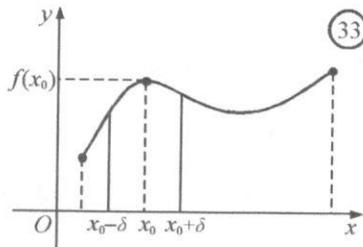


Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \quad \text{και}$$

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.