



ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΕΞΗΣ :

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = \varepsilon\phi\omega$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
- Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Δηλαδή αν μια συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$, τότε δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη στο x_0 , αφού μπορεί να δέχεται και κατακόρυφη εφαπτομένη. (ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται άρα και το $f'(x_0)$). Αν όμως δέχεται εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) τότε είναι παραγωγίσιμη. Οι έννοιες εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ και παράγωγος στο x_0 είναι ταυτόσημες.
- Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω , τότε :
 - ω οξεία $\Leftrightarrow f'(x_0) > 0$.
 - ω αμβλεία $\Leftrightarrow f'(x_0) < 0$.
 - $\omega = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ ($// x'x$).

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$$\varepsilon\phi 0^\circ = 0$$

$$\varepsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varepsilon\phi 45^\circ = 1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\varepsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\varepsilon\phi 90^\circ = \text{---}$$

2^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

$$\varepsilon\phi 180^\circ = 0$$

$$\varepsilon\phi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varepsilon\phi 135^\circ = -1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\varepsilon\phi 120^\circ = -\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\phi \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $M(x_0, f(x_0))$

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε γνωστό σημείο $M(x_0, f(x_0))$, χρησιμοποιούμε τον τύπο $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Βρίσκουμε το $f(x_0)$ άρα το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$. Στη συνέχεια βρίσκω την $f'(x)$ και το $f'(x_0)$ κάνω αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο και προκύπτει η εξίσωση της εφαπτομένης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $A(2, f(2))$, τότε $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. Έχω $f(2) = 7$ άρα το σημείο επαφής $A(2, f(2)) \rightarrow A(2, 7)$. Έχω : $f'(x) = 2x - 1$ άρα $f'(2) = 3$.

Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 7 = 3(x - 2) \Leftrightarrow y - 7 = 3x - 6 \Leftrightarrow y = 3x + 1$ Άρα : $(\varepsilon): y = 3x + 1$.

- 2) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $A(0, f(0))$, τότε $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

Στη σχέση : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ (1) θέτω $x = 0$ και έχω : $f^3(0) = 8 \Leftrightarrow f(0) = 2$.

Η συνάρτηση $f^3(x) - 2xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισιμων, ομοίως και η συνάρτηση $4x^2 + 8$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμία. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x) - 2xf(x))' = (4x^2 + 8)' \Leftrightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 8x$ (2)

Στη (2) για $x = 0$ έχω : $3f^2(0) \cdot f'(0) - 2f(0) - 2 \cdot 0 \cdot f'(0) = 8 \cdot 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 \cdot f'(0) - 2 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 12 \cdot f'(0) = 4 \Leftrightarrow f'(0) = \frac{1}{3}$.

Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{3}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 2$. Άρα : $(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + 2$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2, & x \leq 2 \\ x^2 + 5x - 10, & x > 2 \end{cases}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $M(2, f(2))$, τότε $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2)$. Έχω $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 \Leftrightarrow f(2) = 4$ άρα το σημείο επαφής $M(2, f(2)) \rightarrow M(2, 4)$. Επίσης πρέπει να βρω το $f'(2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 3x + 2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 1)}{x - 2} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 5x - 10 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 7)}{x - 2} = 9 \quad \text{άρα} \quad f$$

παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $f'(2) = 9$.

Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 9(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 9x - 18 \Leftrightarrow y = 9x - 14$. Άρα : $(\varepsilon): y = 9x - 14$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΚΛΙΣΗ ΤΗΣ

Όταν δε μας δίνεται το σημείο επαφής αλλά ένα στοιχείο για την κλίση της εφαπτομένης, τότε ξεκινάμε θεωρώντας το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$ το οποίο πρέπει και να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας το στοιχείο για την κλίση της εφαπτομένης. Πιο συγκεκριμένα διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = \lambda_\zeta x + \beta$, όταν $\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow f'(x_0) = \lambda_\zeta$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): y = \lambda_\zeta x + \beta$, όταν $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -\frac{1}{\lambda_\zeta}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, όταν $\lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ σχηματίζει γωνία $\omega \neq 90^\circ$ με τον άξονα $x'x$, όταν $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\phi\omega \Leftrightarrow f'(x_0) = \varepsilon\phi\omega$ (ισχύει ότι $\varepsilon\phi(\pi - \omega) = -\varepsilon\phi\omega$)
Αφού βρούμε το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$, κάνουμε αντικατάσταση στον τύπο : $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που

- Έχει συντελεστή διεύθυνσης 5
- Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = x + 5$
- Είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x - 3y + 12 = 0$
- Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
- Σχηματίζει γωνία με τον άξονα $x'x$ 45° .

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $M(x_0, f(x_0))$, τότε $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Επίσης $f'(x) = -2x + 3$.

i. Η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης 5 άρα $f'(x_0) = 5 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 5 \Leftrightarrow x_0 = -1$. Άρα $f(-1) = -4$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(-1, f(-1)) \rightarrow M(-1, -4)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y + 4 = 5(x + 1) \Leftrightarrow y + 4 = 5x + 5 \Leftrightarrow y = 5x + 1$. Άρα : $(\varepsilon): y = 5x + 1$.

ii. Η $(\varepsilon) \parallel (\zeta): y = x + 5 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Άρα $f(1) = 2$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(1, f(1)) \rightarrow M(1, 2)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow y = x + 1$. Άρα : $(\varepsilon): y = x + 1$.

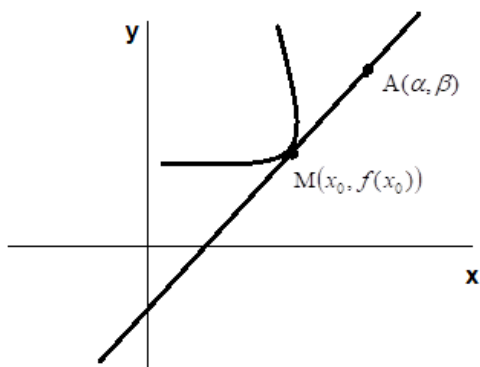
iii. $(\varepsilon) \perp (\eta): x - 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -3$ (Όταν δυο ευθείες είναι κάθετες οι συντελεστές διεύθυνσης τους είναι αντιθετοαντιστροφικοί). $\lambda_\varepsilon = -3 \Leftrightarrow f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = -3 \Leftrightarrow -2x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 3$. Άρα $f(3) = 0$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(3, f(3)) \rightarrow M(3, 0)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 0 = -3(x - 3) \Leftrightarrow y = -3x + 9$. Άρα : $(\varepsilon): y = -3x + 9$.

iv. $(\varepsilon) \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$. Άρα $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) \rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{9}{4} = 0\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{9}{4}$. Άρα : $(\varepsilon): y = \frac{9}{4}$.

(Θα μπορούσαμε να πούμε ότι επειδή $(\varepsilon) \parallel x'x$ άρα θα είναι της μορφής $y = y_0$ και αφού βρούμε το σημείο επαφής $M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, να πούμε κατευθείαν $(\varepsilon): y = \frac{9}{4}$)

v. Η (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° άρα $\lambda_\varepsilon = \tan 45^\circ \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \tan 45^\circ \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Άρα $f(1) = 2$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(1, f(1)) \rightarrow M(1, 2)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x + 1$ Άρα : $(\varepsilon): y = x + 1$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΠΟΥ ΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΗ C_f



Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από ένα σημείο $A(\alpha, \beta)$ που **δεν ανήκει** στη C_f , εργαζόμαστε ως εξής :

- 1) θεωρούμε $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής
- 2) γράφουμε τον τύπο της εφαπτομένης $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
- 3) η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \beta)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της, Δηλ. $\beta - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0)$
- 4) από την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε την τιμή (ή τις τιμές) του x_0 και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης.

(Προσοχή : σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να μπερδεύουμε το σημείο επαφής με το σημείο διέλευσης.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 5) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ που διέρχονται από το σημείο $A(3,2)$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $M(x_0, f(x_0))$, τότε $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Επίσης $f'(x) = 6x - 5$.

Άρα : $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (3x_0^2 - 5x_0 + 2) = (6x_0 - 5)(x - x_0)$ (1)

Όμως η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$ άρα οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την

εξίσωση της (1) δηλαδή : $(\varepsilon): y - (3x_0^2 - 5x_0 + 2) = (6x_0 - 5)(x - x_0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 - (3x_0^2 - 5x_0 + 2) = (6x_0 - 5)(3 - x_0) \Leftrightarrow 2 - 3x_0^2 + 5x_0 - 2 = 18x_0 - 6x_0^2 - 15 + 5x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 18x_0 + 15 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 6x_0 + 5 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = 5$$

➤ Για $x_0 = 1$, $f(x_0) = f(1) = 0$ και $f'(x_0) = f'(1) = 1$ άρα $(\varepsilon_1): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$

➤ Για $x_0 = 5$, $f(x_0) = f(5) = 52$ και $f'(x_0) = f'(5) = 25$ άρα
 $(\varepsilon_2): y - f(5) = f'(5)(x - 5) \Leftrightarrow y - 52 = 25(x - 5) \Leftrightarrow y - 25 = 25x - 125 \Leftrightarrow y = 25x - 73$ άρα
 $(\varepsilon_2): y = 25x - 73$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΝΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΗ C_f

Η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ εφάπτεται στη C_f , αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$, ώστε να

$$\text{ισχύει: } \begin{cases} f'(x_0) = \lambda & (1) \\ M(x_0, f(x_0)) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(x_0) = \lambda x_0 + \beta & (2) \end{cases}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Αν η ευθεία $y = 6x - 2$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$ στο σημείο $M(2, f(2))$,

i. Να βρείτε τα α, β .

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 4$ εφάπτεται στη C_f .

Λύση :

i. Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $M(2, f(2))$. Επίσης $f'(x) = 4x - \alpha$.

Η ευθεία $y = 6x - 2$ εφάπτεται στη C_f στο

$$M(2, f(2)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 6 \cdot 2 - 2 \\ f'(2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 2\alpha + \beta = 10 \\ 8 - \alpha = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

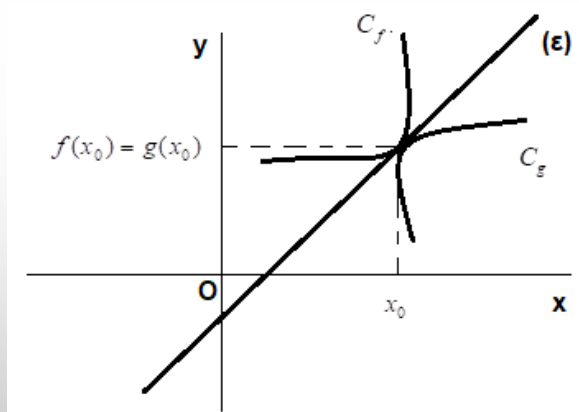
ii. Για $\alpha = 2$ και $\beta = 6$ ο τύπος της f γίνεται : $f(x) = 2x^2 - 2x + 6$ άρα $f'(x) = 4x - 2$. Η ευθεία $y = 2x + 4$ εφάπτεται στη C_f , αν και μόνο αν υπάρχει σημείο $N(x_0, f(x_0))$ της

$$C_f, \text{ ώστε να ισχύουν: } \begin{cases} f(x_0) = 2 \cdot x_0 + 4 \\ f'(x_0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 2x_0 + 6 = 2x_0 + 4 \\ 4x_0 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 4x_0 + 2 = 0 \\ 4x_0 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 1 \end{cases}. \text{ Άρα η ευθεία } y = 2x + 4 \text{ εφάπτεται}$$

στη C_f στο σημείο $N(1, f(1)) \rightarrow N(1, 6)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥΣ



Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δυο συναρτήσεων f, g έχουν κοινή εφαπτομένη (ή αλλιώς εφάπτονται μεταξύ τους) στο κοινό σημείο τους $M(x_0, y_0)$, αν ισχύει : $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

7) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ και $g(x) = x^2 + 2\kappa x + \lambda$. Να βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = -1$.

Λύση :

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x-1} \right)' = \frac{(2x)'(x-1) - 2x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = 2x + 2\kappa$$

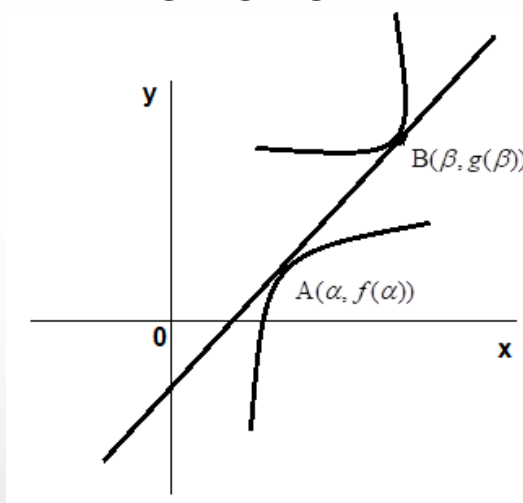
Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους με $x_0 = -1$, άρα ισχύει :

$$f(-1) = g(-1) \text{ και } f'(-1) = g'(-1)$$

$$\text{Έχω } f(-1) = g(-1) \Leftrightarrow \frac{-2}{-2} = 1 - 2\kappa + \lambda \Leftrightarrow 1 = 1 - 2\kappa + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2\kappa \quad (1)$$

$$\text{Και } f'(-1) = g'(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -2 + 2\kappa \Leftrightarrow -1 = -4 + 4\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{3}{4}, \text{ άρα από (1) } \lambda = 2\kappa \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΜΗ ΚΟΙΝΟ ΤΟΥΣ ΣΗΜΕΙΟ



Για να βρούμε, αν υπάρχει, κοινή εφαπτομένη (ε) των C_f , C_g σε μη κοινό σημείο τους, εργαζόμαστε ως εξής :

1) θεωρούμε $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής της (ε) με τις C_f και C_g αντίστοιχα

2) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι :
 $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$ (1) ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(\beta, g(\beta))$ είναι :

$y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x - \beta g'(\beta) + g(\beta)$ (2)

3) για να παριστάνουν οι (1) και (2) την ίδια ευθεία πρέπει :

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta g'(\beta) + g(\beta) \end{cases}$$

4) από το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε τα α, β .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 - 7x + 16$. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των C_f , C_g .

Λύση : $f(x) = x^2 - 3x + 4$ με $D_f = \mathbb{R}$ και $f'(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2 - 7x + 16$ με $D_g = \mathbb{R}$ και $g'(x) = 2x - 7$. Αρχικά θα εξετάσουμε αν οι C_f , C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους. Για να βρούμε κοινά σημεία των C_f , C_g , λύνουμε την εξίσωση :
 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = x^2 - 7x + 16 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$, άρα το κοινό σημείο των C_f , C_g είναι το $M(3, f(3)) \rightarrow M(3, 4)$. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους M πρέπει να ισχύει : $f(3) = g(3) \Leftrightarrow 4 = 4$ που ισχύει, και $f'(3) = g'(3) \Leftrightarrow 3 = -1$ που δεν ισχύει. Άρα οι C_f , C_g δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους.

Θα εξετάσουμε τώρα αν έχουν κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό σημείο. Έστω (ε) η κοινή εφαπτομένη των C_f , C_g και $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής της (ε) με τις C_f και C_g αντίστοιχα.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ είναι :
 $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$ (1) ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(\beta, g(\beta))$ είναι : $y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x - \beta g'(\beta) + g(\beta)$ (2)

Για να παριστάνουν οι (1) και (2) την ίδια ευθεία πρέπει :

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta g'(\beta) + g(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3 = 2\beta - 7 \\ -\alpha(2\alpha - 3) + \alpha^2 - 3\alpha + 4 = -\beta(2\beta - 7) + \beta^2 - 7\beta + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta = -4 \\ -2\alpha^2 + 3\alpha + \alpha^2 - 3\alpha + 4 = -2\beta^2 + 7\beta + \beta^2 - 7\beta + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ -\alpha^2 + 4 = -\beta^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 2, (1) \\ \beta^2 - \alpha^2 = 12, (2) \end{cases} \Leftrightarrow \text{η (2) λόγω της (1) γίνεται } \beta^2 - \alpha^2 = 12 \Leftrightarrow \beta^2 - (\beta - 2)^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \beta^2 - \beta^2 + 4\beta - 4 = 12 \Leftrightarrow 4\beta = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$ και από (1) $\alpha - 4 = -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Άρα τα σημεία επαφής είναι $A(2, f(2)) \rightarrow A(2, 2)$ και $B(4, g(4)) \rightarrow B(4, 4)$, ενώ η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι : $(\varepsilon) : y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x$ δηλαδή $(\varepsilon) : y = x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΠΑΦΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

9) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x + x^2 - x$ στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι κάθετη στην ευθεία : $(\zeta) : x + y + 2017 = 0$.

Λύση :

Έχουμε $A_f = \mathbb{R}$ και $f'(x) = e^x + 2x - 1$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ με $(\varepsilon) : y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ τότε $(\varepsilon) \perp (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$

Δηλ. $f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow e^\xi + 2\xi - 1 = 1 \Leftrightarrow e^\xi + 2\xi - 2 = 0$. Έστω $g(x) = e^x + 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Εφαρμόζω Θ. Bolzano για τη $g(x)$ στο $[0, 1]$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- $\left. \begin{matrix} g(0) = e^0 - 2 = -1 < 0 \\ g(1) = e + 2 - 2 = e > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(1) < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x + 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 3$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Λύση :

i. Έχω : $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Leftrightarrow$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1} + 3x_1 + 2 < e^{x_2} + 3x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ αντιστρέψιμη. Επίσης $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Άρα $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

ii. Έστω (ε) η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $M(3, f^{-1}(3))$ τότε :

$$(\varepsilon) : y - f^{-1}(3) = (f^{-1})'(3)(x - 3) \quad (3)$$

Για $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι : $f^{-1}(3) = \alpha \Leftrightarrow f(f^{-1}(3)) = f(\alpha) \Leftrightarrow 3 = f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) = f(0) \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Άρα $\boxed{f^{-1}(3) = 0}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x$ οπότε : $(f^{-1}(f(x)))' = (x)' \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$, όμως $f'(x) = e^x + 3$ άρα : $(f^{-1})'(e^x + 3x + 2) \cdot (e^x + 3) = 1 \quad (4)$.

Στην (4) για $x = 0$ έχω : $(f^{-1})'(3) \cdot f'(0) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(3) \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow \boxed{(f^{-1})'(3) = \frac{1}{4}}$.

Άρα : (3) $(\varepsilon) : y - f^{-1}(3) = (f^{-1})'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{1}{4}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$.