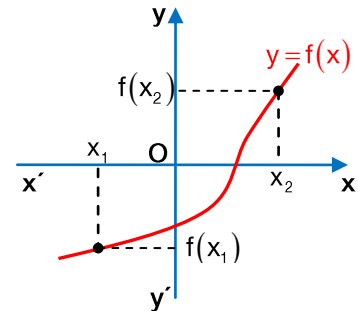


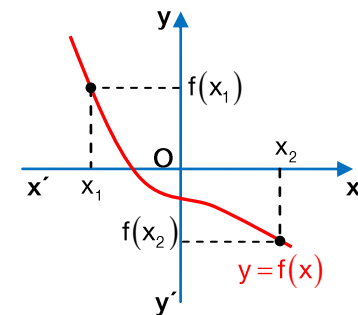
Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες συνάρτησης

Μονοτονία συνάρτησης

- Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$.
Συμβολισμός: Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , γράφουμε: $f \nearrow \Delta$.



- Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$.
Συμβολισμός: Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ , γράφουμε: $f \searrow \Delta$.



Παρατήρηση

Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν $a > 0$ και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ όταν $a < 0$, γιατί:
Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:
 - Αν $a > 0$, τότε $ax_1 < ax_2 \Leftrightarrow ax_1 + \beta < ax_2 + \beta \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ενώ
 - Αν $a < 0$, τότε $ax_1 > ax_2 \Leftrightarrow ax_1 + \beta > ax_2 + \beta \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Πρόταση

- α)** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$.
- β)** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$

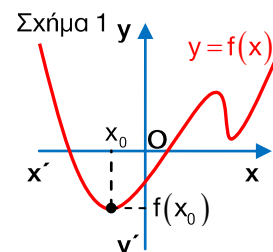
Απόδειξη

- α)** Έστω ότι $x_1 > x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$ που δεν ισχύει.
Όμοια αν $x_1 = x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$ που δεν ισχύει.
Άρα $x_1 < x_2$.
- β)** Έστω ότι $x_1 < x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$ που δεν ισχύει.
Όμοια αν $x_1 = x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$ που δεν ισχύει.
Άρα $x_1 > x_2$.

Ακρότατα συνάρτησης

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν:

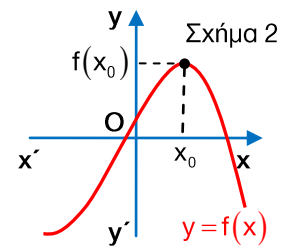
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A.$$



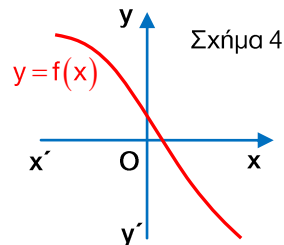
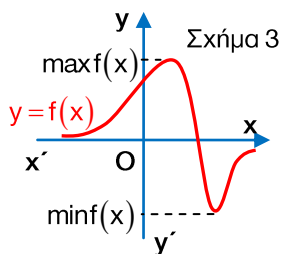
Το x_0 λέγεται θέση ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο ή απλά ελάχιστο της f και το συμβολίζουμε με $\min f(x)$.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν: $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Το x_0 λέγεται θέση μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό μέγιστο ή απλά μέγιστο της f και το συμβολίζουμε με $\max f(x)$.



Παρατήρηση



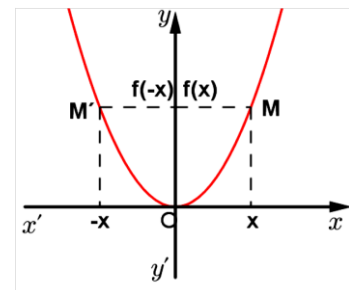
Μια συνάρτηση μπορεί να έχει μόνο ελάχιστο (Σχήμα 1) ή μόνο μέγιστο (Σχήμα 2) ή και μέγιστο και ελάχιστο (Σχήμα 3) ή ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Σχήμα 4).

Συμμετρίες συνάρτησης

Άρτια συνάρτηση

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Δηλαδή το συμμετρικό κάθε σημείου $M(x, y)$ της C_f ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $M'(-x, y)$ και ανήκει στη C_f . Όμως για το σημείο M είναι $y = f(x)$ και για το M' είναι $y = f(-x)$, οπότε: $f(-x) = f(x)$.

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται άρτια.



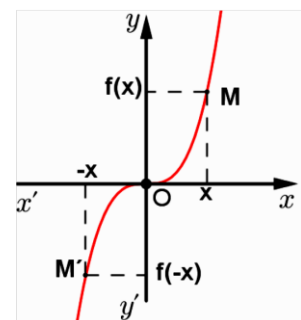
Ορισμός

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται άρτια, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:
 $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$

Περιττή συνάρτηση

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων. Δηλαδή το συμμετρικό κάθε σημείου $M(x, y)$ της C_f ως προς το O είναι το σημείο $M'(-x, -y)$ και ανήκει στη C_f . Όμως για το σημείο M είναι $y = f(x)$ και για το M' είναι $-y = f(-x)$, οπότε: $f(-x) = -f(x)$.

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται περιττή.



Ορισμός

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A θα λέγεται περιττή, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:
 $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$

Μεθοδολογία ασκήσεων-Λυμένες ασκήσεις

1η κατηγορία: Μονοτονία συνάρτησης

→ Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

Προβάλλουμε τα τμήματα της καμπύλης που κατέρχονται (φθίνει), στον άξονα $x'x$ και βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Αντίστοιχα προβάλλουμε τα τμήματα της καμπύλης τα οποία ανέρχονται (αυξάνει) στον άξονα $x'x$ και βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

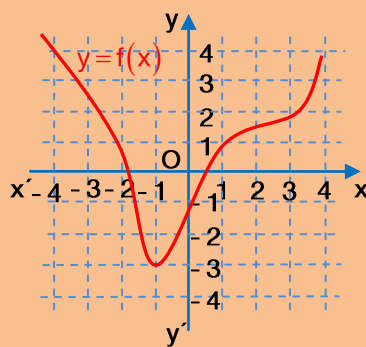
→ Γνωρίζοντας το τύπο της συνάρτησης

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

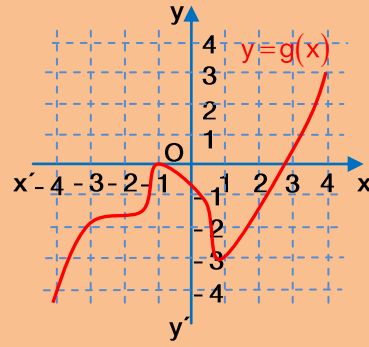
Θεωρούμε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, όπου $\Delta \subseteq A$. Στη συνέχεια προσπαθούμε με κατάλληλες πράξεις να σχηματίσουμε τα $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Αν $f(x_1) < f(x_2)$, τότε $f \nearrow \Delta$, ενώ αν $f(x_1) > f(x_2)$, τότε $f \searrow \Delta$.

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α)



β)



Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 3x - 4$

ii. $g(x) = 2 - x^3$

iii. $h(x) = \frac{3}{x-2}$

Λύση

α) Η f είναι της μορφής $ax + b$ (ευθεία) με $a > 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε: $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Leftrightarrow 2 - x_1^3 > 2 - x_2^3 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$, άρα g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Για να ορίζεται η h πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, οπότε $A_h = \mathbb{R} - \{2\}$.

Έστω $x_1 < x_2 < 2$, τότε: $x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2 - 2} \Leftrightarrow \frac{3}{x_1 - 2} > \frac{3}{x_2 - 2} \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$,

άρα $h \searrow (-\infty, 2)$.

Έστω $2 < x_1 < x_2$, τότε: $x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2 - 2} \Leftrightarrow \frac{3}{x_1 - 2} > \frac{3}{x_2 - 2} \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$,
 άρα $h \searrow (2, +\infty)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq 1 \\ 3x - 7, & x > 1 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

β) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

Λύση

α) Έστω $x_1 < x_2 \leq 1$, τότε: $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 + 1 < x_2^3 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, άρα $f \nearrow (-\infty, 1]$.

Στο διάστημα $(1, +\infty)$ η f είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ (ευθεία) με $\alpha > 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

β) Είναι $f(0) = 0^3 + 1 = 1$ και $f(2) = 3 \cdot 2 - 7 = -1$.

γ) Για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$, πρέπει για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1 < x_2$, να είναι $f(x_1) < f(x_2)$.

Επειδή $0 < 2$ και $f(0) > f(2)$ η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, & x < 0 \\ 5x + x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 < -x_2^2$ (1). Επίσης, $3x_1 < 3x_2$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει: $-x_1^2 + 3x_1 < -x_2^2 + 3x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, με $x_1 < x_2$, τότε: $\left. \begin{matrix} 5x_1 < 5x_2 \\ x_1^2 < x_2^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 5x_1 + x_1^2 < 5x_2 + x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έστω $x_1 < 0 \leq x_2$, τότε αφού $x_1 < 0 \Leftrightarrow -x_1 > 0 \Leftrightarrow 3 - x_1 > 0$ και $x_1(3 - x_1) < 0 \Leftrightarrow -x_1^2 + 3x_1 < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < 0$ και επειδή $x_2 \geq 0 \Leftrightarrow 5x_2 \geq 0$ και $x_2^2 \geq 0$, θα ισχύει $5x_2 + x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x_2) \geq 0$.

Οπότε $f(x_1) < 0 \leq f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

5. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = -f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Λύση

Επειδή η f γνησίως αύξουσα στο Δ , για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$. Τότε $-f(x_1) > -f(x_2) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

9. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,-5)$. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)+6) < 2$.

Λύση

Είναι $1 < 3$ και $f(1) = 2 > f(3) = -5$ και αφού η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$f(f(x)+6) < 2 \Leftrightarrow f(f(x)+6) < f(1) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x)+6 > 1 \Leftrightarrow f(x) > -5 \Leftrightarrow f(x) > f(3) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} x < 3$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^5 + x^3 + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε τις ανισώσεις: i. $f(x^2+1) > 6$ ii. $2x^5 + x^3 - 3 > 0$

Λύση

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε: $x_1^5 < x_2^5 \Leftrightarrow 2x_1^5 < 2x_2^5$ (1) και $x_1^3 < x_2^3$ (2).

$$\text{Από (1)+(2)} \Rightarrow 2x_1^5 + x_1^3 < 2x_2^5 + x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^5 + x_1^3 + 3 < 2x_2^5 + x_2^3 + 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$$

β) i. $f(x^2+1) > 6 \Leftrightarrow f(x^2+1) > f(1) \Leftrightarrow x^2+1 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$$\text{ii. } 2x^5 + x^3 - 3 > 0 \Leftrightarrow 2x^5 + x^3 > 3 \Leftrightarrow 2x^5 + x^3 + 3 > 6 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x > 1$$

11. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Λύση

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 2 ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in A$ με $\rho_1 < \rho_2$. Τότε $f(\rho_1) = 0$ και $f(\rho_2) = 0$.

Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα στο A , τότε επειδή $\rho_1 < \rho_2$ θα ήταν $f(\rho_1) < f(\rho_2) \Leftrightarrow 0 < 0$ που είναι άτοπο.

Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα στο A , τότε επειδή $\rho_1 < \rho_2$ θα ήταν $f(\rho_1) > f(\rho_2) \Leftrightarrow 0 > 0$ που είναι επίσης άτοπο.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει 2 ρίζες και έχει λιγότερες, δηλαδή το πολύ 1 ρίζα.

3η Κατηγορία: Ακρότατα συνάρτησης

→ Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

Βρίσκουμε (αν υπάρχει) το κατώτερο σημείο $(x_0, f(x_0))$ της C_f . Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$. Αντίστοιχα βρίσκουμε (αν υπάρχει) το ανώτερο σημείο $(x_1, f(x_1))$ της C_f .

Τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_1 το $f(x_1)$.

→ Γνωρίζοντας το τύπο της συνάρτησης

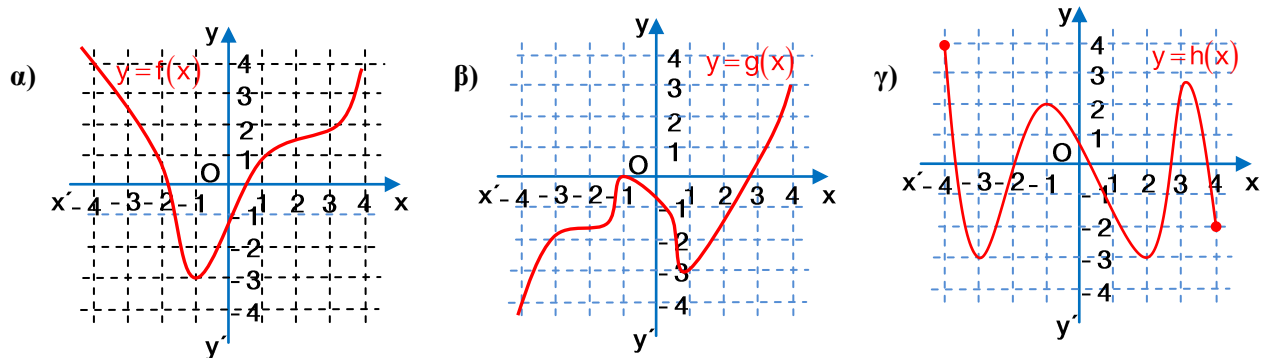
Αρχικά προσπαθούμε να μετατρέψουμε (αν χρειάζεται) το τύπο της συνάρτησης στη μορφή

$$f(x) = \alpha(x - x_0)^{2k} + \beta. \text{ Τότε:}$$

- Αν $\alpha > 0$, έχουμε $(x - x_0)^{2k} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_0)^{2k} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_0)^{2k} + \beta \geq \beta \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0)$,
οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$.

- Αν $\alpha < 0$, έχουμε $(x - x_0)^{2k} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_0)^{2k} \leq 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_0)^{2k} + \beta \leq \beta \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$,
 οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 το $f(x_0)$.

12. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:



Λύση

- α) Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = -1$ το $f(-1) = -3$.
- β) Επειδή οι τεταγμένες των σημείων της C_g παίρνουν τιμές από το $-\infty$ έως το $+\infty$, η g δεν έχει ολικά ακρότατα.
- γ) Η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = -4$ το $f(-4) = 4$ και ολικό ελάχιστο στα $x_1 = -3$ και $x_2 = 2$ το $f(-3) = f(2) = -3$.

13. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(2) = 1$.

β) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$ και ελάχιστο για $x = -1$.

Λύση

α) Αρκεί $f(x) \geq f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0$ που ισχύει.

β) Αρκεί $g(x) \geq g(-1)$ και $g(x) \leq g(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(x) \geq g(-1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \geq \frac{2(-1)}{(-1)^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \geq -1 \Leftrightarrow 2x \geq -x^2 - 1 \Leftrightarrow$

$x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq 0$ που ισχύει.

γ) Είναι $g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$ που ισχύει.

14. Να βρείτε, αν υπάρχει το ελάχιστο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 - 8x + 19$

β) $g(x) = -\frac{6}{x^4 + 2}$

γ) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4} - 3$

Λύση

α) Είναι $f(x) = x^2 - 8x + 19 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16 + 3 = (x - 4)^2 + 3$

Επειδή $(x - 4)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε: $(x - 4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + 3 \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq f(4)$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 4$ το $f(4) = 3$.

β) Είναι $x^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^4 + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-6}{x^4 + 2} \geq -6 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow g(x) \geq -3 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$,

άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ το $g(0) = -3$.

γ) Είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4} \geq \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4} - 3 \geq 2 - 3 \Leftrightarrow h(x) \geq -1 = h(0)$, άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ το $h(0) = -1$.

15. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x + 3$, όταν $x \in [-1, 4]$

β) $f(x) = -3x + 1$ όταν $x \in [-5, 5]$

Λύση

α) Η f είναι της μορφής $ax + \beta$ (ευθεία) με $a > 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 4]$.

Είναι $-1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow \overset{f \nearrow}{f(-1)} \leq f(x) \leq f(4) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 11$. Άρα η f έχει ελάχιστο στο -1 το $f(-1) = 1$ και μέγιστο στο 4 το $f(4) = 11$.

β) Η f είναι της μορφής $ax + \beta$ (ευθεία) με $a < 0$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-5, 5]$.

Είναι $-5 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow \overset{f \searrow}{f(-5)} \geq f(x) \geq f(5) \Leftrightarrow -14 \leq f(x) \leq 16$. Άρα η f έχει ελάχιστο στο 5 το $f(5) = -14$ και μέγιστο στο -5 το $f(-5) = 16$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x \leq 0 \\ x + 2, & x > 0 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

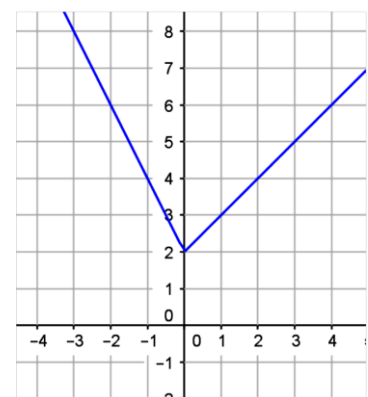
β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f .

Λύση

α) Στο $(-\infty, 0]$ η f είναι της μορφής $ax + \beta$ (ευθεία) με $a < 0$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Στο $(0, +\infty)$ η f είναι της μορφής $ax + \beta$ με $a > 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

β) Επειδή κάθε κλάδος της f είναι ευθεία βρίσκουμε δύο σημεία σε κάθε κλάδο και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f .



γ) Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 2$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x+1 & , x \leq 0 \\ 2x-1 & , x > 0 \end{cases}$.

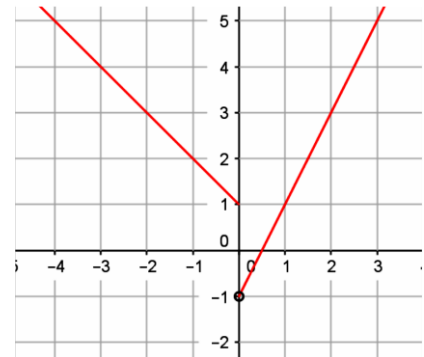
- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f .

Λύση

α) Στο $(-\infty, 0]$ η f είναι της μορφής $ax + \beta$ με $a < 0$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Στο $(0, +\infty)$ η f είναι της μορφής $ax + \beta$ με $a > 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

β) Όπως και στη προηγούμενη άσκηση.

β) Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.



18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x+1 & , x \leq 0 \\ 2x-1 & , x > 0 \end{cases}$.

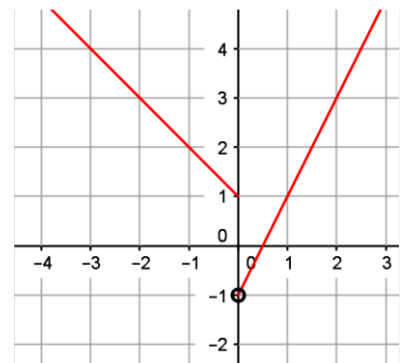
- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f .

Λύση

α) Στο $(-\infty, 0]$ η f είναι της μορφής $ax + \beta$ με $a < 0$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Στο $(0, +\infty)$ η f είναι της μορφής $ax + \beta$ με $a > 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

β) Όπως και στη προηγούμενη άσκηση.

γ) Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι έχει ελάχιστο το -1 στο $x = 0$.



19. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

Λύση

Είναι $f(x) = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4$, $A = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$. Τότε $x_1 - 1 < x_2 - 1$ και $(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2$

Παρατηρούμε ότι για να υψώσουμε τα $x_1 - 1$ και $x_2 - 1$ στο τετράγωνο πρέπει να γνωρίζουμε το πρόσημό τους. Για το λόγο αυτό διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x_1 < x_2 < 1$, τότε $x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0$ και $(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + 4 > (x_2 - 1)^2 + 4 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, άρα $f \searrow (-\infty, 1)$.
- Αν $1 \leq x_1 < x_2$, τότε $0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1$ και $(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + 4 < (x_2 - 1)^2 + 4$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ άρα } f \nearrow [1, +\infty).$$

Είναι $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow f(x) \geq 4 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1)=4$.

4η Κατηγορία: Άρτια - Περιττή συνάρτηση

Γνωρίζοντας το τύπο της συνάρτησης

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f . Παρατηρούμε αν αυτό είναι συμμετρικό γύρω από το 0, γιατί τότε για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε το $f(-x)$, αντικαθιστώντας στην f όπου x το $-x$.

Αν $f(-x) = f(x)$, τότε η f είναι άρτια ενώ αν $f(-x) = -f(x)$, τότε η f είναι περιττή. Αν όμως δεν μπορούμε να καταλήξουμε στα προηγούμενα, τότε θεωρούμε δύο αντίθετες τιμές για το x που ανήκουν στο A και αποδεικνύουμε ότι $f(-x) \neq f(x)$ και $f(-x) \neq -f(x)$, οπότε η f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Γνωρίζοντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

Διπλώνουμε το σχήμα κατά μήκος του άξονα $y'y$. Αν τα τμήματα της καμπύλης συμπίσουν τότε η συνάρτηση είναι άρτια.

Περιστρέφουμε το σχήμα κατά 180° , αν το νέο σχήμα που θα προκύψει είναι ίδιο με το αρχικό τότε η συνάρτηση είναι περιττή.

20. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές:

α) $f(x) = x^{20} - 4x^2$

β) $g(x) = 4x^{1821} + 3x^{1453}$

γ) $h(x) = \frac{2|x|}{x-1}$

δ) $t(x) = \frac{2|x|}{x^2-1}$

ε) $\varphi(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 2$

στ) $\sigma(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Λύση

α) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$, είναι $-x \in A$.

$$f(-x) = (-x)^{20} - 4(-x)^2 = x^{20} - 4x^2 = f(x), \text{ οπότε η } f \text{ είναι άρτια.}$$

β) Επειδή η g έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$, είναι $-x \in A$.

$$g(-x) = 4(-x)^{1821} + 3(-x)^{1453} = -4x^{1821} - 3x^{1453} = -(4x^{1821} + 3x^{1453}) = -g(x), \text{ οπότε η } g \text{ είναι περιττή.}$$

γ) Για να ορίζεται η h πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, Άρα $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

Παρατηρούμε ότι $-1 \in A$ και $1 \notin A$, οπότε η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

δ) Για να ορίζεται η t πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$, Άρα $A = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$.

$$\text{Είναι } t(-x) = \frac{2|-x|}{(-x)^2-1} = \frac{2|x|}{x^2-1} = t(x), \text{ άρα η } t \text{ είναι άρτια.}$$

ε) Επειδή η φ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$, είναι $-x \in A$.

Είναι $\varphi(-x) = 2(-x)^3 - 5(-x)^2 - x - 2 = -2x^3 - 5x^2 - x - 2$ Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να σχηματίσουμε το $\varphi(x)$ ή το $-\varphi(x)$.

$$\text{Είναι } \varphi(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 1 - 2 = -4 \text{ και } \varphi(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - 1 - 2 = -10.$$

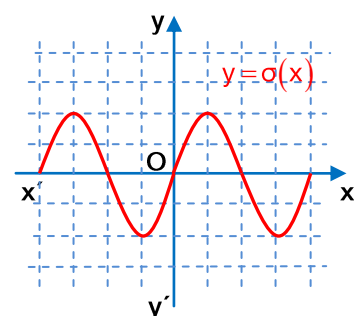
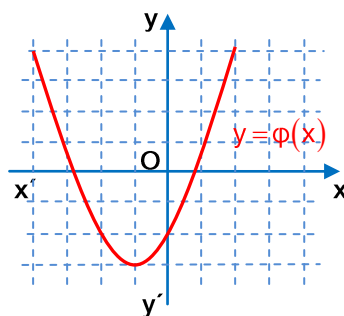
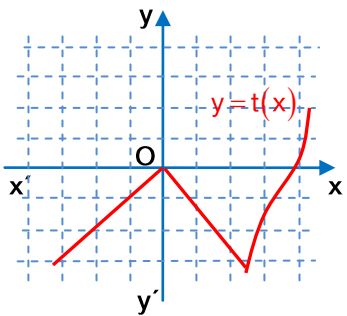
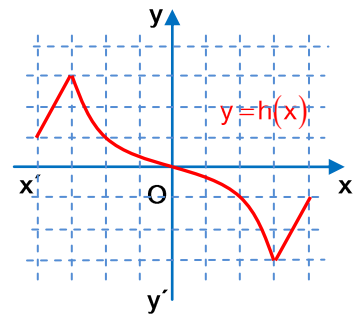
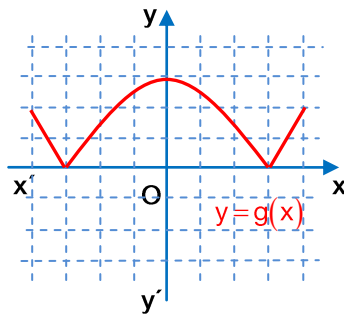
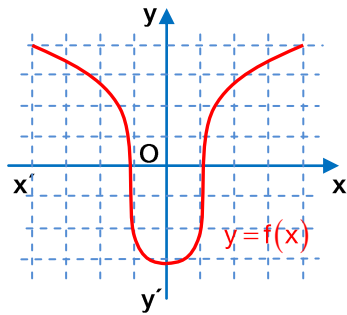
Επειδή $\varphi(-1) \neq \varphi(1)$ και $\varphi(-1) \neq -\varphi(1)$, η φ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

στ) Για να ορίζεται η σ πρέπει: $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$, άρα

$A = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$.

Είναι $\sigma(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = \sigma(x)$, οπότε η σ είναι άρτια.

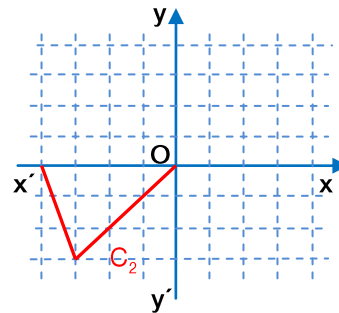
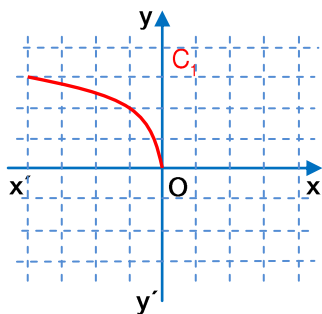
21. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.



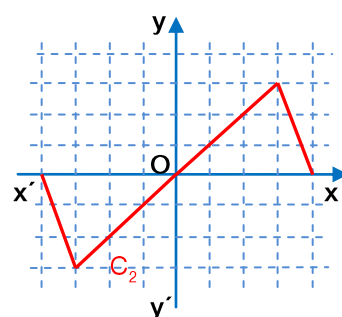
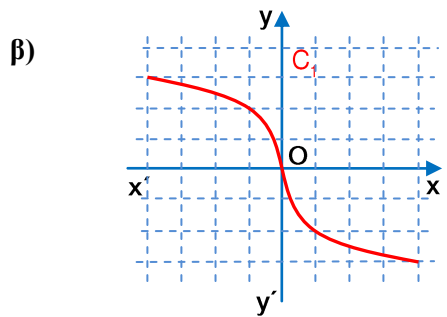
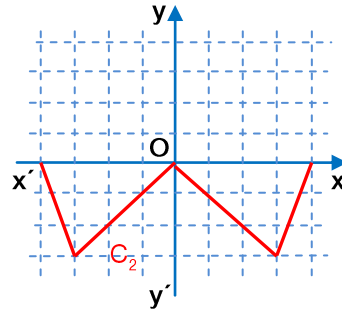
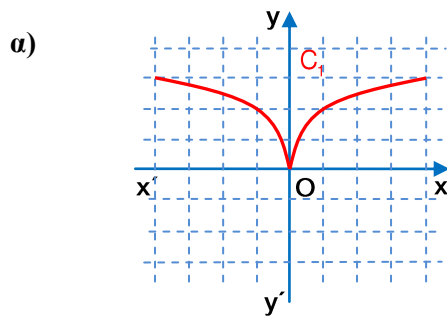
Λύση

Παρατηρούμε ότι τις C_f, C_g , ο άξονας $y'y$ τις χωρίζει σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος του $y'y$. Άρα οι συναρτήσεις f, g είναι άρτιες.
Στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και σ , παρατηρούμε ότι αν περιστρέψουμε το σχήμα κατά 180° τότε το νέο σχήμα συμπίπτει με το αρχικό. Άρα οι συναρτήσεις h, σ είναι περιττές.
Τέλος οι συναρτήσεις t, φ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές.

22. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις:
α) άρτιας συνάρτησης β) περιττής συνάρτησης



Λύση



23. Αν συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση: $f(x-3) + 3x = 6 - f(3-x)$

Λύση

Επειδή η f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $(3-x) \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f(3-x) = -f(-(3-x)) \Leftrightarrow f(3-x) = -f(x-3)$, οπότε η εξίσωση

γίνεται: $f(x-3) + 3x = 6 - f(3-x) \Leftrightarrow f(x-3) + 3x = 6 + f(x-3) \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

24. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(-\alpha, \alpha)$, $\alpha > 0$, είναι περιττή, να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(0) = 0$.

Επειδή η f είναι περιττή, ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$ (1) για κάθε $x \in (-\alpha, \alpha)$.

Αν στη σχέση (1) αντικαταστήσουμε $x = 0$, προκύπτει: $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$, άρα η

C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

25. Έστω συνάρτηση f περιττή στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,1)$, $B(-2, \lambda)$. Να βρείτε το λ .

Λύση

Επειδή η f είναι περιττή, ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 2$ είναι $f(-2) = -f(2) \Leftrightarrow \lambda = -1$

26. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι άρτια και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-1,0)$, $B(3,0)$, να δείξετε ότι $4f(1) - 3f(-1) + 2f(3) + 9f(-3) = 0$

Λύση

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία A και B , ισχύει ότι $f(-1)=0$ και $f(3)=0$

Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε για $x=1$ είναι

$$f(-1)=f(1) \Rightarrow f(1)=0 \text{ και για } x=3 \text{ είναι } f(-3)=f(3)=0.$$

$$4f(1)-3f(-1)+2f(3)+9f(-3)=4 \cdot 0-3 \cdot 0+2 \cdot 0+9 \cdot 0=0$$

27. Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή στο διάστημα $(\lambda, 3)$, να λύσετε την εξίσωση $f(1)+f(-1)+x=\lambda$.

Λύση

Επειδή η f είναι περιττή για κάθε $x \in (\lambda, 3)$ και $-x \in (\lambda, 3)$, οπότε το πεδίο ορισμού της f επειδή είναι ένα διάστημα, θα είναι συμμετρικό ως προς το 0, άρα $\lambda = -3$.

Επειδή η f είναι περιττή, ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για $x=1$ είναι

$$f(-1)=-f(1) \Leftrightarrow f(-1)+f(1)=0.$$

$$\cancel{f(1)} + \cancel{f(-1)}^0 + x = \lambda \Leftrightarrow x = -3$$

28. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο η συνάρτηση $f(x)=x^2+\lambda x+1$ είναι άρτια.

Λύση

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αρκεί $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f(-x)=f(x) &\Leftrightarrow (-x)^2+\lambda(-x)+1=x^2+\lambda x+1 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-\lambda x=\cancel{x^2}+\lambda x \Leftrightarrow 2\lambda x=0 \Leftrightarrow \\ &\lambda=0 \text{ ή } x=0. \end{aligned}$$

Επειδή η σχέση $f(-x)=f(x)$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και όχι μόνο για $x=0$, τελικά $\lambda=0$.

Εξάσκηση

Μονοτονία συνάρτησης

29. Η συνάρτηση $f(x) = 5x - 4$ είναι:

- A. γνησίως αύξουσα B. γνησίως φθίνουσα Γ. άρτια Δ. περιττή.

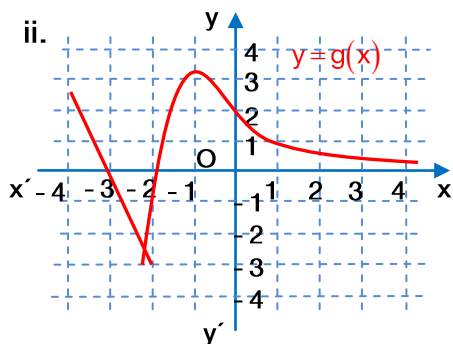
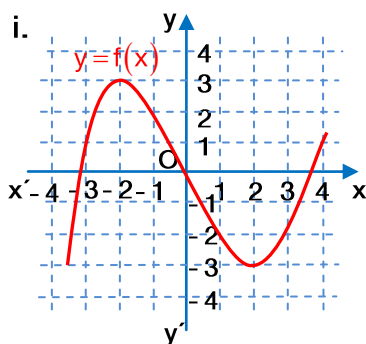
30. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αν $0 < \alpha < \beta$ να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά

τους αριθμούς: $f(\alpha)$, $f(\alpha - \beta)$, $f(0)$, $f(\alpha + \beta)$, $f(\beta)$, $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right)$

31. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

$f(0)$, $f(5)$, $f(-3)$, $f(2012)$, $f(1821)$, $f(-1)$

32. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις:



33. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

- α) $f(x) = -x + 4$ β) $f(x) = 6x - 38$ γ) $f(x) = \sqrt{3 - x}$ δ) $f(x) = 3 - 2\sqrt{x + 1}$

34. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού τους:

- α) $f(x) = \frac{3}{x}$ β) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ γ) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$
 δ) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ε) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ στ) $f(x) = x^{1821} + 3x^{1453} - 2$

35. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η

συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

36. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A και η g γνησίως φθίνουσα στο A να δείξετε ότι η $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο A .

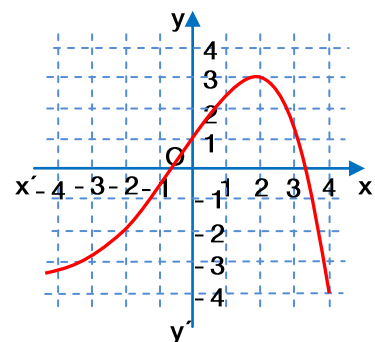
37. Δίνεται συνάρτηση f άρτια στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\beta, -\alpha)$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} & , x \leq 0 \\ 2x - 4 & , x > 0 \end{cases}$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
 β) Να βρείτε τις τιμές $f(-4)$ και $f(1)$.
 γ) Να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.
39. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x - x^2, & x < 0 \\ x^3 + 4, & x \geq 0 \end{cases}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
40. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
 α) $f(3x+2) < f(x-4)$ β) $f(x-1) > f(3)$ γ) $f(x-2) - f(2x-3) < 0$
41. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-1,5)$. Να λύσετε την ανίσωση $f(x-1) < 3$.
42. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Αν $f(1) < f(2)$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ να λύσετε την ανίσωση $f(|x+3|) > 2$.
43. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η C_f τέμνει τον άξονα x στο 3 να λύσετε τις ανισώσεις.
 α) $f(x) > 0$ β) $f(x) \leq 0$ γ) $f(|x-1|) < 0$ δ) $f(x^2) > 0$
44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + x - 5, x \in \mathbb{R}$.
 α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x-3) > 0$.
45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 8 - x^3, x \in \mathbb{R}$.
 α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x) - 8) < 8$.
46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x + 1, x \in \mathbb{R}$.
 α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > 7$.
47. Δίνεται συνάρτηση f περιττή και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x < 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.
48. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$. Να αποδείξετε ότι:
 α) η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
 β) η συνάρτηση $h(x) = f(x) + \frac{x}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ακρότατα

49. α) Η συνάρτηση του διπλανού σχήματος έχει:
 Α. μέγιστο το 2 στη θέση 3
 Β. ελάχιστο το 2 στη θέση 3
 Γ. μέγιστο το 3 στη θέση 2
 Δ. ελάχιστο το 3 στη θέση 2



β) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης του διπλανού σχήματος είναι το:

A. $\mathbb{R}$ B. $(-\infty, 2]$ Γ. $(-\infty, 3)$ Δ. $(-\infty, 3]$

50. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 3x^2 + 2$ β) $f(x) = 4(x-1)^2 - 3$ γ) $f(x) = x^{2012} + (x^2 - x)^2 + 1$

51. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 4$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(3) = -5$.

β) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$

52. Αν η συνάρτηση $f(x) = 3x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[2, 5]$, να βρείτε τα ακρότατα της.

53. Να βρείτε, αν υπάρχει το ελάχιστο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 - 2x + 10$ β) $g(x) = \frac{3}{x^{2012} + 3}$ γ) $h(x) = |x - 1| - 4$

54. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ β) $f(x) = |x - 2|$

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \leq 0 \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f .

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq -1 \\ -x, & x > -1 \end{cases}$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f .

57. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x \leq 2 \\ 3x - 5, & x > 2 \end{cases}$

Άρτια περιττή

58. Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$, τότε θα διέρχεται και από το σημείο:

A. $K(1, 4)$ B. $\Lambda(-1, 4)$ Γ. $M(-1, -4)$ Δ. $N(-4, 1)$

59. Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$, τότε θα διέρχεται και από το σημείο:

A. $K(1, 4)$ B. $\Lambda(-1, 4)$ Γ. $M(-1, -4)$ Δ. $N(-4, 1)$

60. Να συμπληρώσετε τα κενά στα παρακάτω σημεία, αν γνωρίζετε ότι ανήκουν στη γραφική παράσταση περιττής συνάρτησης.

$(-3, 1)$, $(2, 2)$, $(3, \dots)$, $(-2, \dots)$, $(4, -5)$, $(\dots, 5)$, $(\dots, -2)$

61. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές:

α) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$

β) $g(x) = x^5 - 2x^3 + 4x$

γ) $h(x) = \frac{x^2}{|x| - 1}$

δ) $t(x) = \frac{3x}{x-5}$

ε) $\varphi(x) = x^4 - 5x^3 + x - 4$

στ) $\sigma(x) = \sqrt{9-x^2}$

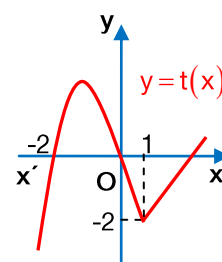
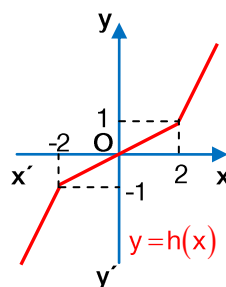
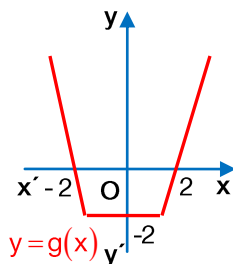
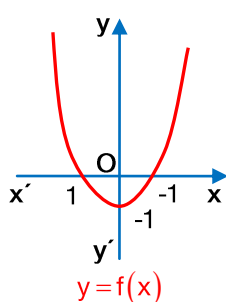
62. Να εξετάσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και ποιες κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$:

α) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

β) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

γ) $f(x) = x^2|x|$

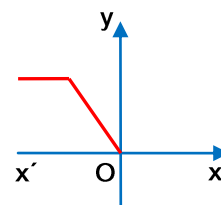
63. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.



64. Να συμπληρώσετε την διπλανή γραμμή ώστε να παριστάνει γραφική παράσταση:

i. άρτιας συνάρτησης

ii. περιττής συνάρτησης



65. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $g(x) = f^2(x)$ είναι άρτια.

66. Αν συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση: $f(x^{20}-1) + x = 2 - f(1-x^{20})$

67. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1, \lambda)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε το λ .

68. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι άρτια και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-2,0)$, $B(1,0)$, να δείξετε ότι $4f(1) - 3f(-1) + 2f(2) + 9f(-2) = 0$

69. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο η συνάρτηση $f: (\lambda-4, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια.

70. Αν η συνάρτηση $f: (\lambda, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, να λύσετε την εξίσωση $f(2) + f(-2) + x = \lambda$.

71. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \lambda x + 3$ είναι άρτια.

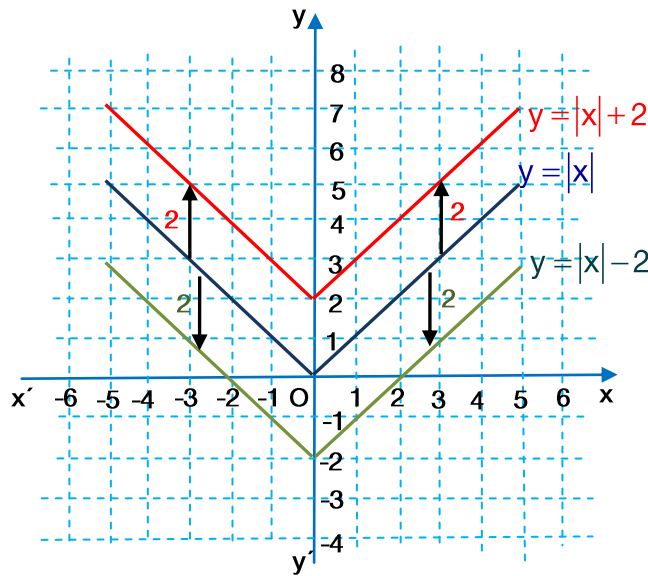
Κατακόρυφη & Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

Στο ίδιο σύστημα αξόνων κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

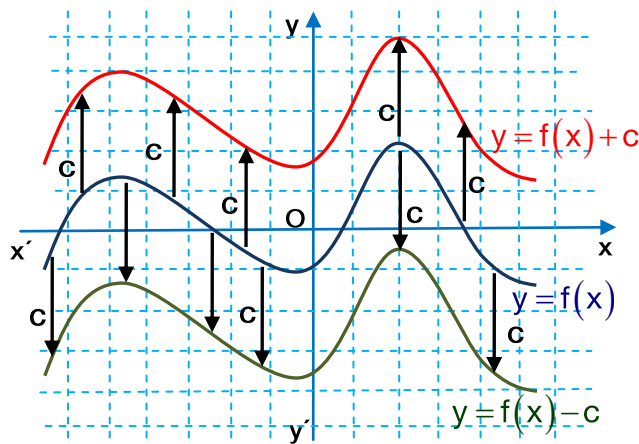
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = |x| + 2 = \begin{cases} x + 2, & x \geq 0 \\ -x + 2, & x < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad h(x) = |x| - 2 = \begin{cases} x - 2, & x \geq 0 \\ -x - 2, & x < 0 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $g(x) = f(x) + 2$ και $h(x) = f(x) - 2$.



Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι τιμές της $g(x)$ είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερες από τις τιμές της $f(x)$ και η γραφική παράσταση της $g(x)$ είναι μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Κάτι ανάλογο παρατηρούμε και για τις συναρτήσεις f και h . Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι τιμές της $h(x)$ είναι κατά 2 μονάδες μικρότερες από τις τιμές της $f(x)$ και η γραφική παράσταση της $h(x)$ είναι μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά 2 μονάδες προς τα κάτω. Οπότε γενικά:

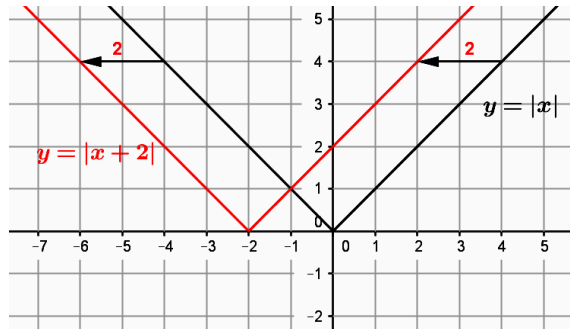
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + c$, $c > 0$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες προς τα πάνω και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f(x) - c$, $c > 0$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες προς τα κάτω.



Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Στο ίδιο σύστημα αξόνων κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ και } g(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}.$$

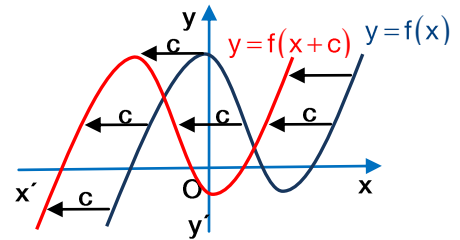


Είναι $g(x) = f(x+2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η τιμή της g στο x είναι ίδια με τη τιμή της f στο $x+2$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.

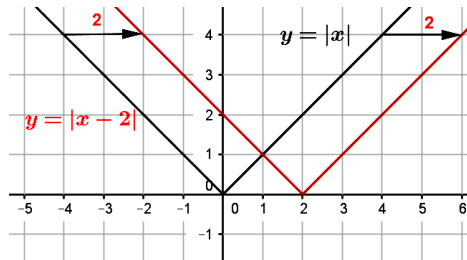
Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x+c)$, $c > 0$, προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά c μονάδες προς τα αριστερά.



Στο ίδιο σύστημα αξόνων κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ και } h(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}.$$

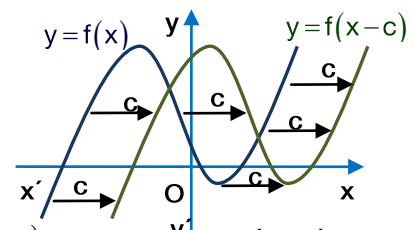


Είναι $h(x) = f(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η τιμή της h στο x είναι ίδια με τη τιμή της f στο $x-2$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της h προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f(x-c)$, $c > 0$, προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

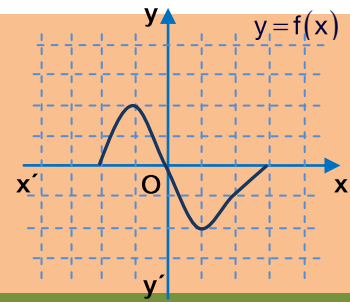


Σημείωση: Για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x \pm c_1) \pm c_2$, χρησιμοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση.

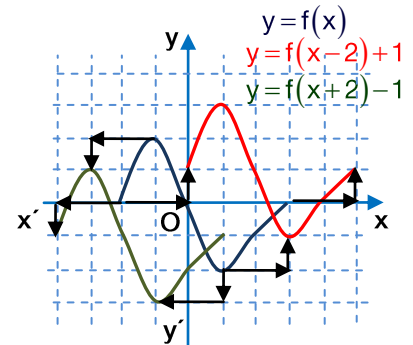
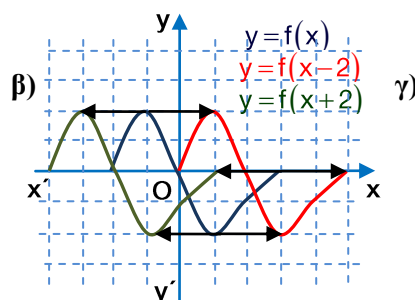
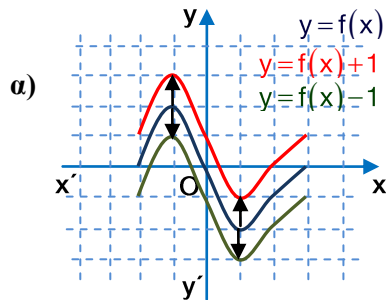
Λυμένες ασκήσεις

72. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

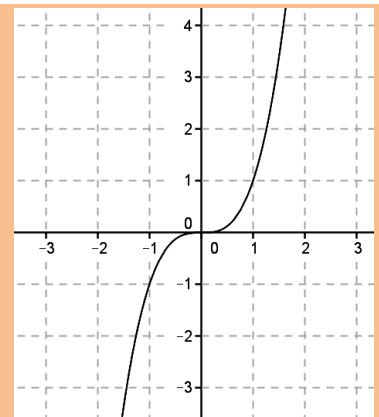
- α) $g(x) = f(x) + 1$ και $h(x) = f(x) - 1$
 β) $g(x) = f(x - 2)$ και $h(x) = f(x + 2)$
 γ) $g(x) = f(x - 2) + 1$ και $h(x) = f(x + 2) - 1$



Λύση



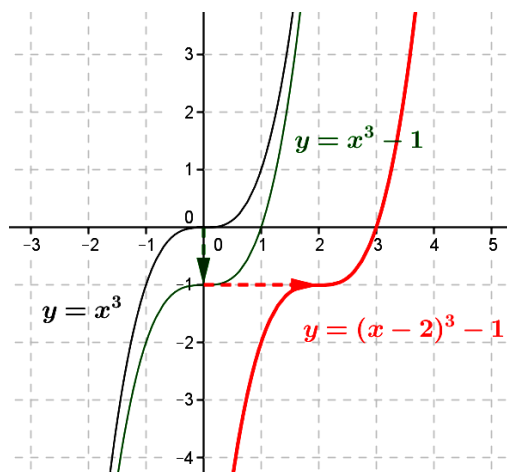
73. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$. Να κατασκευάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = x^3 - 1$ και $h(x) = (x - 2)^3 - 1$.



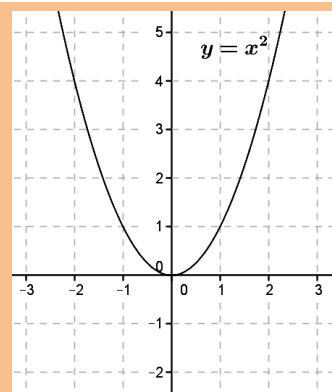
Λύση

Είναι $g(x) = f(x) - 1$ και $h(x) = f(x - 2) - 1 = g(x - 2)$.

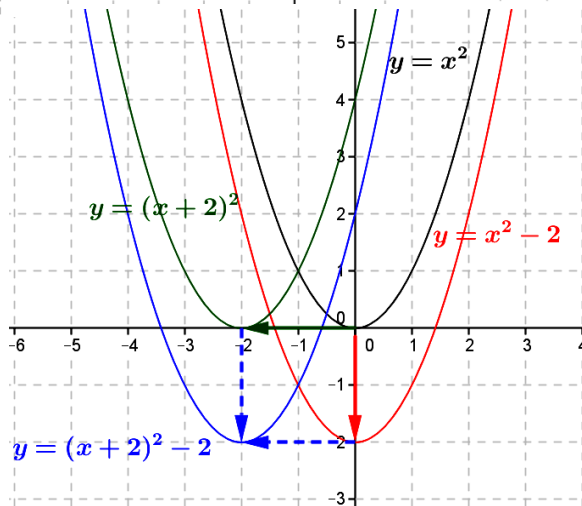
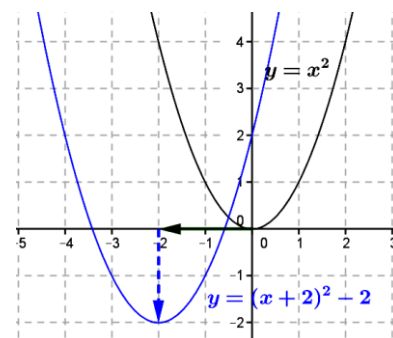
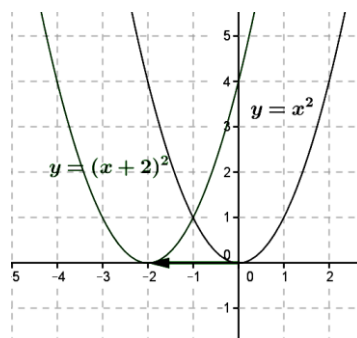
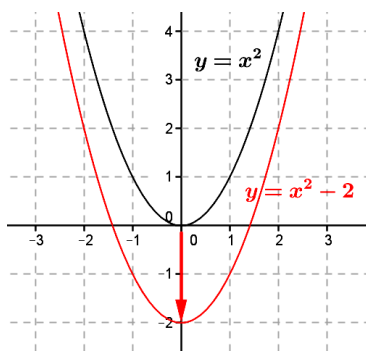
Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω και η γραφική παράσταση της h προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της g κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.



74. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = x^2 - 2$, $h(x) = (x+2)^2$, $t(x) = (x+2)^2 - 2$.



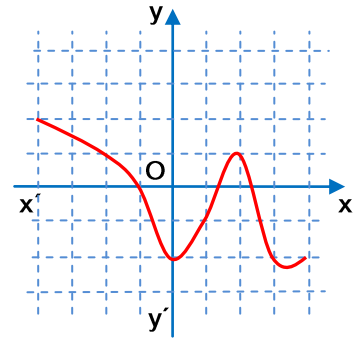
Λύση



Εξάσκηση

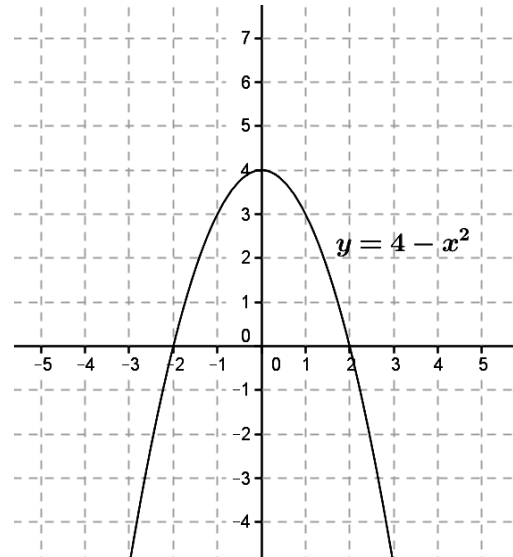
75. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- $g(x) = f(x) + 2$ και $h(x) = f(x) - 1$
- $g(x) = f(x - 2)$ και $h(x) = f(x + 1)$
- $g(x) = f(x - 2) - 1$ και $h(x) = f(x + 1) - 1$



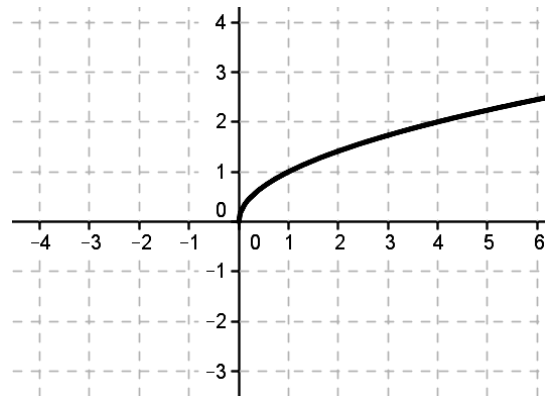
76. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $f(x) = 4 - x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- $g_1(x) = 2 - x^2$, $g_2(x) = -x^2$ και $g_3(x) = -1 - x^2$
- $h_1(x) = 4 - (x + 2)^2$ και $h_2(x) = 4 - (x - 2)^2$
- $\varphi_1(x) = -(x + 2)^2$ και $\varphi_2(x) = 2 - (x + 2)^2$

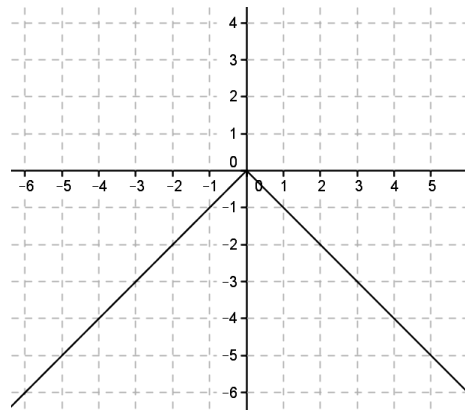


77. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $f(x) = \sqrt{x}$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

- $g_1(x) = \sqrt{x} + 3$, $g_2(x) = \sqrt{x} - 1$
- $h_1(x) = \sqrt{x - 2}$ και $h_2(x) = \sqrt{x + 4}$
- $\varphi_1(x) = \sqrt{x - 2} - 1$ και $\varphi_2(x) = \sqrt{x + 4} + 3$



78. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $f(x) = -|x|$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3 - |x|$, $h(x) = -|x + 2|$ και $\varphi(x) = 3 - |x + 2|$.



79. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f :

- i. κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 3 μονάδα προς τα πάνω.
- ii. κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.
- iii. κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.
- iv. κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

Στέλιος Μιχαήλογλου – Ευάγγελος Τόλης