

14) Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ με την
 $f(x) = \sin x$, για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

β) Να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(0)$ και $f^{-1}(1)$.

γ) Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να αποδείξετε
 ότι η γραμμή περνάει από τις τιμές της f^{-1} στην εικόνα
 της εικόνας $y = -x + 1$ σε ένα κατάλληλο γράφημα.

15) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι
 συνεχής, γνησίως φθίνουσα και τέτοια ώστε η γραμμή
 της περνάει να διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και
 $B(3,2)$. Προσέξτε με τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την
 $g(x) = f(2x - f(x)) - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι: α) οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως
 φθίνουσες.

β) η εξίσωση $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$

έχει λογαριθμικά ως λύση (2,3).