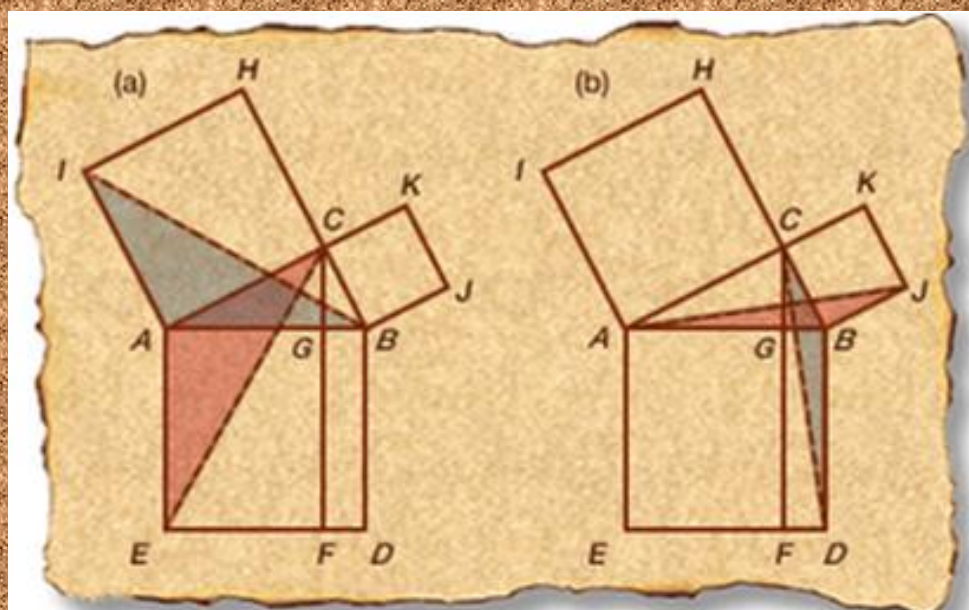


Τράπεζα Θεμάτων

Γεωμετρία Β' Λυκείου



Θεώρημα Θαλή

1. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 9$ και $A\Gamma = 15$. Από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου, φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$.

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta$ και $E\Gamma$.

Λύση

α) Επειδή το Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, η απόστασή του από τη κορυφή A είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ της διαμέσου AM , δηλαδή

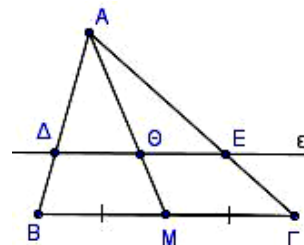
$$A\Theta = \frac{2}{3} AM \Leftrightarrow \frac{A\Theta}{AM} = \frac{2}{3}$$

Επειδή $\Delta E \parallel B\Gamma$ από το θεώρημα Θαλή ισχύει ότι:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Theta}{AM} = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{A\Theta}{\Theta M} = \frac{\frac{2}{3} AM}{\frac{1}{3} AM} = 2$$

β) Είναι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{18}{3} = 6$ και

$$\frac{AE}{E\Gamma} = 2 \Leftrightarrow \frac{A\Gamma - E\Gamma}{E\Gamma} = 2 \Leftrightarrow 15 - E\Gamma = 2E\Gamma \Leftrightarrow 15 = 3E\Gamma \Leftrightarrow E\Gamma = 5$$

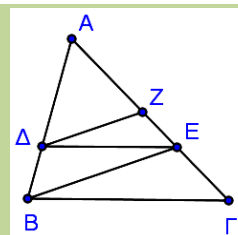


2. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, το τμήμα ΔE είναι παράλληλο στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς τη BE η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{AE}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AB}$

β) $\frac{AZ}{A\Delta} = \frac{AE}{AB}$

γ) $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AZ}{AE}$



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΔE ορίζεται από τις ευθείες δυο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ και μια παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου $AB\Gamma$, τα τρίγωνα ΔE και $AB\Gamma$ έχουν

πλευρές ανάλογες άρα (1) $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow \frac{AE}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AB}$

β) Επειδή το τρίγωνο ΔZ ορίζεται από τις ευθείες δυο πλευρών του τριγώνου ABE και μια παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου ABE τα τρίγωνα ΔZ και ABE έχουν

πλευρές ανάλογες άρα (2) $\frac{AZ}{AE} = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow \frac{AZ}{A\Delta} = \frac{AE}{AB}$

γ) Οι σχέσεις (1),(2) έχουν δεύτερα μέλη ίσα άρα και πρώτα επομένως $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AZ}{AE}$

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$. Φέρνουμε από το σημείο Δ παράλληλες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB που τέμνουν αντίστοιχα τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z . Να αποδείξετε ότι:

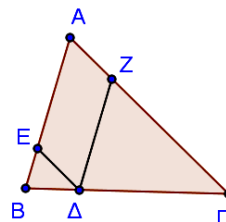
α) $\frac{\Delta E}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}$

β) $\frac{Z\Delta}{AB} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$

γ) $\frac{\Delta E}{A\Gamma} + \frac{Z\Delta}{AB} = 1$

Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $ΒΕΔ$ ορίζεται από τις ευθείες δυο πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$ και μια παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου $ΑΒΓ$ τα τρίγωνα $ΒΕΔ$ και $ΑΒΓ$ έχουν πλευρές ανάλογες άρα $\frac{ΔΕ}{ΑΓ} = \frac{ΒΔ}{ΒΓ}$ (1)



β) Επειδή το τρίγωνο $ΖΔΓ$ ορίζεται από τις ευθείες δυο πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$ και μια παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου $ΑΒΓ$ τα τρίγωνα $ΖΔΓ$ και $ΑΒΓ$ έχουν πλευρές ανάλογες άρα $\frac{ΖΔ}{ΑΒ} = \frac{ΔΓ}{ΒΓ}$ (2)

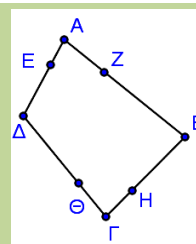
γ) Από πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) προκύπτει

$$\frac{ΔΕ}{ΑΓ} + \frac{ΖΔ}{ΑΒ} = \frac{ΒΔ}{ΒΓ} + \frac{ΔΓ}{ΒΓ} = \frac{ΒΔ + ΔΓ}{ΒΓ} = \frac{ΒΓ}{ΒΓ} = 1$$

4. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και τα σημεία $Ε, Ζ, Η$ και $Θ$ των πλευρών του $ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΑΖ}{ΑΒ} = \frac{ΓΗ}{ΓΒ} = \frac{ΓΘ}{ΓΔ} = \frac{1}{3}$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $ΕΖ // ΘΗ // ΔΒ$ β) $ΕΖ = ΘΗ = \frac{1}{3} ΔΒ$ γ) $ΕΖΗΘ$ παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Επειδή $\frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΑΖ}{ΑΒ}$ λόγω του Θεωρήματος Θαλή είναι $ΕΖ // ΔΒ$ (1).

Ομοίως $\frac{ΓΗ}{ΓΒ} = \frac{ΓΘ}{ΓΔ}$ και λόγω του Θεωρήματος Θαλή είναι $ΘΗ // ΒΔ$ (2).

Από (1) , (2) προκύπτει ότι $ΕΖ // ΘΗ // ΔΒ$.

β) Επειδή $ΕΖ // ΔΒ$ ισχύει ότι $\frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΑΖ}{ΑΒ} = \frac{ΕΖ}{ΔΒ}$.

Από υπόθεση έχουμε ότι $\frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΑΖ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}$ άρα και $\frac{ΕΖ}{ΔΒ} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow ΕΖ = \frac{1}{3} \cdot ΔΒ$ (3)

Ομοίως λόγω του ότι $ΘΗ // ΔΒ$ ισχύει $\frac{ΓΗ}{ΓΒ} = \frac{ΓΘ}{ΓΔ} = \frac{ΘΗ}{ΔΒ}$ οπότε $\frac{ΘΗ}{ΔΒ} = \frac{1}{3}$ διότι $\frac{ΓΗ}{ΓΒ} = \frac{ΓΘ}{ΓΔ} = \frac{1}{3}$

από υπόθεση. Άρα $ΘΗ = \frac{1}{3} \cdot ΔΒ$ (4)

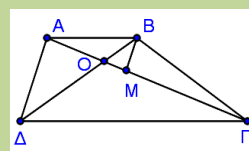
Από (3) , (4) προκύπτει ότι $ΕΖ = ΗΘ = \frac{1}{3} ΔΒ$

γ) Το $ΕΖΗΘ$ παραλληλόγραμμο αφού $ΕΖ = // ΗΘ$.

5. Οι διαγώνιοι του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ // ΓΔ$) με $ΓΔ > ΑΒ$ τέμνονται στο $Ο$. Η παράλληλη από το $Β$ προς την $ΑΔ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Μ$. Αν $ΟΑ = 12$, $ΟΒ = 9$ και $ΟΓ = 36$, να αποδείξετε ότι:

α) $ΟΔ = 27$

β) $ΟΜ = 4$



Λύση

α) Αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$ τότε από το Θεώρημα Θαλή έχουμε $\frac{OA}{OG} = \frac{OB}{OD} \Leftrightarrow \frac{12}{36} = \frac{9}{OD} \Leftrightarrow OD = 27$

β) Επειδή $BM \parallel \Delta\Delta$ τότε από το Θεώρημα Θαλή προκύπτει ότι:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OB}{OD} \Leftrightarrow \frac{OM}{12} = \frac{9}{27} \Leftrightarrow OM = 4$$

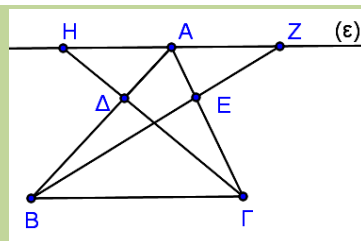
6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ και E των πλευρών του

AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο A

φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $B\Gamma$. Η ευθεία (ε) τέμνει τις προεκτάσεις των BE και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Z , H αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E \parallel \Gamma B$ β) $ZE = \frac{1}{2}EB$ γ) $AZ = \frac{1}{2}B\Gamma$



Λύση

α) Από υπόθεση έχουμε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$ και λόγω του θεωρήματος Θαλή είναι $\Delta E \parallel \Gamma B$.

β) Αφού $AZ \parallel B\Gamma$ έχουμε ότι $\frac{ZE}{EB} = \frac{AE}{E\Gamma}$ (1)

Από υπόθεση ισχύει $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{AE}{A\Gamma - AE} = \frac{1}{3-1} \Leftrightarrow \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{1}{2}$ (2) Άρα από την (1) έχουμε

$$\frac{ZE}{EB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ZE = \frac{1}{2}EB$$

γ) Είναι $\frac{ZE}{EB} = \frac{1}{2}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{1}{2}$ δηλαδή $\frac{ZE}{EB} = \frac{AE}{E\Gamma}$ και επειδή $\hat{A}\hat{E}\hat{Z} = \hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma}$ ως κατακορυφήν,

τα τρίγωνα AEZ και $EB\Gamma$ έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες στις

πλευρές αυτές ίσες, οπότε είναι όμοια. Είναι $\frac{AZ}{B\Gamma} = \frac{ZE}{EB} = \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{1}{2}$, άρα $AZ = \frac{1}{2}B\Gamma$

7. Δύο οχήματα κινούμενα με σταθερές ταχύτητες v_1 και v_2 , περνούν

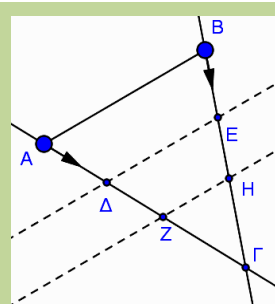
ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από τα σημεία A και B αντίστοιχα και συναντιούνται στο σημείο Γ όπως φαίνεται στο σχήμα.

(Δίνεται ότι η ταχύτητα ενός σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι ίση με το διάστημα που κινήθηκε προς τον αντίστοιχο χρόνο.)

α) Μετά από χρόνο t_1 το όχημα που περνά από το σημείο A βρίσκεται στο σημείο Δ της διαδρομής $A\Gamma$ ενώ το όχημα που περνά από το σημείο B βρίσκεται στο σημείο E της διαδρομής $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel AB$.

β) Έστω Z σημείο της διαδρομής $A\Gamma$ και H σημείο της διαδρομής $B\Gamma$. Αν $ZH \parallel AB$, να αποδείξετε ότι τα οχήματα περνούν ταυτόχρονα από τις θέσεις Z και H .



Λύση

α) Για το διάστημα $A\Delta$ που διανύει το πρώτο όχημα ισχύει ότι: $A\Delta = v_1 \cdot t_1$ και για το διάστημα BE που διανύει το δεύτερο κινητό, είναι $BE = v_2 \cdot t_1$.

$$\text{Είναι } \frac{A\Delta}{BE} = \frac{v_1 \cdot \cancel{t_1}}{v_2 \cdot \cancel{t_1}} = \frac{v_1}{v_2} \quad (1)$$

Έστω t η χρονική στιγμή που τα οχήματα θα συναντηθούν στο σημείο Γ. Τότε

$$A\Gamma = v_1 \cdot t, \quad B\Gamma = v_2 \cdot t \quad \text{και} \quad \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{v_1 \cdot \cancel{t}}{v_2 \cdot \cancel{t}} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{A\Delta}{BE} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{BE}{B\Gamma}$ και λόγω του θεωρήματος

Θαλή είναι $AB \parallel \Delta E$.

β) Έστω t_2 ο χρόνος που χρειάζεται το πρώτο όχημα για να μεταβεί από το σημείο Δ στο σημείο Ζ και

t_3 ο χρόνος που χρειάζεται το δεύτερο όχημα για να μεταβεί από το σημείο Ε στο σημείο Η. Είναι

$$\Delta Z = v_1 \cdot t_2 \quad \text{και} \quad EH = v_2 \cdot t_3$$

Επειδή $\Delta E \parallel ZH \parallel AB$ από το θεώρημα του Θαλή ισχύει ότι:

$$\frac{EH}{BE} = \frac{\Delta Z}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{v_2 \cdot t_3}{v_2 \cdot t_1} = \frac{v_1 \cdot t_2}{v_1 \cdot t_1} \Leftrightarrow t_3 \cdot \cancel{t_1} = t_2 \cdot \cancel{t_1} \Leftrightarrow t_3 = t_2$$

Επειδή τα δύο οχήματα χρειάζονται τον ίδιο χρόνο για να μεταβούν από τα σημεία Δ και Ε στα Ζ και Η αντίστοιχα, θα βρεθούν ταυτόχρονα στις θέσεις Ζ και Η.

Θεωρήματα διχοτόμων

8. Στο κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, η διχοτόμος της γωνίας Α είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ και τέμνει τη ΔΒ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ.

Αν $A\Delta = 12$, $AB = 8$, $\Delta E = 9$ και $Z\Gamma = 6$, να αποδείξετε ότι:

α) $EB = 6$

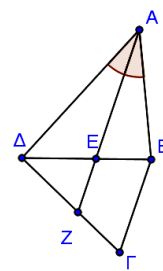
β) $\Delta Z = 9$

Λύση

α) Από Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΔΒ, έχουμε ότι

$$\frac{E\Delta}{EB} = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow \frac{9}{EB} = \frac{12}{8} \Leftrightarrow EB = \frac{9 \cdot 8}{12} \Leftrightarrow EB = 6$$

β) Επειδή $ZE \parallel B\Gamma$ ισχύει ότι $\frac{\Delta Z}{\Delta E} = \frac{Z\Gamma}{EB} \Leftrightarrow \frac{\Delta Z}{9} = \frac{6}{6} \Leftrightarrow \Delta Z = 9$

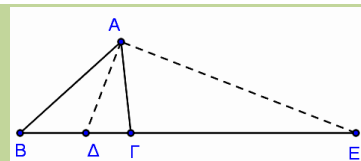


9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($AB > AG$) και ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος του αντίστοιχα.

Αν είναι $AB=6$, $\Delta B=3$, $B\Gamma=5$ και $BE=15$, να αποδείξετε ότι:

α) $A\Gamma = 4$

β) $\Delta E = 12$



Λύση

α) Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει ότι

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{3}{\Delta\Gamma} = \frac{6}{A\Gamma} \Leftrightarrow A\Gamma = 4.$$

β) Είναι $\Delta E = \Delta\Gamma + \Gamma E$ όπου $\Gamma E = BE - B\Gamma = 15 - 5 = 10$ και $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 5 - 3 = 2$.

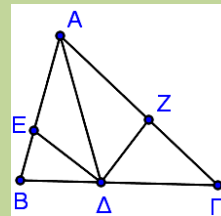
Άρα $\Delta E = 2 + 10 = 12$.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ διχοτόμο της γωνίας Α. Φέρουμε τις διχοτόμους ΔΕ και ΔΖ των γωνιών ΑΔΒ και ΑΔΓ αντίστοιχα.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

i. $\frac{AE}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta B}$ ii. $\frac{\dots}{Z\Gamma} = \frac{\Delta A}{\dots}$

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{Z\Gamma}{AZ} = \frac{AG}{AB}$



Λύση

α) i. Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε: $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{\Delta B}$ (1)

ii. Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε: $\frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{\Delta A}{\Delta \Gamma}$ (2)

β) Αντιστρέφοντας τη σχέση (2) έχουμε: $\frac{Z\Gamma}{AZ} = \frac{\Delta \Gamma}{\Delta A}$ (3) και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη

των σχέσεων (1) και (3) έχουμε: $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{Z\Gamma}{AZ} = \frac{AD}{\Delta B} \cdot \frac{\Delta \Gamma}{\Delta A} \Leftrightarrow \frac{AE}{EB} \cdot \frac{Z\Gamma}{AZ} = \frac{\Delta \Gamma}{\Delta B}$ (4)

Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\frac{\Delta \Gamma}{\Delta B} = \frac{AG}{AB}$ (5), οπότε

από τις σχέσεις (4),(5) προκύπτει ότι: $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{Z\Gamma}{AZ} = \frac{AG}{AB}$

Όμοια πολύγωνα

11. Στο διπλανό σχήμα, τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια και

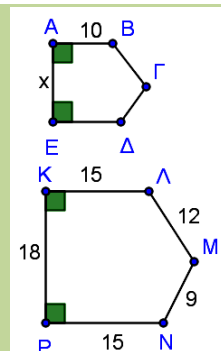
έχουν $\hat{A} = \hat{N}$ και $B = \Lambda$.

α) Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς ΑΕ.

γ) Να βρείτε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.



Λύση

α) Επειδή $A = K$, $E = P$, $\hat{A} = \hat{N}$, $B = \Lambda$ είναι και $\Gamma = M$ οπότε στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ ομόλογες πλευρές του ΚΛΜΝΡ είναι οι ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΡ, ΡΚ.

Ο λόγος ομοιότητας λ των ομοίων πολυγώνων είναι ο λόγος δυο ομόλογων πλευρών άρα

$$\lambda = \frac{AB}{KL} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

β) Αφού τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια άρα $\frac{2}{3} = \lambda = \frac{AE}{KP} = \frac{x}{18}$ δηλαδή

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{18} \Leftrightarrow 3x = 36 \Leftrightarrow x = 12$$

γ) Η περίμετρος Π_2 του πολυγώνου ΚΛΜΝΡ είναι $15+12+9+15+18=69$

Αν Π_1 η περίμετρος του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ τότε $\frac{2}{3} = \lambda = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{\Pi_1}{69}$ Συνεπώς

$$\frac{2}{3} = \frac{\Pi_1}{69} \Leftrightarrow 3\Pi_1 = 2 \cdot 69 \Leftrightarrow \Pi_1 = 46$$

Όμοια τρίγωνα

12. Θεωρούμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ.

α) Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. $AB = 8$, $AG = 12$, $A = 35^\circ$, $DE = 20$, $\Delta Z = 30$, $\Delta = 35^\circ$.

ii. $A = 47^\circ$, $B = 38^\circ$, $E = 47^\circ$, $\Delta = 95^\circ$.

iii. $AB = AG$, $A = \Delta$, $DE = \Delta Z$.

β) Στις περιπτώσεις που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΔΕΖ, να γράψετε τους ίσους λόγους των ομόλογων πλευρών του.

Λύση

α) i. Είναι $A = \Delta$, $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ και $\frac{AG}{\Delta Z} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$, δηλαδή

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{AG}{\Delta Z} = \frac{2}{5}$$

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, είναι όμοια.

ii. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 47^\circ + 38^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 95^\circ$$

Είναι $A = E$ και $\Gamma = \Delta$, δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

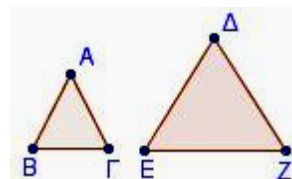
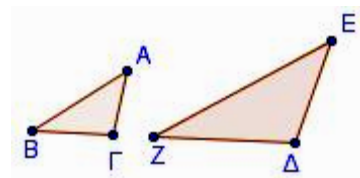
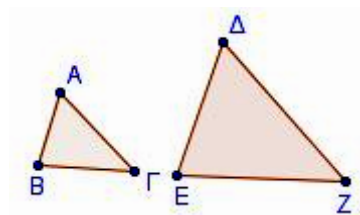
iii. Επειδή $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{AG}{\Delta Z}$ και $A = \Delta$, τα δύο τρίγωνα έχουν δύο

πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, είναι όμοια.

β) i. $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{AG}{\Delta Z} = \frac{BG}{EZ}$

ii. $\frac{AB}{EZ} = \frac{AG}{\Delta E} = \frac{BG}{\Delta Z}$

iii. $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{AG}{\Delta Z} = \frac{BG}{EZ}$

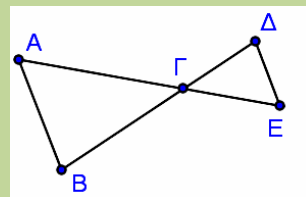


13. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ.

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $AB \parallel DE$

β) $BG = 2\Delta\Gamma$ και $EG = \frac{1}{2}AG$



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABΓ και EΔΓ έχουν : 1) $\angle \Gamma B A = \angle \Gamma E A$ ως κατακορυφήν και

2) $\angle A = \angle E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB, ΔE που τέμνονται από την AE

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ABΓ και EΔΓ έχουν : 1) $\frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma} = 2$, $\frac{A\Gamma}{E\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\frac{1}{2}A\Gamma} = 2$, δηλαδή $\frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma} = 2$ και

2) $\angle \Gamma B A = \angle \Gamma E A$ ως κατακορυφήν.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, είναι όμοια.

14.α) Να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι όμοια σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $A\Gamma = 4$, $B\Gamma = 16$, $BA = 18$, $\Delta Z = 10$, $EZ = 40$, $\Delta E = 48$

ii. $A = 63^\circ$, $\Gamma = 83^\circ$, $\Delta = 63^\circ$, $E = 34^\circ$

β) Έστω τρίγωνο ABΓ με πλευρές $AB = 6$, $A\Gamma = 7$ και $B\Gamma = 8$. Ποιο θα είναι το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου ΔEZ το οποίο είναι όμοιο με το τρίγωνο ABΓ, με λόγο ομοιότητας 3;

Λύση

α) i. Επειδή η AΓ είναι η μικρότερη πλευρά του τριγώνου ABΓ και η ΔZ η μικρότερη του

ΔEZ είναι αντίστοιχες και έχουν λόγο $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{4}{10}$.

Επειδή οι πλευρές BA και ΔE είναι οι μεγαλύτερες πλευρές των τριγώνων, είναι

αντίστοιχες και έχουν λόγο $\frac{BA}{\Delta E} = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$

Επειδή $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} \neq \frac{BA}{\Delta E}$ τα δύο τρίγωνα δεν είναι όμοια.

ii. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 63^\circ + B + 83^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 34^\circ$$

Τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ έχουν $A = \Delta = 63^\circ$ και $B = E = 34^\circ$, οπότε είναι όμοια.

β) Έστω ότι η πλευρά ΔE είναι αντίστοιχη της AB, η ΔZ της AΓ και η EZ της BΓ, τότε:

$$\frac{\Delta E}{AB} = 3 \Leftrightarrow \Delta E = 3AB = 3 \cdot 6 = 18, \quad \frac{\Delta Z}{A\Gamma} = 3 \Leftrightarrow \Delta Z = 3A\Gamma = 3 \cdot 7 = 21 \text{ και}$$

$$\frac{EZ}{B\Gamma} = 3 \Leftrightarrow EZ = 3B\Gamma = 3 \cdot 8 = 24$$

15. Από ένα σημείο Σ που βρίσκεται έξω από έναν δοσμένο κύκλο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ και μία τέμνουσα ΣΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) i. Τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ είναι όμοια.

ii. Τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ είναι όμοια.

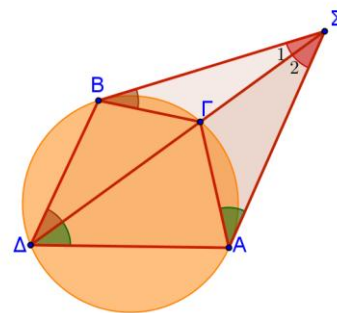
β) $A\Gamma \cdot B\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$

Λύση

α) i) Τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ έχουν :

- $\hat{\Sigma}_1$ κοινή
- $\Sigma\hat{B}\Gamma = \Sigma\hat{A}B$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της χορδής)

Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια



ii) Τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ έχουν :

- $\hat{\Sigma}_2$ κοινή
- $\Sigma\hat{A}\Gamma = \Sigma\hat{A}A$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της χορδής)

Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια.

β) Από α)i) έχουμε : $\frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{\Sigma\Gamma}{B\Sigma}$ (1) και από α)ii) $\frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{\Gamma\Sigma}{A\Sigma}$ (2)

Επειδή τα ΒΣ, ΑΣ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Σ, είναι ίσα, άρα:

$$\frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \Leftrightarrow B\Gamma \cdot A\Delta = A\Gamma \cdot B\Delta$$

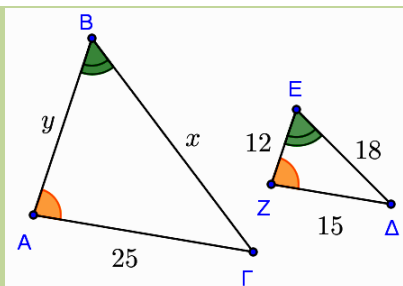
16. Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $A = Z$, $B = E$ και $A\Gamma = 25$, $E\Delta = 12$, $E\Gamma = 18$ και $Z\Delta = 15$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

β) Να συμπληρώσετε την ισότητα των λόγων με τις κατάλληλες πλευρές του τριγώνου ΔΕΖ :

$$\frac{BA}{\dots} = \frac{A\Gamma}{\dots} = \frac{\Gamma B}{\dots}$$

γ) Να υπολογίσετε τα x και y.



Λύση

α) Τα δύο τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες ίσες.

β) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουμε: $\frac{BA}{EZ} = \frac{A\Gamma}{Z\Delta} = \frac{\Gamma B}{E\Delta}$

γ) $\frac{BA}{EZ} = \frac{A\Gamma}{Z\Delta} = \frac{\Gamma B}{E\Delta} \Leftrightarrow \frac{y}{12} = \frac{25}{15} = \frac{x}{18}$. Άρα :

$$\frac{y}{12} = \frac{25}{15} \Leftrightarrow 15y = 12 \cdot 25 \Leftrightarrow y = 20 \quad \text{και} \quad \frac{25}{15} = \frac{x}{18} \Leftrightarrow 15x = 18 \cdot 25 \Leftrightarrow x = 30$$

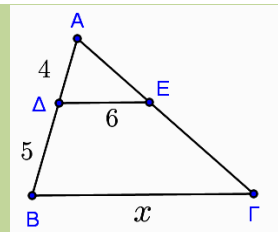
17. Στο διπλανό σχήμα, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και επιπλέον ισχύουν $A\Delta = 4$, $\Delta B = 5$ και $\Delta E = 6$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε τα κενά

στην ισότητα: $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\dots}$

γ) Ένας μαθητής χρησιμοποιεί την αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$ για να υπολογίσει το x. Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αναλογία είναι λάθος, να γράψετε τη σωστή και να υπολογίσετε την τιμή του x.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABΓ και AΔΕ έχουν :

- $\hat{A}$ κοινή
- $\hat{A}\Delta E = \hat{B}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΓ)

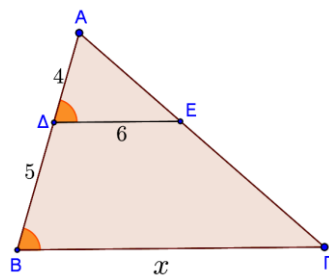
Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια

β) Από την ομοιότητα των τριγώνων ABΓ και AΔΕ έχουμε:

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{AE}$$

γ) Είναι λάθος επειδή στους 3 όρους της αναλογίας έχει πλευρές των όμοιων τριγώνων ενώ ο 4ος είναι το μήκος του ευθυγράμμιου τμήματος ΔΒ.

Η σωστή αναλογία είναι $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{9}{x} \Leftrightarrow 4x = 54 \Leftrightarrow x = \frac{54}{4} = 13,5$



18. Τα διπλανά τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια με ορθές τις γωνίες Α και Δ αντίστοιχα. Επιπλέον, για τις πλευρές των τριγώνων ABΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα ισχύουν AB=28, ΑΓ=24 και ΔΕ=21, ΔΖ=18.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε

κατάλληλα τα κενά: $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\dots}$

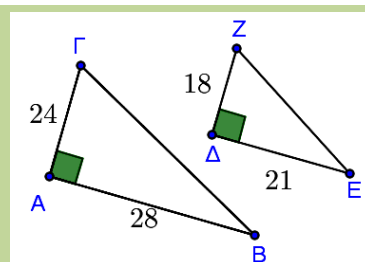
γ) Από τις παρακάτω ισότητες να επιλέξετε τη σωστή.

i. $ZE = \frac{18}{21} \Gamma B$

ii. $ZE = \frac{24}{28} \Gamma B$

iii. $ZE = \frac{3}{4} \Gamma B$

iv. $ZE = \frac{4}{3} \Gamma B$



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ έχουν :

- $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} = \frac{4^{(7)} 28}{21} = \frac{AB}{\Delta E}$
- $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

Επομένως τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες άρα είναι όμοια.

β) Επειδή τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι όμοια ισχύει ότι: $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$

γ) $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{ZE} \Leftrightarrow \frac{28}{21} = \frac{B\Gamma}{ZE} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{B\Gamma}{ZE} \Leftrightarrow 4ZE = 3B\Gamma \Leftrightarrow ZE = \frac{3}{4} B\Gamma$

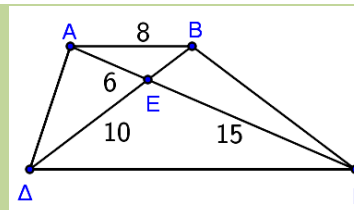
19. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν AB//ΔΓ, ΑΕ=6, ΑΒ=8, ΓΕ=15 και ΔΕ=10.

α) Να βρείτε δυο ζεύγη ίσων γωνιών των τριγώνων ΑΕΒ και ΔΕΓ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών τους.

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΕ και ΔΓ.



Λύση

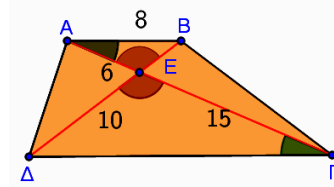
α) $\hat{EAB} = \hat{A\Gamma\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $ΑΓ$ και $\hat{AEB} = \hat{\Delta\epsilon\Gamma}$ γιατί είναι κατακορυφήν.

β) Τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $\Delta\epsilon\Gamma$ έχουν :

- $\hat{EAB} = \hat{A\Gamma\Delta}$
- $\hat{AEB} = \hat{\Delta\epsilon\Gamma}$

Επομένως τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $\Delta\epsilon\Gamma$ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία και είναι όμοια,

οπότε οι ομόλογες πλευρές του είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{AE}{\epsilon\Gamma} = \frac{BE}{\epsilon\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$.



γ) Αφού τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $\Delta\epsilon\Gamma$ είναι όμοια : $\frac{AE}{\epsilon\Gamma} = \frac{BE}{\epsilon\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{6}{15} = \frac{BE}{10} = \frac{8}{\Gamma\Delta}$

$$\frac{6}{15} = \frac{BE}{10} \Leftrightarrow 15 \cdot BE = 60 \Leftrightarrow BE = 4$$

$$\frac{6}{15} = \frac{8}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow 6 \cdot \Gamma\Delta = 120 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 20$$

20. Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες που σας δίνονται για το κάθε ζεύγος τριγώνων των παρακάτω σχημάτων, προκειμένου να απαντήσετε στα ακόλουθα:

α) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και ποιο δεν είναι;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

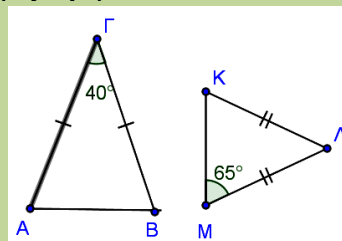
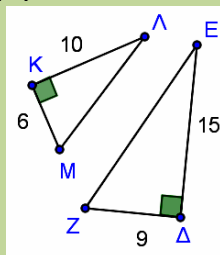
β) Για το ζεύγος των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος,

i. να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών.

ii. να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

1^ο ζεύγος: τρίγωνα $ΚΛΜ$ και $\Delta\epsilon\Gamma$

2^ο ζεύγος: τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΗΚΛ$



Λύση

α) 1^ο ζεύγος: ισχύει $\frac{KL}{\Delta\epsilon} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{KM}{Z\Delta}$ (1) και $K = \Delta = 90^\circ$

Επομένως τα τρίγωνα $ΚΛΜ$ και $\Delta\epsilon\Gamma$ είναι όμοια γιατί έχουν δυο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες

2^ο ζεύγος: Έστω ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΗΚΛ$ ήταν όμοια, τότε θα είχαν τις γωνίες απέναντι από τις ομόλογες πλευρές ίσες. Όμως το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με γωνία

κορυφής $\Gamma = 40^\circ$ επομένως $A = B = \frac{180 - 40}{2} = 70^\circ$ άρα καμία γωνία του δεν είναι

65° άτοπο. Άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΚΛΜ$ δεν είναι όμοια.

β) i) από (1) $\frac{KL}{\Delta\epsilon} = \frac{KM}{Z\Delta} = \frac{ML}{ZE} = \frac{2}{3}$

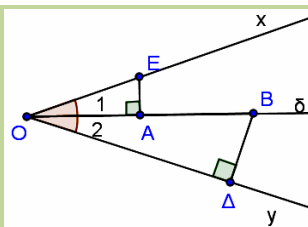
ii) Ο λόγος ομοιότητας λ των ομοίων τριγώνων $ΚΛΜ$ και $\Delta\epsilon\Gamma$ είναι ο λόγος δυο

ομόλογων πλευρών άρα $\lambda = \frac{KL}{\Delta\epsilon} = \frac{2}{3}$

21. Στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $\widehat{xOy}$ θεωρούμε τα σημεία Α, Β τέτοια ώστε: $OB = 2OA$. Η κάθετος στην Οδ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά Οx στο σημείο Ε και έστω Δ η προβολή του Β στην Οy. Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ είναι όμοια .

β) $2OA^2 = OD \cdot OE$



Λύση

α) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xOy}$ άρα $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

Επειδή τα τρίγωνα ΕΟΑ και ΒΟΔ είναι ορθογώνια, έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

β) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι ΟΑΕ και ΟΔΒ είναι όμοια. Άρα έχουμε

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OE}{OB} \Leftrightarrow OA \cdot OB = OD \cdot OE \quad (1).$$

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $OB = 2OA$ οπότε αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει $OA \cdot 2OA = OD \cdot OE$ δηλαδή $2OA^2 = OD \cdot OE$

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ

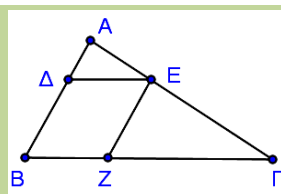
αντίστοιχα ώστε $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο Ε φέρνουμε

παράλληλη προς την ΑΒ, η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ζ.

Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.

β) $3BZ = BG$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια γιατί έχουν $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG}$ και $\widehat{A}$ κοινή (2° κριτήριο ομοιότητας).

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια θα έχουν $\widehat{ADE} = \widehat{B}$ και $\widehat{AED} = \widehat{G}$, οπότε $DE \parallel BG$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες). Επιπλέον αφού $EZ \parallel AB$ τότε το ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $DE = BZ$ (1). Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ προκύπτει $\frac{DE}{BG} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{3}$ άρα $BG = 3DE$ οπότε από την (1) έχουμε $BG = 3BZ$.

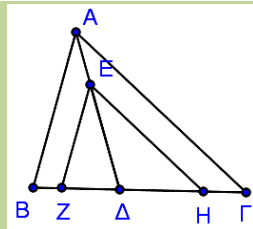
23. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ εσωτερική διχοτόμο της γωνίας Α και

Ε σημείο της ΑΔ τέτοιο ώστε $DE = \frac{2}{3}AD$. Από το Ε φέρνουμε

παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τη ΒΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $EZ = \frac{2}{3}AB$

β) $\frac{AZ}{\Delta H} = \frac{AB}{AG}$



Λύση

α) Επειδή $EZ \parallel AB$ τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΕΖ είναι όμοια, οπότε :

$$\frac{AZ}{\Delta B} = \frac{EZ}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{\frac{2}{3}AD}{AD} \Rightarrow \frac{EZ}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow EZ = \frac{2}{3}AB$$

β) Επειδή $EH \parallel AG$ τα τρίγωνα ΔEH και ΔAG είναι όμοια, άρα $\frac{\Delta H}{\Delta \Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta \Delta} = \frac{\frac{2}{3} \cancel{\Delta \Delta}}{\cancel{\Delta \Delta}} \Leftrightarrow \frac{\Delta H}{\Delta \Gamma} = \frac{2}{3}$ (1)

Επειδή είναι και $\frac{\Delta Z}{\Delta B} = \frac{2}{3}$ (από α) ερώτημα) (2), από τις (1),(2) προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta B} = \frac{\Delta H}{\Delta \Gamma} \Leftrightarrow \frac{\Delta Z}{\Delta H} = \frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} \quad (3)$$

Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε: $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{AG}$ (4), οπότε από τις σχέσεις

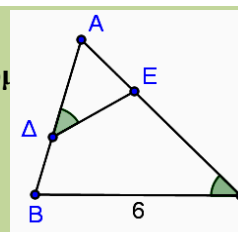
(3),(4) προκύπτει ότι $\frac{\Delta Z}{\Delta H} = \frac{AB}{AG}$.

24. Στο διπλανό σχήμα είναι $\angle ADE = \angle AGB$ και $BG = 6$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ABG και ADE είναι όμοια και να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta E} = \frac{AG}{\dots}$

$$\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta E} = \frac{AG}{\dots}$$

β) Αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ABG και ADE είναι ίσος με $\frac{2}{3}$, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΔE .



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABG και ADE έχουν $\angle ADE = \angle AGB$ και τη γωνία A κοινή, οπότε είναι όμοια.

Οι λόγοι ομοιότητας είναι: $\frac{AB}{AE} = \frac{BG}{\Delta E} = \frac{AG}{AD}$

β) Επειδή ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\frac{2}{3}$, ισχύει ότι:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BG}{\Delta E} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{6}{\Delta E} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\Delta E = 18 \Leftrightarrow \Delta E = 9$$

25. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ABG φέρουμε τα ύψη του AD και BE .

α) Αν το τρίγωνο ABG είναι και σκαληνό, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ADG και BEG είναι όμοια.

ii. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ADB και BEA δεν μπορεί να είναι όμοια.

β) Αν το τρίγωνο ABG είναι και ισοσκελές με κορυφή το G , τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα ADB και BEA είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ADG και BEG έχουν:

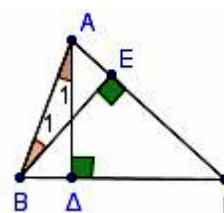
1) $\angle D = \angle E = 90^\circ$ και 2) τη γωνία G κοινή, οπότε έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία και είναι όμοια.

ii. Τα τρίγωνα ADB και BEA έχουν τις γωνίες Δ και E ορθές.

Αν ήταν όμοια τότε η γωνία A_1 θα ήταν ίση με την B_1 ή την A .

Αν $A_1 = B_1$, τότε τα τρίγωνα ADG και BEG θα είχαν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα είχαν και $A = B$ που είναι αδύνατο.

Αν $A_1 = A$ είναι άτοπο γιατί αφού το τρίγωνο ABG είναι οξυγώνιο το ύψος AD είναι εσωτερικό της



$\widehat{B\hat{A}\Gamma}$, οπότε $A_1 < A$. Άρα τα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle BEA$ δεν μπορεί να είναι όμοια.

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ, τότε $A = B$ γιατί θα βρίσκονταν στη βάση του ισοσκελούς.

Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ έχουν: 1) $\Delta = \text{Ε} = 90^\circ$ και 2) $A = B$, δηλαδή έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία οπότε είναι όμοια.

26. Στην πλευρά AB παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $BE = \frac{1}{3}AB$ και

στην πλευρά $\Delta\Gamma$ θεωρούμε σημείο Z τέτοιο, ώστε $\Delta Z = \frac{1}{3}\Delta\Gamma$. Αν η διαγώνιος $ΑΓ$ τέμνει τις ΔE και BZ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $AM = \Gamma N = 2MN$

$$\beta) MN = \frac{1}{5} AG$$

Λύση

α) Είναι $BE = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}\Delta\Gamma = \Delta Z$ και $BE \parallel \Delta Z$,

άρα το τετράπλευρο ΔZBE είναι παραλληλόγραμμο και $\Delta E \parallel ZB$.

Τα τρίγωνα ΑΕΜ και ΑΒΝ έχουν :

- $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ κοινή
- $\widehat{A\hat{E}M} = \widehat{A\hat{B}N}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων EM και BN που τέμνονται από την AB)

Επομένως τα τρίγωνα ΑΕΜ και ΑΒΝ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία άρα είναι όμοια.

$$\text{Οπότε } \frac{AM}{AN} = \frac{AE}{AB} \Leftrightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{\frac{2}{3} \cancel{AB}}{\cancel{AB}} \Leftrightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AM = \frac{2}{3} AN \Leftrightarrow$$

$$AM = \frac{2}{3}(AM + MN) \Leftrightarrow 3AM = 2AM + 2MN \Leftrightarrow AM = 2MN \quad (1)$$

Όμοια τα τρίγωνα ΖΓΝ και ΔΓΜ έχουν :

- $\Delta\hat{\Gamma}A$ κοινή
- $\Gamma\hat{Z}N = \Gamma\hat{\Delta}M$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ZN και ΔM που τέμνονται από την $\Gamma\Delta$)

Επομένως τα τρίγωνα $\triangle Z\Gamma\Lambda$ και $\triangle \Gamma\Delta\Lambda$ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία άρα είναι όμοια.

$$\text{Οπότε } \frac{\Gamma\text{N}}{\Gamma\text{M}} = \frac{\Gamma\text{Z}}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{\Gamma\text{N}}{\Gamma\text{M}} = \frac{\frac{2}{3}\cancel{\Delta\Gamma}}{\cancel{\Delta\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{\Gamma\text{N}}{\Gamma\text{M}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \Gamma\text{N} = \frac{2}{3}\Gamma\text{M} \Leftrightarrow$$

$$\Gamma N = \frac{2}{3}(\Gamma N + NM) \Leftrightarrow 3\Gamma N = 2\Gamma N + 2MN \Leftrightarrow \Gamma N = 2MN \quad (2).$$

Από (1),(2) έχουμε $AM=ΓN=2MN$

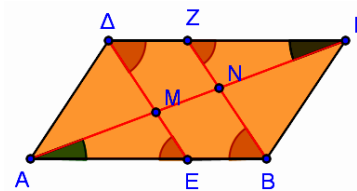
2ος τρόπος

Τα τρίγωνα ΑΜΕ και ΖΝΓ είναι ίσα γιατί έχουν:

$$AE = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}\Gamma\Delta = Z\Gamma, \text{ MEA} = \text{NZI} \text{ (γωνίες με πλευρές παράλληλες),}$$

MAE = ΝΓΖ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ).

Άρα θα ισχύει: $AM = \Gamma N$ (1)



Επειδή $\Delta M \parallel ZN$, θα ισχύει: $\frac{\Gamma Z}{Z\Delta} = \frac{\Gamma N}{MN} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}\Gamma\Delta}{\frac{1}{3}\Gamma\Delta} = \frac{\Gamma N}{MN} \Leftrightarrow 2 = \frac{\Gamma N}{MN} \Leftrightarrow \Gamma N = 2MN$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $AM = \Gamma N = 2MN$

β) $MN = \overset{\alpha)}{AG} - AM - \overset{\alpha)}{NG} \Leftrightarrow MN = AG - 2MN - 2MN \Leftrightarrow 5MN = AG \Leftrightarrow MN = \frac{1}{5}AG$

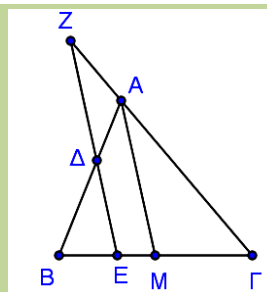
27. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε AM τη διάμεσό του και E τυχαίο σημείο του τμήματος BM . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στην AM που τέμνει την πλευρά AB στο Δ και την προέκταση της ΓA στο Z .

α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{AB}$

ii. $\frac{\dots}{AM} = \frac{\Gamma E}{\dots} = \frac{\dots}{\Gamma A}$

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\Delta E + EZ$ είναι σταθερό, για οποιαδήποτε θέση του E στο BM .



Λύση

α) i) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και BAM έχουν :

- $\hat{B}$ κοινή
- $\hat{B}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{M}\hat{A}$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $E\Delta$ και AM που τέμνονται από την $B\Gamma$)

Επομένως τα τρίγωνα $B\Delta E$ και BAM έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία και είναι όμοια.

Άρα η ζητούμενη αναλογία είναι η: $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM} = \frac{B\Delta}{AB}$ (1).

ii) Τα τρίγωνα ΓZE και ΓAM έχουν :

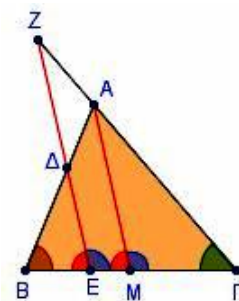
- $\hat{\Gamma}$ κοινή
- $\hat{\Gamma}\hat{M}\hat{A} = \hat{\Gamma}\hat{E}\hat{Z}$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων EZ και AM που τέμνονται από την $B\Gamma$)

Επομένως τα τρίγωνα ΓZE και ΓAM έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία άρα είναι όμοια. Άρα η

ζητούμενη αναλογία είναι η: $\frac{EZ}{AM} = \frac{\Gamma E}{\Gamma M} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma A}$ (2).

β) Από (1),(2) έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{AM} + \frac{EZ}{AM} = \frac{BE}{BM} + \frac{\Gamma E}{\Gamma M} \stackrel{\text{Μ μέσο}}{=} \frac{BE}{BM} + \frac{\Gamma E}{BM} = \frac{BE + \Gamma E}{BM} = \frac{B\Gamma}{BM} = \frac{2BM}{BM} = 2 \Leftrightarrow \Delta E + EZ = 2AM$$

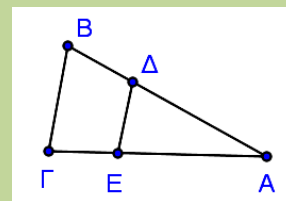


28. Στο διπλανό σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύουν: $AE = \frac{2}{3}A\Gamma$ και $A\Delta = \frac{2}{3}AB$.

α) Να αποδείξετε ότι $\angle A\Delta E = \angle A\Gamma B$.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει: $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{E\Delta}{B\Gamma}$.

γ) Να εξετάσετε αν το τμήμα $B\Gamma$ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔE .
Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



Λύση

α) Από τις δεδομένες σχέσεις έχουμε: $AE = \frac{2}{3}AG \Leftrightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{2}{3}$ και $AD = \frac{2}{3}AB \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$.

Άρα και $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG}$.

Τα τρίγωνα ADE και ABG είναι όμοια γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες μια προς μια και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες. Οι γωνίες που είναι απέναντι από τις ανάλογες πλευρές είναι ίσες άρα: $\hat{AED} = \hat{AGB}$.

β) Από τις ανάλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων έχουμε: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{ED}{GB}$, άρα ισχύει η δεδομένη σχέση.

γ) Αν το τμήμα BG είναι παράλληλο στο DE θα πρέπει οι γωνίες B και E να είναι ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη. Όμως από τα όμοια τρίγωνα οι γωνίες E και G είναι ίσες. Άρα θα πρέπει και οι B και G να είναι ίσες γωνίες. Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει γιατί το τρίγωνο είναι σκαληνό.

29. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και M σημείο της πλευράς AD ώστε

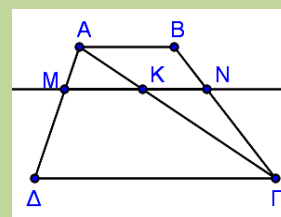
$$\frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}. \text{ Από το } M \text{ φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του}$$

τραπέζιου, η οποία τέμνει τις AG και $B\Gamma$ στα σημεία K και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{AK}{AG} = \frac{1}{3}$

β) $\frac{KN}{AB} = \frac{2}{3}$

γ) $MN = \frac{1}{3}\Gamma\Delta + \frac{2}{3}AB$



Λύση

α) Επειδή $MK \parallel \Delta\Gamma$ από το θεώρημα Θαλή ισχύει ότι $\frac{AK}{AG} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$ οπότε $\frac{AK}{AG} = \frac{1}{3}$.

β) Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $KN \parallel \Delta\Gamma$ είναι και $KN \parallel AB$, οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΓKN έχουν πλευρές παράλληλες, δηλαδή: $\frac{\Gamma N}{\Gamma B} = \frac{\Gamma K}{\Gamma A} = \frac{KN}{AB}$. Άρα $\frac{KN}{AB} = \frac{\Gamma K}{\Gamma A} = \frac{AG - AK}{\Gamma A} = 1 - \frac{AK}{AG} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

γ) Από το σχήμα έχουμε ότι $MN = MK + KN$ (3)

Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $\frac{KN}{AB} = \frac{2}{3}$ άρα $KN = \frac{2}{3}AB$ (4)

Επειδή $MK \parallel \Delta\Gamma$ έχουμε ότι $\frac{AK}{AG} = \frac{MK}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{3}$ λόγω του α) οπότε $MK = \frac{1}{3}\Gamma\Delta$ (5)

Αντικαθιστώ τις (4), (5) στην (3) οπότε προκύπτει $MN = \frac{1}{3}\Gamma\Delta + \frac{2}{3}AB$

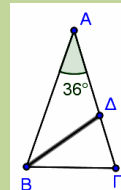
30. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$, $A = 36^\circ$ και η διχοτόμος του $B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

ii) $AD^2 = AG \cdot \Delta\Gamma$.

β) Αν $AG = 1$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AD .



Λύση

α) i) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$, οπότε αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος, ισχύει ότι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 36^\circ$. Άρα τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια γιατί έχουν $\hat{B}_2 = \hat{A} = 36^\circ$ και $\hat{\Gamma}$ κοινή.

ii) Είναι $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B}_2 - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$, συνεπώς το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές και ΒΓ = ΒΔ. Επίσης το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές ($\hat{B}_1 = \hat{A} = 36^\circ$) οπότε ΑΔ = ΒΔ. Άρα ΒΓ = ΑΔ (1).

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΒΔΓ και ΑΒΓ προκύπτει $\frac{B\Delta}{AB} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$ (2) $\Leftrightarrow B\Gamma^2 = \Delta\Gamma \cdot A\Gamma$.

Οπότε από τη σχέση (1) θα είναι $A\Delta^2 = \Delta\Gamma \cdot A\Gamma$.

2ος τρόπος

Επειδή ΒΔ διχοτόμος, από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου προκύπτει ότι:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2 = \Delta\Gamma \cdot A\Gamma$$

β) Έστω ΑΔ = ΒΔ = ΒΓ = x και ΑΒ = ΑΓ = 1 τότε ΔΓ = 1 - x οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} \quad (3) \Leftrightarrow x^2 = 1-x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0, \text{ οπότε } x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ ή } x_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} < 0 \text{ (απορρίπτεται).}$$

$$\text{Άρα } A\Delta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Πυθαγόρειο θεώρημα

31. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί προς τα πάνω στη ράμπα του διπλανού σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι για το ύψος y, που απέχει το κουτί από το έδαφος

κάθε χρονική στιγμή, ισχύει ότι $y = \frac{s}{4}$, όπου s το μήκος που έχει

διανύσει το κουτί πάνω στη ράμπα.

β) Όταν το κουτί απέχει από το έδαφος 2m, να βρείτε:

i. το μήκος s που έχει διανύσει το κουτί στη ράμπα.

ii. Την απόσταση του σημείου Δ από την άκρη της ράμπας Α.

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν:

1) $\Delta = B = 90^\circ$ και

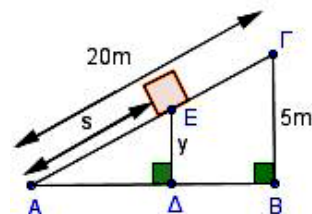
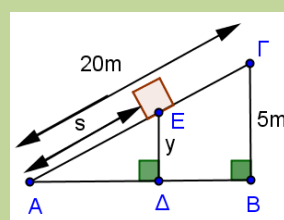
2) Τη γωνία Α κοινή

Επειδή έχουν δύο γωνίες ίσες, τα τρίγωνα είναι όμοια, οπότε οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{s}{20} \Leftrightarrow y = \frac{s}{4}$$

β) Για y = 2m είναι:

$$i. 2 = \frac{s}{4} \Leftrightarrow s = 8m$$



$$\text{ii. } \frac{\Delta\Gamma}{\text{B}\Gamma} = \frac{\text{A}\Delta}{\text{A}\text{B}} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{\text{A}\Delta}{\text{A}\text{B}} \quad (1)$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\text{A}\text{B}^2 = \text{A}\Gamma^2 - \text{B}\Gamma^2 = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375 \Leftrightarrow \text{A}\text{B} = \sqrt{375} = \sqrt{25 \cdot 15} = 5\sqrt{15}$$

$$\text{Από τη σχέση (1) έχουμε: } \frac{2}{5\sqrt{15}} = \frac{\text{A}\Delta}{5\sqrt{15}} \Leftrightarrow \text{A}\Delta = 2\sqrt{15} \text{ m}$$

32. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την πλευρά ΒΓ σε σημείο Δ, τέτοιο, ώστε

$$\frac{\text{B}\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{4}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\text{A}\text{B} = \frac{3}{4} \text{A}\Gamma$.

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\text{B}\Gamma = \frac{5}{4} \text{A}\Gamma$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

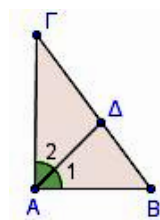
α) Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\frac{\text{B}\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\text{A}\text{B}}{\text{A}\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\text{A}\text{B}}{\text{A}\Gamma} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \text{A}\text{B} = \frac{3}{4} \text{A}\Gamma$$

β) Είναι $\text{A}\text{B}^2 + \text{A}\Gamma^2 = \left(\frac{3}{4} \text{A}\Gamma\right)^2 + \text{A}\Gamma^2 = \frac{9}{16} \text{A}\Gamma^2 + \frac{16}{16} \text{A}\Gamma^2 = \frac{25}{16} \text{A}\Gamma^2$ και

$$\text{B}\Gamma^2 = \left(\frac{5}{4} \text{A}\Gamma\right)^2 = \frac{25}{16} \text{A}\Gamma^2.$$

Επειδή $\text{A}\text{B}^2 + \text{A}\Gamma^2 = \text{B}\Gamma^2$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\angle \text{A} = 90^\circ$.



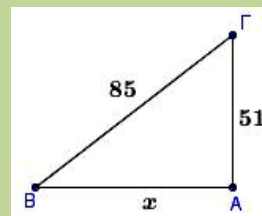
33. α) Ποιες από τις παρακάτω τριάδες θετικών αριθμών μπορούν να θεωρηθούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. 3, 4, 5

ii. $3\lambda, 4\lambda, 5\lambda$ ($\lambda > 0$)

iii. 4, 5, 6

β) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι, το μήκος x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4.



Λύση

α) Οι δύο πρώτες τριάδες μπορούν να θεωρηθούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου επειδή σ' αυτές ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

$$\text{i. } 5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + 16 \Leftrightarrow 25 = 25$$

$$\text{ii. } (5\lambda)^2 = (3\lambda)^2 + (4\lambda)^2 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 9\lambda^2 + 16\lambda^2 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25\lambda^2$$

$$\text{Ενώ στην iii) } 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \neq 36 (=6^2)$$

β) Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\text{B}\Gamma^2 = \text{A}\text{B}^2 + \text{A}\Gamma^2 \Leftrightarrow \text{A}\text{B}^2 = \text{B}\Gamma^2 - \text{A}\Gamma^2 \Leftrightarrow \text{A}\text{B}^2 = 85^2 - 51^2 \Leftrightarrow \text{A}\text{B}^2 = 4624 \Leftrightarrow \text{A}\text{B} = 68 \text{ άρα}$$

$$x = 68 = 4 \cdot 17.$$

Άρα το μήκος x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4.

34. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με ύψος AA και $AG = 8$, και $\Delta\Gamma = \frac{32}{5}$. Να

υπολογίσετε τα μήκη των παρακάτω τμημάτων:

α) $B\Gamma$

β) AB

γ) AA

Λύση

α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) έχουμε:

$$AG^2 = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma \Leftrightarrow 8^2 = \frac{32}{5} \cdot B\Gamma \Leftrightarrow 64 = \frac{32}{5} \cdot B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{5 \cdot 64}{32} \Leftrightarrow B\Gamma = 10.$$

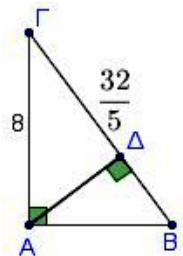
β) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) έχουμε:

$$AB^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow AB = \sqrt{36} \Leftrightarrow AB = 6.$$

γ) Ισχύει: $\Delta B = B\Gamma - \Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta B = 10 - \frac{32}{5} \Leftrightarrow \Delta B = \frac{50 - 32}{5} = \frac{18}{5} \Leftrightarrow \Delta B = 3,6$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ ($\Delta=90^\circ$) έχουμε:

$$AA^2 = 64 - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = 64 - \frac{1024}{25} = \frac{1600 - 1024}{25} = \frac{576}{25} \Leftrightarrow AA = \frac{24}{5} = 4,8$$



35. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $AG = 4$ και ύψος $AA = \frac{12}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $\Delta\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B = \frac{9}{5}$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ ($\Delta=90^\circ$) έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 = AG^2 - AA^2 = 4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 16 - \frac{144}{25} = \frac{400 - 144}{25} = \frac{256}{25} \Leftrightarrow$$

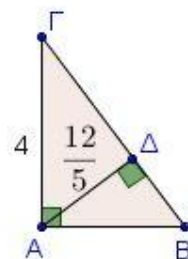
$$\Delta\Gamma = \sqrt{\frac{256}{25}} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{16}{5}$$

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$AA^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{16}{5} \cdot \Delta B \Leftrightarrow \frac{144}{25} = \frac{16}{5} \cdot \Delta B \Leftrightarrow \Delta B = \frac{5 \cdot 144}{25 \cdot 16} \Leftrightarrow \Delta B = \frac{9}{5}$$

γ) Για το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε

$$(AB\Gamma) = \frac{\beta \cdot \nu}{2} = \frac{B\Gamma \cdot AA}{2} = \frac{\left(\frac{16}{5} + \frac{9}{5}\right) \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{\frac{25}{5} \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$



36. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε ένα τμήμα

$AE = \frac{3}{5} AB$ και στην ΑΔ ένα τμήμα $AZ = \frac{4}{5} AD$. Αν το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι

76, να υπολογίσετε:

α) Το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

β) Την περίμετρο του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ.

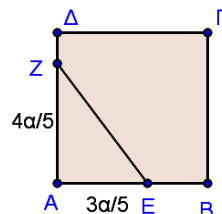
Λύση

α) Είναι $AE = \frac{3}{5} AB = \frac{3}{5} \alpha$, $AZ = \frac{4}{5} AD = \frac{4}{5} \alpha$ (ΑΒ, ΑΔ πλευρές τετραγώνου)

$$(EB\Gamma\Delta Z) = (AB\Gamma\Delta) - (AEZ) \Leftrightarrow 76 = \alpha^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3\alpha}{5} \cdot \frac{4\alpha}{5} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - \frac{6\alpha^2}{25} = 76 \Leftrightarrow \frac{19\alpha^2}{25} = 76 \Leftrightarrow \alpha^2 - \frac{6\alpha^2}{25} = 76 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{76^4 \cdot 25}{19} \Leftrightarrow \alpha^2 = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10$$



β) Είναι $AE = \frac{3}{5} \alpha = \frac{3}{5} \cdot 10^2 = 6$, οπότε $BE = 10 - 6 = 4$ και $AZ = \frac{4}{5} \alpha = \frac{4}{5} \cdot 10^2 = 8$, οπότε

$$DZ = 10 - 8 = 2.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΖ ισχύει ότι:

$$EZ^2 = AE^2 + AZ^2 = 36 + 64 = 100 \Leftrightarrow EZ = 10$$

Η περίμετρος του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι:

$$\Pi = EB + B\Gamma + \Gamma\Delta + DZ + ZE = 4 + 10 + 10 + 2 + 10 = 36$$

37. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 18 cm και ΒΓ = 30 cm. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Αν ΑΔ = 9 cm τότε:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΓ.

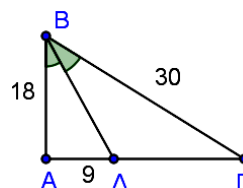
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Λύση

α) Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο ΑΒΓ

$$\text{έχουμε: } \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{AD}{9} = \frac{30}{18} \Leftrightarrow AD = \frac{30 \cdot 9}{18} = 15, \text{ άρα}$$

$$AG = AD + DG = 9 + 15 = 24$$



β) Είναι $AB^2 + AG^2 = 18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900 = 30^2 = BC^2$, οπότε από το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος ισχύει ότι $\angle A = 90^\circ$.

38. Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε ένα σημείο Μ.

α) Αν το σημείο Α είναι μέσο του τόξου ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

i. Όταν η χορδή ΑΒ είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, τότε $AM \cdot AB = AG^2$

ii. Όταν η χορδή ΑΒ δεν είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, ισχύει η σχέση $AM \cdot AB = AG^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν για τις χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε σημείο Μ ισχύει ότι $AM \cdot AB = AG^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.

Λύση

- α) i. Επειδή το Α είναι μέσο του τόξου ΓΔ, η ΟΑ είναι μεσοκάθετος της χορδής ΓΔ. Όμως η χορδή ΑΒ είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, άρα η ΑΒ διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.

Η γωνία ΑΓΒ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ για τη κάθετη πλευρά ΑΓ ισχύει ότι:

$$ΑΓ^2 = ΑΜ \cdot ΑΒ$$

- ii. Έστω τώρα ότι η ΑΒ δεν είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ.

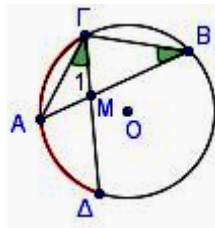
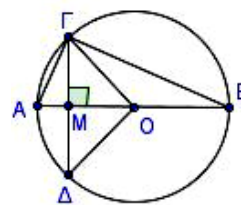
Τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΓΒ έχουν:

1) $\Gamma_1 = B$ γιατί είναι εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα και

2) τη γωνία Α κοινή

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία και είναι όμοια, οπότε και οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{ΑΜ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} \Leftrightarrow ΑΓ^2 = ΑΜ \cdot ΑΒ.$$



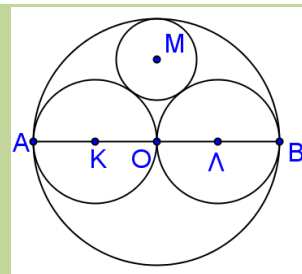
- β) Στα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΓΒ ισχύει ότι: $ΑΓ^2 = ΑΜ \cdot ΑΒ \Leftrightarrow \frac{ΑΜ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες (η γωνία Α είναι κοινή), τα τρίγωνα είναι όμοια, οπότε έχουν και τις υπόλοιπες γωνίες τους αντίστοιχα ίσες. Άρα $\Gamma_1 = B$, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα τους ΑΓ και ΑΔ είναι ίσα, δηλαδή το Α είναι μέσο του τόξου ΓΔ.

39. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μία διάμετρός του ΑΒ. Με διαμέτρους τα τμήματα ΟΑ και ΟΒ γράφουμε τους κύκλους κέντρων Κ και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου Μ και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων Κ και Λ και εσωτερικά του κύκλου κέντρου Ο.

- α) Να εκφράσετε τις διακέντρους ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των αντιστοιχών κύκλων ως συνάρτηση των ακτίνων τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

- β) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{R}{3}$.

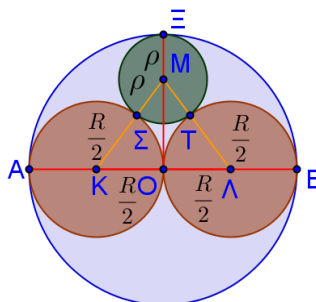


Λύση

- α) Η διάκεντρος δύο εφαπτόμενων εξωτερικά κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής των 2 κύκλων και ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους.

$$\text{Οπότε } ΚΜ = ΚΣ + ΣΜ = \frac{R}{2} + \rho \text{ και } ΛΜ = ΛΤ + ΤΜ = \frac{R}{2} + \rho$$

Η διάκεντρος δύο εφαπτόμενων εσωτερικά κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής των 2 κύκλων και ισούται με την διαφορά των ακτίνων τους. Επομένως $ΟΜ = ΟΞ - ΞΜ = R - \rho$



- β) Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές αφού ΚΜ=ΛΜ (από το (α) ερώτημα), με Ο το μέσο της πλευράς ΚΛ, άρα η διάμεσος ΜΟ

είναι και ύψος, δηλαδή $ΜΟΚ = 90^\circ$. Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΚ έχουμε

$$ΚΜ^2 = ΚΟ^2 + ΜΟ^2 \Leftrightarrow \left(\rho + \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} + (R - \rho)^2 \Leftrightarrow \cancel{\rho^2} + R \cdot \rho + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{4} + R^2 - 2R \cdot \rho + \cancel{\rho^2} \Leftrightarrow$$

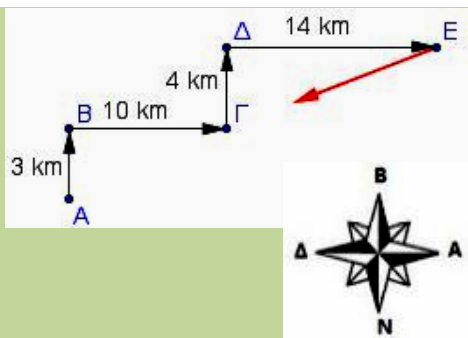
$$3\cancel{R} \cdot \rho = R^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{R}{3}$$

40. Ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε.

α) Αν από το σημείο Ε επιστρέψει στο σημείο Α από το οποίο ξεκίνησε, κινούμενο ευθύγραμμο, να βρείτε την απόσταση ΑΕ που θα διανύσει.

β) Τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά;

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΕ ($K = 90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε: $AE^2 = AK^2 + KE^2 = (3+4)^2 + (10+14)^2 \Leftrightarrow$

$$AE^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 \Leftrightarrow AE = \sqrt{625} = 25$$

β) Αν τα σημεία Α, Γ και Ε ήταν συνευθειακά θα πρέπει να ισχύει: $ΑΓ + ΓΕ = ΑΕ$.

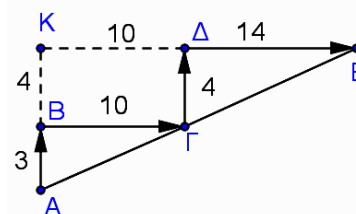
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($B = 90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 3^2 + 10^2 = 9 + 100 = 109 \Leftrightarrow ΑΓ = \sqrt{109}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ ($\Delta = 90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$ΕΓ^2 = ΔΕ^2 + ΔΓ^2 = 14^2 + 4^2 = 196 + 16 = 212 \Leftrightarrow ΕΓ = \sqrt{212}$$

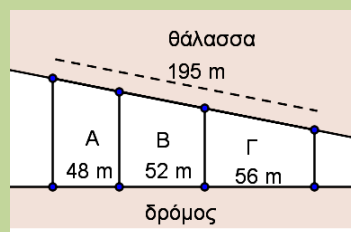
$$ΑΓ + ΓΕ = \sqrt{109} + \sqrt{212} = 10,4403 + 14,5602 = 25,0005 > 25.$$



41. Ιδιοκτήτης μεγάλης ακίνητης περιουσίας διαθέτει προς πώληση μια ιδιοκτησία του, η οποία περιλαμβάνει τρία διαδοχικά οικοπέδα με συνολική πρόσοψη 195 m σε ακτή θάλασσας, τα οποία αποτυπώνονται στο σχέδιο που ακολουθεί. Οι επιφάνειες της ιδιοκτησίας και των οικοπέδων είναι σχήματος ορθογωνίου τραpezίου. Σημειώνεται ότι, ως πρόσοψη οικοπέδου θεωρείται το μήκος της πλευράς του οικοπέδου που συνορεύει με την ακτή της θάλασσας.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της πρόσοψης του κάθε οικοπέδου.

β) Αν τα μήκη των δυο άλλων πλευρών της ιδιοκτησίας είναι ανάλογα των αριθμών 2 και 1, να υπολογίσετε την περίμετρο της ιδιοκτησίας. (Δίνεται ότι $\sqrt{13689} = 117$)



Λύση

α) Επειδή οι ΛΔ, ΚΕ, ΙΖ και ΗΘ είναι κάθετες στη ΔΗ θα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Από το θεώρημα Θαλή διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{ΚΛ}{ΛΘ} = \frac{ΔΕ}{ΔΗ} \Leftrightarrow \frac{ΚΛ}{195} = \frac{48}{48+52+56} \Leftrightarrow$$

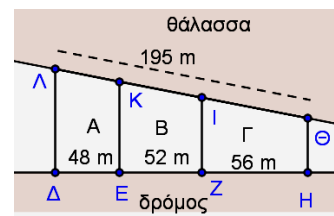
$$\frac{ΚΛ}{195} = \frac{48:12}{156:12} \Leftrightarrow \frac{ΚΛ}{195} = \frac{4}{13} \Leftrightarrow ΚΛ = \frac{4}{13} \cdot 195^{15} \Leftrightarrow$$

$$ΚΛ = 4 \cdot 15 = 60. \text{ Άρα η πρόσοψη του Α οικοπέδου είναι 60 m.}$$

$$\frac{ΚΙ}{ΚΛ} = \frac{ΕΖ}{ΔΕ} \Leftrightarrow \frac{ΚΙ}{60} = \frac{52}{48} \Leftrightarrow \frac{ΚΙ}{60} = \frac{52:4}{48:4} \Leftrightarrow \frac{ΚΙ}{60} = \frac{13}{12} \Leftrightarrow ΚΙ = \frac{13}{12} \cdot 60^5 = 13 \cdot 5 = 65$$

Δηλαδή το Β οικόπεδο έχει πρόσοψη 65 m.

Για την πρόσοψη του Γ οικοπέδου έχουμε: $ΙΘ = 195\text{m} - 65\text{m} - 60\text{m} = 70\text{m}$



β) Επειδή τα μήκη των δυο άλλων πλευρών της ιδιοκτησίας είναι

ανάλογα των αριθμών 2 και 1, ισχύει ότι: $\frac{\Lambda\Delta}{\Theta\text{H}} = \frac{2}{1}$, οπότε αν

$\Theta\text{H} = x\text{ m}$ τότε $\Lambda\Delta = 2x\text{ m}$. Από το Θ φέρουμε κάθετη στη $\Lambda\Delta$ που

τη τέμνει στο Μ. Το $\triangle \text{M}\Delta\text{H}\Theta$ είναι ορθογώνιο, οπότε

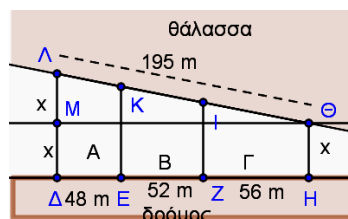
$M\Delta = \Theta H = x$ και επειδή $\Lambda\Delta = 2x$ θα είναι και $\Lambda M = x$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Lambda\text{Μ}\Theta$ έχουμε:

$$\Lambda M^2 = \Lambda \Theta^2 - M \Theta^2 = 195^2 - 156^2 = (195 - 156)(195 + 156) = 39 \cdot 351 = 13689 \Leftrightarrow \Lambda M = \sqrt{13689} = 117.$$

Η περίμετρος της ιδιοκτησίας είναι:

$$\Pi = \Lambda\Theta + \Theta H + H\Delta + \Lambda\Delta = 195m + 117m + 156m + 2 \cdot 117m = 702m$$



Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος

42. Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι $\alpha = 8$, $\beta = 6$ και $\gamma = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς AB στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ.

Λύση

α) Είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 36 + 25 = 61$ και $\alpha^2 = 64$.

Επειδή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με $\text{A} > 90^\circ$.

β) Η προβολή της ΑΒ στην ΑΓ είναι το ΑΔ και στην ΒΓ το ΒΕ.

Από το θεώρημα αμβλείας για τη γωνία Α στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

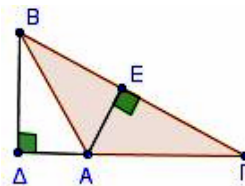
$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2 \cdot A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow 8^2 = 5^2 + 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot A\Delta \Leftrightarrow$$

$$64 = 25 + 36 + 12A\Delta \Leftrightarrow 12A\Delta = 3 \Leftrightarrow A\Delta = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Από το θεώρημα οξείας για τη γωνία Β, έχουμε:

$$A\Gamma^2 = B A^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot BE \Leftrightarrow 6^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot BE \Leftrightarrow$$

$$36 = 25 + 64 - 16BE \Leftrightarrow 16BE = 53 \Leftrightarrow BE = \frac{53}{16}$$



43. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 6, ΒΓ = 9 και Β = 60°

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 3\sqrt{7}$.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.

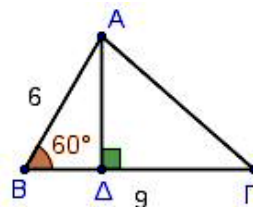
γ) Να υπολογίσετε την προβολή της AB πάνω στη $B\Gamma$.

Λύση

α) Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2 \cdot AB \cdot B\Gamma \cdot \sin \hat{B} = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \sin 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$A\Gamma^2 = 36 + 81 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 117 - 54 = 63 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$



β) Για το είδος του τριγώνου ελέγχουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών και έχουμε:

$9^2 < 6^2 + (3\sqrt{7})^2 \Leftrightarrow 81 < 36 + 63 \Leftrightarrow 81 < 99$. Άρα $A < 90^\circ$ και το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

γ) Η προβολή της πλευράς AB πάνω στην πλευρά AG είναι το ευθύγραμμο τμήμα BD.

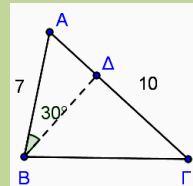
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε $\Delta = 90^\circ$ και $B = 60^\circ$ άρα $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Οπότε $B\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

44. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε το ύψος του $B\Delta$.

Αν $AB=7$, $A\Gamma=10$ και $AB\Delta = 30^\circ$, να υπολογίσετε:

α) το τμήμα $A\Delta$.

β) την πλευρά $B\Gamma$.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $AB\Delta = 30^\circ$, άρα $A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{7}{2}$.

β) Είναι $A + AB\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow A + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow A = 60^\circ$

Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \sin 60^\circ = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 49 + 100 - 70 = 79 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{79}$$

45. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A > 90^\circ$) φέρουμε τα ύψη του $A\Delta$, BE και ΓZ .

α) Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;

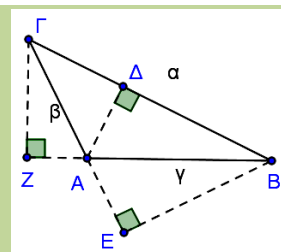
Στη συνέχεια να την γράψετε σωστά.

A. $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta$

B. $\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\beta \cdot AE$

Γ. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot AE$

β) Αν $\alpha=7$, $\beta=4$ και $\gamma=5$, να υπολογίσετε την προβολή της $B\Gamma$ πάνω στην $A\Gamma$.



Λύση

α) Λανθασμένη είναι η B γιατί από το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο $AB\Gamma$ προκύπτει:

$$\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\beta \cdot \Gamma E$$

β) Η προβολή της $B\Gamma$ πάνω στην $A\Gamma$ είναι το τμήμα ΓE . Από τη σχέση B έχουμε:

$$\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\beta \cdot \Gamma E \Leftrightarrow 5^2 = \beta^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \Gamma E \Leftrightarrow 25 = 49 + 16 - 8\Gamma E \Leftrightarrow$$

$$8\Gamma E = 65 - 25 = 40 \Leftrightarrow \Gamma E = 5$$

46. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=12$, $A\Gamma=6$, $B\Gamma=8$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις γωνίες του.

β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην ευθεία $B\Gamma$.

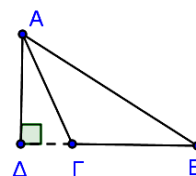
Λύση

α) Είναι $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 < 144 = 12^2 = AB^2 \Rightarrow \Gamma > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Η προβολή της $A\Gamma$ στη $B\Gamma$ είναι το $\Gamma\Delta$.

Επειδή $\Gamma > 90^\circ$ από το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο $AB\Gamma$, έχουμε:

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 + 2B\Gamma \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow 2B\Gamma \cdot \Gamma\Delta = AB^2 - (A\Gamma^2 + B\Gamma^2) \Leftrightarrow$$



$$\Gamma\Delta = \frac{AB^2 - (A\Gamma^2 + B\Gamma^2)}{2B\Gamma} = \frac{12^2 - (6^2 + 8^2)}{16} = \frac{144 - 100}{16} = \frac{44}{16} = \frac{11}{4}$$

47. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με μήκη πλευρών $\alpha=5$, $\beta=7$ και $\gamma=3$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 120^\circ$.

β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς α πάνω στην ευθεία AB.

Λύση

α) Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ έχουμε: $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cdot \sin B \Leftrightarrow$

$$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin B \Leftrightarrow 49 = 25 + 9 - 30 \sin B \Leftrightarrow -30 \sin B = 15 \Leftrightarrow \sin B = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 120^\circ$$

β) Εφαρμόζοντας το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ABΓ προκύπτει:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow 7^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot B\Delta \Leftrightarrow 49 = 25 + 9 + 6 \cdot B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \frac{5}{2}.$$

Θεωρήματα διαμέσων

48. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές $\alpha = 7$, $\beta = 4$ και $\mu_\beta = \sqrt{33}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\gamma = 5$.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABΓ ως προς τις γωνίες του.

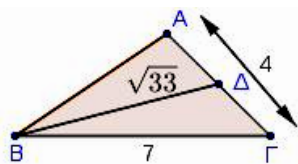
Λύση

α) Από το θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} = \frac{2 \cdot 7^2 + 2 \cdot \gamma^2 - 4^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{33}^2 = \frac{2 \cdot 7^2 + 2 \cdot \gamma^2 - 4^2}{4} \Leftrightarrow 4 \cdot 33 = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot \gamma^2 - 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\gamma^2 = \frac{132 - 98 + 16}{2} = \frac{50}{2} = 25 \Leftrightarrow \gamma = 5$$



β) Είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 16 + 25 = 41$ και $\alpha^2 = 49$, δηλαδή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$ και το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

49. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) με $AB > A\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσο του AM και το ύψος του ΑΔ.

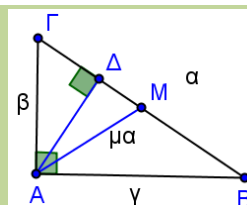
α) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω σχέσεις είναι σωστές ή λανθασμένες.

Αν κάποια είναι λανθασμένη να τη ξαναγράψετε διορθωμένη.

A. $\beta^2 + \gamma^2 = 4\mu_\alpha^2$ B. $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$

β) Αν $AB = 8$ και $A\Gamma = 6$, να υπολογίσετε την προβολή MΔ της διαμέσου AM στην πλευρά BΓ.

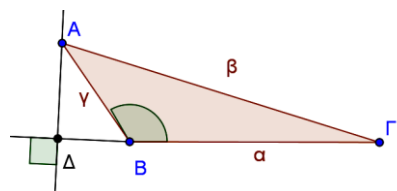
Λύση



α) Η μ_α είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του

ορθογωνίου τριγώνου ABΓ, άρα $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$.

Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:



$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2} = 2\mu_a^2 + \frac{(2\mu_a)^2}{2} = 2\mu_a^2 + \frac{4\mu_a^2}{2} = 2\mu_a^2 + 2\mu_a^2 = 4\mu_a^2$$

Η Β σχέση δεν μπορεί να είναι σωστή γιατί η πλευρά β είναι μικρότερη από την πλευρά γ .

Η σωστή είναι $\gamma^2 - \beta^2 = 2\alpha \cdot \text{ΜΔ}$

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10$$

$$\gamma^2 - \beta^2 = 2\alpha \cdot \text{ΜΔ} \Leftrightarrow \text{ΜΔ} = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} = \frac{8^2 - 6^2}{20} = 1,4$$

50. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο έχουμε $\beta=7$, $\gamma=6$ και η διάμεσος του $\mu_a = \frac{\sqrt{89}}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 9$.

β) Να υπολογίσετε την προβολή ΜΔ της διαμέσου ΑΜ πάνω στην πλευρά α.

Λύση

α) Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 7^2 + 6^2 = 2\left(\frac{\sqrt{89}}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{2} = 49 + 36 - \cancel{89}^{\cancel{4}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{2} = 85 - \frac{89}{2} = \frac{81}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 = 81 \Leftrightarrow \alpha = 9$$

β) Από το 2ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{ΜΔ} \Leftrightarrow \text{ΜΔ} = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} = \frac{7^2 - 6^2}{18} = \frac{13}{18}$$

51. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\text{ΒΓ} = \alpha\sqrt{3}$, $\text{ΑΓ} = \alpha\sqrt{2}$ και $\text{ΑΒ} = \alpha$, όπου $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια είναι η ορθή γωνία.

β) $\mu_\gamma = \frac{3\alpha}{2}$, όπου μ_γ η διάμεσος του ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ.

Λύση

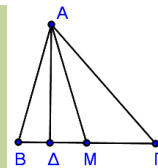
α) Είναι $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = \alpha^2 + (\alpha\sqrt{2})^2 = \alpha^2 + 2\alpha^2 = 3\alpha^2 = (\alpha\sqrt{3})^2 = \text{ΒΓ}^2 \Leftrightarrow \text{Α} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.

$$\beta) \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} = \frac{2(\alpha\sqrt{3})^2 + 2(\alpha\sqrt{2})^2 - \alpha^2}{4} = \frac{6\alpha^2 + 4\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{9\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\gamma = \frac{3\alpha}{2}$$

52. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΑΒ} = 6$, $\text{ΑΓ} = 8$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ και ισχύει ότι: $\text{ΔΜ} = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\text{ΒΓ} = 7$

β) Να βρείτε το μήκος του ύψους ΑΔ.



Λύση

α) Από το 2ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{ΜΔ} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\text{ΜΔ}} = \frac{8^2 - 6^2}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

β) Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\mu_a^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \frac{2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 6^2 - 7^2}{4} = \frac{128 + 72 - 49}{4} = \frac{151}{4} \Leftrightarrow \mu_a = \frac{\sqrt{151}}{2}$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΜ έχουμε:

$$\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΜ}^2 = \text{ΑΜ}^2 \Leftrightarrow \text{ΑΔ}^2 + 2^2 = \frac{151}{4} \Leftrightarrow \text{ΑΔ}^2 = \frac{151}{4} - 4 = \frac{135}{4} \Leftrightarrow \text{ΑΔ} = \frac{\sqrt{135}}{2}$$

53. Δίνεται κύκλος (Κ, R) και δύο διαμέτροί του ΑΒ και ΓΔ. Έστω Μ εξωτερικό σημείο του κύκλου τέτοιο, ώστε ΑΜ=10, ΒΜ=12 και ΓΜ=14.

α) Να αποδείξετε ότι : $\text{ΜΑ}^2 + \text{ΜΒ}^2 = 2(\text{ΜΚ}^2 + \text{R}^2)$

β) Να αποδείξετε ότι : $\text{ΜΓ}^2 + \text{ΜΔ}^2 = 2(\text{ΜΚ}^2 + \text{R}^2)$

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΔΜ.

Λύση

α) Από 1^ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΜΑΒ έχουμε:

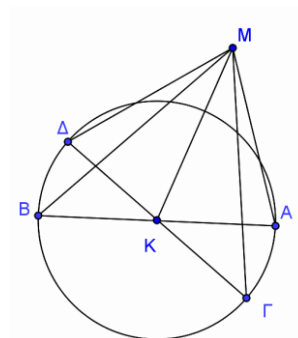
$$\text{ΜΑ}^2 + \text{ΜΒ}^2 = 2\text{ΜΚ}^2 + \frac{\text{ΑΒ}^2}{2} \Leftrightarrow \text{ΜΑ}^2 + \text{ΜΒ}^2 = 2\text{ΜΚ}^2 + \frac{(2\text{R})^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\text{ΜΑ}^2 + \text{ΜΒ}^2 = 2\text{ΜΚ}^2 + 2\text{R}^2 \Leftrightarrow \text{ΜΑ}^2 + \text{ΜΒ}^2 = 2(\text{ΜΚ}^2 + \text{R}^2).$$

β) Από 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΜΓΔ έχουμε:

$$\text{ΜΓ}^2 + \text{ΜΔ}^2 = 2\text{ΜΚ}^2 + \frac{\text{ΓΔ}^2}{2} \Leftrightarrow \text{ΜΓ}^2 + \text{ΜΔ}^2 = 2\text{ΜΚ}^2 + \frac{(2\text{R})^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\text{ΜΓ}^2 + \text{ΜΔ}^2 = 2\text{ΜΚ}^2 + 2\text{R}^2 \Leftrightarrow \text{ΜΓ}^2 + \text{ΜΔ}^2 = 2(\text{ΜΚ}^2 + \text{R}^2).$$

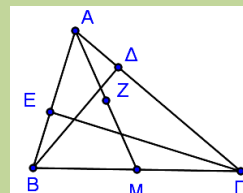


γ) Από τις σχέσεις που αποδείξαμε στα ερωτήματα α) και β), επειδή τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, θα είναι και τα πρώτα. Άρα

$$\text{ΜΑ}^2 + \text{ΜΒ}^2 = \text{ΜΓ}^2 + \text{ΜΔ}^2 \Leftrightarrow 10^2 + 12^2 = 14^2 + \text{ΔΜ}^2 \Leftrightarrow \text{ΔΜ}^2 = 48 \Leftrightarrow \text{ΔΜ} = 4\sqrt{3}.$$

54. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ για το οποίο ισχύει ότι: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Φέρουμε τα ύψη ΒΔ, ΓΕ και τη διάμεσο ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{α) } \angle A < 90^\circ \quad \text{β) } \text{ΑΕ} = \frac{\alpha^2}{2\gamma} \quad \text{γ) } \text{ΑΜ} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$



Λύση

α) Είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 > \alpha^2 \Leftrightarrow \angle A < 90^\circ$.

β) Επειδή $\angle A < 90^\circ$, από το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot \text{ΑΕ} \stackrel{\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2}{=} 2\alpha^2 - 2\gamma \cdot \text{ΑΕ} \Leftrightarrow 2\gamma \cdot \text{ΑΕ} = 2\alpha^2 - \alpha^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \text{ΑΕ} = \frac{\alpha^2}{2\gamma}$$

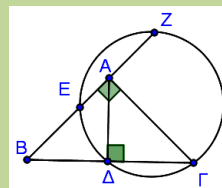
γ) Από το 1ο θεώρημα Διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\text{ΑΜ}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} = 2\text{ΑΜ}^2 \Leftrightarrow 2\text{ΑΜ}^2 = \frac{3\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \text{ΑΜ}^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \text{ΑΜ} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

Τέμνουσες κύκλου

55. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και το ύψος του AD . Ένας κύκλος διέρχεται από τα σημεία Δ, Γ και τέμνει την BA στο E και την προέκτασή της στο Z έτσι ώστε: $BE=6$, $BZ=8$ και $B\Delta=4$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων:

- α) $B\Gamma$ β) AB



Λύση

α) Τα EZ , $\Delta\Gamma$ είναι χορδές του κύκλου που τέμνονται στο B , άρα:

$$B\Delta \cdot B\Gamma = BE \cdot BZ \Leftrightarrow 4 \cdot B\Gamma = 6 \cdot 8 \Leftrightarrow 4 \cdot B\Gamma = 48 \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{48}{4} = 12$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ το $B\Delta$ είναι η προβολή του AB στη $B\Gamma$ και ισχύει:

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta = 12 \cdot 4 = 48 \Leftrightarrow AB = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

56. Κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διαγώνιοί του $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο σημείο M , το οποίο είναι το μέσο της διαγωνίου $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $AB^2 = 4MA \cdot M\Gamma$ β) $AB^2 + AD^2 = 2AM \cdot A\Gamma$ γ) $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + AD^2 = 2A\Gamma^2$

Λύση

α) Οι χορδές ΔB και $A\Gamma$ τέμνονται στο M συνεπώς

$$MB \cdot M\Delta = MA \cdot M\Gamma \Leftrightarrow \frac{\Delta B}{2} \cdot \frac{\Delta B}{2} = MA \cdot M\Gamma \Leftrightarrow \Delta B^2 = 4MA \cdot M\Gamma \quad (1)$$

β) Από 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $AB\Delta$ τρίγωνο έχουμε

$$AB^2 + AD^2 = 2AM^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \quad (2)$$

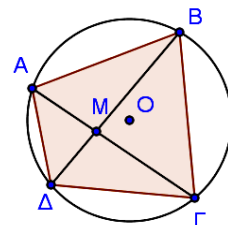
$$\text{Από τις (1) και (2) προκύπτει: } AB^2 + AD^2 = 2AM^2 + \frac{4MA \cdot M\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$AB^2 + AD^2 = 2AM^2 + 2MA \cdot M\Gamma \Leftrightarrow AB^2 + AD^2 = 2AM(AM + M\Gamma) \Leftrightarrow AB^2 + AD^2 = 2AM \cdot A\Gamma$$

γ) Από 2^ο ερώτημα ισχύει ότι $AB^2 + AD^2 = 2AM \cdot A\Gamma$ όμοια προκύπτει από το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $\Delta\Gamma B$ τρίγωνο $\Gamma\Delta^2 + B\Gamma^2 = 2\Gamma M \cdot A\Gamma$, προσθέτοντας αυτές τις σχέσεις

$$\text{προκύπτει } AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + AD^2 = 2AM \cdot A\Gamma + 2\Gamma M \cdot A\Gamma \Leftrightarrow$$

$$AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + AD^2 = 2A\Gamma(AM + \Gamma M) \Leftrightarrow AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + AD^2 = 2A\Gamma^2$$



57. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο $AM = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$. Αν τα ύψη του AD και BE τέμνονται στο

σημείο H , να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι οξεία. β) $AH \cdot AD = AE \cdot A\Gamma$

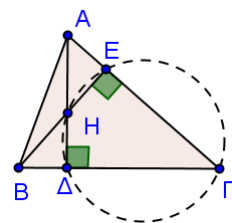
Λύση

α) Από το 1^ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2AM^2 + \frac{\alpha^2}{2} = 2\left(\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{2} = 2 \cdot \frac{5\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{2} = 3\alpha^2 > \alpha^2 \Rightarrow \widehat{A} < 90^\circ$$

β) Στο τετράπλευρο ΗΔΓΕ είναι $\Delta + E = 180^\circ$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Τα ΕΓ, ΗΔ είναι χορδές του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου που τέμνονται στο Α, οπότε από το θεώρημα στις τέμνουσες κύκλου ισχύει ότι: $AH \cdot AD = AE \cdot AG$



58. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και μία διάμετρος του ΑΒ. Από σημείο Ε στην προέκταση της διαμέτρου ΑΒ προς το Α, φέρουμε την εφαπτομένη ΕΓ του κύκλου. Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Ε, τέμνει την προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) σε σημείο Δ.

α) Να επιλέξετε τη σωστή ισότητα:

i. $EG^2 = EA \cdot AB$

ii. $EG^2 = EA \cdot EB$

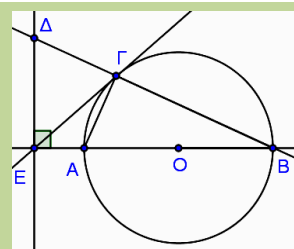
iii. $EG^2 = EO \cdot EB$

iv. $EG^2 = EO \cdot OB$

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BG \cdot BD = BA \cdot BE$

ii. $EB^2 = EG^2 + BG \cdot BA$



Λύση

α) Επειδή το ΕΓ είναι εφαπτόμενο του κύκλου και το ΕΑΒ τέμνουσα του ισχύει ότι:

$$EG^2 = EA \cdot EB \quad (1), \text{ οπότε σωστό είναι το ii.}$$

β)i. Η γωνία ΑΓΒ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή.

Επειδή $E + \angle AG\Delta = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Τα ΓΔ, ΑΕ είναι χορδές του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου που τέμνονται στο Β, άρα από το θεώρημα στις τέμνουσες κύκλου ισχύει ότι $BG \cdot BD = BA \cdot BE$ (2).

$$\text{ii. } EG^2 + BG \cdot BA \stackrel{(1),(2)}{=} EA \cdot EB + BA \cdot BE = EB(EA + BA) = EB \cdot EB = EB^2$$

Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

59. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΒΕ το ύψος του. Αν είναι $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 7$ και $B\Gamma = 4$ τότε,

α) να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{3}$.

β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

α) Θεωρούμε το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $B\Gamma = A\Delta = 4$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και ύψος ΒΕ. Φέρνουμε το ύψος ΑΖ. Είναι $AZ \parallel BE$ και $AB \parallel ZE$ από υπόθεση άρα ΑΒΕΖ παραλληλόγραμμο συνεπώς $AB = ZE = 3$.

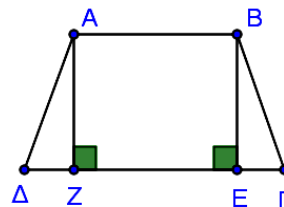
Είναι $B\Gamma = A\Delta = 4$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΕΓ

$$\text{είναι ίσα συνεπώς } \Delta Z = E\Gamma = \frac{7-3}{2} = 2.$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ και έχουμε:

$$BE^2 = B\Gamma^2 - E\Gamma^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \text{ άρα } BE = 2\sqrt{3}$$

$$\beta) (AB\Gamma) = (AB\Gamma\Delta) - (A\Delta\Gamma) = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot v - \frac{1}{2} \alpha \cdot v_a \Leftrightarrow$$



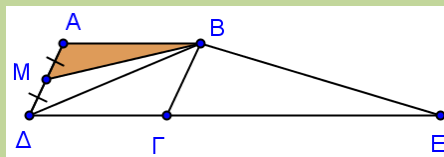
$$(AB\Gamma) = \frac{\Delta\Gamma + AB}{2} \cdot AZ - \frac{1}{2} \cdot \Delta\Gamma \cdot AZ = \frac{7+3}{2} \cdot 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

2ος τρόπος

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

60. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε M το μέσο της AD . Προεκτείνουμε τη $\Delta\Gamma$ προς το Γ κατά $\Gamma E = 2\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AMB) = \frac{(B\Gamma\Delta)}{2}$ β) $(AB\Gamma\Delta) = (B\Gamma E)$



Λύση

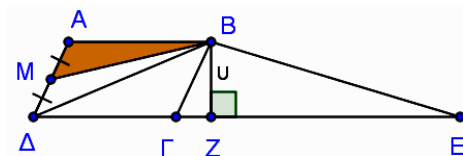
α) Επειδή η BM είναι διάμεσος στο τρίγωνο $AB\Delta$, τα τρίγωνα ABM και BMD είναι ισεμβαδικά, οπότε

$$(AMB) = \frac{(AB\Delta)}{2} = \frac{(B\Gamma\Delta)}{2}$$

β) Έστω u το ύψος του παραλληλογράμμου που αντιστοιχεί στη πλευρά $\Delta\Gamma$.

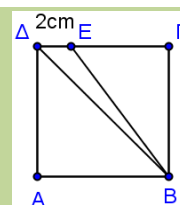
Είναι $(AB\Gamma\Delta) = \Delta\Gamma \cdot u$ και

$$(B\Gamma E) = \frac{1}{2} \Gamma E \cdot u = \frac{1}{2} \cdot 2\Delta\Gamma \cdot u = \Delta\Gamma \cdot u = (AB\Gamma\Delta)$$



61. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a , θεωρούμε σημείο E της πλευράς $\Delta\Gamma$ έτσι ώστε $\Delta E = 2$ cm. Αν ισχύει ότι $(BE\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου a είναι 8 cm.
β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE .



Λύση

α) $(BE\Delta) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \Delta E \cdot B\Gamma = \frac{1}{8} a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a = \frac{1}{8} a^2 \Leftrightarrow a = 8$

β) Είναι $E\Gamma = \Gamma\Delta - \Delta E = 8 - 2 = 6$ cm.

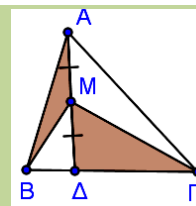
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $B\Gamma E$ έχουμε:

$$BE^2 = B\Gamma^2 + \Gamma E^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Leftrightarrow BE = 10 \text{ cm}$$

62. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε Δ εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$ και έστω M στο μέσον της AD . Να αποδείξετε ότι:

α) $(AMB) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$

β) $(AMB) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$



Λύση

α) Επειδή AM είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Delta$ τα τρίγωνα ABM και BMD

είναι ισεμβαδικά και $(AMB) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$ (1).

β) Επειδή το ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΓΔ τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΓΜΔ είναι ισεμβαδικά και

$(M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Delta\Gamma)$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1),(2) έχουμε:

$$(AMB) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Delta) + \frac{1}{2}(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}[(AB\Delta) + (A\Delta\Gamma)] = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$$

63. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ εσωτερικό σημείο του ΒΓ. Φέρουμε από το Δ παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(EK\Delta) = \frac{1}{2}(BE\Delta)$

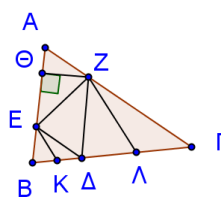
β) $(E\Delta Z) = \frac{1}{2}(AE\Delta Z)$

γ) $2(K\epsilon Z\Lambda) = (AB\Gamma)$

Λύση

α) Επειδή ΕΚ διάμεσος του τριγώνου ΕΒΔ από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, ισχύει ότι το τρίγωνο χωρίζεται σε δύο άλλα ισοδύναμα

τρίγωνα, τα ΕΒΚ και ΕΔΚ. Άρα $(EBK) = (EK\Delta) = \frac{1}{2}(BE\Delta)$.



β) Ισχύει ότι $(AE\Delta Z) = (AEZ) + (ZE\Delta)$ (1)

Όμως $(AEZ) = \frac{1}{2}(AE) \cdot \upsilon$ (2) και $(ZE\Delta) = \frac{1}{2}(Z\Delta) \cdot \upsilon$ (3)

με $\upsilon = (Z\Theta)$ το ύψος του παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ. Επομένως τα δεύτερα μέλη των (2),(3) είναι ίσα άρα και τα πρώτα. Δηλαδή $(AEZ) = (ZE\Delta)$ (4).

Από (1),(4) έχουμε $(AE\Delta Z) = 2(E\Delta Z) \Rightarrow (E\Delta Z) = \frac{1}{2}(AE\Delta Z)$

Αλλιώς: Επειδή το ΑΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΕΖΔ είναι ίσα

οπότε είναι ισεμβαδικά. Άρα $(AE\Delta Z) = 2(E\Delta Z) \Rightarrow (E\Delta Z) = \frac{1}{2}(AE\Delta Z)$

γ) $2(K\epsilon Z\Lambda) = 2[(KE\Delta) + (E\Delta Z) + (\Delta Z\Lambda)] = 2(KE\Delta) + 2(E\Delta Z) + 2(\Delta Z\Lambda) =$

$(EB\Delta) + (AE\Delta Z) + (Z\Delta\Gamma) = (AB\Gamma)$ εφόσον $2(KE\Delta) = (EB\Delta)$ από α) ερώτημα,

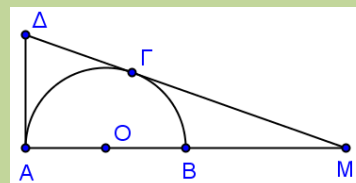
$2(E\Delta Z) = (AE\Delta Z)$ από β) ερώτημα και $2(\Delta Z\Lambda) = (Z\Delta\Gamma)$ όμοια με α) ερώτημα.

64. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ=2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Μ, τέτοιο ώστε ΒΜ=2R. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Φέρουμε εφαπτόμενη στο ημικύκλιο στο σημείο Α η οποία τέμνει την προέκταση του τμήματος ΜΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Gamma = 2\sqrt{2} \cdot R$

β) $MO \cdot MA = M\Gamma \cdot M\Delta$

γ) $(AO\Gamma\Delta) = (MO\Gamma)$



Λύση

α) Επειδή η ΜΓ είναι εφαπτόμενη του ημικυκλίου και η ΜΒΑ τέμνουσα, ισχύει ότι:

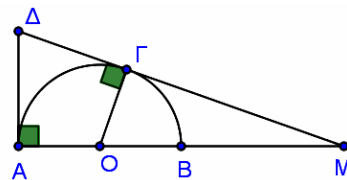
$$M\Gamma^2 = MB \cdot MA = 2R \cdot 4R = 8R^2 \Leftrightarrow M\Gamma = 2\sqrt{2} \cdot R$$

β) Επειδή ΟΓ ακτίνα και ΓΔ εφαπτόμενη του ημικυκλίου, είναι $ΟΓ \perp ΓΔ$. Όμοια και $ΑΔ \perp ΟΑ$.

Στο τετράπλευρο ΑΟΓΔ είναι $A + \Gamma = 180^\circ$, οπότε

είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Τα ΑΟ και ΔΓ είναι χορδές του ίδιου κύκλου που τέμνονται στο Μ,

οπότε από το θεώρημα στις τέμνουσες κύκλου ισχύει ότι: $ΜΟ \cdot ΜΑ = ΜΓ \cdot ΜΔ$



γ) Τα $\Delta A, \Delta \Gamma$ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Δ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.

Έστω $\Delta A = \Delta \Gamma = x$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΜΑΔ$ έχουμε:

$$\mathbf{MA}^2 + \mathbf{A}\Delta^2 = \mathbf{M}\Delta^2 \Leftrightarrow \mathbf{MA}^2 + \mathbf{A}\Delta^2 = (\mathbf{M}\Gamma + \Gamma\Delta)^2 \Leftrightarrow (4\mathbf{R})^2 + \mathbf{x}^2 = (\mathbf{x} + 2\mathbf{R}\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$$

$$16R^2 + x^2 = x^2 + 4xR\sqrt{2} + 8R^2 \Leftrightarrow 4xR\sqrt{2} = 16R^2 - 8R^2 = 8R^2 \Leftrightarrow x = \frac{8^2 R^2}{4\sqrt{2} R} = \frac{2\sqrt{2} \cdot R}{2} = \sqrt{2} \cdot R$$

$$\text{Είναι } (\text{ΜΟΓ}) = \frac{1}{2} \text{ΜΓ} \cdot \text{ΟΓ} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \text{R} \cdot \text{R} = \text{R}^2 \sqrt{2} \quad (1) \text{ και}$$

$$(AO\Gamma\Delta) = (MA\Delta) - (MO\Gamma) = \frac{1}{2}MA \cdot A\Delta - R^2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 R\sqrt{2} \cdot R - R^2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$(AO\Gamma\Delta) = 2R^2\sqrt{2} - R^2\sqrt{2} = R^2\sqrt{2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $(\text{ΑΟΓΔ})=(\text{ΜΟΓ})$.

65. Ένα οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου τραπεζίου ($A = \Delta = 90^\circ$)

έχει πλευρές $\Gamma\Delta=40\text{m}$, $\text{AB}=60\text{m}$ και $\text{A}\Delta=30\text{m}$. Ένας δρόμος αποκόπτεται από το οικόπεδο το κομμάτι $\text{ZEK}\Gamma$ σχήματος παραλληλογράμμου.

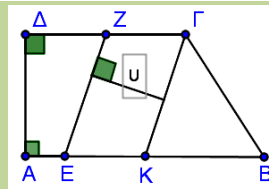
Αν $\Delta Z = 20 \text{ m}$ και $AE = 10 \text{ m}$ τότε:

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν (ΚΓΒ).

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του οικοπέδου που αποκόπτει ο δρόμος.

γ) Να υπολογίσετε το πλάτος (υ) του δρόμου.

δ) Να υπολογίσετε την ΒΓ.



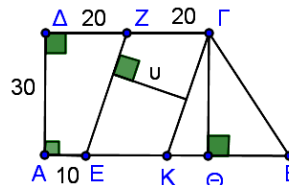
Λύση

α) Έστω $\Gamma\Theta \perp AB$. Το τετράπλευρο $A\Theta\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε $\Gamma\Theta = A\Delta = 30\text{m}$ και $A\Theta = \Delta\Gamma = 40\text{m}$.

Το τετράπλευρο ΖΓΚΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε

$ZE = \Gamma K$ και $EK = Z\Gamma = 20\text{m}$. Τότε $KB = 60\text{m} - 10\text{m} - 20\text{m} = 30\text{m}$

$$\text{Είναι (ΚΓΒ)} = \frac{1}{2} \text{ΚΒ} \cdot \Gamma\Theta = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 450 \text{m}^2$$



$$\beta) \text{ Είναί } (A\Delta ZE) = \frac{(AE + \Delta Z) A\Delta}{2} = \frac{(10 + 20) \cdot 30}{2} = 450 \text{ m}^2 \text{ και}$$

$$(A_{\Delta\Gamma B}) = \frac{(AB + \Delta\Gamma)A\Delta}{2} = \frac{(60 + 40) \cdot 30}{2} = 1500 \text{ m}^2.$$

$$(Z\Gamma KE) = (A\Delta\Gamma B) - (A\Delta ZE) - (K\Gamma B) = 1500\text{m}^2 - 450\text{m}^2 - 450\text{m}^2 = 600\text{m}^2$$

$$(\alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma\ (Z\Gamma\text{KE}) = Z\Gamma \cdot \Gamma\Theta = 30 \cdot 20 = 600\text{m}^2)$$

γ) Είναί $K\Theta = A\Theta - AE - EK = 40 - 10 - 20 = 10\text{m}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΘ έχουμε:

$$\Gamma K^2 = \Gamma \Theta^2 + \Theta K^2 = 30^2 + 10^2 = 900 + 100 = 1000 \Leftrightarrow \Gamma K = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} \text{ m}$$

$$(\text{ΖΓΚΕ}) = \Gamma K \cdot \upsilon \Leftrightarrow 600 = 10\sqrt{10} \cdot \upsilon \Leftrightarrow \upsilon = \frac{600}{10\sqrt{10}} = \frac{60\sqrt{10}}{10} = 6\sqrt{10} \text{ m}$$

δ) $\Theta B = AB - A\Theta = 60 - 40 = 20 \text{ m}$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΘΒ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = \Gamma \Theta^2 + \Theta B^2 = 30^2 + 20^2 = 900 + 400 = 1300 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13} \text{ m}$$

66. Δίνεται κύκλος (Κ, R) και διάμετρος του ΑΒ. Από σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ προς το μέρος του Β φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο και έστω Γ το σημείο επαφής. Στο σημείο Ε φέρουμε κάθετη στην ΑΒ η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο.

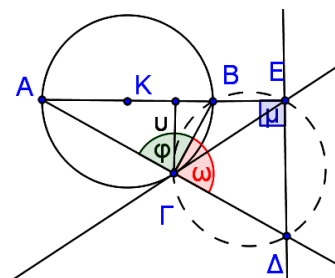
β) $ΑΓ \cdot ΑΔ = ΑΕ^2 - ΒΕ \cdot ΑΕ$

γ) $\frac{(ΑΓΕ)}{(ΒΕΓ)} = \frac{ΑΕ}{ΒΕ}$

Λύση

α) $\varphi = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα

$\omega = 90^\circ$ ως παραπληρωματική της φ . Επειδή στο τετράπλευρο ΒΕΔΓ, οι δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές ($\mu = \omega = 90^\circ$), το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο και ο διακεκομμένος κύκλος είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου.



β) Το σημείο Α είναι εξωτερικό του περιγεγραμμένου κύκλου του ΒΕΔΓ και άρα από θεώρημα τεμνουσών, ισχύει: $ΑΓ \cdot ΑΔ = ΑΒ \cdot ΑΕ$ (1), όμως

$$ΑΒ \cdot ΑΕ = (ΑΕ - ΕΒ) \cdot ΑΕ = ΑΕ^2 - ΒΕ \cdot ΑΕ \quad (2)$$

Από (1), (2) είναι $ΑΓ \cdot ΑΔ = ΑΕ^2 - ΒΕ \cdot ΑΕ$.

γ) $\frac{(ΑΓΕ)}{(ΒΕΓ)} = \frac{\frac{1}{2} ΑΕ \cdot \upsilon}{\frac{1}{2} ΒΕ \cdot \upsilon} = \frac{ΑΕ}{ΒΕ}$

(αλλιώς) $\frac{(ΑΓΕ)}{(ΒΕΓ)} = \frac{ΕΑ \cdot \cancel{ΕΓ}}{ΕΒ \cdot \cancel{ΕΓ}} = \frac{ΕΑ}{ΕΒ}$ γιατί τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΒΕΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{Β}ΕΓ$)

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

67. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΓ = 2 \text{ cm}$, $ΒΓ = \sqrt{3} \text{ cm}$ και γωνία $\Gamma = 30^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = 1 \text{ cm}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

α) Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$AB^2 = AG^2 + BG^2 - 2AG \cdot BG \cdot \sin 30^\circ = 4 + 3 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 - 6 = 1 \Leftrightarrow AB = 1 \text{ cm}$$

$$\beta) (AB\Gamma) = \frac{1}{2} GA \cdot GB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

$$\gamma) \text{ Είναι } (AB\Gamma) = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R} \Leftrightarrow 4R(AB\Gamma) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \Leftrightarrow R = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4(AB\Gamma)} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1 \text{ cm}$$

68. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία M , Λ και Z πάνω στις πλευρές AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$

αντίστοιχα τέτοια ώστε $AM = \frac{1}{2}AB$, $A\Lambda = \frac{2}{3}A\Gamma$ και $BZ = \frac{1}{3}B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(AM\Lambda) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(MZA)}{(AB\Gamma)} = \frac{5}{18}$

γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AMZA)}{(AB\Gamma)}$

Λύση

α) Από τον εναλλακτικό τύπο για το εμβαδόν τριγώνου έχουμε

$$(AM\Lambda) = \frac{1}{2}(AM) \cdot (A\Lambda) \cdot \eta\mu A \quad (1) \text{ και } (AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB) \cdot (A\Gamma) \cdot \eta\mu A \quad (2).$$

Με διαίρεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε

$$\frac{(AM\Lambda)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2}(AM) \cdot (A\Lambda) \cdot \eta\mu A}{\frac{1}{2}(AB) \cdot (A\Gamma) \cdot \eta\mu A} = \frac{(AM) \cdot (A\Lambda)}{(AB) \cdot (A\Gamma)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(AM\Lambda)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{2}(AB) \cdot \frac{2}{3}(A\Gamma)}{(AB) \cdot (A\Gamma)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } \frac{(AM\Lambda)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} \Rightarrow (AM\Lambda) = \frac{1}{3}(AB\Gamma).$$

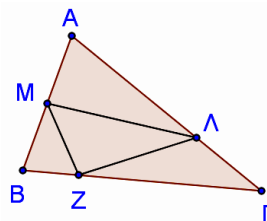
$$(\text{αλλιώς } \frac{(AM\Lambda)}{(AB\Gamma)} = \frac{AM \cdot A\Lambda}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2} \cancel{(AB)} \cdot \frac{2}{3} \cancel{(A\Gamma)}}{\cancel{(AB)} \cdot \cancel{(A\Gamma)}} = \frac{1}{3} \text{ γιατί τα τρίγωνα } AM\Lambda \text{ και } AB\Gamma$$

έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή)

β) Όμοια με το ερώτημα α) προκύπτουν οι σχέσεις $(MZB) = \frac{1}{6}(AB\Gamma) \quad (3)$ και

$$(\Gamma\Lambda Z) = \frac{2}{9}(AB\Gamma) \quad (4). \text{ Επομένως } (MZA) = (AB\Gamma) - (AM\Lambda) - (MZB) - (\Gamma\Lambda Z) \Leftrightarrow$$

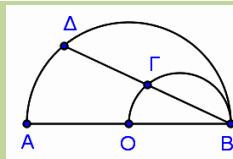
$$(MZA) = (AB\Gamma) - \frac{1}{3}(AB\Gamma) - \frac{1}{6}(AB\Gamma) - \frac{2}{9}(AB\Gamma) = \frac{5}{18}(AB\Gamma)$$



$$\gamma) \text{ Έχουμε διαδοχικά } \frac{(AMZ\Lambda)}{(AB\Gamma)} = \frac{(AM\Lambda) + (MZA)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{1}{3}(AB\Gamma) + \frac{5}{18}(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{11}{18}$$

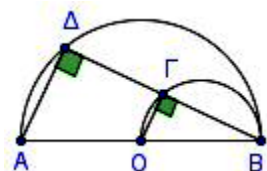
Λόγος εμβαδών

69. Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB κέντρου O θεωρούμε σημείο του Δ. Η χορδή ΔB τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου OB στο Γ. Να αποδείξετε ότι:
 α) Τα τρίγωνα AΔB και OΓB είναι όμοια.
 β) (AΔB) = 4 (OΓB)



Λύση

α) Τα τρίγωνα AΔB και OΓB είναι όμοια γιατί έχουν $\hat{A}\hat{D}B = \hat{B}\hat{\Gamma}O = 90^\circ$ (εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο) και $\hat{B}$ γωνία κοινή.



β) Ο λόγος ομοιότητας των ομοίων τριγώνων AΔB και BOΓ είναι

$$\frac{BO}{AB} = \frac{\rho}{2\rho} = \frac{1}{2} \text{ οπότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι}$$

$$\frac{(O\Gamma B)}{(A\Delta B)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(O\Gamma B)}{(A\Delta B)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (A\Delta B) = 4(O\Gamma B)$$

70. Δίνεται τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) τέτοιο ώστε να ισχύει $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αν η προέκταση της διάμεσου του AM τέμνει τον κύκλο στο σημείο P, να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta) MP = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$$

$$\gamma) (AB\Gamma) = 6(MP\Gamma)$$

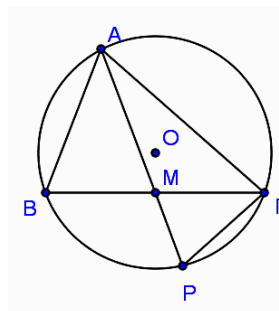
Λύση

$$\alpha) \text{ Από πρώτο θεώρημα διαμέσων είναι } \mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4},$$

$$\text{όμως } 2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \text{ άρα } \mu_\alpha^2 = \frac{4\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

β) Επειδή οι χορδές AP και BΓ τέμνονται στο M ισχύει ότι:

$$MA \cdot MP = MB \cdot M\Gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} MP = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow MP = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$$

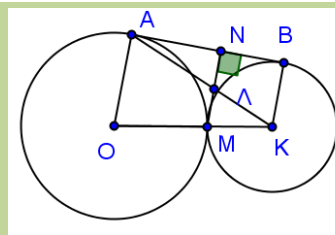


γ) AM διάμεσος στο τρίγωνο ABΓ άρα τα εμβαδά των τριγώνων ABM και AMΓ είναι ίσα και ίσα με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ABΓ (Τα τρίγωνα ABM και AMΓ είναι ισοδύναμα αφού έχουν ίσες τις πλευρές BM και MΓ και το ίδιο ύψος από τη κορυφή A). Ακόμη τα τρίγωνα MPΓ και ABM είναι όμοια, αφού $\hat{P}M\Gamma = \hat{B}$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο AΓ και $\hat{A}M\Gamma = \hat{P}M\Gamma$ ως κατακορυφήν. Συνεπώς ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας

$$\text{άρα } \frac{(ABM)}{(MP\Gamma)} = \left(\frac{BM}{MP}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(ABM)}{(MP\Gamma)} = \left(\frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(ABM)}{(MP\Gamma)} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(ABM)}{(MPΓ)} = 3 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}(ABΓ)}{(MPΓ)} = 3 \Leftrightarrow (ABΓ) = 6(MPΓ)$$

71. Δίνονται δύο κύκλοι (O, α) και (K, β) με $\alpha > \beta$, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο M . Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα AB με A, B σημεία των κύκλων (O, α) και (K, β) αντίστοιχα. Από το M θεωρούμε την κάθετη στο AB , η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα AK και AB στα σημεία Λ και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $M\Lambda = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$

β) $\Lambda N = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$

γ) Αν E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων (O, α) και (K, β) αντίστοιχα, τότε

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{(\Lambda\Lambda N)}{(KML)} \right)^2$$

Λύση

α) Ισχύει ότι $OA \perp AB$ και $MN \perp AB$ άρα $M\Lambda // OA$ οπότε από το θεώρημα Θαλή έχουμε

$$\text{ότι } \frac{KM}{KO} = \frac{M\Lambda}{OA} \Leftrightarrow \frac{\beta}{KM + MO} = \frac{M\Lambda}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{M\Lambda}{\alpha} \Leftrightarrow M\Lambda = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

2ος τρόπος

Επειδή τα τρίγωνα $K\Lambda M$ και KAO είναι όμοια ($\widehat{K}$: κοινή, $\widehat{AOK} = \widehat{MK}$: εντός εναλλάξ

γωνίες των παραλλήλων $M\Lambda, OA$ που τέμνονται από την OK) έχουμε

$$\frac{M\Lambda}{OA} = \frac{KM}{KO} \Leftrightarrow \frac{M\Lambda}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow M\Lambda = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

β) Ισχύει ότι $\Lambda N // KB$ άρα $\frac{A\Lambda}{AK} = \frac{\Lambda N}{KB}$ (1). Όμως στο τρίγωνο KAO από το θεώρημα Θαλή

$$\text{έχουμε } \frac{K\Lambda}{KA} = \frac{KM}{KO} \Leftrightarrow \frac{KA - K\Lambda}{KA} = \frac{KO - KM}{KO} \Leftrightarrow \frac{\Lambda A}{KA} = \frac{MO}{KO} \Leftrightarrow \frac{\Lambda A}{KA} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{A\Lambda}{AK} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\text{Άρα από την (1) προκύπτει } \frac{\Lambda N}{KB} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \frac{\Lambda N}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \Lambda N = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

2ος τρόπος

Ισχύει ότι $KB \perp AB$ και $MN \perp AB$ άρα $\Lambda N // KB$ οπότε επειδή τα τρίγωνα $\Lambda N\Lambda$ και AKB

είναι όμοια ($\widehat{A}$: κοινή, $\widehat{ANM} = \widehat{ABK} = 90^\circ$) έχουμε ότι $\frac{\Lambda N}{KB} = \frac{A\Lambda}{AK}$ (i)

Στο τρίγωνο AOK επειδή $M\Lambda // AO$ έχουμε ότι $\frac{A\Lambda}{AK} = \frac{OM}{OK}$ (ii)

Από (i) και (ii) προκύπτει ότι $\frac{\Lambda N}{KB} = \frac{OM}{OK} \Leftrightarrow \frac{\Lambda N}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \Lambda N = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}$.

γ) Τα τρίγωνα $\Lambda\Lambda N$ και $M\Lambda K$ έχουν $\hat{\Lambda}\Lambda N = \hat{M}\Lambda K$ (ως κατακορυφήν) οπότε

$$\frac{(A\Lambda N)}{(K\Lambda\Lambda)} = \frac{A\Lambda \cdot \cancel{N\Lambda}}{\cancel{M\Lambda} \cdot K\Lambda} = \frac{A\Lambda}{K\Lambda} = \frac{OM}{KM} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (2)$$

$$\text{Ομως } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{\pi \alpha^2}{\pi \beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \stackrel{(2)}{=} \left(\frac{(A\Lambda N)}{(K\Lambda\Lambda)}\right)^2$$

72. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία M , Λ και Z πάνω στις πλευρές AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα

τέτοια, ώστε $AM = \frac{1}{2}AB$, $A\Lambda = \frac{2}{3}A\Gamma$ και $BZ = \frac{1}{3}B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(AM\Lambda) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$.

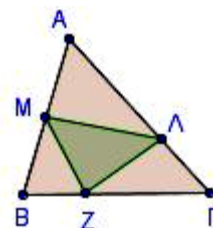
β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(MZA)}{(AB\Gamma)} = \frac{5}{18}$.

γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AMZA)}{(AB\Gamma)}$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα $AM\Lambda$ και $AB\Gamma$ έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή οπότε

$$\frac{(AM\Lambda)}{(AB\Gamma)} = \frac{AM \cdot A\Lambda}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{3}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (AM\Lambda) = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$$



β) Αφού τα τρίγωνα BMZ και $AB\Gamma$ έχουν τη γωνία $\hat{B}$ κοινή τότε

$$\frac{(BMZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{BM \cdot BZ}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{3}B\Gamma}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{1}{6}.$$

Επίσης τα τρίγωνα $\Gamma\Lambda Z$ και $AB\Gamma$ έχουν τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κοινή οπότε

$$\frac{(\Gamma\Lambda Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma\Lambda \cdot \Gamma Z}{\Gamma\Lambda \cdot \Gamma B} = \frac{\frac{1}{3}A\Gamma \cdot \frac{2}{3}B\Gamma}{\Gamma\Lambda \cdot \Gamma B} = \frac{2}{9}.$$

$$\text{Άρα } \frac{(MZA)}{(AB\Gamma)} = \frac{(AB\Gamma) - (AM\Lambda) - (BMZ) - (\Gamma\Lambda Z)}{(AB\Gamma)} = \frac{(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)} - \frac{(AM\Lambda)}{(AB\Gamma)} - \frac{(BMZ)}{(AB\Gamma)} - \frac{(\Gamma\Lambda Z)}{(AB\Gamma)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(MZA)}{(AB\Gamma)} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{2}{9} = \frac{18 - 6 - 3 - 4}{18} = \frac{5}{18}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } \frac{(AMZA)}{(AB\Gamma)} = \frac{(AM\Lambda) + (MZA)}{(AB\Gamma)} = \frac{(AM\Lambda)}{(AB\Gamma)} + \frac{(MZA)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{11}{18}.$$

73. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) προεκτείνουμε την πλευρά AG κατά τμήμα $ΓΔ = \frac{AG}{2}$. Αν

η προέκταση του ύψους AM , τέμνει την BD στο E , να αποδείξετε ότι:

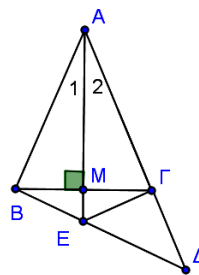
α) $\frac{BE}{ED} = \frac{2}{3}$ β) $\frac{(B\Gamma E)}{(ΓΕΔ)} = \frac{2}{3}$ γ) $\frac{(AB\Delta)}{(ΓΕΔ)} = \frac{5}{2}$

Λύση

α) Το AM είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η AE είναι διχοτόμος, οπότε από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου, ισχύει ότι:

$$\frac{BE}{ED} = \frac{AB}{AD} \quad (1)$$

Είναι $AB = AG$ και $AD = AG + \frac{AG}{2} = \frac{3AG}{2}$, άρα η (1) γίνεται: $\frac{BE}{ED} = \frac{AG}{\frac{3}{2}AG} = \frac{2}{3}$



β) Τα τρίγωνα $B\Gamma E$ και $\Gamma E\Delta$ έχουν $B\Gamma E + \Gamma E\Delta = 180^\circ$, άρα: $\frac{(B\Gamma E)}{(ΓΕΔ)} = \frac{BE \cdot \cancel{E\Gamma}}{ED \cdot \cancel{E\Gamma}} = \frac{BE}{ED} = \frac{2}{3}$

2^{ος} τρόπος $\frac{(B\Gamma E)}{(ΓΕΔ)} = \frac{\frac{1}{2}BE \cdot \upsilon}{\frac{1}{2}ED \cdot \upsilon} = \frac{BE}{ED} = \frac{2}{3}$, αφού τα τρίγωνα $B\Gamma E$ και $\Gamma E\Delta$ έχουν κοινό ύψος

από την κορυφή Γ .

γ) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma E\Delta$ έχουν τη γωνία Δ κοινή, άρα:

$$\frac{(AB\Delta)}{(ΓΕΔ)} = \frac{AB \cdot \Delta A}{ED \cdot \Delta \Gamma} = \frac{(BE + ED) \cdot \frac{3}{2}AG}{ED \cdot \frac{1}{2}AG} = 3 \frac{BE + ED}{ED} = 3 \left(\frac{BE}{ED} + \frac{ED}{ED} \right) = 3 \left(\frac{2}{3} + 1 \right) = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$$

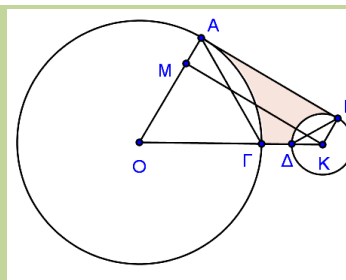
74. Δίνονται δύο κύκλοι $(O, 8)$, $(K, 2)$ με διάκεντρο $OK = 12$ η οποία τους τέμνει στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν AB είναι κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δυο κύκλων και KM κάθετο τμήμα στην OA τότε να αποδείξετε ότι:

α) $MK = 6\sqrt{3}$

β) $(AOKB) = 30\sqrt{3}$

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία MOK .

δ) $(OAG) = 16(\Delta BK)$.



Λύση

α) Επειδή η AB είναι εφαπτόμενη στους δύο κύκλους, ισχύει ότι $OA \perp AB$ και $KB \perp AB$.

Το τετράπλευρο $AMKB$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο, άρα $AM = KB = 2$, οπότε $OM = OA - AM = 8 - 2 = 6$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OMK έχουμε:

$$MK^2 = OK^2 - OM^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108 \Leftrightarrow MK = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}.$$

β) Το $AOKB$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις τις $OA = 8$, $KB = 2$ και ύψος

$AB = MK = 6\sqrt{3}$, άρα το εμβαδόν του είναι:

$$(AOKB) = \frac{(OA + KB) \cdot AB}{2} = \frac{10 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΟΚ είναι $OM = 6$ και $OK = 12$, δηλαδή μια κάθετη πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα $\angle MKO = 30^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΜΟΚ έχουμε: $\angle MKO + \angle MOK = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \angle MOK = 90^\circ \Leftrightarrow \angle MOK = 60^\circ$.

δ) Είναι $OA \parallel KB$ γιατί και οι δύο είναι κάθετες στην AB . Οι γωνίες ΜΟΚ και ΔΚΒ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων OA, KB που τέμνονται από την OK , άρα $\angle MOK + \angle KVB = 180^\circ$

(αλλιώς $\angle KVB = \angle KVM + \angle MKB = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$, άρα $\angle MOK + \angle KVB = 180^\circ$)

Τα τρίγωνα OAG και KVB έχουν δύο γωνίες παραπληρωματικές, άρα:

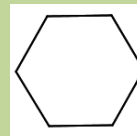
$$\frac{(\angle OAG)}{(\angle KBK)} = \frac{OA \cdot OG}{KB \cdot KB} = \frac{8 \cdot 8}{2 \cdot 2} = 16 \Leftrightarrow (\angle OAG) = 16(\angle KBK)$$

Κανονικά πολύγωνα

75. Με ένα σύρμα μήκους c κατασκευάζουμε ένα κανονικό εξάγωνο.

α) Να εκφράσετε την πλευρά του εξαγώνου ως συνάρτηση του c .

β) Να αποδείξετε ότι, το εμβαδόν του εξαγώνου ισούται με $\frac{c^2 \sqrt{3}}{24}$



Λύση

α) Αν λ_6 η πλευρά του εξαγώνου, τότε: $6\lambda_6 = c \Leftrightarrow \lambda_6 = \frac{c}{6}$

β) Έστω ρ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του εξαγώνου, τότε: $\lambda_6 = \rho \Leftrightarrow \frac{c}{6} = \rho$

Αν α_6 είναι το απόστημα του κανονικού εξαγώνου, τότε $\alpha_6 = \frac{\rho\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{c}{6}\sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{12}$.

Για το εμβαδόν του εξαγώνου ισχύει ότι:

$$E_6 = \frac{1}{2} P_6 \cdot \alpha_6 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \lambda_6 \cdot \alpha_6 = 3 \cdot \frac{c}{6} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{12} = \frac{c^2 \sqrt{3}}{24}$$

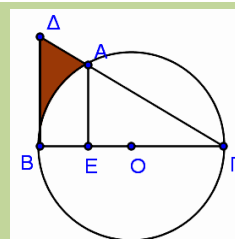
76. Δίνεται κύκλος (O, R) και μία διάμετρος του $B\Gamma$. Η κάθετος στο μέσο E της ακτίνας OB τέμνει το ένα ημικύκλιο στο σημείο A και η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B τέμνει την προέκταση της χορδής AG στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AG = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

ii. $A\Delta = \frac{AG}{3}$

β) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(\Delta AB)}{(\Delta BG)}$.



Λύση

- α) i. Η γωνία $\text{BA}\Gamma$ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$, για την κάθετη $\text{A}\Gamma$ ισχύει ότι:

$$\text{A}\Gamma^2 = \text{B}\Gamma \cdot \text{E}\Gamma = 2\text{R} \cdot \left(\text{R} + \frac{\text{R}}{2} \right) = \cancel{2}\text{R} \cdot \frac{3\text{R}}{\cancel{2}} = 3\text{R}^2 \Leftrightarrow \text{A}\Gamma = \text{R}\sqrt{3} = \lambda_3.$$

- ii. Επειδή $\text{A}\Gamma = \lambda_3$ το τόξο $\text{A}\Gamma$ είναι 120° , οπότε το τόξο AB είναι 60° άρα $\text{AB} = \lambda_6 = \text{R}$.

Η γωνία ΔBA είναι υπό χορδής και εφαπτομένης με αντίστοιχο τόξο το AB ,

$$\text{άρα } \Delta \text{BA} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔBA είναι $\Delta \text{BA} = 30^\circ$, άρα $\Delta \text{A} = \frac{\Delta \text{B}}{2} \Leftrightarrow \Delta \text{B} = 2\Delta \text{A}$. Από το πυθαγόρειο

θεώρημα στο τρίγωνο ΔBA έχουμε:

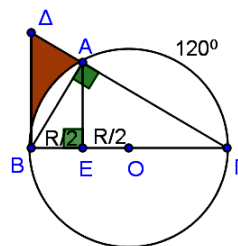
$$\Delta \text{A}^2 + \text{AB}^2 = \Delta \text{B}^2 \Leftrightarrow \Delta \text{A}^2 + \text{R}^2 = (2\Delta \text{A})^2 \Leftrightarrow \text{R}^2 = 4\Delta \text{A}^2 - \Delta \text{A}^2 = 3\Delta \text{A}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta \text{A}^2 = \frac{\text{R}^2}{3} \Leftrightarrow \Delta \text{A} = \frac{\text{R}}{\sqrt{3}} = \frac{\text{R}\sqrt{3}}{3} = \frac{\text{A}\Gamma}{3}$$

- β) Τα τρίγωνα ΔAB και $\Delta \text{B}\Gamma$ έχουν τη γωνία Δ κοινή, άρα:

$$\frac{(\Delta \text{AB})}{(\Delta \text{B}\Gamma)} = \frac{\cancel{\text{AB}} \cdot \Delta \text{A}}{\cancel{\text{AB}} \cdot \Delta \Gamma} = \frac{\frac{\text{R}\sqrt{3}}{3}}{\Delta \text{A} + \Delta \Gamma} = \frac{\frac{\text{R}\sqrt{3}}{3}}{\frac{\text{R}\sqrt{3}}{3} + \text{R}\sqrt{3}} = \frac{\cancel{\text{R}\sqrt{3}}}{\cancel{3} + 3\cancel{\text{R}\sqrt{3}}} = \frac{1}{4}$$

Παρατήρηση: Το μικτόγραμμο τρίγωνο δεν χρειάζονταν γραμμοσκίαση

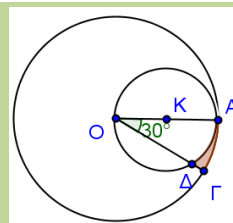


Μήκος τόξου

77. Με διάμετρο την ακτίνα OA ενός κύκλου (O, R) γράφουμε κύκλο (K) και από το O φέρουμε ημιευθεία που σχηματίζει με την ακτίνα OA γωνία 30° και τέμνει τον κύκλο (O) στο Γ και τον κύκλο (K) στο Δ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα τόξα $\text{A}\Gamma$ και $\text{A}\Delta$ έχουν ίσα μήκη.

- β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου (O, R) την περίμετρο του μικτόγραμμου (σκιασμένου) τριγώνου $\text{A}\Delta\Gamma$.



Λύση

- α) Το μήκος του τόξου $\text{A}\Gamma$ είναι $\ell_{\text{A}\Gamma} = \frac{\pi \cdot \text{R} \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \text{R}}{6}$

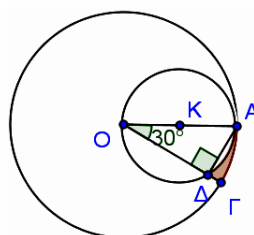
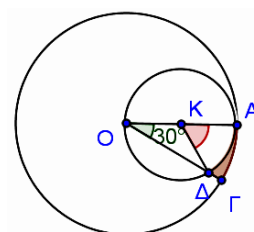
Το τόξο $\text{A}\Delta$ βρίσκεται στο κύκλο $(\text{K}, \text{R}/2)$ και έχει αντίστοιχη επίκεντρη γωνία τη $\Delta \text{KA} = \hat{\text{K}}\hat{\text{O}}\hat{\text{A}} + \hat{\text{K}}\hat{\text{A}}\hat{\text{O}} = 2\hat{\text{K}}\hat{\text{O}}\hat{\text{A}} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ ($\Delta \hat{\text{K}}\hat{\text{A}}$ εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο $\text{KO}\Delta$), οπότε το

$$\text{μήκος του είναι: } \ell_{\text{A}\Delta} = \frac{\pi \cdot \frac{\text{R}}{2} \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \text{R}}{6} = \ell_{\text{A}\Gamma}$$

- β) Επειδή γνωρίζουμε τα μήκη των τόξων $\text{A}\Delta$ και $\text{A}\Gamma$, για να βρούμε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου $\text{A}\Delta\Gamma$ αρκεί να υπολογίσουμε το τμήμα $\Delta\Gamma$. Η γωνία ODA είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε

ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ODA είναι $\text{O} = 30^\circ$, άρα $\Delta \text{A} = \frac{\text{OA}}{2} = \frac{\text{R}}{2}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ODA



$$\text{έχουμε: } O\Delta^2 = OA^2 - A\Delta^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow O\Delta = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Είναι } \Delta\Gamma = O\Gamma - O\Delta = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{2R - R\sqrt{3}}{2} = \frac{R(2 - \sqrt{3})}{2}.$$

Η ζητούμενη περίμετρος είναι:

$$\Pi = \Delta\Gamma + \ell_{AA} + \ell_{\Delta\Gamma} = \frac{R(2 - \sqrt{3})}{2} + 2 \frac{\pi R}{6} = \frac{3R(2 - \sqrt{3}) + 2\pi R}{6} = \frac{R(6 - 3\sqrt{3} + 2\pi)}{6}$$

Εμβαδόν κύκλου

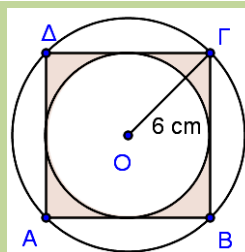
78. Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας $R = 6 \text{ cm}$ εγγράφουμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και στο τετράγωνο εγγράφουμε νέο κύκλο.

α) Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τετραγώνου.

ii. Το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου, δηλαδή του χωρίου του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ που βρίσκεται έξω από τον εγγεγραμμένο κύκλο του.

β) Να συγκρίνετε το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου με το εμβαδόν του τμήματος του κύκλου ακτίνας R που βρίσκεται έξω από το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$.



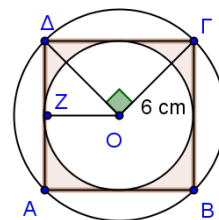
Λύση

α) i. Επειδή το τετράγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 6 cm, η πλευρά του είναι ίση με $\lambda_4 = 6\sqrt{2} \text{ cm}$, οπότε το εμβαδόν του είναι: $E_4 = \lambda_4^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72 \text{ cm}^2$.

ii. Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου είναι ίση με $\rho = a_4 = 3\sqrt{2}$. Το εμβαδόν του κύκλου αυτού είναι:

$$E_1 = \pi \rho^2 = \pi (3\sqrt{2})^2 = 18\pi \text{ cm}^2$$

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι: $E_{\gamma\pi} = E_4 - E_1 = 72 \text{ cm}^2 - 18\pi \text{ cm}^2 = 18(4 - \pi) \text{ cm}^2$

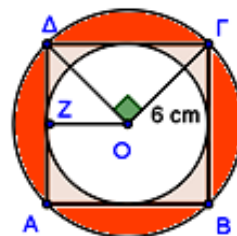


β) Το εμβαδόν του τμήματος του κύκλου ακτίνας R που βρίσκεται έξω από το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ (πορτοκαλί τμήμα) είναι:

$$E_2 = \pi \cdot 6^2 - E_4 = 36\pi \text{ cm}^2 - 72 \text{ cm}^2 = 36(\pi - 2) \text{ cm}^2$$

$$\text{Είναι } E_{\gamma\pi} - E_2 = 18(4 - \pi) - 36(\pi - 2) = 18(4 - \pi - 2\pi + 4) = 18(8 - 3\pi) < 0 \Rightarrow$$

$$E_{\gamma\pi} < E_2.$$



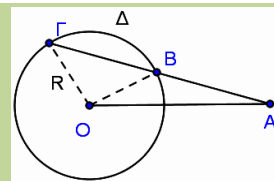
Εμβαδόν κυκλικού τομέα

79. Από σημείο A εκτός κύκλου (O, R) φέρουμε τέμνουσα $AB\Gamma$ έτσι ώστε

$AB = B\Gamma$. Αν $OA = R\sqrt{7}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3}$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος $\Gamma\Delta B$.



Λύση

α) Επειδή η $AB\Gamma$ είναι τέμνουσα του κύκλου, ισχύει ότι:

$$AB \cdot AG = \delta^2 - R^2 \Leftrightarrow B\Gamma \cdot 2B\Gamma = (R\sqrt{7})^2 - R^2 \Leftrightarrow 2B\Gamma^2 = 7R^2 - R^2 = 6R^2 \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma^2 = 3R^2 \Leftrightarrow B\Gamma = R\sqrt{3} = \lambda_3$$

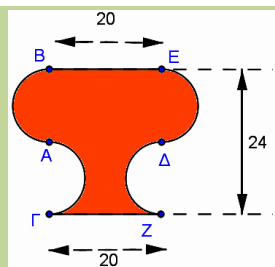
β) Επειδή $B\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3}$, το τόξο $B\Gamma$ είναι 120° , οπότε και $BO\Gamma = 120^\circ$.

$$\text{Είναι } (\Gamma\Delta B) = (\text{Ο.Β}\Gamma) - (\text{Ο.Β}\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \text{ΟΒ} \cdot \text{ΟΓ} \cdot \eta\mu 120^\circ \Leftrightarrow$$

$$(\Gamma\Delta B) = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3R^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{R^2}{12} (4\pi - 3\sqrt{3})$$

80. Στο διπλανό σχήμα, τα καμπυλόγραμμα τμήματα BA , AG , $Z\Delta$ και ΔE είναι ίσα ημικύκλια. Αν $BE \parallel \Delta\Delta / \Gamma Z$, $BE = \Delta\Delta = \Gamma Z = 20$ και το ύψος του σχήματος είναι 24, να υπολογίσετε:

- α) Την περίμετρο του σχήματος.
β) Το εμβαδόν του.



Λύση

α) Η περίμετρος του σχήματος αποτελείται από 4 ημικύκλια (δηλαδή δύο κύκλους) διαμέτρου $24 : 2 = 12$, δηλαδή ακτίνας $12 : 2 = 6$ και από τα τμήματα $BE = \Gamma Z = 20$, οπότε:

$$\Pi = 2 \cdot 2\pi \cdot 6 + 2 \cdot 20 = 24\pi + 40$$

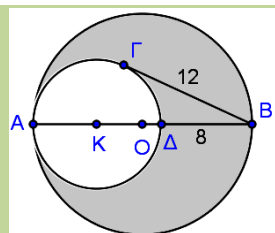
β) Επειδή τα ημικύκλια έχουν ίσες ακτίνες έχουν και ίσα εμβαδά.

Το εμβαδόν του σχήματος ισούται με το εμβαδόν του ορθογώνιου που έχει διαστάσεις 20 και 24, αφού τα εμβαδά των ημικυκλίων επάνω που προεξέχουν είναι ίσα με τα εμβαδά εκείνων που αφαιρούνται, άρα $E = 20 \cdot 24 = 480$.

81. Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι (O, R) και (K, ρ) εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο A . Από το άκρο B της διαμέτρου AB του κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $B\Gamma$ του κύκλου (K, ρ) και είναι $B\Gamma = 12$. Αν η διάμετρος BA τέμνει τον κύκλο (K, ρ) στο Δ και ισχύει ότι $B\Delta = 8$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι για τις ακτίνες R και ρ των κύκλων (O, R) και (K, ρ) ισχύουν $R = 9$ και $\rho = 5$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου (σκιασμένο) που περικλείεται μεταξύ των 2 κύκλων.



Λύση

α) Επειδή το $B\Gamma$ είναι εφαπτόμενο του κύκλου (K, ρ) και η $B\Delta A$ τέμνουσά του, ισχύει ότι:

$$B\Gamma^2 = B\Delta \cdot BA \Leftrightarrow 12^2 = 8BA \Leftrightarrow BA = \frac{144}{8} = 18$$

$$\text{Όμως } BA = 2R \Leftrightarrow 2R = 18 \Leftrightarrow R = 9 \text{ και } \Delta\Delta = AB - B\Delta = 18 - 8 = 10 \Leftrightarrow 2\rho = 10 \Leftrightarrow \rho = 5$$

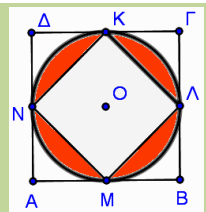
β) Το σκιασμένο χωρίο είναι η διαφορά των εμβαδών των δύο κυκλικών δίσκων, άρα:

$$E = \pi R^2 - \pi \rho^2 = 81\pi - 25\pi = 56\pi$$

82. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 10, θεωρούμε τον εγγεγραμμένο κύκλο του κέντρου Ο και εντός του κύκλου το εγγεγραμμένο τετράγωνο ΚΛΜΝ.

α) Να αποδείξετε ότι $(ΚΛΜΝ)=50$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του κύκλου που βρίσκεται στο εξωτερικό του τετραγώνου ΚΛΜΝ και εσωτερικά του κύκλου, είναι $25(\pi - 2)$.



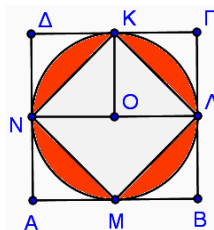
Λύση

α) Για την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου ΑΒΓΔ ισχύει:

$$2\rho = ΝΛ = ΓΔ = 10 \Leftrightarrow \rho = 5.$$

Επειδή το τετράγωνο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο ακτίνας ρ, η πλευρά του είναι ίση με $\lambda_4 = \rho\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, οπότε το εμβαδόν του είναι:

$$(ΚΛΜΝ) = (5\sqrt{2})^2 = 50$$



β) Αν Ε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, τότε: $E = E_{(O,\rho)} - (ΚΛΜΝ) = \pi \cdot 5^2 - 50 = 25(\pi - 2)$

83. Δύο ίσοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, R) τέμνονται στα σημεία Α και Β έτσι ώστε το μήκος της διακέντρου τους να είναι $ΚΛ = R\sqrt{2}$.

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΑΛΒ είναι τετράγωνο.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κοινού χωρίου των δύο κύκλων.

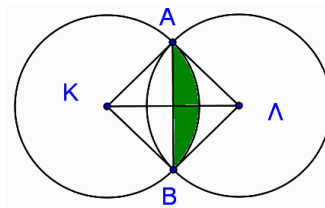
Λύση

α) Το ΚΑΛΒ έχει όλες τις πλευρές του ίσες ($ΑΛ = ΛΒ = ΒΚ = ΚΑ = R$) άρα είναι ρόμβος.

Στο τρίγωνο ΑΛΚ εφαρμόζεται το πυθαγόρειο θεώρημα.

Πράγματι $ΑΚ^2 + ΑΛ^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 = ΚΛ^2$, συνεπώς το τρίγωνο

ΑΛΚ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. Δηλαδή το τετράπλευρο ΚΑΛΒ είναι ρόμβος με μια γωνία ορθή. Άρα είναι τετράγωνο.



β) Το εμβαδόν του κοινού χωρίου των κύκλων, λόγω συμμετρίας, είναι το διπλάσιο της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του σχήματος. Δηλαδή

$$E = 2\left((A.KB) - (AKB)\right) = 2\left(\frac{\pi R^2 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi R^2}{2} - R^2 = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$\text{όπου } (AKB) = \frac{1}{2} AB \cdot KM = \lambda_4 \cdot \alpha_4 = \frac{1}{2} R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

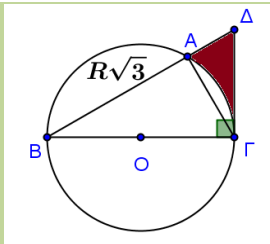
84. Δίνεται κύκλος (Ο, R), η διάμετρός του ΒΓ και η χορδή του $AB = R\sqrt{3}$.

Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει την προέκταση της χορδής ΒΑ στο σημείο Δ. Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R:

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ.

γ) Το εμβαδόν του (σκιασμένου) μικτόγραμμου τριγώνου ΑΔΓ.



Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο). έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2 = (2R)^2 - (R\sqrt{3})^2 = 4R^2 - 3R^2 = R^2 \Leftrightarrow ΑΓ = R$$

$$\text{Είναι } (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

β) Επειδή $ΟΑ = ΟΓ = ΑΓ = R$ το τρίγωνο $ΟΑΓ$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\angle Ο_1 = \angle ΑΓΟ = 60^\circ$ και επειδή $\angle ΔΓΟ = 90^\circ$, είναι $\angle Γ_1 = 30^\circ$,

οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι $ΑΔ = \frac{ΓΔ}{2}$.

Έστω $ΑΔ = x$, τότε $ΓΔ = 2x$ και από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΓ$ έχουμε:

$$ΓΔ^2 = ΑΔ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + R^2 \Leftrightarrow 3x^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{R^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Άρα } ΓΔ = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

γ) Έστω τα το κυκλικό τμήμα που περιέχεται στο τρίγωνο $ΑΔΓ$. Έστω E το ζητούμενο εμβαδό, τότε:

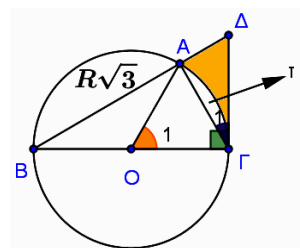
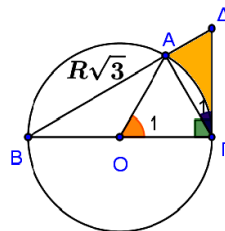
$$E = (ΑΔΓ) - (\tau) = \frac{1}{2} ΑΔ \cdot ΑΓ - \left[(\angle Ο.ΑΓ) - (\angle ΟΑΓ) \right] \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{3} \cdot R - (\angle Ο.ΑΓ) + (\angle ΟΑΓ) \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{R^2\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} ΟΑ \cdot ΟΓ \cdot \eta\mu 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{R^2\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi R^2}{6} + \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi R^2}{6} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{2R^2\sqrt{3} - 2\pi R^2 + 3R^2\sqrt{3}}{12} = \frac{5R^2\sqrt{3} - 2\pi R^2}{12} = \frac{R^2(5\sqrt{3} - 2\pi)}{12}$$



85. Σε τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά 10, κατασκευάζουμε ημικύκλια με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου που βρίσκονται στο εσωτερικό του και έχουν κοινό σημείο το κέντρο $Ο$ του τετραγώνου.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $ΑΘΟ$, όπου $Θ$ το μέσο της πλευράς $ΑΔ$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $ΑΘΟ$ είναι $\frac{25}{4}(\pi - 2)$.

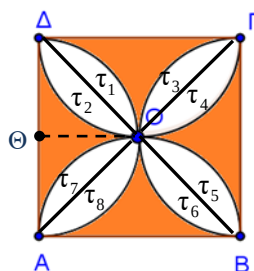
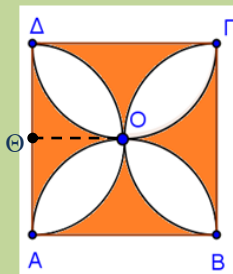
γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου, είναι $50(4 - \pi)$.

Λύση

α) Η ακτίνα του κυκλικού τομέα με επίκεντρη γωνία $ΑΘΟ$ είναι

$$ΘΑ = \frac{10}{2} = 5 \text{ και το εμβαδόν του είναι: } (\angle Θ.ΑΟ) = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{25\pi}{4}.$$

β) Το κυκλικό τμήμα που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $ΑΘΟ$



είναι το τ_7 και το εμβαδόν του είναι:

$$(\tau_7) = (\Theta.AO) - (\Theta AO) = \frac{25\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \Theta A \cdot \Theta O = \frac{25\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2} = \frac{25\pi - 50}{4} = \frac{25(\pi - 2)}{4}$$

γ) Τα τμήματα $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7, \tau_8$ έχουν ίσα εμβαδά γιατί προκύπτουν από διαφορές ίσων ορθογώνιων τριγώνων από ίσους κυκλικούς τομείς, οπότε το γραμμοσκιασμένο μέρος του τετραγώνου έχει εμβαδό:

$$E_{\gamma\pi} = (AB\Gamma\Delta) - 8(\tau_7) = 10^2 - 8 \cdot \frac{25(\pi - 2)}{4} = 100 - 50\pi + 100 = 200 - 50\pi = 50(4 - \pi)$$

86. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a , γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο A και ακτίνα a .

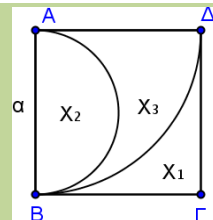
α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του

τεταρτοκύκλιου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι: $(X_1) = \frac{a^2}{4}(4 - \pi)$

β) Με διάμετρο AB κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου.

Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 .

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 και X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Το τεταρτοκύκλιο με κέντρο το A και ακτίνα a έχει εμβαδό: $(A.B\Delta) = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot 90}{360} = \frac{\pi \cdot a^2}{4}$

Το χωρίο X_1 έχει εμβαδό: $(X_1) = (AB\Gamma\Delta) - (A.B\Delta) = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{4a^2 - \pi a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(4 - \pi)$

β) Το ημικύκλιο X_2 έχει ακτίνα $\frac{a}{2}$ και εμβαδό: $(X_2) = \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \frac{a^2}{4}}{2} = \frac{\pi a^2}{8}$

Το χωρίο X_3 έχει εμβαδό: $(X_3) = (A.B\Delta) - (X_2) = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{8} = \frac{2\pi a^2 - \pi a^2}{8} = \frac{\pi a^2}{8}$

γ) $(X_1) - (X_2) = \frac{a^2}{4}(4 - \pi) - \frac{\pi a^2}{8} = \frac{2a^2(4 - \pi) - \pi a^2}{8} = \frac{a^2(8 - 2\pi - \pi)}{8} = \frac{a^2(8 - 3\pi)}{8} < 0 \Leftrightarrow (X_1) < (X_2)$

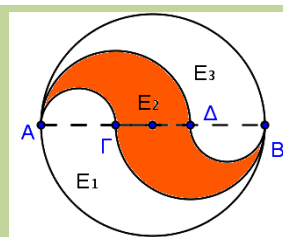
87. Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ που διαιρούν τη διάμετρο του $AB = \delta$ σε τρία ίσα τμήματα. Στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα της AB γράφουμε τα ημικύκλια με διαμέτρους τις $A\Gamma$ και $A\Delta$ και στο αντικείμενο ημιεπίπεδο γράφουμε τα ημικύκλια με διαμέτρους $B\Delta$ και $B\Gamma$. Να αποδείξετε:

α) Το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου διαμέτρου $AB = \delta$ ισούται με

$$E = \frac{\pi \delta^2}{4}.$$

β) Το μήκος του καμπυλόγραμμου σχήματος $A\Gamma B\Delta A$ (το γραμμοσκιασμένο) ισούται με το μήκος του κύκλου (O, R) .

γ) Οι καμπύλες $A\Gamma B$ και $A\Delta B$ διαιρούν τον κυκλικό δίσκο διαμέτρου $AB = \delta$ σε τρία ισεμβαδικά χωρία E_1, E_2, E_3 .



Λύση

α) Ο κύκλος (O,R) έχει ακτίνα $R = \frac{\delta}{2}$ και εμβαδόν $E = \pi R^2 = \pi \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \frac{\pi \delta^2}{4}$

β) Το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΓ έχει μήκος $\ell_{AG} = \frac{\pi \cdot AG}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{\delta}{3}}{2} = \frac{\pi \delta}{6}$

Το ημικύκλιο διαμέτρου ΓΒ έχει μήκος $\ell_{GB} = \frac{\pi \cdot GB}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{2\delta}{3}}{2} = \frac{\pi \delta}{3}$

Το ημικύκλιο διαμέτρου ΔΒ έχει μήκος $\ell_{DB} = \frac{\pi \cdot DB}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{\delta}{3}}{2} = \frac{\pi \delta}{6}$ και

το ημικύκλιο διαμέτρου ΔΑ έχει μήκος $\ell_{DA} = \frac{\pi \cdot DA}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{2\delta}{3}}{2} = \frac{\pi \delta}{3}$

Το μήκος του καμπυλόγραμμου σχήματος ΑΓΒΔΑ είναι:

$$\ell = \ell_{AG} + \ell_{GB} + \ell_{DB} + \ell_{DA} = \cancel{\frac{\pi \delta}{6}} + \frac{\pi \delta}{3} + 2 \frac{\pi \delta}{3} = \pi \delta = \ell_{(O,R)}$$

γ) Το χωρίο με εμβαδό E_1 προκύπτει από τη διαφορά του ημικυκλίου με διάμετρο ΓΒ από το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ αν προσθέσουμε το εμβαδόν του ημικυκλίου ΑΓ, οπότε:

$$E_1 = \frac{\pi \delta^2}{2} - \frac{\pi \left(\frac{2\delta}{3}\right)^2}{4} + \frac{\pi \left(\frac{\delta}{3}\right)^2}{4} = \frac{\pi \delta^2}{8} - \frac{\pi \delta^2}{18} + \frac{\pi \delta^2}{72} = \frac{9\pi \delta^2 - 4\pi \delta^2 + \pi \delta^2}{72} = \frac{\pi \delta^2}{12}$$

Το χωρίο με εμβαδό E_3 προκύπτει από τη διαφορά του ημικυκλίου με διάμετρο ΔΒ από το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ αν προσθέσουμε το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΔ,

$$\text{οπότε: } E_3 = \frac{\pi \delta^2}{2} - \frac{\pi \left(\frac{2\delta}{3}\right)^2}{4} + \frac{\pi \left(\frac{\delta}{3}\right)^2}{4} = \frac{\pi \delta^2}{8} - \frac{\pi \delta^2}{18} + \frac{\pi \delta^2}{72} = \frac{9\pi \delta^2 - 4\pi \delta^2 + \pi \delta^2}{72} = \frac{\pi \delta^2}{12}$$

$$\text{και } E_2 = E - E_1 - E_3 = \frac{\pi \delta^2}{4} - 2 \frac{\pi \delta^2}{12} = \frac{3\pi \delta^2 - 2\pi \delta^2}{12} = \frac{\pi \delta^2}{12}, \text{ άρα } E_1 = E_2 = E_3.$$

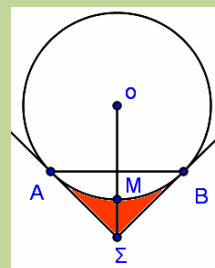
88. Στα άκρα της χορδής $AB = R\sqrt{2}$ ενός κύκλου (O,R), φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ. Αν η ΣΟ τέμνει το τόξο ΑΒ στο σημείο Μ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο.

ii. $SM = R(\sqrt{2} - 1)$

β) Να υπολογίσετε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν (ΣΑΒ) ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.



Λύση

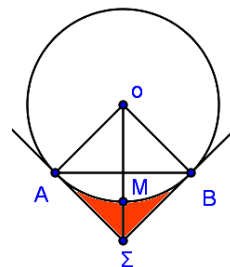
α) i. Επειδή $AB = R\sqrt{2} = \lambda_4$ το τόξο AB είναι 90° , οπότε και η επίκεντρη γωνία

AOB είναι 90° και το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο.

ii. Το τετράπλευρο OΑΣΒ έχει 3 ορθές, οπότε είναι ορθογώνιο.

Επιπλέον έχει $OA = OB = R$, οπότε είναι τετράγωνο και οι διαγωνιές του είναι ίσες, δηλαδή $OS = AB = R\sqrt{2}$.

Είναι $SM = OS - OM = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1)$



$$\beta) (\Sigma AB) = (OΑΣB) - (O.AB) = R^2 - \frac{\pi R^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{4R^2 - \pi R^2}{4} = \frac{R^2}{4}(4 - \pi)$$

89. Δίνεται κύκλος (O,R) διαμέτρου AB και ημιευθεία Ax τέτοια, ώστε η γωνία BAx να είναι 30° . Η Ax τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B, η οποία τέμνει την Ax στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι:

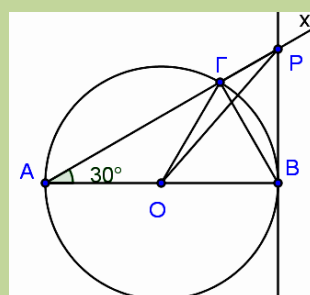
α) $BΓ = R$

$$\beta) \frac{(PBG)}{(PAB)} = \frac{1}{4}$$

$$\gamma) PB = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

δ) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στη κυρτή γωνία BOΓ είναι

$$E = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$



Λύση

α) Η γωνία AΓB είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Επειδή

$A = 30^\circ$ είναι $BOΓ = 60^\circ$ (αντίστοιχη επίκεντρη) και επειδή

$OB = OG = R$ το τρίγωνο OBG είναι ισόπλευρο, άρα και $BΓ = R$.

β) Τα τρίγωνα PBΓ και PAB έχουν τη γωνία P κοινή, άρα:

$$\frac{(PBG)}{(PAB)} = \frac{PG \cdot PB}{PA \cdot PB} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{4R\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4}$$

(αλλιώς τα ορθογώνια τρίγωνα ABP και BΓP είναι όμοια άρα $\frac{(PBG)}{(PAB)} = \left(\frac{BΓ}{AB}\right)^2 = \left(\frac{R}{2R}\right)^2 = \frac{1}{4}$)

γ) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

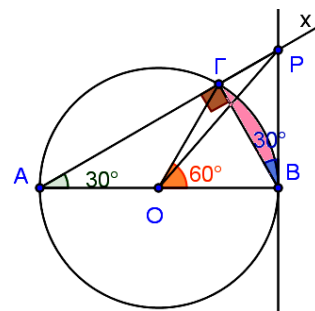
$$AG^2 = AB^2 - BG^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow$$

$$AG = R\sqrt{3}. \text{ Η γωνία } \Gamma BP \text{ είναι υπό χορδής και}$$

εφαπτομένης με αντίστοιχο τόξο το BΓ, άρα

$$\Gamma BP = A = 30^\circ \text{ και στο ορθογώνιο τρίγωνο BΓP είναι } GP = \frac{PB}{2}.$$

Έστω $PG = x$, τότε $PB = 2x$ και από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο BΓP έχουμε:



$$BP^2 = GP^2 + BG^2 \Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + R^2 \Leftrightarrow 3x^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{R^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Άρα } PG = \frac{R\sqrt{3}}{3}, PA = PG + GA = \frac{R\sqrt{3}}{3} + R\sqrt{3} = \frac{4R\sqrt{3}}{3} \text{ και } PB = 2x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

β' τρόπος

Η γωνία ΓΒΡ είναι υπό χορδής και εφαπτομένης με αντίστοιχο τόξο το ΒΓ, άρα $\Gamma B P = A = 30^\circ$ και

στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΡ είναι $GP = \frac{PB}{2}$. Έστω $PG = x$, τότε $PB = 2x$

$$A\hat{O}\Gamma = 180^\circ - \Gamma\hat{O}B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ και } A\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3}.$$

PB εφαπτομένη και PA τέμνουσα του κύκλου (O,R) οπότε

$$PB^2 = PG \cdot PA \Leftrightarrow 4x^2 = x(x + R\sqrt{3}) \Leftrightarrow 4x = x + R\sqrt{3} \Leftrightarrow 3x = R\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Άρα } PB = 2x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

δ) Έστω E το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στη κυρτή γωνία ΒΟΓ, τότε:

$$E = (O, B\Gamma) - (O, B\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi R^2 - 3R^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{R^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3})$$

90. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R).

Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου Μ το μέσο του ΓΔ.

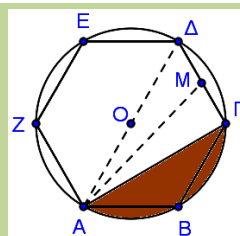
Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (AB\Gamma\Delta EZ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta) (AM\Delta) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\gamma) (AM\Delta EZ) = 2(AB\Gamma M)$$

δ) Το εμβαδόν του (σκιασμένου) κυκλικού τμήματος που περικλείεται από τη χορδή ΑΓ και το τόξο ΑΒΓ είναι ίσο με: $\frac{R^2}{12} (4\pi - 3\sqrt{3})$.

**Λύση**

$$\alpha) (AB\Gamma\Delta EZ) = E_6 = \frac{1}{2} P_6 \cdot \alpha_6 = \frac{1}{2} \cdot 6R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

β) Η γωνία ΑΓΔ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και $\Gamma\Delta = \lambda_6 = R$, οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 - \Gamma\Delta^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow A\Gamma = R\sqrt{3}$$

$$(AM\Delta) = \frac{1}{2} M\Delta \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \frac{R}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\gamma) (AM\Delta EZ) = (AM\Delta) + (A\Delta EZ) = (AM\Delta) + \frac{1}{2}E_6 = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$(AM\Delta EZ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$$

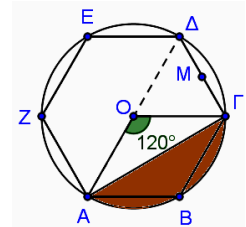
$$(AB\Gamma M) = \frac{E_6}{2} - (AM\Delta) = \frac{\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}}{2} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

δ) Έστω E το ζητούμενο εμβαδό. Είναι:

$$E = (O.A\Gamma) - (O.A\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} - \frac{1}{2}OA \cdot O\Gamma \cdot \eta\mu 120^\circ \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2}R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$$



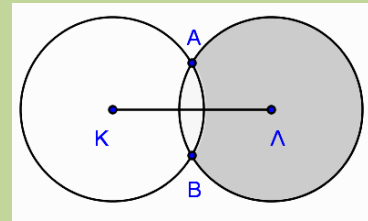
91. Δύο ίσοι κύκλοι (K,R), (Λ,R) τέμνονται στα σημεία A, B, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και έχουν διάκεντρο $KL = R\sqrt{3}$.

α) Να βρείτε τη γωνία KAL.

β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδό:

i) Του τετραπλεύρου AKBL.

ii) Του σκιασμένου μηνίσκου.



Λύση

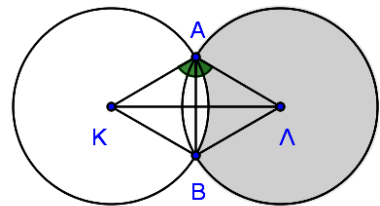
α) Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο KAL έχουμε:

$$KL^2 = AK^2 + AL^2 - 2AK \cdot AL \cdot \sin A \Leftrightarrow$$

$$\sin A = \frac{AK^2 + AL^2 - KL^2}{2AK \cdot AL} \Leftrightarrow$$

$$\sin A = \frac{R^2 + R^2 - (R\sqrt{3})^2}{2R \cdot R} = \frac{2R^2 - 3R^2}{2R^2} = -\frac{R^2}{2R^2} \Leftrightarrow$$

$$\sin A = -\frac{1}{2} \text{ άρα } A = 120^\circ$$



β) Επειδή τα τρίγωνα AKL και KBL είναι ίσα, έχουν ίσα εμβαδά, άρα:

$$(AKBL) = 2(AKL) = 2 \cdot \frac{1}{2} AK \cdot AL \cdot \eta\mu 120^\circ = R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

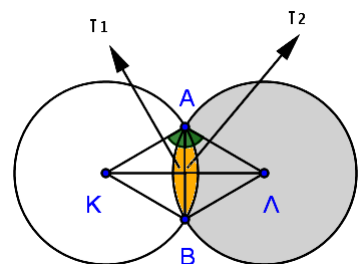
γ) Έστω τ_1 και τ_2 τα κυκλικά τμήματα που είναι χρωματισμένα στο διπλανό σχήμα. Αν E το εμβαδό του μηνίσκου, τότε

$$E = E_{(\Lambda,R)} - (\tau_1) - (\tau_2) \quad (1)$$

Επειδή το AKBL είναι ρόμβος, η AB είναι διχοτόμος

της γωνίας KAL, άρα $BAL = KAB = 60^\circ$.

Τα τρίγωνα KAB και LAB είναι ισοσκελή και έχουν μια γωνία ίση με 60° , οπότε είναι ισόπλευρα, άρα $AB = AK = R$.



$$\begin{aligned} \text{Είναι } (\tau_1) &= (\Lambda \cdot AB) - (\Lambda AB) = \frac{\pi R^2 \cdot \cancel{60}}{360} - \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \\ (\tau_1) &= \frac{2\pi R^2 - 3R^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{R^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{12} \cdot \text{Όμοια} \\ (\tau_2) &= (K \cdot AB) - (KAB) = \frac{\pi R^2 \cdot \cancel{60}}{360} - \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{R^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{12} \\ (1) \Rightarrow E &= \pi R^2 - \cancel{2} \frac{R^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{\cancel{12}_6} = \frac{6\pi R^2 - R^2 (2\pi - 3\sqrt{3})}{6} = \frac{R^2 (4\pi + 3\sqrt{3})}{6} \end{aligned}$$

92. Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο M τέτοιο, ώστε η δύναμή του ως προς τον κύκλο (O, R) να είναι $3R^2$. Αν MA, MB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο M προς τον κύκλο, τότε :

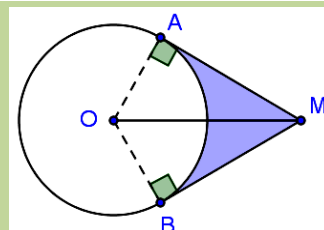
α) Να αποδείξετε ότι $MA = R\sqrt{3}$.

β) Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R το εμβαδόν:

i) του τετραπλεύρου $OAMB$.

ii) του (σκιασμένου) μικτόγραμμου τριγώνου AMB .

γ) Να αποδείξετε ότι $(OAGB) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$, όπου Γ είναι το σημείο τομής του κύκλου με το ευθύγραμμο τμήμα OM .



Λύση

α) Επειδή η MA είναι εφαπτόμενη του κύκλου, ισχύει ότι:

$$MA^2 = \delta^2 - R^2 = MO^2 - R^2 = \Delta_{(O,R)}^M = 3R^2 \Leftrightarrow MA = R\sqrt{3}$$

β) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα OAM και OBM είναι ίσα, οπότε έχουν και ίσα εμβαδά. Είναι:

$$(OAMB) = 2(OAM) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} AM \cdot OA = R\sqrt{3} \cdot R = R^2 \sqrt{3}$$

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAM είναι $OA = R = \frac{OM}{2}$,

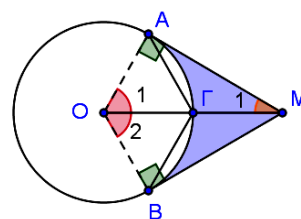
$$OM^2 = OA^2 + AM^2 = R^2 + (R\sqrt{3})^2 = R^2 + 3R^2 = 4R^2 \Leftrightarrow$$

$$OM = 2R \text{ άρα } M_1 = 30^\circ \text{ Είναι}$$

$$O_1 + M_1 = 90^\circ \Leftrightarrow O_1 + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow O_1 = 60^\circ.$$

Αν E το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου AMB , τότε:

$$E = (OAMB) - (OAB) = R^2 \sqrt{3} - \frac{\pi R^2 \cdot \cancel{120}}{360} = \frac{3R^2 \sqrt{3} - \pi R^2}{3} = \frac{R^2}{3} (3\sqrt{3} - \pi)$$



γ) Τα τρίγωνα OAG και OGB έχουν: $OA = OB = OG = R$ και $O_1 = O_2 = 60^\circ$, οπότε είναι ίσα

$$\text{και ισεμβαδικά. Είναι } (OAGB) = 2(OAG) = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot OG \cdot \eta\mu 60^\circ = R \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

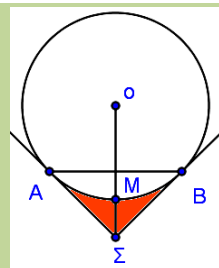
93. Στα άκρα της χορδής $AB = R\sqrt{2}$ ενός κύκλου (O, R) , φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα SA και SB . Αν η SO τέμνει το τόξο AB στο σημείο M , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο.

ii. $SM = R(\sqrt{2} - 1)$

β) Να υπολογίσετε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν (ΣAB) ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.



Λύση

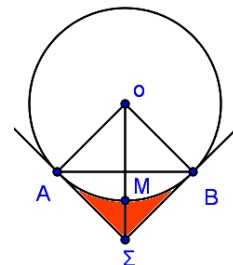
α) i. Επειδή $AB = R\sqrt{2} = \lambda_4$ το τόξο AB είναι 90° , οπότε και η

επίκεντρη γωνία AOB είναι 90° και το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο.

ii. Το τετράπλευρο $OASB$ έχει 3 ορθές, οπότε είναι ορθογώνιο.

Επιπλέον έχει $OA = OB = R$, οπότε είναι τετράγωνο και οι διαγωνιές του είναι ίσες, δηλαδή $OS = AB = R\sqrt{2}$.

Είναι $SM = OS - OM = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1)$



$$\beta) (\Sigma AB) = (OASB) - (OAB) = R^2 - \frac{\pi R^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{4R^2 - \pi R^2}{4} = \frac{R^2}{4}(4 - \pi)$$