωνυμική συνάρτηση https://lh6.googleusercontent.com/proxy/Vj1Uy-WiJiTZa2NLD4KeX7hjYvSmLtpQpQhEfGs13a_6uiXhxh2Rri8Iv7Ommqmu8mJSuHC0ULveD52-Dsp-rZxjiJ0MbBUvqex-fyaN1CipeugWHxgSu7ccUu_VfWF5xFMwmhMF, με πεδίο ορισμού τοhttps://lh4.googleusercontent.com/proxy/qgW0MvzU9g3mD2XkCBnJTattk2QEYrauGtO57ebmInUxmDPo0lvGuyGu0sFTMLLNPGyT6_BhLAdoJQ3kBln7yU_G2i9iC0BvzWxjqBEO1AeXr74H5IqEskJeWucwF7iuuLIj_SuG, ισχύουν:

1. Είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο διάστημα https://lh4.googleusercontent.com/proxy/mjlIInrbNru4RDE0hu_suXLqNRhEUvt5tC66ee32C3QmiSyE0j50dp8G6lkrYRaGMcaRc5QLMr_Ggk62Q5p8rfLepvmoQGV0zY3cpOYLvZC_bGUF5fEFi3cbpZ8WU9X6mvYXhCeE.
2. https://lh5.googleusercontent.com/proxy/rg0-jqlfVognkd57mnhP9C_QpybhXDvppAweGPtAmUMF0v8S0kV6Z6-2i72qJi3_KGFNazhjjhGRsK0vdX9a7rRwR66-gtP6Sp47Qt-G4X1tmq3Pm7EJkEnwBZARMcEn8L5ShrZy

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση https://lh4.googleusercontent.com/proxy/kMrUX1tE1ajgR2_mWdZtZVwTnYRfO8sAsZIUl3vnsU7ucdeWnT_ABeyLCwRkp_g5sBTPPiJWDp1jSsLYRDdQJMSFL35LeOVrTetrwBkvgGY-ClpCSSY5fCaJh91cXLNNMXSYBAIqέχει τουλάχιστον μία ρίζα στο https://lh4.googleusercontent.com/proxy/OnFZvDne73kMntZJmlSfk02lZDFjzS7NmyIm4AvlJC7XYv_wIlA9GCwpaDGB3cSLcmVPSyglWpA0X_cM_jiRvbew4pwO07SPixLLVCn05Wbkq-pWDFWL_Q6_E57K1NGGOkxUlgns, συνεπώς και στο https://lh4.googleusercontent.com/proxy/qgW0MvzU9g3mD2XkCBnJTattk2QEYrauGtO57ebmInUxmDPo0lvGuyGu0sFTMLLNPGyT6_BhLAdoJQ3kBln7yU_G2i9iC0BvzWxjqBEO1AeXr74H5IqEskJeWucwF7iuuLIj_SuG.

ii) Oμοίως εργαζόμαστε αν https://lh4.googleusercontent.com/proxy/o48l6vsO8FVVGAQByhntDIMlVoK5uaTME3fWjvHwxeUOZMF33hNHl4Pd7Q7mWDY3fCtjCcAgE6he-HyVK3Pl4pAMXbs1Fn2NZclnuzBfDX9iEaX-Cc-D97GZgJ2-UhhMPz5kzRIs