

Τρίγωνα

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Θέμα 2ο

12635. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , AG προς τα B, Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ έχουν:

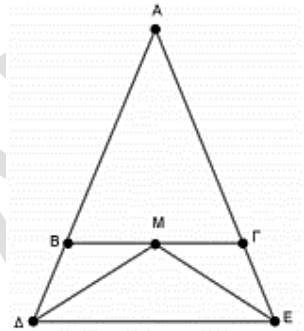
- $MB = M\Gamma$ (M μέσο του $B\Gamma$)

- $B\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)

- $\angle B M \Delta = \angle E M \Gamma$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών B, Γ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα έχουν και $M\Delta = ME$, οπότε το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες $M\Delta E$ και $ME\Delta$ είναι ίσες γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $M\Delta E$.

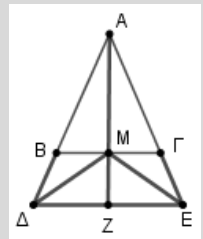


12636. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , AG παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$, ΓE αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $M\Delta E$ είναι ίση με τη γωνία $ME\Delta$.

γ) Αν η AM τέμνει την ΔE στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην ΔE .



Λύση

α) Τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ έχουν:

- $MB = M\Gamma$ (M μέσο του $B\Gamma$)

- $B\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)

- $\angle B M \Delta = \angle E M \Gamma$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών B, Γ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

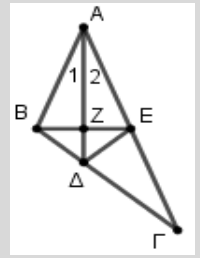
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα έχουν και $M\Delta = ME$, οπότε το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες $M\Delta E$ και $ME\Delta$ είναι ίσες γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $M\Delta E$.

γ) Είναι $AB = AG$ και $B\Delta = \Gamma E$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$AB + B\Delta = AG + \Gamma E \Leftrightarrow A\Delta = AE$, δηλαδή το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. Η AM είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας A . Στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta E$ η AZ είναι διχοτόμος της γωνίας A , οπότε είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή $AZ \perp \Delta E$.

12705. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ = 2ΑΒ$. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΒ = ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$.

β) $ΔΒ = ΔΕ$.

γ) $ΑΖ \perp ΒΕ$

Λύση

α) Επειδή η ΒΕ είναι διάμεσος, το Ε είναι μέσο της ΑΓ, οπότε $ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1). Από την υπόθεση είναι

$ΑΓ = 2ΑΒ \Leftrightarrow ΑΒ = \frac{ΑΓ}{2}$ (2). Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $ΑΒ = ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΕ$ από το α σκέλος

- $Α_1 = Α_2$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α

- την πλευρά ΑΔ κοινή

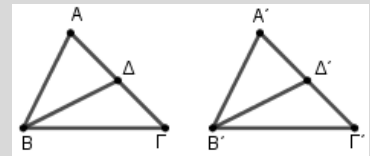
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.

Άρα, απέναντι από τις ίσες γωνίες $Α_1, Α_2$ έχουμε αντίστοιχα ίσες πλευρές δηλαδή $ΔΒ = ΔΕ$.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΕ$ και η ΑΖ είναι διχοτόμος του. Επομένως, η ΑΖ είναι και ύψος, άρα $ΑΖ \perp ΒΕ$.

13518. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' του σχήματος με $ΑΓ = Α'Γ'$ και $ΑΒ = Α'Β'$.

Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β'Δ' είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{A} = \hat{A}'$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Δ' έχουν:

- $ΒΔ = Β'Δ'$, από υπόθεση,

- $ΑΒ = Α'Β'$, από υπόθεση,

- $ΑΔ = Α'Δ'$, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και Α'Γ' αντίστοιχα.

Επομένως, τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα $Α = Α'$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΔ και Β'Δ' αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν:

- $ΑΒ = Α'Β'$, από υπόθεση,

- $ΑΓ = Α'Γ'$, από υπόθεση,

- $Α = Α'$, από το προηγούμενο ερώτημα.

Επομένως, τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

13826. Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν

$$AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda \text{ και } \hat{A} = \hat{\Gamma}.$$

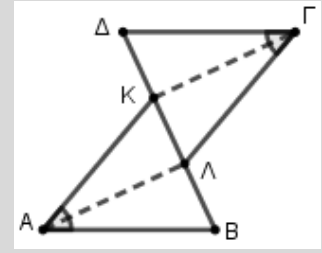
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$.

β) Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda$, ΛK και $K\Delta$ είναι ίσα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να αποδείξετε ότι οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ έχουν:

- $AB = \Gamma\Lambda$ από την υπόθεση
- $AK = \Gamma\Delta$ από την υπόθεση και
- $\angle A = \angle \Gamma$ από την υπόθεση

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα, οπότε είναι και $BK = \Delta\Lambda$, γιατί είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες A και Γ .

β) i. Αφού Λ και K είναι μέσα των BK και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι $B\Lambda = \Lambda K$ και $\Lambda K = K\Delta$, οπότε θα είναι $B\Lambda = \Lambda K = K\Delta$.

ii. Αφού τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ισοσκελή με $AB = AK$ και $\Gamma\Delta = \Gamma\Lambda$ και Λ, K τα μέσα των βάσεων τους $BK, \Delta\Lambda$ αντίστοιχα, τότε τα $A\Lambda$ και ΓK είναι διάμεσοι στις βάσεις τους, οπότε θα είναι και ύψη, οπότε είναι κάθετα σε αυτές, δηλαδή το $A\Lambda$ είναι κάθετο στο BK και το ΓK είναι κάθετο στο $\Delta\Lambda$. Επομένως οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.

34493. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

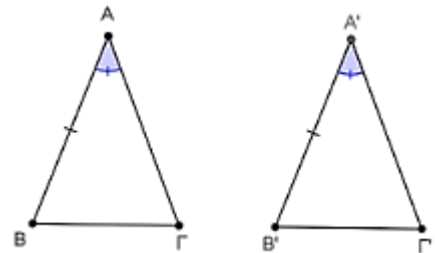
α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή, τότε αν $AB = A'B'$, θα είναι $A\Gamma = AB = A'B' = A'\Gamma'$. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

- 1) $AB = A'B'$
- 2) $A\Gamma = A'\Gamma'$ και
- 3) $\hat{A} = \hat{A}'$, άρα με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



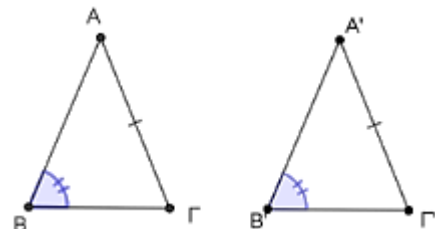
β) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή με βάσεις τις $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες, δηλαδή

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ και } \hat{\Gamma}' = \hat{B}'. \text{ Όμως } \hat{B} = \hat{B}', \text{ άρα } \hat{\Gamma} = \hat{B} = \hat{B}' = \hat{\Gamma}'.$$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

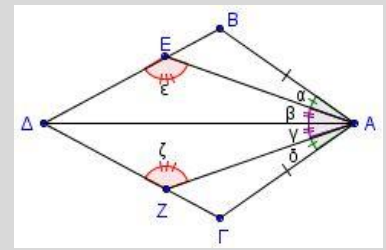
- 1) $A\Gamma = A'\Gamma'$
- 2) $AB = A'B'$ και
- 3) $\hat{A} = \hat{A}'$ γιατί $\hat{\Gamma} = \hat{B} = \hat{B}' = \hat{\Gamma}'$ (έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες των τριγώνων είναι ίσες)

Άρα με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.



34511. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = AG$, να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Delta$ είναι ίσα.
β) Οι γωνίες ϵ και ζ είναι ίσες



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Delta$ έχουν:

- $AB = AG$
- την πλευρά AD κοινή και
- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\delta} + \hat{\gamma} = \hat{G}\hat{A}\hat{\Delta}$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα $E\Delta A$ και $Z\Delta A$ έχουν

- την πλευρά AD κοινή
- $\hat{E}\hat{\Delta}A = \hat{A}\hat{\Delta}Z$ γιατί τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Delta$ είναι ίσα και
- $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ (υπόθεση)

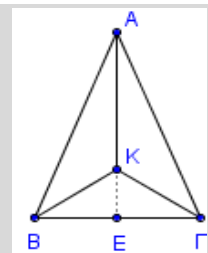
Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$

34773. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$ και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i.** τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.
ii. η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAG .

γ) Η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$.



Λύση

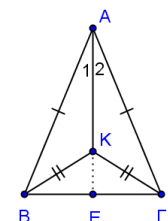
α) Τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ έχουν:

- την πλευρά AK κοινή
- $AB = AG$ και
- $KB = K\Gamma$.

-Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα, έχουν και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, άρα η AE είναι διχοτόμος της γωνίας BAG .

γ) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές η AE θα είναι και ύψος και διάμεσος. Άρα η KE είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $BK\Gamma$.

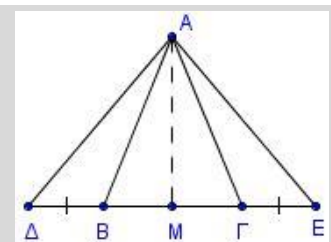


34774. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$ και AM η διάμεσός του. Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}E$.

β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\Gamma$ είναι ίσα.

γ) η AM είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.



Λύση

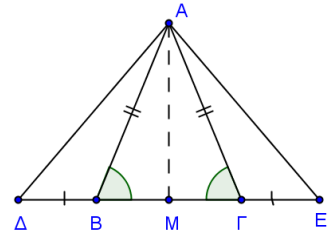
α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Είναι

$$\angle B_{\varepsilon\zeta} = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle \Gamma = \angle \Gamma_{\varepsilon\zeta}$$

β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- 1) $AB = A\Gamma$
- 2) $\hat{B}_{\varepsilon\zeta} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\zeta}$ και
- 3) $B\Delta = \Gamma E$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



γ) Επειδή $BM = MG$ και $B\Delta = \Gamma E$, είναι και $BM + B\Delta = MG + \Gamma E \Leftrightarrow \Delta M = ME$, άρα το M είναι μέσο του DE , οπότε η AM είναι διάμεσος στο τρίγωνο ADE .

34780. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA τριγώνου $AB\Gamma$, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\Gamma = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα.

β) Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την $E\Delta$ στο Z , να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.

ii. $Z\Delta = \frac{E\Delta}{2}$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE έχουν:

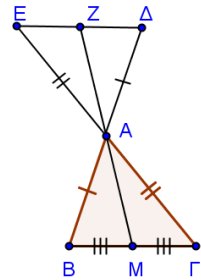
- 1) $A\Delta = AB$
- 2) $A\Gamma = AE$
- 3) $\angle B\hat{A}\Gamma = \angle \Delta\hat{A}E$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) i. Τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM έχουν:

- 1) $A\Delta = AB$
- 2) $\angle B\hat{A}M = \angle \Delta\hat{A}Z$ ως κατακορυφήν και
- 3) $\hat{B} = \hat{\Delta}$ γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα.

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα.



ii. Επειδή τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα έχουν και $\Delta Z = BM$. Όμως $BM = \frac{AB}{2}$ και $AB = \Delta E$ γιατί

τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα, άρα $\Delta Z = \frac{\Delta E}{2}$.

34784. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα BAM και MAG είναι ίσα.

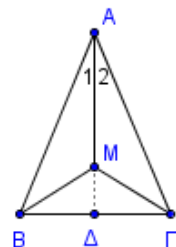
β) Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $B\hat{M}\Gamma$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα BAM και MAG έχουν:

- 1) την πλευρά AM κοινή
- 2) $AB = A\Gamma$ και
- 3) $MB = M\Gamma$.

Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα BAM και KAG είναι ίσα, έχουν και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, άρα η AM είναι διχοτόμος της γωνίας BAK, άρα είναι ύψος και διάμεσος του.
Στο ισοσκελές τρίγωνο BMG, η AG είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας BKG.

36099. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) και στις ίσες πλευρές AB, AG παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}AG$. Αν M είναι το μέσο της BG, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα BD και GE είναι ίσα.
β) τα τρίγωνα BDM και MEG είναι ίσα.
γ) το τρίγωνο DEM είναι ισοσκελές.

Λύση

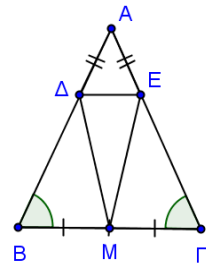
α) Επειδή $AB = AG$ και $AD = AE$, είναι και $AB - AD = AG - AE \Leftrightarrow BD = GE$

β) Τα τρίγωνα BDM και MEG έχουν:

- 1) $BD = GE$
- 2) $BM = MG$ γιατί το M είναι μέσο της BG και
- 3) $\hat{B} = \hat{G}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα BDM και MEG είναι ίσα, έχουν και $MD = ME$, οπότε το τρίγωνο MDE είναι ισοσκελές.



36100. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA = KB$) και KΓ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M, έτσι ώστε $AL = BM$. Να αποδείξετε ότι:

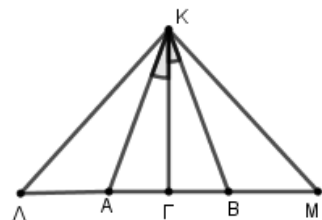
- α) το τρίγωνο KΛM είναι ισοσκελές.
β) η KΓ είναι διάμεσος του τριγώνου KΛM.

Λύση

α) Τα τρίγωνα KAL και KBM έχουν:

- 1) $KA = KB$ (υπόθεση)
 - 2) $AL = BM$ (υπόθεση)
 - 3) $\hat{KAL} = \hat{KBM}$ (παραπληρωματικές των ίσων γωνιών A, B του ισοσκελούς τριγώνου KAB)
- Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $KL = KM$, οπότε το τρίγωνο KΛM είναι ισοσκελές.

β) Η KΓ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου KAB, οπότε είναι και διάμεσός του, δηλαδή $GA = GB$ (1). Επειδή τα τρίγωνα KAL και KBM είναι ίσα, έχουν και $AL = BM$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $GL = GM$, άρα η KΓ είναι διάμεσος του τριγώνου KΛM.



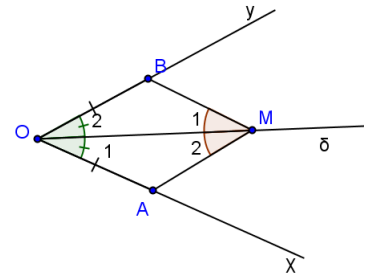
36104. Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Oδ. Θεωρούμε σημείο M της Oδ και σημεία A και B στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $MA = MB$
β) Η Oδ είναι διχοτόμος της γωνίας AMB.

Λύση

α) Τα τρίγωνα BMO και AMO έχουν:

- 1) Την πλευρά OM κοινή
- 2) $OA = OB$ και
- 3) $O_1 = O_2$ γιατί η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας Ο.
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι
ίσα, οπότε έχουν και $MA = MB$.



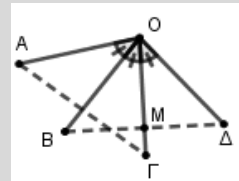
β) Επειδή τα τρίγωνα BMO και AMO είναι ίσα,

έχουν και $M_1 = M_2$, άρα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας AMB.

36110. Αν στο σχήμα που ακολουθεί είναι $\hat{A}OB = \hat{B}OG = \hat{G}OD$ και $OA = OB = OG = OD$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $AG = BD$

β) το M είναι μέσο του BD, όπου M το σημείο τομής των τμημάτων OG και BD.



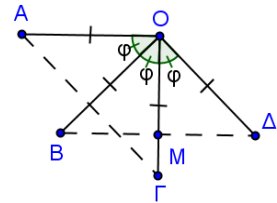
Λύση

α) Έστω ότι $\hat{A}OB = \hat{B}OG = \hat{G}OD = \hat{\phi}$.

Τα τρίγωνα AOG και BOD έχουν:

- 1) $OA = OB$
- 2) $OG = OD$ και
- 3) $\hat{A}OG = \hat{B}OD = 2\hat{\phi}$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AG = BD$.



β) Στο ισοσκελές τρίγωνο BOD η OM είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή το M είναι μέσο του BD.

36170. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AE = AD$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = ΓΔ$

β) $BD = ΓΕ$

γ) $\hat{B}Γ = \hat{E}ΓB$

Λύση

α) Επειδή $AB = AG$ και $AE = AD$ είναι και
 $AB + AE = AG + AD \Leftrightarrow BE = ΓΔ$

β) Τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ έχουν:

- 1) την πλευρά ΒΓ κοινή
- 2) $BE = ΓΔ$
- 3) $\hat{E}ΒΓ = \hat{Δ}ΓB$ γιατί βρίσκονται στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.

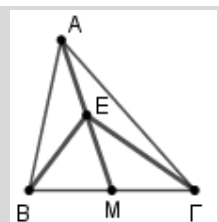
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BD = ΓΕ$.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα, έχουν και $\hat{B}Γ = \hat{E}ΓB$.

36333. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ.
Αν $BΓ = 2BE$, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A}EB = \hat{E}ΜΓ$.

β) $AB = ΕΓ$.



Λύση

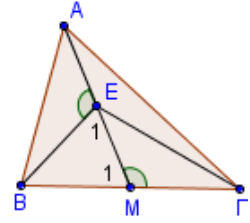
α) Είναι $BM = \frac{BG}{2} = \frac{2BE}{2} = BE$, άρα το τρίγωνο BEM είναι ισοσκελές με βάση την EM και έχει $E_1 = M_1$.

Όμως $AEB = 180^\circ - E_1$ και $EMG = 180^\circ - M_1$, άρα $AEB = EMG$.

β) Τα τρίγωνα AEB και EMG έχουν:

- 1) $AE = EM$ γιατί το E είναι μέσο του AM
- 2) $BE = BM = MG$ και
- 3) $AEB = EMG$

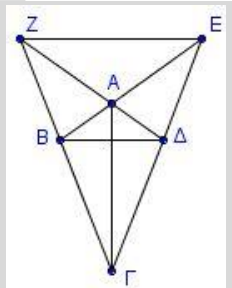
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = EG$.



Θέμα 4ο

14880. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ με $AB = AD$ και $GB = GD$. Αν E το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και ΓΔ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ, να αποδείξετε ότι:

- α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας BΓΔ.
- β) $GZ = GE$.
- γ) $EZ \parallel BD$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABΓ και ADΓ έχουν:

- 1) $AB = AD$
- 2) $GB = GD$ και
- 3) τη πλευρά ΓΑ κοινή, άρα

από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BGA = AGD$, $BAG = DAG$.

Άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας BΓΔ.

β) Τα τρίγωνα ZAG και EAG έχουν:

- 1) τη πλευρά AG κοινή
- 2) $BGA = AGD$ και
- 3) $ZAG = EAG$ γιατί $ZAB = EAD$ ως κατακορυφήν και $BAG = DAG$

Άρα λόγω του ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $GZ = GE$.

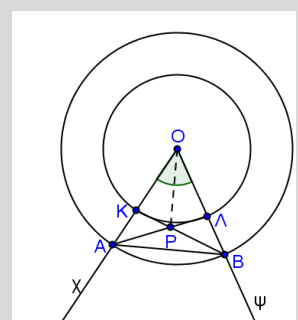
γ) Επειδή τα A, Γ ισαπέχουν από τα B και Δ, ανήκουν στη μεσοκάθετο του BD. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓZE η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ, οπότε είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου. Επειδή $GA \perp BD$ και $GA \perp EZ$, είναι $EZ \parallel BD$.

37095. Δίνεται οξεία γωνία $\chi O \psi$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Oχ στα σημεία K, A και την Oψ στα Λ, B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $AL = BK$.

β) Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL, BK.

γ) Η OP διχοτομεί τη γωνία $\chi O \psi$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ έχουν:

- 1) $OA = OB = \rho_2$
- 2) $OK = OL = \rho_1$ και
- 3) τη γωνία O κοινή

Από το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα, οπότε έχουν και $AL = BK$.

β) Επειδή $OA = OB$, το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, άρα $OAB = OBA$ (1)

Επειδή τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα, ισχύει ότι: $OA \perp LB = OB \perp KB$ (2)

Από (1)-(2) έχουμε: $OAB - OAL = OBA - OBK \Leftrightarrow PAB = PBA$, οπότε το τρίγωνο PAB είναι ισοσκελές.

γ) Τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ έχουν:

- 1) $OA = OB$
- 2) τη πλευρά OP κοινή και
- 3) $PA = PB$ (τρίγωνο APB ισοσκελές)

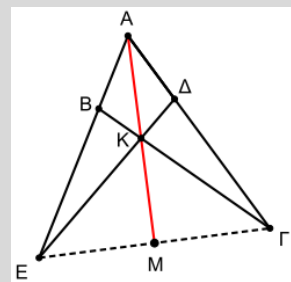
Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ είναι ίσα οπότε έχουν και $AOP = BOP$, δηλαδή η OP είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle O$.

37124. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$.

Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$.

Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , να αποδείξετε ότι:

- α)** $B\Gamma = \Delta E$.
- β)** $BK = K\Delta$.
- γ)** Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A .
- δ)** Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.



Λύση

α) Το τρίγωνο $EA\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AE = A\Gamma$) οπότε $\hat{AEM} = \hat{A\Gamma E}$ (1).

Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$, έχουν :

- i) $E\Gamma$ κοινή
- ii) $BE = \Delta\Gamma$ (διαφορές των ίσων τμημάτων AE, AB και $A\Gamma, A\Delta$ αντίστοιχα)
- iii) $\hat{AEM} = \hat{A\Gamma E}$ από τη σχέση (1)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι ίσα οπότε έχουν και $B\Gamma = \Delta E$

β) Το τρίγωνο EKG είναι ισοσκελές ($\hat{\Delta E\Gamma} = \hat{\Delta\Gamma E}$ από την ισότητα των τριγώνων $BE\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$) οπότε $EK = KG$ (2)

Τα τρίγωνα BEK και ΔKG έχουν:

- i) $EK = KG$ (από τη σχέση (2))
- ii) $BE = \Delta\Gamma$ (διαφορές των ίσων τμημάτων AE, AB και $A\Gamma, A\Delta$ αντίστοιχα)
- iii) $\hat{B\Gamma K} = \hat{\Delta\Gamma K}$ (Διαφορές των ίσων γωνιών $\hat{B\Gamma E}, \hat{K\Gamma E}$ και $\hat{\Delta\Gamma E}, \hat{K\Gamma E}$ αντίστοιχα)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα BEK και ΔKG είναι ίσα, οπότε είναι και $BK = K\Delta$.

γ) Τα τρίγωνα ABK και $\Delta K\Delta$ έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία ($BK = K\Delta, AK$ κοινή και $AB = A\Delta$) άρα είναι ίσα. Επομένως $\hat{BAK} = \hat{K\Delta\Delta}$ οπότε η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

δ) Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ισοσκελές και η AM διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ άρα η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.

Θέμα 3ο

12069. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) παίρνουμε στην πλευρά AB σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 2A\Delta$, και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E , ώστε $E\Gamma = 2A E$. Το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τμήματα ΔB και $E\Gamma$ είναι ίσα.

ii. Το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β) Αν P το σημείο τομής των τμημάτων BE και $\Gamma\Delta$ να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $\Gamma\hat{B}E$ και $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίσες.

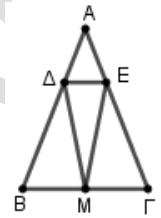
ii. Το τμήμα PM διχοτομεί τη γωνία $B\hat{P}\Gamma$.

Λύση

α) i. Επειδή $\Delta B = 2A\Delta$, είναι $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $\Delta B = \frac{2}{3}AB$.

Επειδή $E\Gamma = 2A E$ είναι $A E = \frac{1}{3}A\Gamma$ και $E\Gamma = \frac{2}{3}A\Gamma$.

Επειδή $AB = A\Gamma$ είναι και $\Delta B = E\Gamma$.



ii. Τα τρίγωνα ΔBM και $EM\Gamma$ έχουν:

- $\Delta B = E\Gamma$

- $MB = M\Gamma$ γιατί το M είναι μέσο του $B\Gamma$

- $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔBM και $EM\Gamma$ είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta M = EM$.

Επομένως το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β) i. Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ έχουν:

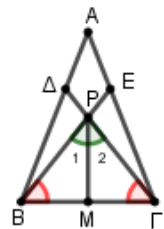
- $B\Gamma$ πλευρά κοινή

- $\Delta B = E\Gamma$

- $B = \Gamma$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα οπότε έχουν και

$\Gamma B E = B\hat{\Gamma}\Delta$.



ii. Επειδή $\Gamma B E = B\hat{\Gamma}\Delta$, το τρίγωνο $P B\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$. Επειδή η PM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $P B\Gamma$, είναι και διχοτόμος του τριγώνου, δηλαδή το τμήμα PM διχοτομεί τη γωνία $B\hat{P}\Gamma$.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Θέμα 2ο

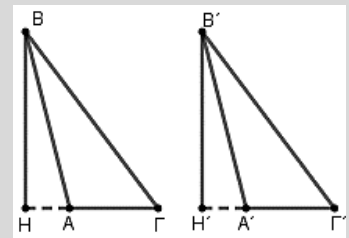
12149. Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} > 90^\circ$) και

$A'B'\Gamma'$ ($\hat{A}' > 90^\circ$) με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$.

Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α) $BAH = B'A'H'$.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα BHA και $B'H'A'$ έχουν:

- $BH = B'H'$, από υπόθεση

- $\gamma = \gamma'$, από υπόθεση

Επομένως είναι ίσα, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Άρα και οι γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές BH και $B'H'$ είναι ίσες, δηλαδή $BAH = B'A'H'$.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

- $\gamma = \gamma'$, από υπόθεση

- $\beta = \beta'$, από υπόθεση

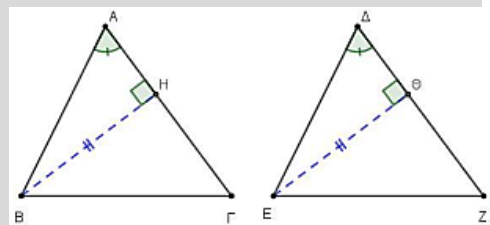
- $BA\Gamma = B'A'\Gamma'$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών BAH και $B'A'H'$.

Επομένως, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

13517. Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{E}Z$. Αν τα ύψη τους BH και $E\Theta$ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) $AB = \Delta E$.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABH και $\Delta E\Theta$ έχουν:

- $BH = E\Theta$ από την υπόθεση,

- $ABH = \Delta E\Theta$ γιατί τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους είναι ίσες

Επομένως, τα τρίγωνα ABH και $\Delta E\Theta$ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά τους και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή $AB = \Delta E$ (1).

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν:

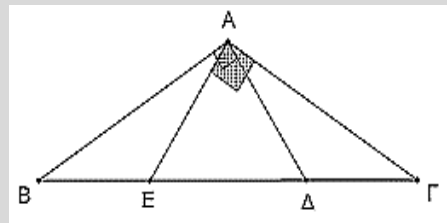
- $AB = \Delta E$, από (1),

- $A = \Delta$ υπόθεση

- $AB\Gamma = \Delta EZ$ υπόθεση.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

13533. Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:



- α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.
 β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
 γ) $BE = \Gamma\Delta$.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- $AB = A\Gamma$ υπόθεση

- $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ προκύπτει ότι $A\Delta = AE$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους B, Γ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουμε ότι $B\Delta = \Gamma E$ (1) ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $B\Delta\Delta$ και $\Gamma A\Gamma E$ αντίστοιχα. Λόγω της (1) είναι $BE = B\Delta - \Delta E = \Gamma E - \Delta E = \Gamma\Delta$.

34387. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE των γωνιών B και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα.

β) Έστω $E\Delta$ και $A\Delta$ οι κάθετες από τα σημεία E και Δ αντίστοιχα στη $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι $E\Delta = A\Delta$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ έχουν:

1) τη πλευρά $B\Gamma$ κοινή

2) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

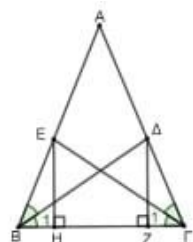
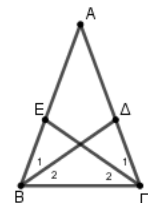
3) $\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$ γιατί είναι μισά ίσων γωνιών.

Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων $\Gamma\Pi\Gamma$ τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ έχουν

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $BE = \Gamma\Delta$ γιατί τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα.

Άρα τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $E\Delta = A\Delta$.



34401. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα.

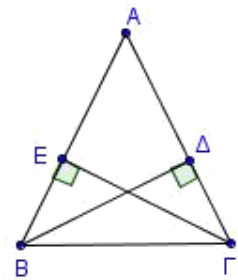
β) $A\Delta = AE$.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ έχουν:

- 1) την πλευρά ΒΓ κοινή και
 2) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
 Άρα τα τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες και είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα, έχουν και $BE = \Gamma\Delta$.
 Όμως είναι $AB = \Lambda\Gamma$, άρα είναι και $AB - BE = \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta \Leftrightarrow AE = \Lambda\Delta$.



34404. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = \Lambda\Gamma$) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

- α) $MK = ML$.
 β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ.

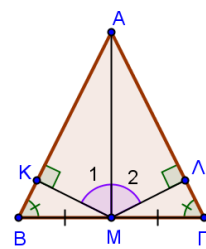
Λύση

- α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΚΒ και ΜΛΓ έχουν:
 1) $MB = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ και
 2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου
 Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MK = ML$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΜ και ΑΛΜ έχουν:

- 1) την πλευρά ΑΜ κοινή και
 2) $MK = ML$,

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M_1 = M_2$, δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ.



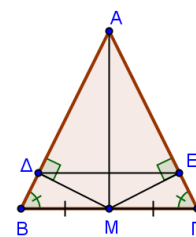
34405. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = \Lambda\Gamma$. Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $M\Delta = ME$.
 β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση

- α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:
 1) $MB = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ και
 2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου.
 Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M\Delta = ME$.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα, έχουν και $\Delta B = E\Gamma$.
 Όμως $AB = \Lambda\Gamma$, άρα και $AB - \Delta B = \Lambda\Gamma - E\Gamma \Leftrightarrow \Lambda\Delta = A E$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.



34496. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = \Lambda\Gamma$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
 β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = \Lambda\Gamma$.

Λύση

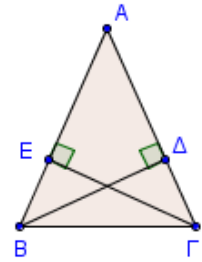
- α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:
 1) την πλευρά ΒΓ κοινή και

2) $B = \Gamma$ γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, αφού έχει $AB = A\Gamma$.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BD = \Gamma E$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $BE\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ έχουν:

- 1) την πλευρά $B\Gamma$ κοινή και
- 2) $BD = \Gamma E$

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B = \Gamma$.
Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές και έχει $AB = A\Gamma$.



34497. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ έχουν:

- 1) $AM = M\Delta$
- 2) $BM = M\Gamma$ γιατί το M είναι μέσο της $B\Gamma$ και
- 3) $\angle AMB = \angle M\Gamma\Delta$ ως κατακορυφήν

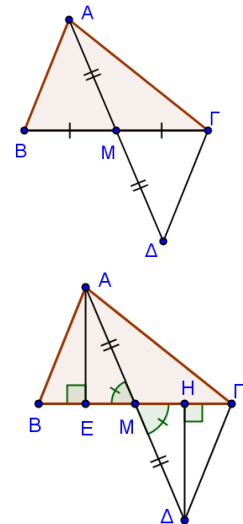
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Έστω AE και ΔH οι αποστάσεις των A, Δ από τη $B\Gamma$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AEM και $M\Delta H$ έχουν:

- 1) $AM = M\Delta$
- 2) $\angle AMB = \angle M\Gamma\Delta$

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου τριγώνου είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = \Delta H$.



34499. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B . Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και έστω Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA (προς το A). Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BE$

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $BE\Delta$ έχουν:

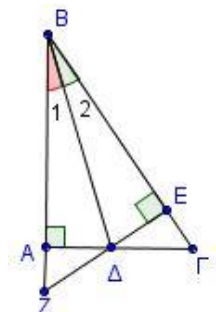
- 1) τη πλευρά $B\Delta$ κοινή
- 2) $B_1 = B_2$ λόγω της διχοτόμησης

Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα, κατά συνέπεια έχουν και $AB = BE$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB έχουν:

- 1) Τη γωνία B κοινή
- 2) $AB = BE$

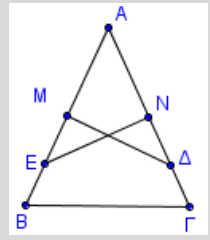
Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα.



36329. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α)** Αν $M\Delta = NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = NE$.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\Delta$ και AEN έχουν:

- 1) $M\Delta = NE$ και
- 2) τη γωνία A κοινή, άρα

έχουν μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν

$$AM = AN \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow AB = A\Gamma, \text{ δηλαδή το τρίγωνο } AB\Gamma \text{ είναι ισοσκελές.}$$

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\Delta$ και AEN έχουν:

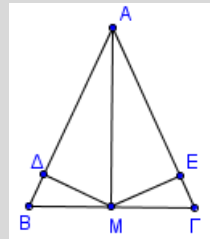
- 1) $AM = AN$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$ και
- 2) τη γωνία A κοινή, άρα

έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $M\Delta = NE$.

36330. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α)** Αν είναι $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.
β) Αν είναι $AB = A\Gamma$ και M το μέσο του $B\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\Delta$ και AME έχουν:

- 1) την πλευρά MA κοινή και
- 2) $M\Delta = ME$, δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες και μια κάθετη πλευρά τους ίση, οπότε είναι ίσα.

β) Αν $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

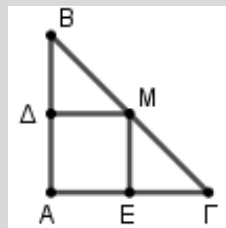
Τα ορθογώνια τρίγωνα $M\Delta B$ και $ME\Gamma$ έχουν:

- 1) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ και
- 2) $MB = M\Gamma$, γιατί το M είναι μέσο του $B\Gamma$

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $M\Delta = ME$.

36331. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Αν $M\Delta = ME$ τότε:
i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα.
ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = ME$.



Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM έχουν:

- $M\Delta = ME$

- $MB = MG$, διότι M μέσο της BG .

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες οπότε είναι ίσα.

ii. Από τα ίσα τρίγωνα BDM και GEM προκύπτει ότι $B = G$, διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές MD και ME . Άρα ABG ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα BDM και GEM έχουν:

- $MB = MG$, διότι M μέσο της BG

- $B = G$, ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ABG .

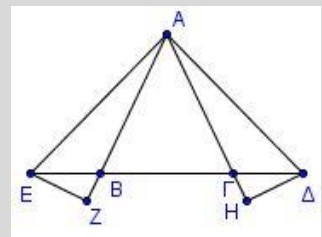
Άρα τα τρίγωνα BDM και GEM είναι ίσα, οπότε ισχύει $MD = ME$ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες B, G .

36332. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$.

Στην προέκταση της BG (προς το G) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της GB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $G\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία AG και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = AE$

β) $EZ = \Delta H$



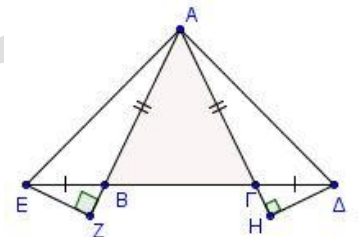
Λύση

α) Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ έχουν:

1) $AB = AG$

2) $G\Delta = BE$ και

3) $\angle ABE = \angle AG\Delta$ παραπληρωματικές των ίσων γωνιών B και G του ισοσκελούς τριγώνου ABG . Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Delta = AE$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα EBZ και $G\Delta H$ έχουν:

1) $G\Delta = BE$ και

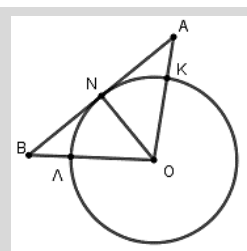
2) $\angle EBZ = \angle G\Delta H$ κατακορυφήν με τις ίσες γωνίες B και G του ισοσκελούς τριγώνου ABG .

Τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $EZ = \Delta H$.

36344. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.

β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.



Λύση

α) Επειδή η AB είναι εφαπτομένη του κύκλου, ισχύει ότι $AB \perp ON$. Στο τρίγωνο OAB η ON είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

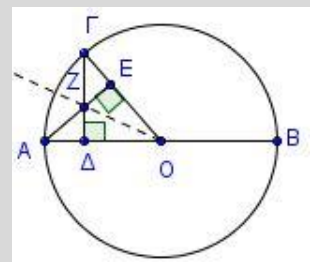
β) Η ON εκτός από ύψος και διάμεσος είναι και διχοτόμος της γωνίας BOA , άρα $\angle BON = \angle NOA$.

Επειδή σε ίσες επίκεντρες γωνίες ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα τόξα, είναι $KN = \Lambda N$, οπότε το N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

36345. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν AE κάθετο στην OG και $\Gamma\Delta$ κάθετο στην AO να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές.

β) Η OZ διχοτομεί τη γωνία $AO\Gamma$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου AG .



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα AEO και $\Gamma\Delta O$ έχουν:

1) $OA = OG = \rho$ και

2) τη γωνία O κοινή,

δηλαδή τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μία οξεία γωνία τους ίση, άρα είναι ίσα. Οπότε και $OD = OE$ άρα το τρίγωνο $O\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $Z\Delta O$ και ZEO έχουν:

1) $OD = OE$ και

2) τη πλευρά OZ κοινή,

δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά τους ίση, οπότε είναι ίσα, άρα έχουν και $\Delta OZ = ZO E$, δηλαδή η OZ είναι διχοτόμος της γωνίας $AO\Gamma$. Επειδή οι γωνίες AOZ και ZOG είναι επίκεντρες και είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα $A\Theta$ και $\Theta\Gamma$ είναι ίσα, οπότε το Θ είναι μέσο του τόξου AG .

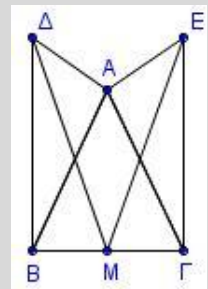
37012. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) .

Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$ τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

β) $A\Delta = AE$.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ έχουν:

1) $B\Delta = \Gamma E$ και 2) $BM = M\Gamma$ γιατί το M είναι μέσο της $B\Gamma$

Τα δύο τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.

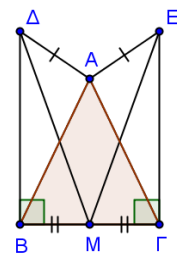
β) Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A E \Gamma$ έχουν:

1) $B\Delta = \Gamma E$

2) $AB = A\Gamma$ και

3) $\angle A\Delta B = \angle B M \Gamma = 90^\circ = \angle A E \Gamma$ (οι γωνίες B και Γ είναι στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι ίσες)

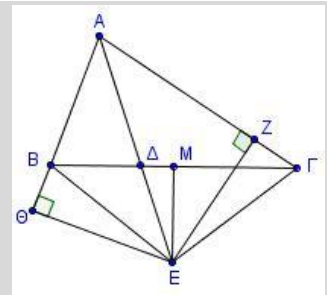
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Delta = AE$



Θέμα 4ο

1707. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AD στο σημείο E . Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις $AB, A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 β) Τα τρίγωνα ΘBE και $Z\Gamma E$ είναι ίσα.
 γ) $\widehat{A\Gamma E} + \widehat{A\beta E} = 180^\circ$.



Λύση

α) Στο τρίγωνο $EB\Gamma$ η EM είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος: E σημείο της μεσοκαθέτου του $B\Gamma$, οπότε ισαπέχει από τα άκρα του.

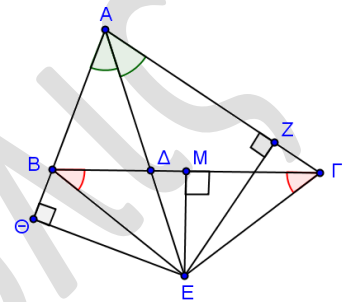
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘBE και $E\Gamma Z$ έχουν:

- 1) $EB = E\Gamma$
- 2) $\angle E\Theta = \angle EZ$ γιατί το E ανήκει στη διχοτόμο AE της γωνίας A , οπότε ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου, είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΘBE και $E\Gamma Z$ είναι ίσα είναι και $\angle A\Gamma E = \angle \Theta BE$ (1)

$$\text{Είναι } \angle \Theta BE + \angle ABE = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \angle A\Gamma E + \angle ABE = 180^\circ$$

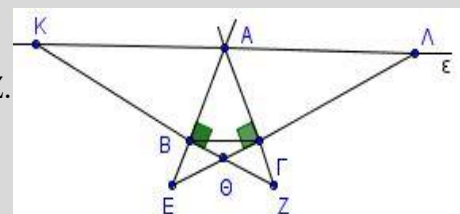


1875. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, και την ευθεία ϵ της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στη πλευρά AB στο B τέμνει την ϵ στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στη πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ϵ στο Λ και την ευθεία AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $AZ = AE$ ii. $AK = A\Lambda$

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των $KZ, E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.



Λύση

α)i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ABZ και $A\Gamma E$ έχουν:

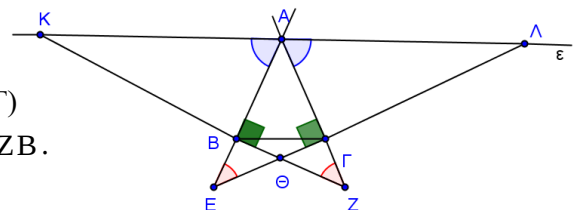
- 1) τη γωνία A κοινή
- 2) $AB = A\Gamma$ (ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $AE = AZ$, $\angle A\Gamma E = \angle AZB$.

ii. Τα τρίγωνα EAL και KAZ έχουν:

- 1) $AE = AZ$
- 2) $\angle A\Gamma E = \angle AZB$ και
- 3) $\angle EAL = \angle KAZ = A + \frac{1}{2}A_{\text{εξ}}$ (ή με σύγκριση των τριγώνων KAB και $\Lambda A\Gamma$)

Από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $AK = A\Lambda$.



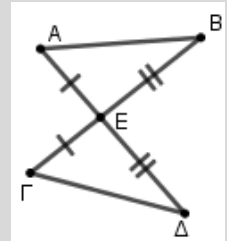
β) Είναι $ABZ = AGE = 90^\circ$ και $AB\Gamma = A\Gamma B$ (στη βάση του ισοσκελούς $AB\Gamma$), άρα και $ABZ - AB\Gamma = AGE - A\Gamma B \Leftrightarrow \Gamma B\Theta = B\Gamma\Theta$. Τότε το τρίγωνο $B\Theta\Gamma$ είναι ισοσκελές και $B\Theta = \Theta\Gamma$. Όμως τα $B\Theta, \Theta\Gamma$ είναι οι αποστάσεις του Θ από τις πλευρές της γωνίας A , οπότε το Θ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας A . Δηλαδή η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της A .

13839. Τα ευθύγραμμα τμήματα AD και BF τέμνονται στο σημείο E έτσι ώστε $AE = GE$ και $BE = ED$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και ΓDE είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις EH και $E\Theta$ του σημείου E από τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα, είναι ίσες.

γ) Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Gamma\Delta$ προς τα A και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABE και ΓDE έχουν:

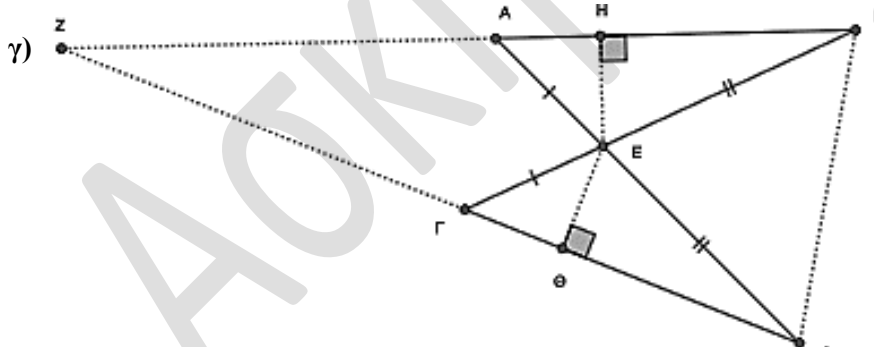
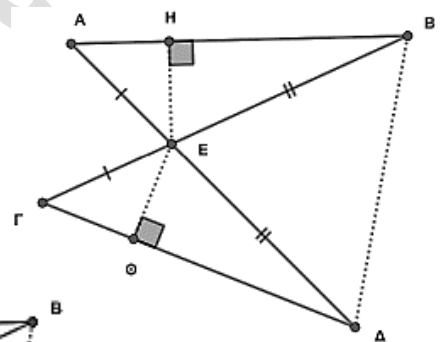
- $AE = GE$ (υπόθεση)
- $BE = ED$ (υπόθεση)
- $\angle AEB = \angle \Gamma ED$ (ως κατακορυφήν)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ABE και ΓDE είναι ίσα

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AHE και $E\Theta\Gamma$ έχουν:

- $AE = GE$
- $\angle A = \angle \Gamma$ (από σύγκριση ερωτήματος α) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές EB και ED)

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα και $EH = E\Theta$ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες A και Γ αντίστοιχα.



Από την ισότητα των τριγώνων του α) ερωτήματος έχουμε ότι $\triangle ABE \cong \triangle \Gamma DE$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AE και GE αντίστοιχα. Από υπόθεση έχουμε $EB = ED$ άρα το τρίγωνο $E\Delta B$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Delta$ συνεπώς οι προσκείμενες στη βάση γωνίες θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $\angle E\Delta B = \angle E\Delta B$. Το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Delta$ αφού οι προσκείμενες στη βάση γωνίες, $\angle Z\Delta B$ και $\angle ZB\Delta$, είναι ίσες μεταξύ τους ως άθροισμα ίσων γωνιών:

$$\angle ABE + \angle E\Delta B = \angle \Gamma DE + \angle E\Delta B \Leftrightarrow \angle Z\Delta B = \angle ZB\Delta$$

37094. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές AG και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

Λύση

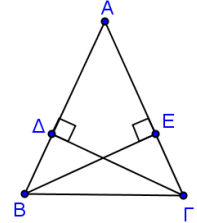
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και BEG έχουν:

1) τη πλευρά $B\Gamma$ κοινή και

2) $AB\Gamma = AG\Delta$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου, είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.

Επομένως είναι και $BE = \Gamma\Delta$.



β) Π': Αν δύο ύψη τριγώνου είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες τις πλευρές στις οποίες αντιστοιχούν τα ύψη.

Απόδειξη

Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και BEG έχουν:

1) τη πλευρά $B\Gamma$ κοινή και 2) $BE = \Gamma\Delta$

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AB\Gamma = AG\Delta$.

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές με $AB = AG$.

γ) Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

Ισοσκελές τρίγωνο – Μεσοκάθετος – Διχοτόμος (10 ασκήσεις)**Θέμα 2ο**

34424. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.
 β) Οι γωνίες $\hat{A}IB$ και $\hat{A}I\Gamma$ είναι ίσες.
 γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

Λύση

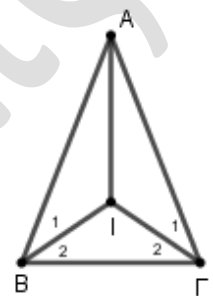
α) Επειδή οι BI , GI είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, ισχύει ότι

$B_2 = \frac{B}{2}$ και $\Gamma_2 = \frac{\Gamma}{2}$. Όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $B_2 = \Gamma_2$. Το τρίγωνο $B\Gamma I$ έχει δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα AIB και AIG έχουν:

- $AB = AG$ (υπόθεση)
- $BI = IG$ γιατί το τρίγωνο $IB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$
- $B_1 = \Gamma_1$ γιατί είναι ίσες με το μισό των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα AIB και BIG είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{A}IB = \hat{A}I\Gamma$.



γ) Επειδή $AB = AG$ και $IB = IG$, τα σημεία A και I ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος $B\Gamma$, οπότε η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

34503. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο DE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.
 β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

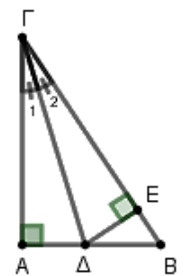
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

- την πλευρά $\Gamma\Delta$ κοινή
- $\Gamma_1 = \Gamma_2$ λόγω διχοτόμησης της γωνίας Γ .

Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα.

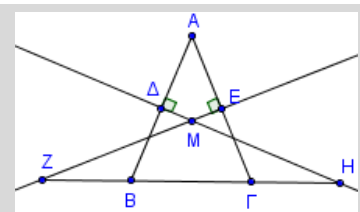
β) Επειδή τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα, έχουν $\Gamma A = \Gamma E$ και $\Delta A = \Delta E$. Δηλαδή τα σημεία Γ , Δ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος AE , επομένως η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του ΔE .



34507. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$.

Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα H και Z .

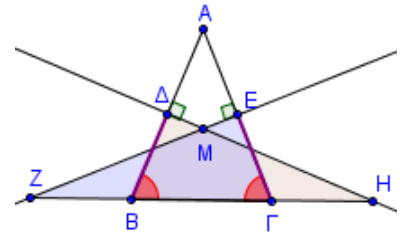
- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $EZ\Gamma$.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

**Λύση**

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ έχουν:

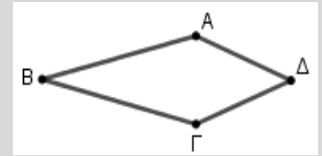
- 1) $\Delta B = E\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
 - 2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
- Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΓΖ είναι ίσα, έχουν και $Z = H$.
Το τρίγωνο ΜΖΗ έχει δύο γωνίες ίσες, άρα είναι ισοσκελές.



34514. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = BG$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι:

- $\angle B A \Gamma = \angle B \Gamma A$.
- Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.
- Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

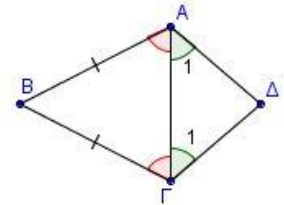


Λύση

α) Επειδή $BA = BG$, το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $\angle B A \Gamma = \angle B \Gamma A$.

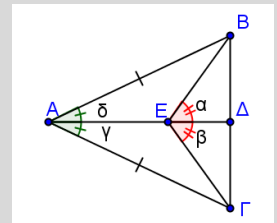
β) Επειδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\angle B A \Gamma = \angle B \Gamma A$, είναι και $\hat{A} - \angle B A \Gamma = \hat{\Gamma} - \angle B \Gamma A \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$,
άρα το τρίγωνο ΑΔΓ
είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι $\Delta A = \Delta \Gamma$.

γ) Επειδή $BA = BG$ και $\Delta A = \Delta \Gamma$, τα σημεία Β, Δ ισαπέχουν από τα Α, Γ, άρα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.



34516. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

- Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.
- Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.
- Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.



Λύση

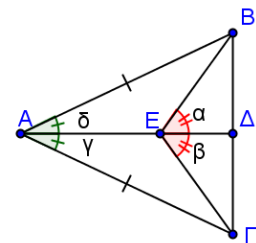
α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ έχουν:

- 1) την πλευρά ΑΕ κοινή
- 2) $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ (υπόθεση) και
- 3) $AB = AG$ (υπόθεση)

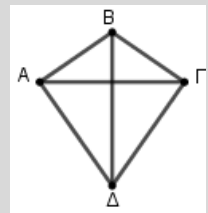
Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, έχουν και $EB = EG$, άρα το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, έχουν και $AB = AG$, δηλαδή το Α ισαπέχει από τα Β και Γ οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή $EB = EG$, το Ε ισαπέχει από τα Β, Γ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή τα Α, Ε βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΓ, η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.



36102. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$.
Οι διαγώνιοι $ΑΓ$, $B\Delta$ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.
β) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $ΑΓ$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ έχουν:

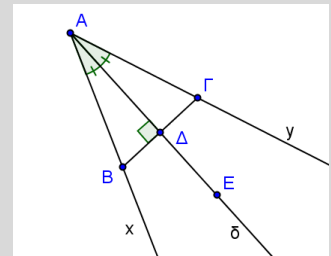
- 1) $BA = B\Gamma$
- 2) $\Delta A = \Delta\Gamma$ και
- 3) τη πλευρά $B\Delta$ κοινή

Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $\angle AB\Delta = \angle B\Gamma\Delta$ και $\angle A\Delta B = \angle B\Delta\Gamma$, δηλαδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.

β) Επειδή $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$, τα σημεία A και Γ ισαπέχουν από τα B, Δ , άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του $ΑΓ$. Οπότε η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΓ$.

36341. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της $A\delta$.
Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $AB = A\Gamma$.
β) Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .



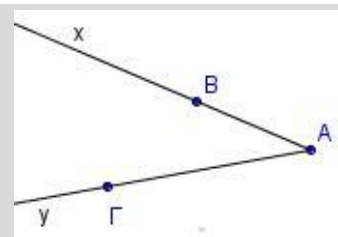
Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, επομένως $AB = A\Gamma$.

β) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές η $A\Delta$ θα είναι και διάμεσος. Επειδή η $A\Delta$ είναι κάθετη στο μέσο Δ της $B\Gamma$, είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$. Επειδή κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, το ίδιο ισχύει και για το τυχαίο σημείο E της $A\delta$.

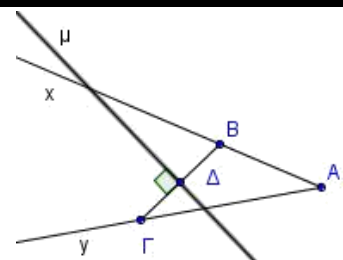
36226. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

- α)** ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.
β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

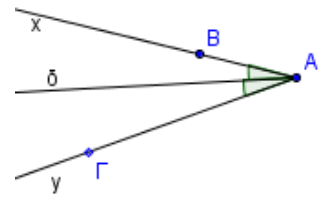


Λύση

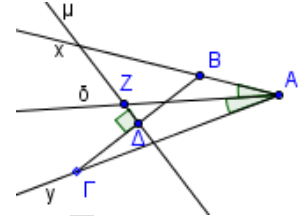
α) Γνωρίζουμε ότι τα σημεία που ισαπέχουν από δύο σημεία B και Γ , βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$. Κατά συνέπεια ο θησαυρός βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο μ του $B\Gamma$.



β) Για να ισαπέχει ο θησαυρός από τα δύο ποτάμια, θα ισαπέχει από τις πλευρές Αχ και Αγ της γωνίας xAy, άρα θα βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας αυτής.



γ) Αν ο θησαυρός ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια, τότε ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο Αδ της γωνίας xAy, άρα ο θησαυρός βρίσκεται στο σημείο τομής Ζ των Αδ, μ.



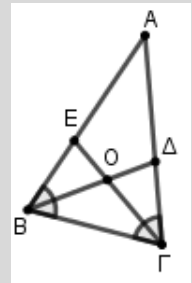
Θέμα 4ο

13854. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ.

β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ=ΕΛ.

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ έχουν:

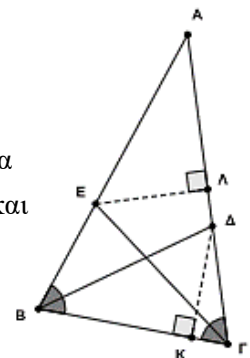
- τη ΒΓ κοινή πλευρά
- $\angle ABG = \angle AGB$ ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- $\angle BGF = \angle EGB$ ως μισά των ίσων γωνιών ΑΒΓ και ΑΓΒ

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα ΒΔ=ΓΕ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών ΑΓΒ και ΑΒΓ.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ από το προηγούμενο ερώτημα
- $\angle DBK = \angle EGL$ ως μισά των ίσων γωνιών ΑΒΓ και ΑΓΒ

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα ΔΚ=ΕΛ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών ΚΒΔ και ΛΓΕ.



γ) Αναζητούμε ένα σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΔΚ.

Από το β) ερώτημα έχουμε ότι ΔΚ=ΕΛ συνεπώς το σημείο Ζ που αναζητούμε θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΕΛ. Το σημείο Ε ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας ΑΓΒ και ΕΛ είναι η απόστασή του από την πλευρά ΓΑ, η οποία είναι ίση με την απόσταση του σημείου Ε από την άλλη πλευρά, ΒΓ, της γωνίας. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Ζ θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ.

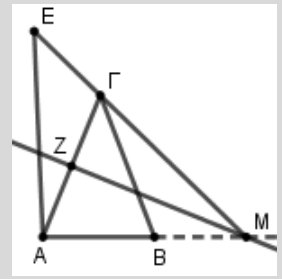
37823. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AG=BG$).

Η μεσοκάθετη ε της AG τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του B) στο σημείο M και την AG στο Z . Στην προέκταση της MG (προς το μέρος του Γ) παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $GE=BM$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Ναδειχτεί ότι τα τρίγωνα $AG\epsilon$ και ΓBM είναι ίσα.

γ) Ναδειχτεί ότι το τρίγωνο AME είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Επειδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο του AG , ισαπέχει από τα σημεία A και Γ , δηλαδή $MA = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα $AG\epsilon$ και ΓBM έχουν:

1) $GE = BM$ (υπόθεση)

2) $AG = BG$

3) $\hat{E}\hat{G}\hat{A} = \hat{G}\hat{B}\hat{M}$ γιατί $\hat{E}\hat{G}\hat{A} = 180^\circ - \hat{A}\hat{G}\hat{M} \overset{\text{AMΓ ισοσκελές με βάση την AG}}{=} 180^\circ - \hat{G}\hat{A}\hat{M} \overset{\text{ABΓ ισοσκελές με βάση την AB}}{=} 180^\circ - \hat{A}\hat{B}\hat{G} = \hat{G}\hat{B}\hat{M}$,

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $AG\epsilon$ και ΓBM είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα $AG\epsilon$ και ΓBM είναι ίσα, έχουν και $M\Gamma = AE$. Όμως $M\Gamma = MA$ από το α σκέλος, άρα $AE = MA$, οπότε το τρίγωνο AME είναι ισοσκελές.

Ανισοτικές σχέσεις

2ο Θέμα

34396. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $A\Delta = \Delta E$.
β) $A\Delta < \Delta B$.

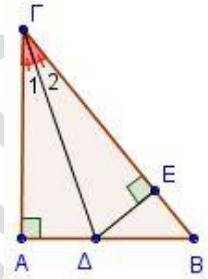
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ έχουν:

- 1) την πλευρά $\Gamma\Delta$ κοινή και
- 2) $\Gamma_1 = \Gamma_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Γ .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Delta = \Delta E$.

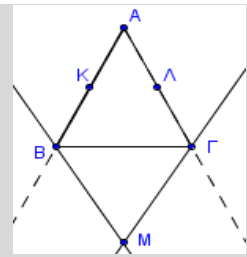
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔEB η ΔB είναι η υποτείνουσα, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $\Delta B > \Delta E$, όμως $A\Delta = \Delta E$, άρα $\Delta B > A\Delta$.



34415. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των AB και $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.
β) $MK = M\Lambda$.



Λύση

α) Επειδή οι BM και ΓM είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ

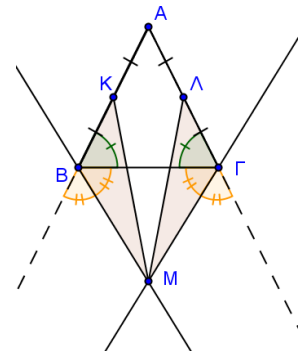
αντίστοιχα, έχουμε: $MB\Gamma = \frac{B_{\text{εξ}}}{2} = \frac{180^\circ - B}{2} = \frac{180^\circ - \Gamma}{2} = \frac{\Gamma_{\text{εξ}}}{2} = M\Gamma B$.

Το τρίγωνο $M\Gamma B$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, άρα $MB = M\Gamma$.

β) Τα τρίγωνα KBM και $\Lambda\Gamma M$ έχουν:

- 1) $KB = \Lambda\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$
- 2) $MB = M\Gamma$ και
- 3) $\angle KBM = B + MB\Gamma = \Gamma + M\Gamma B = \angle \Lambda\Gamma M$

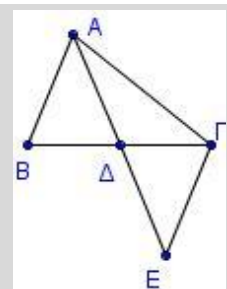
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MK = M\Lambda$.



34502. Στο διπλανό σχήμα, η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της $A\Delta$, ώστε $\Delta E = A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α)** $AB = \Gamma E$.
β) $A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}$.

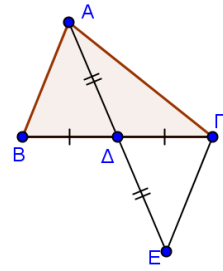


Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

- 1) $A\Delta = \Delta E$
- 2) $B\Delta = \Delta\Gamma$ γιατί το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$ και
- 3) $\angle A\Delta B = \angle E\Delta\Gamma$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = \Gamma E$ (1).



β) $AE = A\Delta + \Delta E \Leftrightarrow AE = 2A\Delta$

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma E$ ισχύει ότι:

$$AE < AE + A\Gamma \Leftrightarrow AE < AB + A\Gamma \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2A\Delta < AB + A\Gamma \Leftrightarrow A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}.$$

36168. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B .

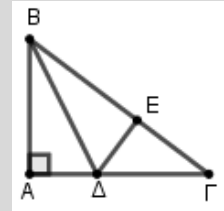
Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$.

β) $A\Delta < \Delta\Gamma$.

γ) $A\Gamma > AB$.

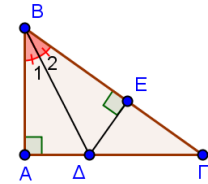


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $B\Delta E$ έχουν:

- 1) την πλευρά $B\Delta$ κοινή και
- 2) $B_1 = B_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας B .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Delta = \Delta E$.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ η $\Delta\Gamma$ είναι η υποτείνουσα, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $\Delta\Gamma > \Delta E$, όμως $A\Delta = \Delta E$, άρα $\Delta\Gamma > A\Delta$.

γ) Γνωρίζουμε ότι απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές, άρα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ επειδή $\Gamma < B$ είναι και $AB < A\Gamma$.

Θέμα 4ο

1749. Θεωρούμε δύο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ϵ , τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην ϵ . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ϵ .

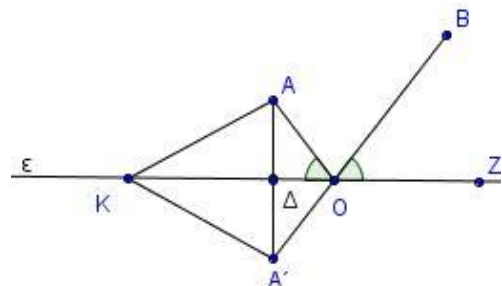
α) Αν η BA' τέμνει την ευθεία ϵ στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

- i. Η ευθεία ϵ διχοτομεί τη γωνία AOA' .
 - ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ϵ .
- β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ϵ , να αποδείξετε ότι:
- i. $KA = KA'$
 - ii. $KA + KB > AO + OB$

Λύση

α) i. Επειδή στο τρίγωνο OAA' η OA είναι ύψος και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η OA είναι διχοτόμος της γωνίας AOA' .

ii. Επειδή το τρίγωνο $A\Delta O$ είναι ορθογώνιο, η γωνία $AO\Delta$ είναι οξεία. Είναι $\angle O\Delta A' = \angle BOZ$ ως κατακορυφήν και



$\angle OA' < 90^\circ$, άρα και $\angle BOZ < 90^\circ$.

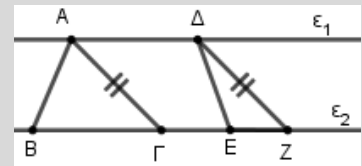
Άρα οι ζητούμενες οξείες γωνίες είναι οι $\angle AOD$, $\angle BOZ$ και είναι ίσες.

β) i. Επειδή το K ανήκει στη μεσοκάθετο του AA' ισχύει ότι: $KA = KA'$.

ii. Στο τρίγωνο KBA' από τη τριγωνική ανισότητα, ισχύει ότι:

$$KA' + KB > BA' \Leftrightarrow KA + KB > OA' + OB \Leftrightarrow KA + KB > OA + OB$$

13751. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔEZ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι $AG = \Delta Z$.



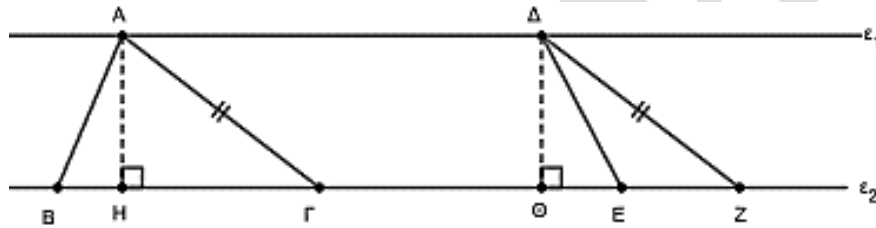
α) i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές A και Δ ονομάζοντας τα AH και $\Delta\Theta$ αντίστοιχα.

ii. Να αποδείξετε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί $EZ < B\Gamma$.

Λύση

α) i.



ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Delta\Theta Z$ έχουν:

- $\angle A\Theta = \angle A\Theta$, ως αποστάσεις παραλλήλων ευθειών
- $AG = \Delta H$, από την υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε και οι άλλες κάθετες πλευρές τους είναι ίσες, δηλαδή $H\Gamma = \Theta Z$.

β) Το σημείο H είναι εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$ γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε $H\Gamma < B\Gamma$.

Το σημείο Θ είναι εξωτερικό του τμήματος EZ γιατί η γωνία E είναι αμβλεία, οπότε $EZ < \Theta Z$.

Από το α) ii. ερώτημα βρήκαμε ότι $\Theta\Gamma = \Theta H$. Άρα $EZ < \Theta Z$, $H\Gamma = \Theta\Gamma$ και $H\Gamma < B\Gamma$, επομένως $EZ < B\Gamma$.

Σχετική θέση ευθείας – κύκλου

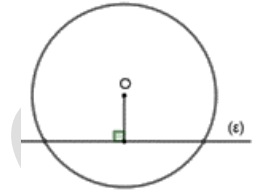
Θέμα 2ο

13759. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

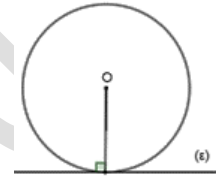
- α)** $d = 3$. **β)** $d = 6$. **γ)** $d = 9$.

Λύση

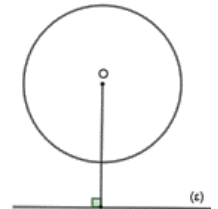
α) Επειδή η απόσταση $d = 3$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.



β) Επειδή η απόσταση $d = 6$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



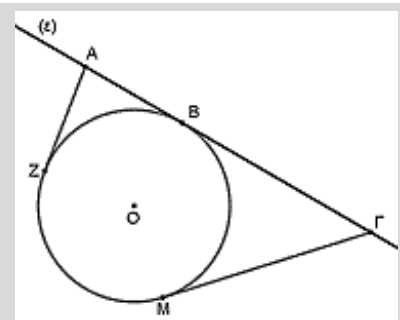
γ) Επειδή η απόσταση $d = 9$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη με την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.



13817. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + \Gamma M$.



Λύση

α) Από τα δεδομένα τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AZ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός αυτό, άρα είναι ίσα, δηλαδή $AB = AZ$.

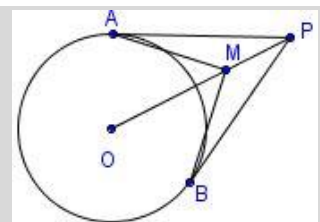
Όμοια από το σημείο Γ που είναι εκτός του κύκλου τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma B, \Gamma M$ είναι εφαπτόμενα σε αυτόν, άρα $\Gamma B = \Gamma M$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε $A\Gamma = AB + B\Gamma = AZ + \Gamma M$.

36095. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

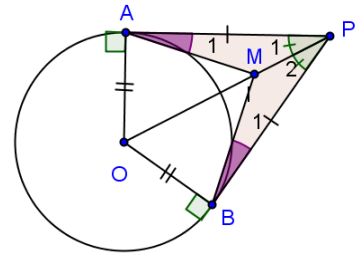
β) $\widehat{MAO} = \widehat{MBO}$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα PAM και PMB έχουν:

- 1) τη πλευρά PM κοινή
 - 2) $PA = PB$ γιατί είναι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το P προς τον κύκλο
 - 3) $P_1 = P_2$ γιατί η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων
- Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



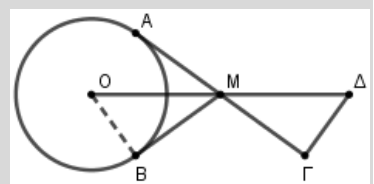
β) Επειδή τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα, έχουν και $A_1 = B_1$.

Όμως $\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ$ γιατί οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτομένες, άρα $\angle MAO = 90^\circ - A_1 = 90^\circ - B_1 = \angle MBO$.

36098. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB. Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = OM$.

α) Να αποδείξετε ότι $MB = M\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.



Λύση

α) Τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB που άγονται από το M προς τον κύκλο είναι μεταξύ τους ίσα. Ακόμη $MA = M\Gamma$, οπότε είναι και $MB = M\Gamma$.

β) Η διακεντρική ευθεία MO διχοτομεί τη γωνία AMB των εφαπτομένων, δηλαδή $\angle AMO = \angle OMB$.

Όμως $\angle AMO = \angle M\Delta\Gamma$ ως κατακορυφήν, άρα $\angle AMO = \angle M\Delta\Gamma$.

Τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ έχουν:

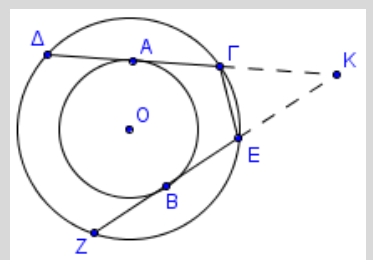
- $OM = M\Delta$ (υπόθεση)
- $MB = M\Gamma$
- $\angle AMO = \angle M\Delta\Gamma$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα

36338. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O,R) εφάπτονται στον κύκλο (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτείνόμενες τέμνονται στο σημείο K, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KEG είναι ισοσκελές.



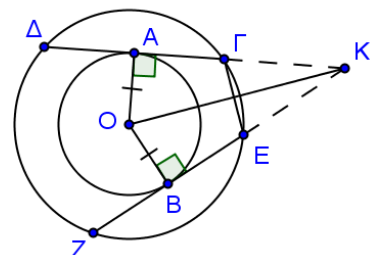
Λύση

α) Έστω OA και OB οι ακτίνες του κύκλου (O, ρ) που καταλήγουν στα σημεία επαφής με τις εφαπτομένες. Τότε $OA \perp \Delta\Gamma$ και $OB \perp ZE$.

Τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$ και EZ στον κύκλο (O,R) και είναι ίσα ($OA = OB = \rho$), άρα και οι χορδές $\Delta\Gamma$ και EZ είναι ίσες.

β) Επειδή τα KA, KB είναι εφαπτόμενα τμήματα από το K προς τον κύκλο (O, ρ), είναι μεταξύ τους ίσα.

Επειδή τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$ και EZ, τα σημεία A και B είναι μέσα



των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες, είναι και $ΑΓ = ΒΕ$.

Είναι $ΚΑ = ΚΒ$ και $ΑΓ = ΒΕ$, άρα και $ΚΑ - ΑΓ = ΚΒ - ΒΕ \Leftrightarrow ΚΓ = ΚΕ$, οπότε το τρίγωνο $ΚΓΕ$ είναι ισοσκελές.

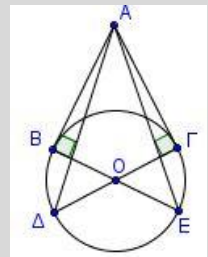
36354. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα $ΑΒ$ και $ΑΓ$.

Τα σημεία $Ε$ και $Δ$ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των $Β$ και $Γ$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΑΓΔ$ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ είναι ίσα.



Λύση

α) Επειδή οι εφαπτομένες ενός κύκλου είναι κάθετες στις ακτίνες στα σημεία επαφής, οι γωνίες $ΑΒΕ$ και $ΑΓΔ$ είναι ορθές.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΑΓΔ$ έχουν:

- 1) $ΑΒ = ΑΓ$ γιατί τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα και
- 2) $ΒΕ = ΓΔ = 2\rho$

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα $ΟΒΔ$ και $ΟΓΕ$ έχουν:

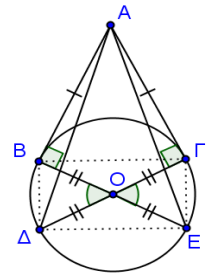
- 1) $ΟΒ = ΟΕ = \rho$,
- 2) $ΟΔ = ΟΓ = \rho$ και
- 3) $ΒΟΔ = ΓΟΕ$ ως κατακορυφήν.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΒΔ = ΓΕ$.

Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:

- 1) $ΑΒ = ΑΓ$
- 2) $ΑΔ = ΑΕ$ γιατί τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΑΓΔ$ είναι ίσα και
- 3) $ΒΔ = ΓΕ$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



Θέμα 4ο

1751. Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $ΡΓΕ$ στα σημεία $Α, Δ$ και $Β$.

α) Να αποδείξετε ότι:

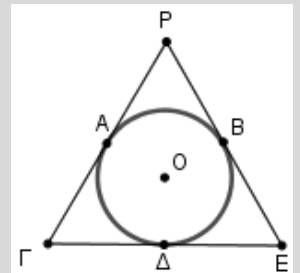
i. $ΡΓ = ΓΔ + ΑΡ$

ii. $ΡΓ - ΓΔ = ΡΕ - ΔΕ$

β) Αν $ΑΓ = ΒΕ$, να αποδείξετε ότι

i. Το τρίγωνο $ΡΓΕ$ είναι ισοσκελές.

ii. Τα σημεία P, O και $Δ$ είναι συνευθειακά.



Λύση

α) i. Τα $ΓΑ, ΓΔ$ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το $Γ$ προς τον κύκλο, οπότε $ΓΑ = ΓΔ$.

Είναι $ΡΓ = ΡΑ + ΑΓ \Leftrightarrow ΡΓ = ΡΑ + ΓΔ$.

ii. Τα EB, ΕΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ε προς τον κύκλο, οπότε $EB = ED$. Όμοια PA, PB εφαπτόμενα τμήματα από το Ρ και ισχύει $PA = PB$.

Όμως $PG = ΓΔ + PA \Leftrightarrow PA = PG - ΓΔ$ και

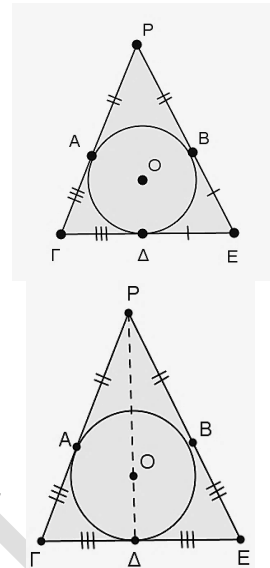
$PB = PE - BE = PE - ΔΕ$, άρα $PG - ΓΔ = PE - ΔΕ$.

β) i. Αν $ΑΓ = BE$, τότε $ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = BE$.

Είναι $PG = ΓΔ + PA$, $PE = PB + ΔΕ$, οπότε $PG = PE$, άρα το τρίγωνο PΓΕ είναι ισοσκελές.

ii. Επειδή $OA = OB = ρ$ και $OA \perp PG$, $OB \perp PB$, το Ο ισαπέχει από τις πλευρές PΓ, PΕ της γωνίας Ρ, οπότε βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας.

Επειδή το τρίγωνο PΓΕ είναι ισοσκελές και το ΡΔ είναι διάμεσος, θα είναι και διχοτόμος της γωνίας Ρ. Άρα τα Ο, Δ ανήκουν στη διχοτόμο της γωνίας Ρ, οπότε τα σημεία Ρ, Ο, Δ είναι συνευθειακά.



1752. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές.

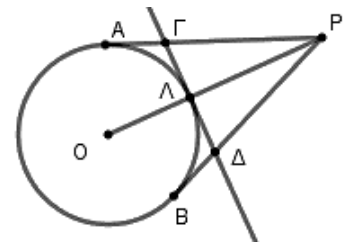
β) $GA = ΔB$.

γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με $PA + PB$.

Λύση

α) Επειδή η ΓΔ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Λ, ισχύει ότι $ΓΔ \perp ΡΟ$. Επειδή η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί την γωνία ΓΡΔ των εφαπτομένων, στο τρίγωνο ΡΓΔ, το ΡΛ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ είναι ίσα και οι πλευρές ΡΓ και ΡΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΡΓΔ είναι επίσης ίσες, ισχύει ότι:
 $PA - ΡΓ = PB - ΡΔ \Leftrightarrow GA = ΔB$



γ) Τα ΓΑ, ΓΛ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Γ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.

Τα ΔΒ, ΔΛ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Δ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.

Αν Π η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ, είναι $\Pi = ΡΓ + ΓΔ + ΡΔ = ΡΓ + ΓΛ + ΛΔ + ΡΔ = ΡΓ + ΓΑ + ΔΒ + ΡΔ = ΡΑ + ΡΒ$

Σχετική θέση δύο κύκλων

Θέμα 2ο

12417. Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R=3$, $r=2$ και $K\Lambda=4$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .

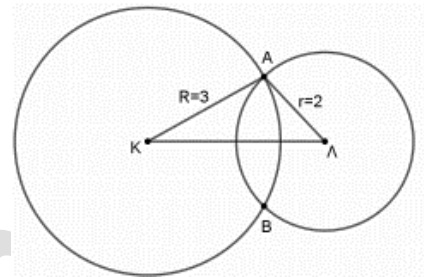
β) $\widehat{K\Lambda} > \widehat{AK}$.

Λύση

α) Είναι $R + r = 5$ και $R - r = 1$.

Επειδή $R - r < K\Lambda < R + r$ οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία A και B .

β) Στο τρίγωνο $K\Lambda A$ είναι $K\Lambda > AK$ και επειδή απέναντι από άνισες πλευρές σε ένα τρίγωνο βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες, ισχύει ότι $\widehat{K\Lambda} > \widehat{AK}$.



13757. Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Έστω $R = 5$ και $r = 2$.

α) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο $K\Lambda$ έχουμε: $K\Lambda = R + r = 5 + 2 = 7$.

β) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε για τη διάκεντρο $K\Lambda$ έχουμε: $K\Lambda = R - r = 5 - 2 = 3$.

γ) Για να είναι ο κύκλος $(K, 2)$ στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$ θα πρέπει $K\Lambda < R - r$, δηλαδή $K\Lambda < 5 - 2$ ή $K\Lambda < 3$.

δ) Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει $R - r < K\Lambda < R + r$, δηλαδή $5 - 2 < K\Lambda < 5 + 2$ ή $3 < K\Lambda < 7$.

13758. Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) $K\Lambda = 13$.

β) $K\Lambda = 2$.

γ) $K\Lambda = 5$.

δ) $K\Lambda = 11$.

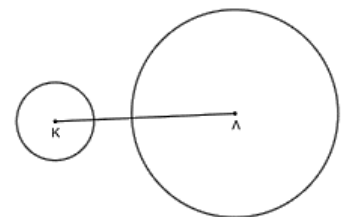
ε) $K\Lambda = 9$.

Λύση

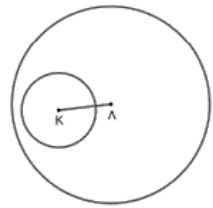
Έστω $R = 8$ και $r = 3$. Υπολογίζουμε τη διαφορά και το άθροισμα των δύο ακτίνων, δηλαδή

$R - r = 8 - 3 = 5$ και $R + r = 8 + 3 = 11$.

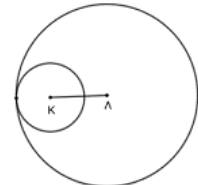
α) Επειδή η διάκεντρος $K\Lambda = 13$ έχει μεγαλύτερο μήκος από το άθροισμα των δύο ακτίνων $R + r = 11$, ο κύκλος $(\Lambda, 8)$ βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου $(K, 3)$



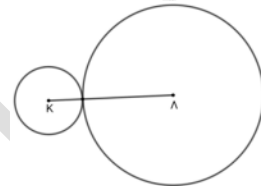
β) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 2$ έχει μικρότερο μήκος από τη διαφορά των δύο ακτίνων $R - ρ = 5$, ο κύκλος $(Κ, 3)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(Λ, 8)$.



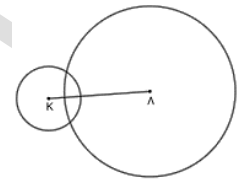
γ) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 5$ έχει ίσο μήκος με τη διαφορά των δύο ακτίνων $R - ρ = 5$, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



δ) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 11$ έχει ίσο μήκος με το άθροισμα των δύο ακτίνων $R + ρ = 11$, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



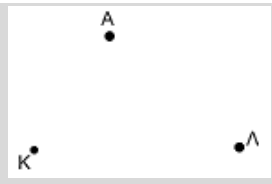
ε) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 9$ έχει μήκος μεταξύ της διαφοράς $R - ρ = 5$ και του αθροίσματος των δύο ακτίνων $R + ρ = 11$, οι κύκλοι τέμνονται.



13835. Τα σημεία A , K και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο A απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

α) Να αποδείξετε ότι $1 < ΚΛ < 9$.

β) Να βρείτε ένα σημείο B του επιπέδου διαφορετικό από το A , που να απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

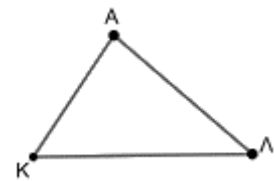


Λύση

α) Τα τρία μη συνευθειακά σημεία A , K και Λ ορίζουν το τρίγωνο $AK\Lambda$.

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι

$$A\Lambda - AK < K\Lambda < A\Lambda + AK \Leftrightarrow 5 - 4 < K\Lambda < 5 + 4 \Leftrightarrow 1 < K\Lambda < 9.$$



β) Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου $(K, 4)$ και του κύκλου $(\Lambda, 5)$.

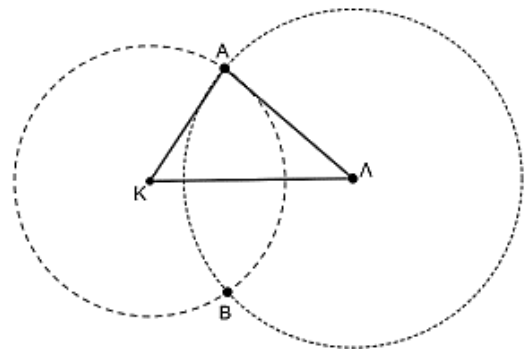
Σχεδιάζουμε δύο κύκλους: ο ένας έχει κέντρο το K και ακτίνα 4 και ο άλλος έχει κέντρο το Λ και ακτίνα 5. Από το α)ερώτημα για τη

διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:

$$A\Lambda - AK < K\Lambda < A\Lambda + AK \Leftrightarrow R - \rho < K\Lambda < R + \rho,$$

όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Λ και ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το K .

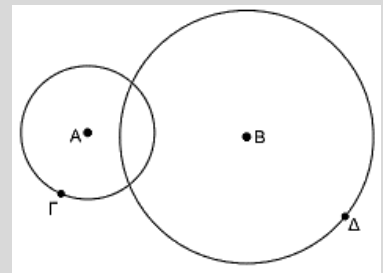
Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το A και το άλλο είναι το B , που είναι και το ζητούμενο σημείο.



13836.α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.

Να αποδείξετε ότι $BD - AG < AB < AG + BD$.

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6 . Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;



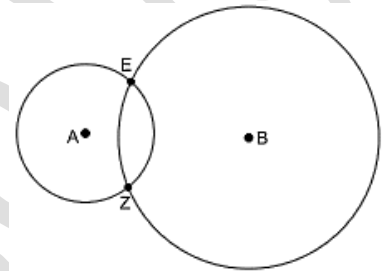
Λύση

α) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το A , R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο B και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η AB και επιπλέον ισχύουν $AG = \rho$ και $BD = R$. Επομένως $BD - AG < AB < BD + AG$.

β) Ο θησαυρός, επειδή απέχει 3 από το A και 5 από το B είναι σε σημείο του κύκλου με κέντρο το A και ακτίνα 3 και σε σημείο του κύκλου με κέντρο το B και ακτίνα 5 . Σχεδιάζουμε δύο κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $\rho = 3$ και $R = 5$. Τότε η $AB = 6$ είναι η διάκεντρος του κύκλου και ισχύει $R - \rho < AB < R + \rho$ γιατί αντικαθιστώντας έχουμε $5 - 3 < 6 < 5 + 3$, που είναι αληθές.

Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία τα E και Z .

Αυτά τα σημεία έχουν την ιδιότητα να απέχουν 3 από το A και 5 από το B , άρα είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.



Θέμα 4ο

13823.α) Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB = 6$.

i. Να αποδείξετε ότι: $BK - AG < AB < BK + AG$.

ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2.

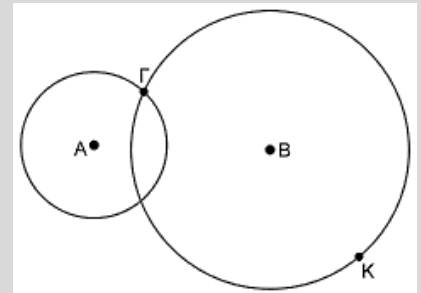
Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B .»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A .»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6 . Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;



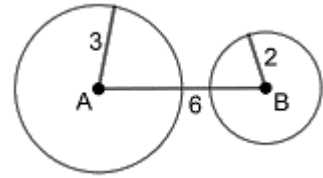
Λύση

α) i. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το A , R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο B και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η AB και επίσης $\rho = AG$ και $R = BK$. Επομένως $BK - AG < AB < BK + AG$.

ii. Το σημείο K έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου (B, R) και όχι του κύκλου (A, ρ) . Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το A και R από το B .

β) Έστω A και B τα δύο σημεία του χάρτη.

Σύμφωνα με την οδηγία το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου A και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου B και ακτίνας 2. Επειδή απέχει 3 από το A και 2 από το B θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει. Όμως η απόσταση των σημείων A και B που είναι η διάκεντρος των κύκλων (A,3) και (B,2) είναι 6, δηλαδή είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου. Συνεπώς η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.



13846. Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $R > \rho$. Επίσης $AB = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$.

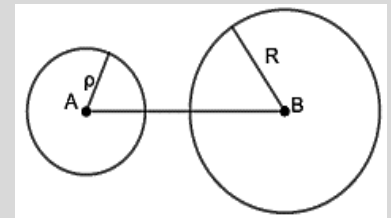
β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες I1 και I2 που περιγράφονται παρακάτω;

I1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».

I2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».

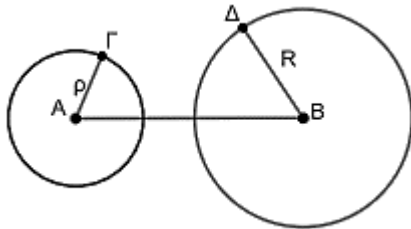
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και είναι ο ένας στο εξωτερικό του άλλου και η διάκεντρός τους είναι το ευθύγραμμο AB. Άρα ισχύει $R + \rho < AB$ ή $R + \rho < 9$.

β) Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο A και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο B και ακτίνα R, όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα $AG = \rho$ και $BD = R$ έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΛΜ. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την ΚΜ.



Ισχύει ότι $LM > KL$, γιατί $R > \rho$. Άρα από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε ότι $LM - KL < KM < LM + KL$ ή $R - \rho < KM < R + \rho$.

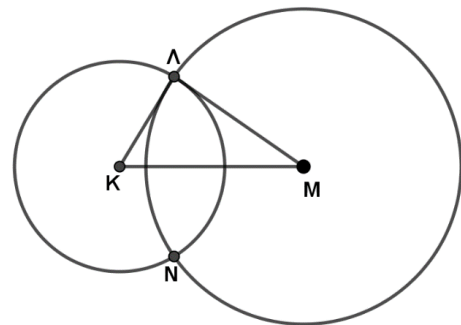
Όμως από το α) έχουμε ότι $R + \rho < 9$. Άρα $KM < 9$.

Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.

γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα I1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα ρ, ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα I2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Μ και ακτίνα R. Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες I1 και I2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.

Όπως έχουμε αποδείξει στο προηγούμενο ερώτημα $R - \rho < KM < R + \rho$ όπου ΚΜ η διάμετρος των δύο κύκλων. Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι οπότε έχουν δύο σημεία τομής.

Άρα δύο σημεία είναι τα ζητούμενα σημεία τα Λ και Ν.



Θέμα 3ο

13702. Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία B και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο M , να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία A , B και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

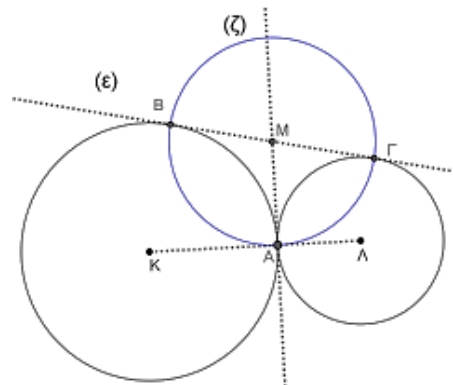
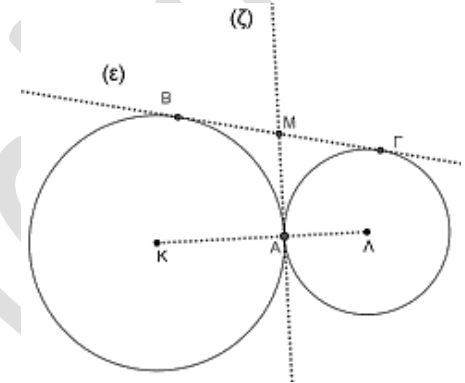
β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο $K\Lambda$ των κύκλων (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) .

Λύση

Έστω οι κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A , (ε) η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα, (ζ) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους A και M το σημείο στο οποίο τέμνει την ευθεία (ε)

α) Το σημείο A είναι σημείο της διακέντρου $K\Lambda$ και τα B, Γ είναι σημεία επαφής της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των δυο κύκλων με αυτούς, οπότε τα τρία σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά. Άρα τα σημεία A, B και Γ θα είναι σημεία ενός μοναδικού κύκλου. Το σημείο M είναι εξωτερικό σημείο των κύκλων (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) ως σημείο τομής των κοινών εφαπτομένων τους από τα δεδομένα. Είναι $MB = MA$ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (K, ρ_1) από το σημείο M . Επίσης είναι $MA = M\Gamma$ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Λ, ρ_2) από το σημείο M . Οπότε θα είναι $MB = MA = M\Gamma (= \kappa)$. Άρα ο κύκλος που ζητείται να κατασκευαστεί θα έχει κέντρο το σημείο M και ακτίνα ίση με κ .

β) Επειδή οι κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο A , η κοινή εφαπτομένη τους (ζ) είναι κάθετη στην ακτίνα KA και κάθετη στην ακτίνα LA αντίστοιχα. Και επειδή το σημείο A είναι σημείο της διακέντρου $K\Lambda$, η εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο A θα είναι κάθετη στη διάκεντρο $K\Lambda$. Η ακτίνα $MA (= \kappa)$ του κύκλου που σχεδιάζεται με κέντρο το M έχει ως φορέα την εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο σημείο επαφής τους A , οπότε η ακτίνα MA θα είναι κάθετη στη διάκεντρο $K\Lambda$. Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ θα εφάπτεται της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο A .

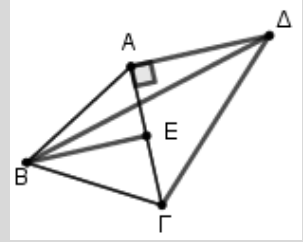


Παραλληλία

Θέμα 2ο

12710. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας AG . Να αποδείξετε ότι:

α) $BE \parallel A\Delta$.
β) οι γωνίες $EB\Delta$ και $A\Delta B$ είναι ίσες.
γ) το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.



Λύση

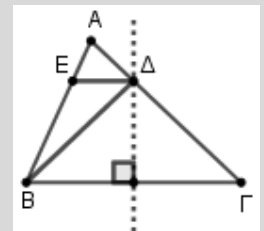
α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος BE είναι και ύψος, δηλαδή η BE είναι κάθετη στην AG . Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A , οπότε η $A\Delta$ είναι κάθετη στην AG . Τα ευθύγραμμα τμήματα BE και $A\Delta$ είναι κάθετα στην AG , οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.

β) Οι γωνίες $EB\Delta$ και $A\Delta B$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων BE και $A\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα είναι ίσες.

γ) Από το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $AB = AG = B\Gamma$ και από το ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε $AG = A\Delta$, οπότε $AB = A\Delta$, επομένως το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.

13534. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$.

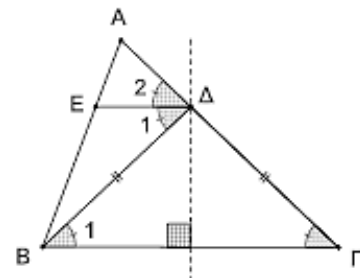


Λύση

α) Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$, άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή $\Delta B = \Delta\Gamma$. Συνεπώς το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

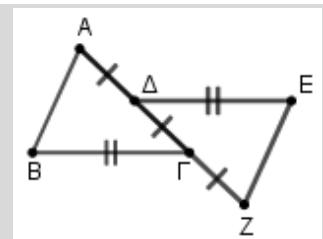
β) Είναι $E_1 = B_1$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Delta$ και $E_2 = \Gamma$ (2) ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.

Όμως $B_1 = \Gamma$ επειδή το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, οπότε από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $E_1 = E_2$, επομένως η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$.



13748. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς AG . Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την AG προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ είναι ίσα.
β) $AB \parallel EZ$.



Λύση

α) Για το τμήμα ΔΖ έχουμε: $\Delta Z = \Delta \Gamma + \Gamma Z = 2\Delta \Gamma$.

Όμως το Δ είναι το μέσο του ΑΓ, άρα $2\Delta \Gamma = \text{ΑΓ}$, οπότε θα είναι $\Delta Z = \text{ΑΓ}$ (1).

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ έχουν:

- $\text{ΒΓ} = \text{ΔΕ}$, από την υπόθεση
- $\text{ΑΓ} = \Delta Z$, από τη σχέση (1)

• $\angle \text{ΑΓΒ} = \angle \text{ΖΔΕ}$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΓ και ΔΕ που τέμνονται από την ΔΓ.

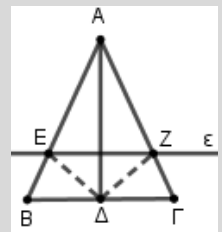
Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΖΕΔ, προκύπτει ότι $\angle \text{ΒΑΓ} = \angle \text{ΕΖΔ}$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΕΔ αντίστοιχα. Όμως, είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΒ και ΕΖ που τέμνονται από την ΑΖ, άρα $\text{ΑΒ} \parallel \text{ΕΖ}$.

34399. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

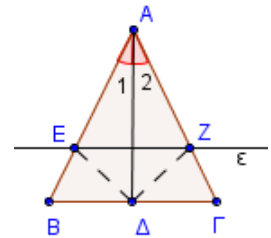
β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.



Λύση

α) Είναι $\angle \text{ΑΕΖ} = \angle \text{Β}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ, ΒΓ

που τέμνονται από την ΑΒ και $\angle \text{ΑΖΕ} = \angle \Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΕΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Όμως $\angle \text{Β} = \angle \Gamma$ αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, άρα $\angle \text{ΑΕΖ} = \angle \text{ΑΖΕ}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΖ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ.



β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ έχουν:

- 1) την πλευρά ΑΔ κοινή
- 2) $\angle \text{Α}_1 = \angle \text{Α}_2$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α και
- 3) $\text{ΑΕ} = \text{ΑΖ}$ επειδή το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΖ.

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

34776. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

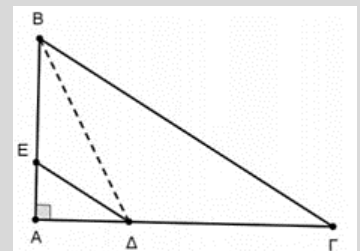
($\hat{\text{Α}} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας ΑΔΒ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\angle \text{ΕΔΒ} = \angle \text{ΔΒΓ}$ και $\angle \text{ΕΔΑ} = \hat{\Gamma}$.

ii) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\angle \text{ΑΔΒ} = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία Γ.



Λύση

α) i) Οι γωνίες $\angle \text{ΕΔΒ}$, $\angle \text{ΔΒΓ}$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΒ, οπότε είναι ίσες. Οι γωνίες $\angle \text{ΕΔΑ}$, $\hat{\Gamma}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ, οπότε είναι ίσες.

ii) Επειδή ΔΕ διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ είναι $\angle EDA = \angle EDB$, τότε λόγω του προηγούμενου σκέλους είναι και $\angle AB\Gamma = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Είναι $\hat{\Gamma} = \angle EDA = \frac{\angle ADB}{2} = 30^\circ$

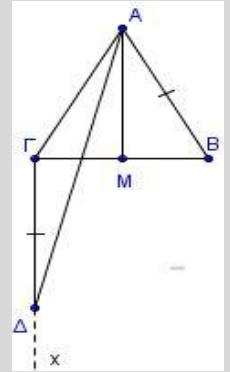
34777. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma x \perp BG$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\angle \Delta\hat{A}\Gamma$ είναι ίση με τη $\angle \Gamma\hat{A}A$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\Gamma\Delta \parallel AM$

ii) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.



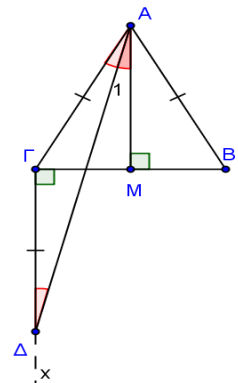
Λύση

α) Είναι $\Gamma\Delta = AB$ και $AB = AG$, άρα $\Gamma\Delta = AG$, οπότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, άρα έχει και $\angle A\Gamma = \angle \Delta A$.

β) i) Η ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και ύψος του τριγώνου.

Είναι $\Gamma\Delta \perp BG$ και $AM \perp BG$, άρα $\Gamma\Delta \parallel AM$.

ii) Είναι $\angle \Gamma\Delta A = A_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Gamma\Delta$, AM που τέμνονται από την ΓB και $\angle A\Gamma = \angle \Delta A$, άρα είναι και $\angle A\Gamma = A_1$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.



34779. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = AG$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

β) $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:

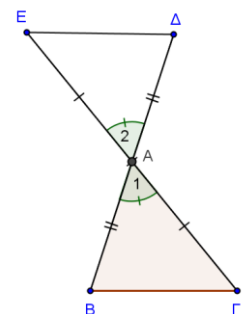
1) $A\Delta = AB$

2) $AE = AG$

3) $A_1 = A_2$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα, έχουμε και $\angle E = \angle \Gamma$. Οι γωνίες αυτές όμως είναι εντός εναλλάξ των ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΓ, άρα οι ΔΕ, ΒΓ είναι παράλληλες.

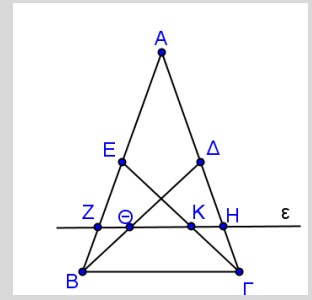


4ο Θέμα

1744. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τις διαμέσους BD και GE . Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους BD και GE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $BZ = \Gamma H$.
 β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.
 γ) $ZK = H\Theta$.



Λύση

α) Είναι $AZH = AB\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\varepsilon, B\Gamma$ που τέμνονται από την AB . Όμοια $AHZ = A\Gamma B$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\varepsilon, B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Όμως $AB\Gamma = A\Gamma B$ γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές άρα και $AHZ = AZH$, οπότε το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές και $AZ = AH$. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $AZ = AH$, είναι και $AB - AZ = A\Gamma - AH \Leftrightarrow BZ = \Gamma H$.

β) Αρχικά θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ για να βρούμε στοιχεία που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Αυτά έχουν:

- 1) $AB = A\Gamma$
- 2) $AE = A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ και
- 3) τη γωνία A κοινή

Λόγω του κριτηρίου ισότητας Π-Γ-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AB\Delta = A\Gamma E$.

Τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ έχουν:

- 1) $BZ = \Gamma H$
- 2) $AB\Delta = A\Gamma E$ και
- 3) $BZ\Theta = KH\Gamma$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών AHZ και AZH .

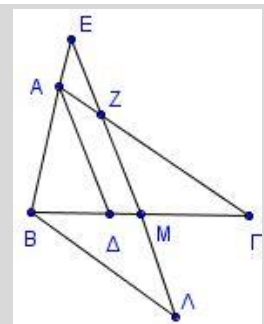
Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα..

γ) Είναι $ZK = Z\Theta + \Theta K = KH + \Theta K = H\Theta$. ($Z\Theta = HK$ από την ισότητα των τριγώνων $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$)

1818. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία ε παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z , την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή.
β) $ΒΛ = ΓΖ$.
γ) $ΑΕ = ΑΓ - ΒΛ$.



Λύση

α) Είναι $\angle E = \angle B A \Delta$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A \Delta, E M$ που τέμνονται από την $B E$ και $\angle Z A = \angle \Delta A \Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A \Delta, E M$ που τέμνονται από την $A \Gamma$. Επειδή

$BA\Delta = \Delta A\Gamma$ γιατί η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A , είναι και $E = EZA$, οπότε το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

Είναι $EZA = B\Lambda E$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Gamma, B\Lambda$ που τέμνονται από την $E\Lambda$. Άρα $E = B\Lambda E$ και το τρίγωνο $B\Lambda E$ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα BMA και ZMG έχουν:

1) $BM = MG$

2) $ZMG = BMA$ ως κατακορυφήν και

3) $\Lambda BM = ZGM$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma, B\Lambda$ που τέμνονται από την BG .

Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ, τα τρίγωνα BMA και ZMG είναι ίσα. Άρα $BA = GZ$.

γ) Είναι $AE = AZ = A\Gamma - GZ = A\Gamma - BA$

13699. Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Έστω ότι μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ϵ) σε σημείο M .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες KB και ΛM τέμνονται σε σημείο, έστω Δ .

ii. το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

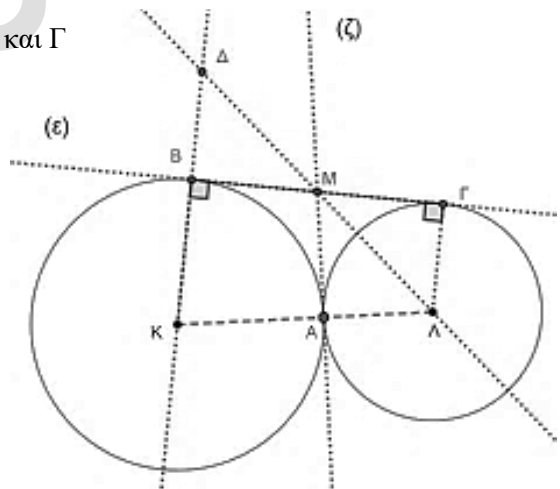
α) i. Επειδή $KB, \Lambda\Gamma$ ακτίνες κύκλων στα σημεία επαφής B και Γ με την (ϵ) , είναι $KB \perp (\epsilon)$ και $\Lambda\Gamma \perp (\epsilon)$. Άρα $KB \parallel \Lambda\Gamma$.

Η ΛM τέμνει τη $\Lambda\Gamma$ στο Λ , επομένως θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτήν οπότε και την ΛM .

ii. Η διακεντρική ευθεία MA διχοτομεί τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής A, Γ , δηλαδή $\hat{A\Lambda\Gamma} = \hat{M\Lambda\Gamma}$ (1).

Επειδή $K\Delta \parallel \Lambda\Gamma$ είναι $\hat{K\Delta\Lambda} = \hat{M\Lambda\Gamma}$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $K\Delta, \Lambda\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Lambda$.

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{A\Lambda\Gamma} = \hat{K\Delta\Lambda}$, οπότε το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.



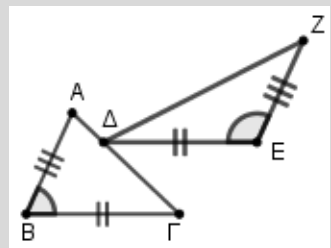
γ) Το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ορθογώνιο όταν $\hat{K} = 90^\circ$. Τότε το $BK\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνιο οπότε οι απέναντι πλευρές του είναι ίσε, δηλαδή $KB = \Lambda\Gamma \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$.

13752. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ και από το σημείο E φέρουμε τμήμα $E\hat{H}$ ίσο και παράλληλο με την πλευρά AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $\hat{\Delta E Z}$ και $\hat{A B \Gamma}$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.

2. Οπότε $\Delta E Z = A B \Gamma$.



3. Τα τρίγωνα ΔΕΗ και ΑΒΓ είναι ίσα.

4. Το τμήμα ΔΗ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ.

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε

τα τμήματα ΑΓ και ΔΗ για τα διάφορα είδη της γωνίας Β και να

δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση

α) 1. Σ 2. Λ 3. Λ 4. Λ

β) Η απάντηση στον συλλογισμό 2. είναι λάθος. Προεκτείνουμε την ΖΕ και τη ΒΓ και έστω Η το σημείο τομής τους. Τότε:

$\angle ZED = \angle EHG$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ΔΕ και ΒΗ που τέμνονται από την ΖΗ.

$\angle EHG + \angle ABG = 180^\circ$ γιατί είναι γωνίες εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΖΗ που

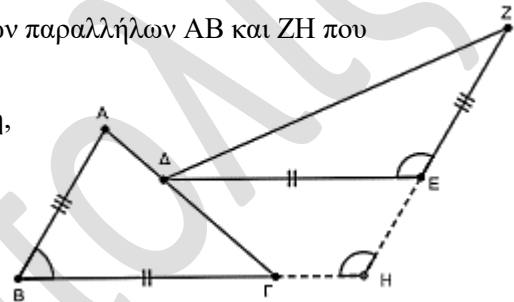
τέμνονται από την ΒΗ. Άρα $\angle ZED + \angle ABG = 180^\circ$, δηλαδή είναι

παραπληρωματικές γωνίες και αφού $B < 90^\circ$ από την υπόθεση,

τότε $\angle ZED > 90^\circ$.

Άρα δεν είναι ίσες.

Η απάντηση στο συλλογισμό 3. είναι λάθος, γιατί τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία, τις ΔΕ, ΒΓ και τις ΖΕ, ΑΒ, αλλά οι περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών δεν είναι ίσες αλλά παραπληρωματικές, όπως δικαιολογήθηκε παραπάνω.



γ) Οι γωνίες $\angle ZED$ και $\angle ABG$ είναι παραπληρωματικές.

• Αν $\angle ABG < 90^\circ$, τότε $\angle ZED > 90^\circ$ και τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες. Οπότε, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $\angle ABG < \angle ZED$ τότε $AG < DZ$.

• Αν $\angle ABG > 90^\circ$, τότε $\angle ZED < 90^\circ$ και τα τρίγωνα όπως προηγουμένως θα έχουν τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $\angle ABG > \angle ZED$ τότε $AG > DZ$.

• Αν $\angle ABG = 90^\circ$, τότε $\angle ZED = 90^\circ$ και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε θα είναι ίσα και συνεπώς θα έχουν ίσες και τις υποτείνουσες τους. Δηλαδή, αφού $\angle ABG = \angle ZED$ τότε $AG = DZ$. Άρα η μόνη περίπτωση στην οποία τα τμήμα ΔΖ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ είναι όταν οι γωνίες ΔΕΖ και ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές και ίσες, δηλαδή ορθές.

13822. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).

α) Αν η γωνία $\hat{BAG}$ είναι μεγαλύτερη από την $\hat{AB\psi}$:

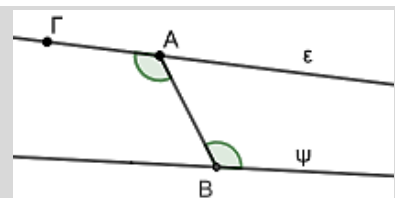
i. Να αποδείξετε ότι $\hat{BA\epsilon} + \hat{AB\psi} < 180^\circ$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται.

Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

γ) Αν ισχύει $\hat{BAG} < \hat{AB\psi}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;



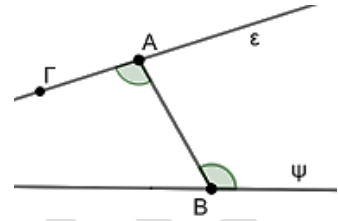
Λύση

α) i. Είναι $BA\epsilon + BA\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma = 180^\circ - BA\epsilon$.

Είναι $BA\Gamma > AB\psi \Leftrightarrow 180^\circ - BA\epsilon > AB\psi \Leftrightarrow BA\epsilon + AB\psi < 180^\circ$

ii. Οι γωνίες $BA\epsilon$ και $AB\psi$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ϵ και ψ που τέμνονται από την AB και επειδή $BA\epsilon + AB\psi < 180^\circ$ οι ϵ και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την AB προς το μέρος που βρίσκεται η $AB\psi$.

β) Στο α) αποδείξαμε ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από άλλη ευθεία σχηματίζουν εντός και εναλλάξ γωνίες που δεν είναι ίσες, τότε οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα προς το μέρος που βρίσκεται η μικρότερη από τις δύο εντός και εναλλάξ γωνίες.



γ) Οι γωνίες $BA\Gamma$ και $AB\psi$ είναι εντός και εναλλάξ των ευθειών ϵ και ψ με τέμνουσα την AB . Όμως δίνεται ότι $BA\Gamma < AB\psi$.

Εφαρμόζοντας την πρόταση που διατυπώσαμε στο β) για τις γωνίες

$BA\Gamma$ και $AB\psi$, οι ευθείες ϵ και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την AB προς το μέρος της $BA\Gamma$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

13843. Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες.

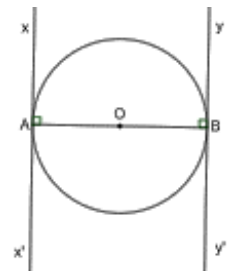
β) οι διχοτόμοι των γωνιών BAX και ABY τέμνονται σε σημείο M .

γ) το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας BAX τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ABY τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$.

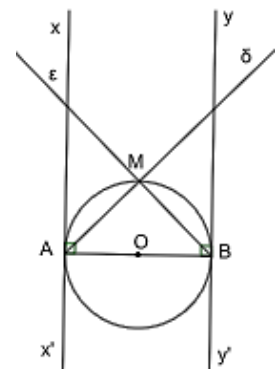
Λύση

13843. α) Οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα της διαμέτρου του AB , επομένως, είναι κάθετες στην AB και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.



β) Έστω $A\delta$ και Be οι διχοτόμοι των γωνιών BAX και ABY αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο AB . Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180° , οπότε η $A\delta$ και η Be θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας AB που βρίσκονται οι γωνίες.

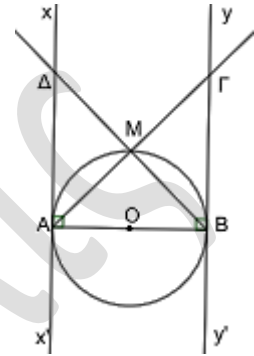
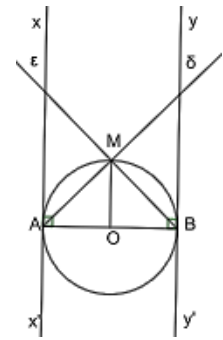
Είναι $BA\delta + AB\epsilon = \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ < 180^\circ$, άρα οι $A\delta$ και Be τέμνονται σε σημείο M του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.



γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε $BAM = BA\delta = 45^\circ$ και $ABM = AB\epsilon = 45^\circ$.
Επομένως, το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$. Άρα, το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο της διαμέτρου AB . Το τρίγωνο AOM είναι ορθογώνιο διότι MO μεσοκάθετος της AB , οπότε $\angle AOM = 90^\circ$.

Στο τρίγωνο AOM έχουμε $\angle OAM = 45^\circ$, άρα $\angle OMA = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Το τρίγωνο AOM είναι ισοσκελές με $OM = OA = R$. Δηλαδή, το σημείο M είναι σημείο του κύκλου (O, R) και επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο της AB συμπεραίνουμε ότι το σημείο είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .



δ) Τα τρίγωνα $AM\Delta$ και $BM\Gamma$ έχουν :

- $AM = BM$, από το ερώτημα (γ)
- $\hat{A}M\Delta = \hat{B}M\Gamma$, ως κατακορυφήν
- $\angle M\Delta A = \angle M\Gamma B = 45^\circ$

Από το κριτήριο ισότητας Γ -Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα. Απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle M\Delta A$ και $\angle M\Gamma B$ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες πλευρές, δηλαδή $M\Delta = M\Gamma$.

34335. Δίνεται κύκλος (O, R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax . Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

α) το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R)

β) η διχοτόμος της γωνίας BMx είναι κάθετη στη MO ,

γ) το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας BMx .

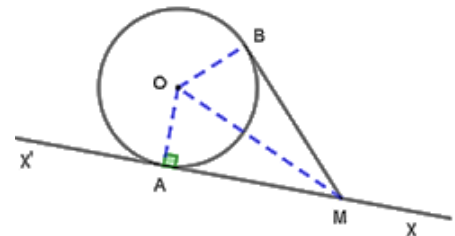
Λύση

α) Τα τρίγωνα MOB και MOA έχουν:

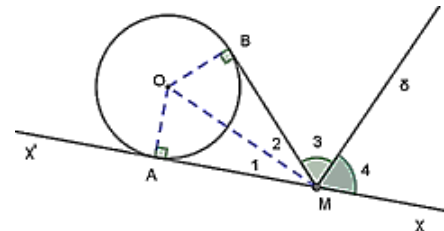
- 1) MO , κοινή πλευρά
- 2) $OB = OA$, ακτίνες του κύκλου (O, R) , $MB = MA$, υπόθεση

Επομένως, τα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς (Π-Π-Π), οπότε είναι ίσα. Επομένως $\angle O\hat{A}M = \angle O\hat{B}M$ και

επειδή $\angle O\hat{A}M = 90^\circ$, είναι και $\angle O\hat{B}M = 90^\circ$, άρα το MB είναι εφαπτόμενο του κύκλου.

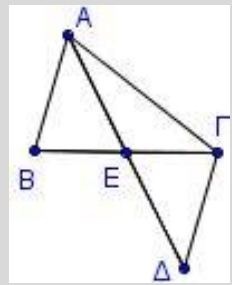


β) Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία OM διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}MB$ των εφαπτομένων. Ακόμη γνωρίζουμε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες. Επειδή οι γωνίες $\hat{A}MB$ και $\hat{B}Mx$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές, οι διχοτόμοι τους OM , $M\delta$ είναι κάθετες.



γ) Αν η OB δεν έτεμνε την $M\delta$ τότε θα ήταν παράλληλη σε αυτήν. Τότε οι γωνίες $\angle O\hat{B}M = 90^\circ$ και $\hat{M}_3$ θα ήταν εντός εναλλάξ, οπότε ίσες. Δηλαδή $\hat{M}_3 = 90^\circ$, οπότε $\hat{B}Mx = 180^\circ$ που είναι άτοπο. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας BMx .

37166. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.



α) Να αποδείξετε ότι:

- i.** η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.
- ii.** αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.
- iii.** τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ.

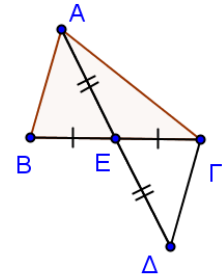
β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΕΔ έχουν:

- 1) $ΑΕ = ΕΔ$
- 2) $ΒΕ = ΕΓ$ και
- 3) $ΑΕΒ = ΓΕΔ$ ως κατακορυφήν.

Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $ΑΒ = ΓΔ$.



ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΕΔ είναι ίσα και οι γωνίες ΑΒΕ και ΕΓΔ είναι ίσες. Όμως οι γωνίες αυτές είναι και εντός εναλλάξ των ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.

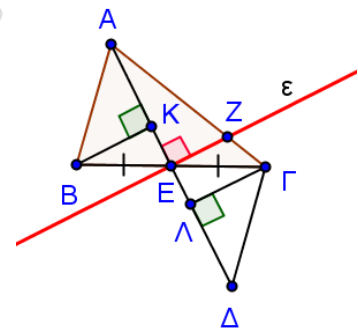
iii. Έστω ΒΚ, ΓΛ οι αποστάσεις των Β, Γ από την ΑΔ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΚ και ΓΛΕ έχουν:

- 1) $ΒΕ = ΕΓ$ και
- 2) $ΑΕΒ = ΓΕΔ$ ως κατακορυφήν,

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $ΒΚ = ΓΛ$.

β) Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο ισαπέχει από δύο άλλα όταν βρίσκεται στη μεσοκάθετο του τμήματος που ορίζουν τα σημεία αυτά. Για το λόγο αυτό θεωρούμε τη μεσοκάθετο (ε) του ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Το Ζ είναι το ζητούμενο σημείο.

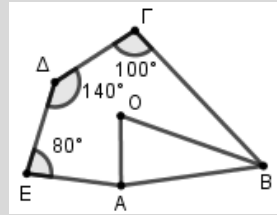


Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Θέμα 2ο

12640. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

- α) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.
 β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



Λύση

α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές είναι $2 \cdot n - 4$ ορθές. Έτσι για το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$A + B + \Gamma + \Delta + E = (2 \cdot 5 - 4)90^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow$$

$$A + B + 100^\circ + 140^\circ + 80^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow A + B = 540^\circ - 320^\circ = 220^\circ$$

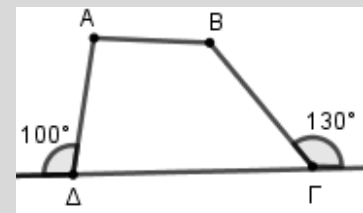
β) Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι

$$AOB + OAB + OBA = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A+B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$AOB + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AOB = 70^\circ$$

12644. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

- α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.
 β) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.
 γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



Λύση

α) Είναι $\Gamma = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ και $\Delta = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

β) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές είναι $2 \cdot n - 4$ ορθές. Έτσι για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$A + B + \Gamma + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow A + B + 50^\circ + 70^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow A + B = 240^\circ$$

γ) Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι

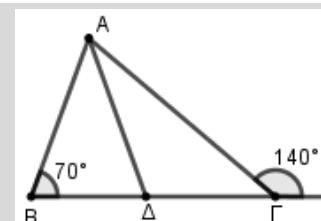
$$AOB + OAB + OBA = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A+B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$AOB + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AOB = 60^\circ$$

12704. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}} = 140^\circ$.

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε $AD = AB$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 40^\circ$.
 β) $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 110^\circ$.
 γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Επειδή $AD = AB$ το τρίγωνο ABD είναι ισοσκελές, οπότε $\angle ADB = \angle B = 70^\circ$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABD έχουμε:

$$\angle BAD + \angle ADB + \angle B = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

β) Είναι $\angle A\Delta\Gamma + \angle ADB = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A\Delta\Gamma = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

γ) Είναι $\angle A\Gamma B + \angle \Gamma_{\text{εξωτ}} = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A\Gamma B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\angle A + \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A + 70^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

Επειδή $\angle A = \angle B = 70^\circ$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

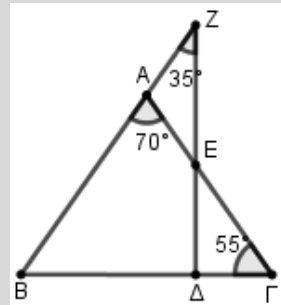
12707. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 55^\circ$.

Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το σημείο A και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Z ώστε $\angle B\hat{Z}\Delta = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$. Η $Z\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) $\angle Z\Delta B = 90^\circ$.

γ) το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

**Λύση**

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\angle A + \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \angle B + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

Επειδή $\angle B = \angle \Gamma$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ZB\Delta$ έχουμε:

$$\angle Z + \angle Z\Delta B + \angle B = 180^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + \angle Z\Delta B + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle Z\Delta B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

γ) Είναι $\angle A + \angle A_{\text{εξ}} = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A_{\text{εξ}} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

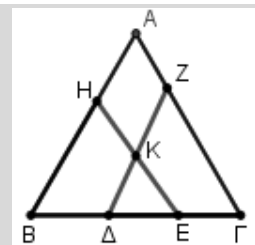
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZE έχουμε:

$\angle A_{\text{εξ}} + \angle Z + \angle ZEA = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 35^\circ + \angle ZEA = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ZEA = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$ Επειδή $\angle Z = \angle ZEA$ το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

12708. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $B\Gamma$ και $ΓΑ$ θεωρούμε σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε $BE = \Gamma Z$. Στις πλευρές AB και $ΓB$ θεωρούμε σημεία H και Δ αντίστοιχα ώστε $BH = \Gamma\Delta$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔZ και EH τέμνονται στο σημείο K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EH = \Delta Z$ και $\angle B\hat{H}E = \angle \Gamma\hat{\Delta}Z$.

β) τα τρίγωνα BEH και $KE\Delta$ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.

**Λύση**

α) Τα τρίγωνα BEH και $\Gamma Z\Delta$ έχουν:

- $BE = \Gamma Z$, από την υπόθεση
- $BH = \Gamma\Delta$, από την υπόθεση

• $B = \Gamma = 60^\circ$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Από το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως, $EH = Z\Delta$ και απέναντι από τις ίσες πλευρές $BE, \Gamma Z$ βρίσκονται αντίστοιχα οι ίσες γωνίες BHE και $\Gamma\Delta Z$.

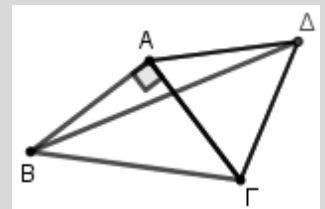
β) Από την ισότητα των τριγώνων BEH και $\Gamma Z\Delta$ προκύπτει ότι απέναντι από τις ίσες πλευρές BE και ΓZ βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $H = \Delta$. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι τα τρίγωνα $KE\Delta$ και BEH έχουν τη γωνία E κοινή και $H = \Delta$, επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή, $\Delta KE = B$.

12709. Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $AB\Delta$.



Λύση

α) Επειδή $AB = A\Gamma$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, οπότε $B = \Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 45^\circ = \Gamma$$

β) Επειδή το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $A\Delta = A\Gamma$. Όμως $AB = A\Gamma$, άρα $AB = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Delta$.

γ) Επειδή το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $\Gamma A\Delta = 60^\circ$, οπότε $B A\Delta = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Επειδή το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Delta$, ισχύει ότι $AB\Delta = A\Delta B$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Delta$ έχουμε:

$$AB\Delta + A\Delta B + B A\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 2AB\Delta + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2AB\Delta = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Leftrightarrow AB\Delta = 15^\circ$$

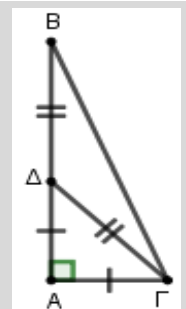
13442. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Στην πλευρά του AB θεωρούμε σημείο Δ ώστε

$B\Delta = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A}\Delta\Gamma = 45^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.



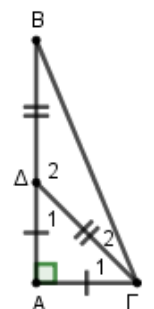
Λύση

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι και ισοσκελές οπότε $\Delta_1 = \Gamma_1$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta_1 + \Gamma_1 + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 45^\circ, \text{ άρα } \hat{A}\Delta\Gamma = 45^\circ.$$

β) Επειδή $B\Delta = \Delta\Gamma$, το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $B = \Gamma_2$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του.

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ οπότε ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $\Delta_1 = B + \Gamma_2 \Leftrightarrow 45^\circ = 2B \Leftrightarrow B = 22,5^\circ$



13443. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

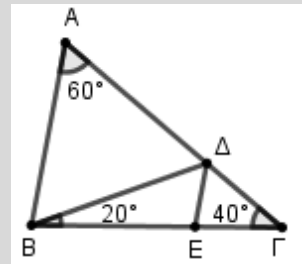
Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\Gamma B\Delta = 20^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

β) Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

i. $B\hat{\Delta}E = 60^\circ$.

ii. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.



Λύση

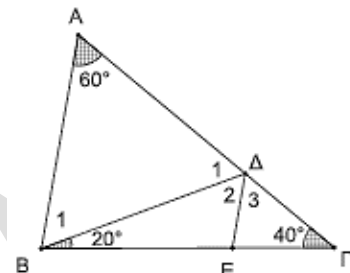
α) Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή

$$\Delta_1 = \Gamma B\Delta + \Gamma = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ.$$

Το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει δύο γωνίες του ίσες με 60° , οπότε και η τρίτη του γωνία, η B_1 , θα είναι ίση με 60° , οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

β) i. Είναι $\Delta_2 = B_1 = 60^\circ$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την $B\Delta$.

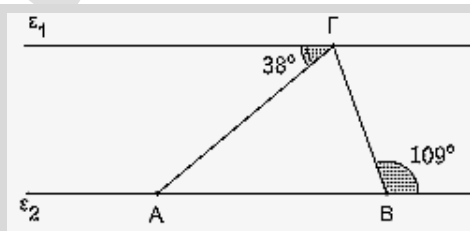
ii. Είναι $\Delta_3 = A = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Άρα $\Delta_2 = \Delta_3 = 60^\circ$, οπότε η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.



13535. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ϵ_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ_2 που ορίζεται από τις κορυφές του A και B . Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.



Λύση

α) Είναι $A = 38^\circ$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ϵ_1, ϵ_2 που τέμνονται από την $A\Gamma$.

$$\text{Είναι } B + 109^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 38^\circ + 71^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$$

β) Επειδή $B = \Gamma = 71^\circ$ το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις AB και $A\Gamma$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.

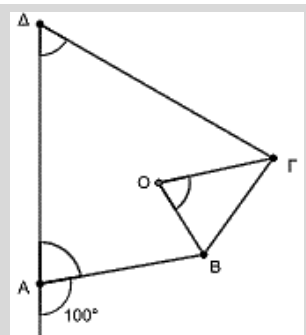
13619. Θεωρούμε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος με

$$\hat{A}_{εξ} = 100^\circ \text{ και } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ.$$

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο O , τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $B\hat{O}\Gamma = 70^\circ$.



Λύση

α) Είναι $A_{εξ} + A = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + A = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$$A + B + \Gamma + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 220^\circ + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow \Delta = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΓΟ έχουμε:

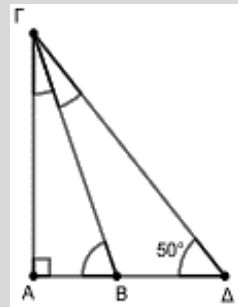
$$BO\Gamma + OBG + OGB = 180^\circ \Leftrightarrow BO\Gamma + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow BO\Gamma + \frac{B+\Gamma}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow BO\Gamma + \frac{220^\circ}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$BO\Gamma + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow BO\Gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

13654. Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{AB\Gamma} - \hat{A\Gamma B} = 50^\circ$ και $\hat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 50^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $\hat{AB\Gamma}$ και $\hat{A\Gamma B}$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\hat{\Delta}\Gamma}$.



Λύση

α) Είναι $\hat{AB\Gamma} - \hat{A\Gamma B} = 50^\circ \Leftrightarrow \hat{AB\Gamma} = \hat{A\Gamma B} + 50^\circ$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ

$$\text{έχουμε: } A + \hat{AB\Gamma} + \hat{A\Gamma B} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{A\Gamma B} + 50^\circ + \hat{A\Gamma B} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\hat{A\Gamma B} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Gamma B} = 20^\circ$$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $\hat{AB\Gamma} = \hat{A\Gamma B} + 50^\circ = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$

β) Η γωνία ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΔ, οπότε

$$\hat{AB\Gamma} = \hat{B\Gamma\Delta} + \Delta \Leftrightarrow 70^\circ = \hat{B\Gamma\Delta} + 50^\circ \Leftrightarrow \hat{B\Gamma\Delta} = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$$

Επειδή $\hat{B\Gamma\Delta} = \hat{A\Gamma B}$, η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\hat{\Delta}\Gamma}$.

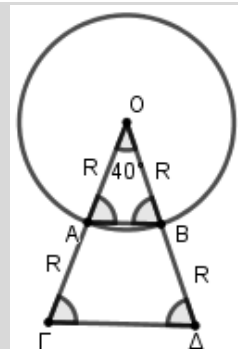
13687. Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία

$\hat{AOB} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $\hat{A\Gamma} = \hat{OA}$ και $\hat{BD} = \hat{OB}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{O\hat{A}B} = \hat{O\hat{B}A} = 70^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{O\hat{\Gamma}\Delta}$ και $\hat{O\hat{\Delta}\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.



Λύση

α) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές ΟΑ και ΟΒ είναι ίσες με την ακτίνα R. Επομένως, οι γωνίες ΟΑΒ και ΟΒΑ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ. Στο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$$O + \hat{OAB} + \hat{OBA} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{OAB} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{OAB} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{OAB} = 70^\circ = \hat{OBA}$$

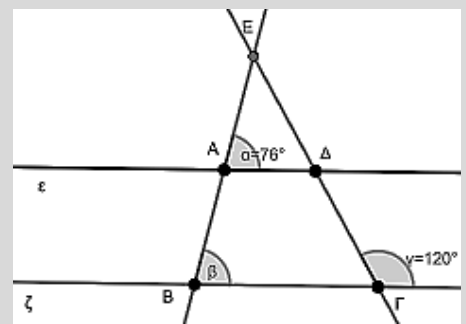
β) Τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ είναι ίσα ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού $\hat{O\Gamma} = \hat{OA} + \hat{A\Gamma} = 2R$ και $\hat{O\Delta} = \hat{OB} + \hat{B\Delta} = 2R$. Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ. Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

$$O + \hat{O\Gamma\Delta} + \hat{O\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{O\Gamma\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{O\Gamma\Delta} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{O\Gamma\Delta} = 70^\circ = \hat{O\Delta\Gamma}.$$

γ) Οι ΑΒ και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ΟΑΒ και ΟΓΔ ίσες. Επομένως, ΑΒ//ΓΔ.

13741. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε :

- α) Τη γωνία $\hat{\beta}$.
 β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.
 γ) Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ.



Λύση

α) Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε και ζ που τέμνονται από την ευθεία ΑΒ. Οπότε $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 76^\circ$.

β) Η γωνία Γ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\gamma} = 120^\circ$, έτσι

$$\Gamma = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Οι γωνίες Γ και Δ του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ε και ζ που τέμνονται από τη ΓΔ. Άρα είναι παραπληρωματικές, οπότε $\Gamma + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Η γωνία Α του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\alpha} = 76^\circ$.

$$\text{Έτσι } A + \hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow A + 76^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$$

γ) Στο τρίγωνο ΕΑΔ έχουμε ήδη γνωστή τη γωνία $\hat{\alpha} = 76^\circ$. Επιπλέον η γωνία ΑΔΕ του τριγώνου είναι παραπληρωματική της γωνίας Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ οπότε

$$A\Delta E + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta E = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

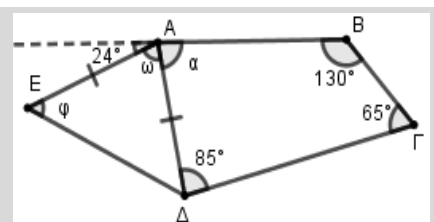
Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ είναι 180° , οπότε

$$A\Delta E + \hat{\alpha} + E = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 76^\circ + E = 180^\circ \Leftrightarrow E = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$$

13749. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αχ είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α.

Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$ β) Τη γωνία $\hat{\omega}$ γ) Τη γωνία $\hat{\phi}$.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$$\hat{\alpha} + 85^\circ + 65^\circ + 130^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$$

β) Είναι $\hat{\alpha} + \hat{\omega} + 24^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + \hat{\omega} + 24^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$.

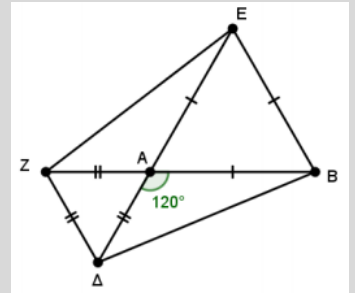
γ) Η διαγώνιος ΑΔ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ, άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΔ. Η γωνία $\hat{\phi}$ είναι ίση με τη γωνία ΑΔΕ, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ, του οποίου η γωνία της κορυφής είναι η $\hat{\omega} = 76^\circ$ από το β) ερώτημα.

$$\text{Επομένως } \hat{\phi} = \frac{180^\circ - \hat{\omega}}{2} = \frac{180^\circ - 76^\circ}{2} = \frac{104^\circ}{2} = 52^\circ.$$

14884. Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ είναι ίσα.
β) Το τμήμα ΔZ είναι παράλληλο στο BE .



Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα $Z\Delta\Delta$ και AEB είναι ισόπλευρα, είναι

$$Z\Delta\Delta = \Delta Z\Delta = \Delta\Delta A = BAE = ABE = BEA = 60^\circ.$$

Επειδή $\Delta AB + BAE = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά. Επειδή

$$\Delta AB + \Delta AZ = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \text{ τα σημεία } Z, A, B \text{ είναι συνευθειακά.}$$

Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ έχουν:

- $AZ = AB$ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $AZ\Delta$
- $AE = AB$ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου AEB
- $ZAE = \Delta AB$ ως κατακορυφήν

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $AB\Delta$ και ZAE είναι ίσα.

β) Είναι $\Delta Z\Delta = ABE = 60^\circ$, όμως οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των $\Delta Z, BE$ που τέμνονται από την ZB , οπότε οι ευθείες $Z\Delta$ και BE είναι παράλληλες.

34313. Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB ,

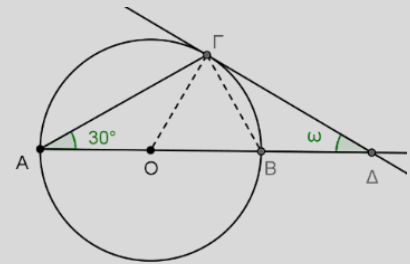
και χορδή του AG τέτοια ώστε $\hat{BAG} = 30^\circ$.

Στο σημείο Γ του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) σε σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του $\hat{\Gamma O\Delta}$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $O\Delta = 2R$.



Λύση

α) Επειδή η OG είναι ακτίνα στο σημείο επαφής Γ , είναι $OG \perp \Gamma\Delta$, οπότε $\hat{O\Gamma\Delta} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Επειδή οι OA και OG είναι ακτίνες του κύκλου, το τρίγωνο OAG είναι ισοσκελές με βάση την AG , οπότε $\hat{A\Gamma O} = \hat{A} = 30^\circ$. Η γωνία $\hat{\Gamma O\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο OAG , οπότε $\hat{\Gamma O\Delta} = \hat{A\Gamma O} + \hat{A} = 60^\circ$.

β) Είναι $\hat{A\Gamma\Delta} = \hat{A\Gamma O} + \hat{O\Gamma\Delta} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$ έχουμε: $\hat{A} + \hat{A\Gamma\Delta} + \hat{\omega} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 120^\circ + \hat{\omega} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

γ) Τα OG, OB είναι ακτίνες του κύκλου, οπότε το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Επειδή επιπλέον έχει $\hat{\Gamma O\Delta} = 60^\circ$, είναι ισόπλευρο, οπότε $B\Gamma = R$. Είναι $\hat{O\Gamma B} = 60^\circ$ και $\hat{B\Gamma\Delta} = 90^\circ - \hat{O\Gamma B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Επειδή $\hat{B\Gamma\Delta} = \hat{\omega}$, το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $\Gamma\Delta$, άρα $B\Delta = B\Gamma = R$. Είναι $O\Delta = OB + B\Delta = R + R = 2R$.

34397. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = AB$.

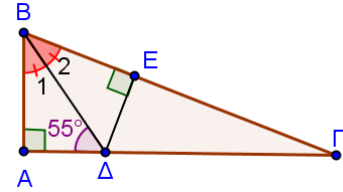
β) Αν επιπλέον $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta E$ έχουν:

1) τη πλευρά $B\Delta$ κοινή και

2) $B_1 = B_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας B , άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BE = AB$.



β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Delta$ έχουμε:

$$B\Delta A + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow B_1 = 35^\circ = B_2 \Leftrightarrow \frac{B}{2} = 35^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 20^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $\Gamma\Delta E$, έχουμε:

$$\Gamma\Delta E + \hat{E} = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\Delta E = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ. \text{ Τέλος } \hat{E} = 90^\circ.$$

34413. Ένας μαθητής της A' Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $\chi O\psi$. Στη συνέχεια με κέντρο τη κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές $O\chi$ και $O\psi$ της γωνίας στα σημεία A και B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

Λύση

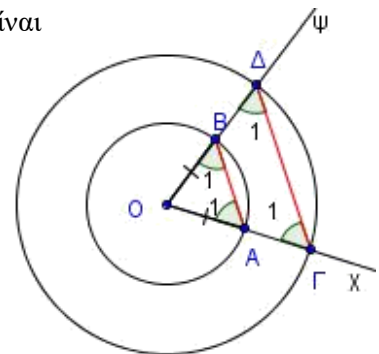
Επειδή $OA = OB$ γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με βάση την AB , άρα $A_1 = B_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OAB , έχουμε:

$$O + A_1 + B_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2B_1 = 180^\circ - O \Leftrightarrow B_1 = \frac{180^\circ - O}{2} \quad (1)$$

Επειδή $OG = OD$ γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $\Gamma\Delta$, άρα $\Gamma_1 = \Delta_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $O\Gamma\Delta$, έχουμε:

$$O + \Gamma_1 + \Delta_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 180^\circ - O \Leftrightarrow \Delta_1 = \frac{180^\circ - O}{2} \quad (2).$$

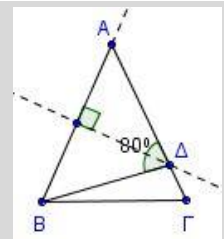
Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $B_1 = \Delta_1$. Οι γωνίες αυτές όμως είναι και εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την OD , άρα οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες.



34418. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία A είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $\hat{A\Gamma B}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

β) Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό σημείο Δ . Αν η γωνία $\hat{A\Delta B}$ ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

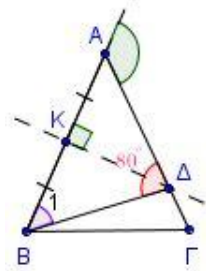
α) Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $A_{εξ} = B + \Gamma$. Όμως $A_{εξ} = 2B$, άρα $2B = B + \Gamma \Leftrightarrow 2B - B = \Gamma \Leftrightarrow B = \Gamma$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, δηλαδή $AB = A\Gamma$.

β) Στο τρίγωνο $A\Delta B$ η ΔK είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την AB , οπότε $A = B_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta B$, έχουμε:

$$A\Delta B + A + B_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 2A = 180^\circ \Leftrightarrow 2A = 100^\circ \Leftrightarrow A = 50^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

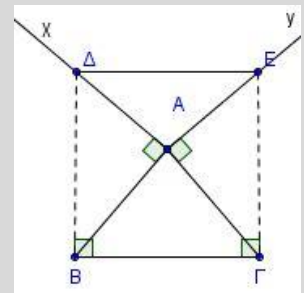
$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 130^\circ \Leftrightarrow B = 65^\circ = \Gamma$$



34422. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Αν η γωνία $BA\Gamma$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου που έχει για κορυφές τα σημεία A , E και Δ .



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma E$ έχουν:

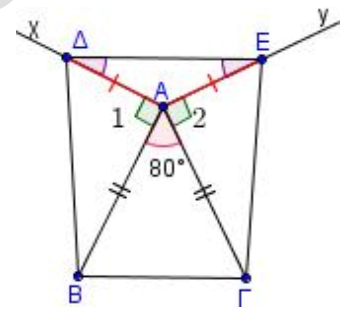
- 1) $AB = A\Gamma$ και
- 2) $A\Delta = A\Gamma$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta = \Gamma E$.

β) Είναι $\Delta A E = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Επειδή $A\Delta = A\Gamma$, το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την ΔE , άρα

$E = \Delta$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta A E$ έχουμε:

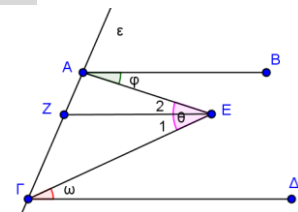
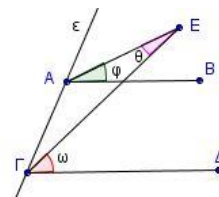
$$E + \Delta + \Delta A E = 180^\circ \Leftrightarrow 2E + 100^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2E = 80^\circ \Leftrightarrow E = 40^\circ = \Delta$$



34770. Δίνεται ευθεία ϵ του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ϵ . Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$, τότε: $\hat{\omega} = \hat{\phi} + \hat{\theta}$.

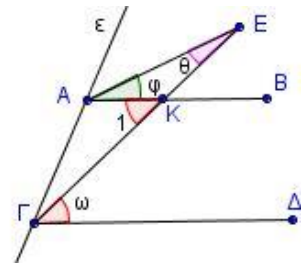
β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\theta = \hat{\phi} + \hat{\omega}$.



Λύση

α) Έστω K το σημείο τομής των $E\Gamma$, AB . Είναι $K_1 = \omega$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $E\Gamma$. Η γωνία K_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο AKE , άρα $K_1 = \hat{\theta} + \phi \Leftrightarrow \omega = \hat{\theta} + \phi$

β) Έστω τώρα ότι το E βρίσκεται ανάμεσα στα τμήματα AB και ΓΔ. Τότε $\omega = \hat{\theta}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων EZ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΓ και $\varphi = \hat{\theta}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB, EZ που τέμνονται από την ΑΕ. Είναι $\varphi + \omega = \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}$.



34775. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ) με $\hat{A} = 80^\circ$.

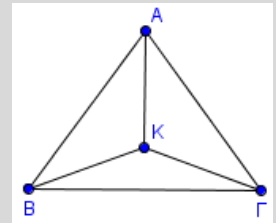
Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας A, τέτοιο, ώστε KB = KA = ΚΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.

β) Να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες ABK και ΑΓΚ.

ii. τη γωνία BΚΓ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα επειδή έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία: KA κοινή, BK = ΚΓ και AB = ΑΓ

β) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, είναι $B = \Gamma$.

Επειδή η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας A, είναι $\angle BAK = \angle KAG = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

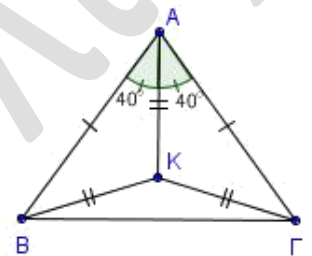
Επειδή KB = KA = ΚΓ, τα τρίγωνα ABK και ΑΓΚ είναι ισοσκελή με βάσεις τις AB και ΑΓ αντίστοιχα. Άρα $\angle ABK = \angle BAK = 40^\circ$ και $\angle KGA = \angle KAG = 40^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABK έχουμε:

$$\angle AKB + \angle ABK + \angle BAK = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AKB + 2 \cdot 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AKB = 100^\circ$$

Όμοια στο τρίγωνο ΑΓΚ προκύπτει ότι $\angle AKG = 100^\circ$.

γ) Είναι $\angle BKG = 360^\circ - \angle AKB - \angle AKG = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ = 160^\circ$



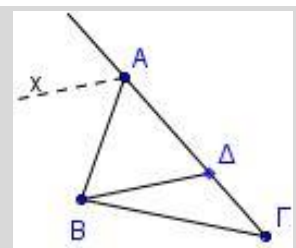
34778. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB < AG$. Έστω Αχ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αχ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 60^\circ$

ii. το τρίγωνο ABΔ είναι ισόπλευρο.

β) Αν η γωνία ΒΔΑ είναι διπλάσια της $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ABΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ.

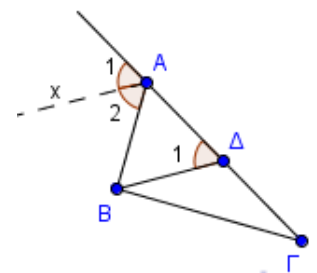


Λύση

α) i) $\angle A\hat{B}\hat{\Delta} = \angle A_2 = \frac{\angle A_{εξ}}{2} = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Αχ, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.

ii) Είναι $\angle \Delta_1 = \angle A_1 = \frac{\angle A_{εξ}}{2} = 60^\circ$ ως εντός εκτός

και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Αχ, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΔ.



Στο τρίγωνο $AB\Delta$ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60° , άρα και η τρίτη του γωνία θα είναι 60° και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

iii) Επειδή το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $AB = A\Delta = B\Delta$.

$$\text{Είναι } \Delta\Gamma = A\Gamma - A\Delta = A\Gamma - AB$$

β) Είναι $B\Delta A = 60^\circ$ και $B\Delta A = 2\Gamma \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$. $B\Delta\Gamma = 180^\circ - B\Delta A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $B\Delta\Gamma$, έχουμε:

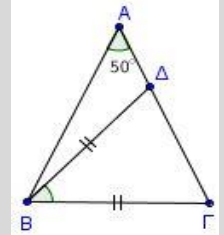
$$\Delta B\Gamma + \Gamma + B\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma = 30^\circ.$$

34785. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $A = 50^\circ$.

Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο, ώστε $B\Delta = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B\Gamma = A$.



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, ισχύει ότι: $B = \Gamma$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 130^\circ \Leftrightarrow B = 65^\circ = \Gamma$$

β) Επειδή $B\Delta = B\Gamma$, το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $\Delta\Gamma$, άρα $B\Delta\Gamma = \Gamma = 65^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta B\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta B\Gamma + B\Delta\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma = 50^\circ = A$$

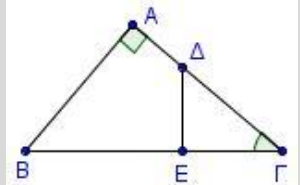
34786. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

β) τις γωνίες του τετράπλευρου $A\Delta E B$.



Λύση

α) Επειδή $\hat{\Delta E\Gamma} = 90^\circ$, από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $\Delta E\Gamma$, έχουμε:

$$\Delta E\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta E\Gamma + 40^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta E\Gamma = 50^\circ$$

β) Αρχικά είναι $A = E = 90^\circ$.

$$A\Delta E + \Delta E\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta E + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta E = 130^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B + 40^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 50^\circ$$

34787. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$. Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$.

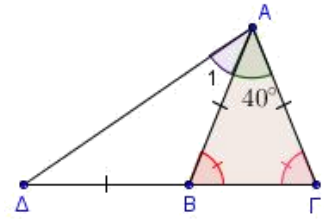
Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, ισχύει ότι:

$$B = \Gamma.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 140^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ = \Gamma$$



β) Επειδή $BD = AB$, το τρίγωνο $B\Delta A$ είναι ισοσκελές με βάση

την $A\Delta$, άρα $\Delta = A_1$. Η γωνία B του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Delta A$, άρα

$$B = \Delta + A_1 \Leftrightarrow 70^\circ = 2\Delta \Leftrightarrow \Delta = 35^\circ = A_1. \text{ Είναι } \Delta A\Gamma = A + A_1 = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$$

34500. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $BD = \Gamma E$.

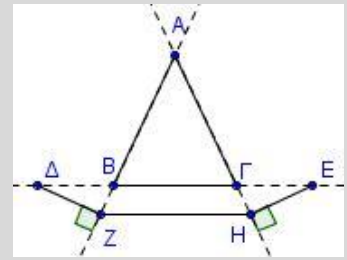
Έστω $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ = \Gamma H$.

ii. Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .



Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔBZ και $EH\Gamma$ έχουν:

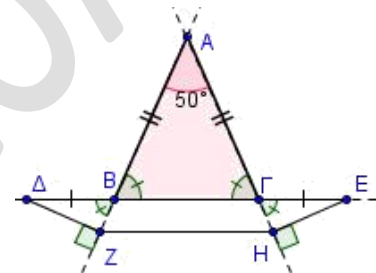
1) $BD = \Gamma E$ και

2) $\Delta BZ = EH\Gamma$ γιατί είναι κατακορυφήν των ίσων γωνιών B και Γ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BZ = \Gamma H$.

ii. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $BZ = \Gamma H$, είναι και

$$AB + BZ = A\Gamma + \Gamma H \Leftrightarrow AZ = AH, \text{ άρα το τρίγωνο } AZH \text{ είναι ισοσκελές.}$$



β) Επειδή το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές με βάση τη ZH , είναι $Z = H$.

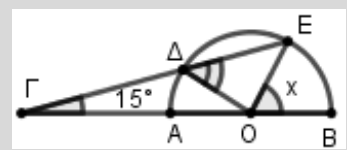
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZH έχουμε:

$$A + Z + H = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2Z = 180^\circ \Leftrightarrow 2Z = 130^\circ \Leftrightarrow Z = 65^\circ = H$$

34505. Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma\Delta$ ισούται με το OB και η γωνία $B\hat{\Gamma}E$ είναι 15° , τότε

α) να αποδείξετε ότι $O\hat{\Delta}E = 30^\circ$.

β) να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{O}B = x$.



Λύση

Έστω ρ η ακτίνα του ημικυκλίου. Τότε $OA = OB = OE = \Gamma\Delta = O\Delta = \rho$.

Επειδή $\Gamma\Delta = O\Delta = \rho$, το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με

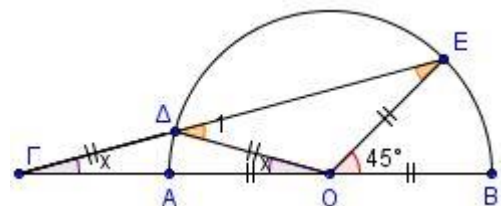
βάση την $O\Gamma$, άρα $\Delta O A = \Gamma = x$.

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $O\Gamma\Delta$, άρα

$$\Delta_1 = \Delta O A + \Gamma = 2x.$$

Επειδή $OE = O\Delta = \rho$, το τρίγωνο $O\Delta E$ είναι ισοσκελές με

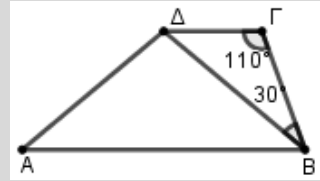
βάση την ΔE , οπότε $E = \Delta_1 = 2x$.



Η γωνία $\angle BOE$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\triangle GOE$, άρα

$$\angle BOE = \angle E + \angle G \Leftrightarrow 45^\circ = 2x + x \Leftrightarrow 3x = 45^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ$$

34506. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, στο οποίο η διαγώνιος BD είναι ίση με την πλευρά AD . Αν είναι η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\angle \hat{B}\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\angle \hat{A}\Delta B$.



Λύση

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\angle \hat{A}\Delta B$ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\Delta\Gamma$, AB που τέμνονται από τη $B\Gamma$, επομένως $\hat{\Gamma} + \angle \hat{A}\Delta B = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + \angle \hat{A}\Delta B = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \hat{A}\Delta B = 70^\circ$.

Όμως $\angle \hat{A}\Delta B = \angle \hat{A}\Delta D + \angle \hat{B}\Gamma \Leftrightarrow 70^\circ = \angle \hat{A}\Delta D + 30^\circ \Leftrightarrow \angle \hat{A}\Delta D = 40^\circ$.

Επειδή $BD = AD$ το τρίγωνο $\triangle ABD$ είναι ισοσκελές και έχει $\angle \hat{A}\Delta B = \angle \hat{A}\Delta D = 40^\circ$.

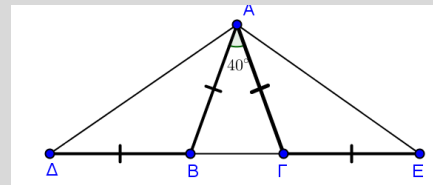
Από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο $\triangle ABD$ έχουμε: $\angle \hat{A}\Delta B + \angle \hat{A}\Delta D + \angle \hat{A}\Delta B = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \hat{A}\Delta B + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \hat{A}\Delta B = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

36087. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $\angle \hat{B}\Gamma = 40^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle \hat{A}\Delta = \angle \hat{A}\Gamma E = 110^\circ$.

β) Τα τρίγωνα $\triangle ABD$ και $\triangle AGE$ είναι ίσα.

γ) Το τρίγωνο $\triangle ADE$ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Επειδή $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$ και έχει $\angle B = \angle \Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, έχουμε:

$$\angle A + \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\angle B = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle B = 140^\circ \Leftrightarrow \angle B = 70^\circ = \angle \Gamma$$

Οι γωνίες $\angle ABD$ και $\angle AGE$ είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\angle B$ και $\angle \Gamma$, άρα

$$\angle ABD = \angle AGE = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

β) Τα τρίγωνα $\triangle ABD$ και $\triangle AGE$ έχουν:

1) $\Delta B = \Gamma E$

2) $BA = A\Gamma$ και

3) $\angle ABD = \angle AGE = 110^\circ$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα $\triangle ABD$ και $\triangle AGE$ είναι ίσα έχουν και $AD = AE$, οπότε το τρίγωνο $\triangle ADE$ είναι ισοσκελές.

36101. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ και έστω AD η διχοτόμος της γωνίας A .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\angle B$ και $\angle \Gamma$.

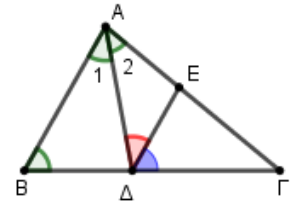
β) Φέρνουμε από το D ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\angle ADE$ και $\angle ED\Gamma$.

Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\Gamma = 80^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 40^\circ \text{ και } B = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$$



β) Είναι $A_1 = A_2 = \frac{A}{2} = 40^\circ$

Είναι $E\Delta A = A_2 = 40^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΑΔ και

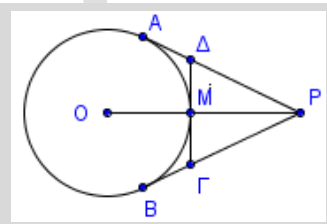
$E\Delta \Gamma = B = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΓ.

$$\Delta E \Gamma = 180^\circ - A E \Delta = 80^\circ.$$

36114. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\hat{A}PB = 40^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ.



Λύση

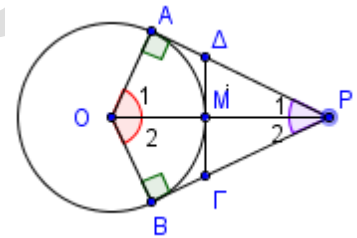
α) Επειδή η ΟΜ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων. Στο τρίγωνο ΡΓΔ η ΡΜ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή τα ΟΑ και ΟΒ είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής, είναι κάθετες στις εφαπτομένες. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΡ έχουμε:

$$O_1 + P_1 = 90^\circ \Leftrightarrow O_1 + 20^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow O_1 = 70^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΡ έχουμε:

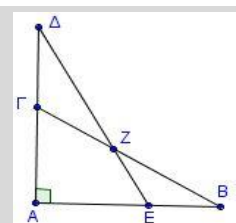
$$O_2 + P_2 = 90^\circ \Leftrightarrow O_2 + 20^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow O_2 = 70^\circ. \text{ Είναι } AOB = O_1 + O_2 = 140^\circ.$$



36117. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{A} = 30^\circ$ και Ζ το σημείο τομής των πλευρών τους ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα..

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΕΖΓ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 60^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε:

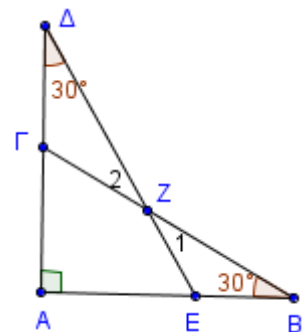
$$\Delta + A\hat{E}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + A\hat{E}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{E}\Delta = 60^\circ.$$

Η γωνία $A\hat{E}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΖΒ, άρα

$$E = Z_1 + B \Leftrightarrow 60^\circ = Z_1 + 30^\circ \Leftrightarrow Z_1 = 30^\circ.$$

$$\text{Είναι } \Gamma Z E = 180^\circ - Z_1 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

β) Επειδή $Z_1 = B = 30^\circ$, το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές.



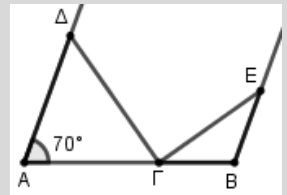
Είναι $Z_2 = Z_1 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν, άρα $Z_2 = \Delta$, οπότε το τρίγωνο $\Gamma Z \Delta$ είναι ισοσκελές.

36118. Στο διπλανό σχήμα, οι AD, BE είναι παράλληλες.

Επιπλέον ισχύουν $AD = AG$, $BE = BG$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ADG και BGE .

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta GE} = 90^\circ$.



Λύση

α) Επειδή $AD = AG$, το τρίγωνο ADG είναι ισοσκελές με βάση την DG , άρα $\Delta = A\Gamma\Delta$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ADG , έχουμε:

$$A + \Delta + A\Gamma\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 2\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta = 110^\circ \Leftrightarrow \Delta = 55^\circ = A\Gamma\Delta.$$

Οι γωνίες A και B είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD, BE που τέμνονται από την AB , οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $A + B = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 110^\circ$.

Επειδή $BE = BG$, το τρίγωνο BEG είναι ισοσκελές με βάση την EG , άρα $B\Gamma E = E$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BEG έχουμε:

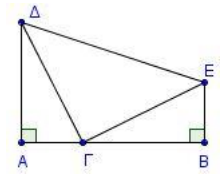
$$B + B\Gamma E + E = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 2E = 180^\circ \Leftrightarrow 2E = 70^\circ \Leftrightarrow E = 35^\circ = B\Gamma E.$$

β) Είναι $\hat{\Delta GE} = 180^\circ - A\Gamma\Delta - B\Gamma E = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$

36163. Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες A, B είναι ορθές και επιπλέον $AD = BG$ και $AG = BE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AG\Delta$ και BGE είναι ίσα.

β) Αν η γωνία $E\Gamma B = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο ΔGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AG\Delta$ και BGE έχουν:

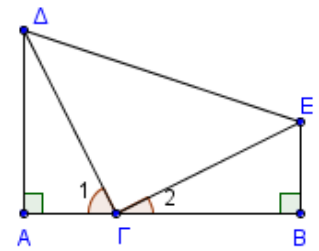
1) $AD = BG$ και 2) $AG = BE$, οπότε έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες και είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $AG\Delta$ και BGE είναι ίσα, είναι και $\Delta\Gamma = \Gamma E$, οπότε το τρίγωνο ΔGE είναι ισοσκελές. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου BGE έχουμε:

$$E\Gamma B + E = 90^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + E = 90^\circ \Leftrightarrow E = 50^\circ.$$

Επειδή τα τρίγωνα $AG\Delta$ και BGE είναι ίσα, είναι και $\Gamma_1 = E = 50^\circ$.

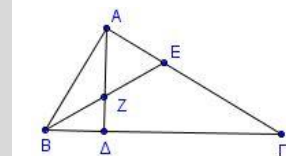
Είναι $\hat{\Delta GE} = 180^\circ - \Gamma_1 - E\Gamma B = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΔGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



36167. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 60^\circ$.

β) Αν το ύψος AD και η διχοτόμος BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε: $A + B + \Gamma = 180^\circ$, όμως $A + \Gamma = 2B$, άρα

$$2B + B = 180^\circ \Leftrightarrow 3B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ.$$

β) Επειδή $B = 60^\circ$ είναι $A + \Gamma = 2B = 120^\circ$. Όμως $A = 3\Gamma$, άρα

$$3\Gamma + \Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ. \text{ Τότε}$$

$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 90^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE από το

άθροισμα γωνιών του έχουμε:

$$B_1 + AEB = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{B}{2} + AEB = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + AEB = 90^\circ \Leftrightarrow AEB = 60^\circ.$$

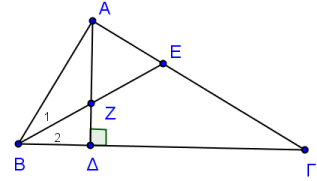
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου AΔΓ έχουμε:

$$\Delta A\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta A\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta A\Gamma = 60^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZE έχουμε:

$$AEB + \Delta A\Gamma + AZE = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 60^\circ + AZE = 180^\circ \Leftrightarrow AZE = 60^\circ$$

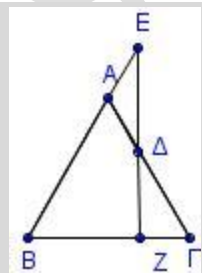
Το τρίγωνο AZE έχει τις γωνίες του ίσες είναι ισόπλευρο.



36228. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε $AE = AD$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AΔΕ.

β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ED (προς το Δ) με την BG, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην BG.



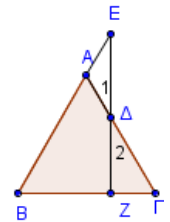
Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60° . Άρα $\Delta AE = 180^\circ - A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο AΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, έχει $\Delta_1 = E$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AΔΕ έχουμε:

$$\Delta_1 + E + \Delta AE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 30^\circ = E$$



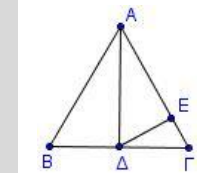
β) Είναι $\Delta_2 = \Delta_1 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν και $\Gamma = 60^\circ$, οπότε από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΖΓ προκύπτει ότι $\Delta Z\Gamma = 90^\circ$, άρα $EZ \perp BG$.

36336. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$ και η διάμεσός του AΔ τέτοια, ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην ΑΓ τέτοιο, ώστε $AD = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AΔΕ.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία EΔΓ.



Λύση

α) Επειδή $AB = AG$, το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. Η διάμεσος AΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή η AΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ABΓ, είναι $\Delta A\Gamma = B\Delta A = 30^\circ$, επομένως $A = 60^\circ$.

Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο ABΓ έχει μια γωνία του ίση με 60° , είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή $AD = AE$ το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με βάση τη DE , άρα $\angle ADE = \angle AED$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ADE , έχουμε:

$$\angle A\Gamma + \angle ADE + \angle AED = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2\angle ADE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle ADE = 150^\circ \Leftrightarrow \angle ADE = 75^\circ = \angle AED$$

γ) $\angle ED\Gamma = \angle A\Delta\Gamma - \angle ADE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

37009. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο D φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ED\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ADE .

γ) Αν η γωνία B είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία Γ , να υπολογίσετε τη γωνία $ED\Gamma$.

Λύση

α) Είναι $A\Gamma \perp AB$ και $AB \parallel DE$, άρα είναι και $A\Gamma \perp DE$, οπότε το τρίγωνο ADE είναι ορθογώνιο.

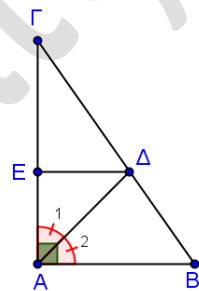
β) Επειδή $\hat{A} = \frac{A}{2} = 45^\circ$, από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου

ADE προκύπτει ότι $\angle ADE = 45^\circ$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ, \text{ όμως } B = \Gamma + 20^\circ, \text{ άρα } \Gamma + 20^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma = 70^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 35^\circ \text{ και } B = 55^\circ.$$

Είναι $\angle ED\Gamma = B = 55^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων DE, AB που τέμνονται από την $B\Gamma$.



37013. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα D και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔZB και $EH\Gamma$ έχουν:

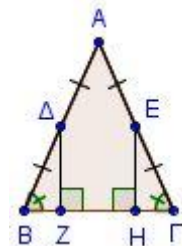
1) $\Delta B = E\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$ και

2) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά ίση και μια οξεία γωνία τους ίση, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta Z = EH$. δηλαδή τα D και E ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

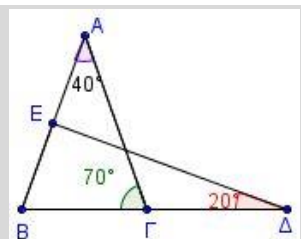
$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ + B + B + B = 180^\circ \Leftrightarrow 3B = 105^\circ \Leftrightarrow B = 35^\circ = \Gamma \text{ και } A = 75^\circ + 35^\circ = 110^\circ.$$



37014. Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές,

β) η γωνία $AE\Delta$ είναι ορθή.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + B + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ$$

Επειδή $B = 70^\circ = \Gamma$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΕΔ έχουμε:

$$BE\Delta + B + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow BE\Delta + 70^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow BE\Delta = 90^\circ, \text{ άρα και } AE\Delta = 90^\circ.$$

Θέμα 4ο

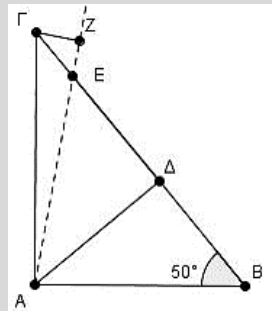
1708. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε $DE = BD$. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

ii. $\hat{\Gamma A E} = 10^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ.



Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΕ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $\angle AEB = \angle B = 50^\circ$.

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΕ ισχύει ότι:

$$\angle EAB + \angle AEB + \angle B = 180^\circ \Leftrightarrow \angle EAB + 2 \cdot 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle EAB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

$$\text{Είναι } \angle EAB + \angle GAE = 90^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + \angle GAE = 90^\circ \Leftrightarrow \angle GAE = 10^\circ.$$

β) Είναι $\angle GEZ = \angle AEB = 50^\circ$ ως κατακορυφήν.

$$\text{Επειδή } \angle GZE = 90^\circ, \text{ στο τρίγωνο } \triangle GZE \text{ ισχύει ότι: } \angle GEZ + \angle EGZ = 90^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \angle EGZ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle EGZ = 40^\circ$$

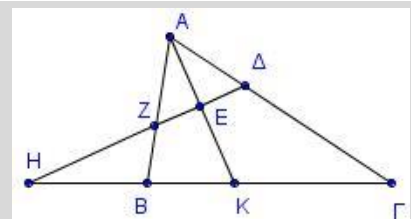
1792. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle Z\hat{A}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$

β) $ZK = K\Delta$

γ) $\angle Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΖΔ η ΑΕ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε $\angle AZE = \angle ADE$.

$$\text{Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου } \triangle AZD \text{ έχουμε: } A + \angle AZE + \angle ADE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle ADE = 180^\circ - A \Leftrightarrow$$

$$\angle ADE = 90^\circ - \frac{A}{2}. \text{ Είναι } \angle Z\hat{A}\Gamma = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

β) Η ΑΕ είναι μεσοκάθετος του ΖΔ και το Κ είναι σημείο της, άρα ισαπέχει από τα Ζ και Δ, δηλαδή $ZK = KD$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΗΔΓ έχουμε:

$$ZH\Gamma + Z\Delta\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow ZH\Gamma + 90^\circ + \frac{A}{2} + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow ZH\Gamma = 90^\circ - \frac{A}{2} - \Gamma = \frac{180^\circ - A - 2\Gamma}{2} \quad (1).$$

Όμως στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

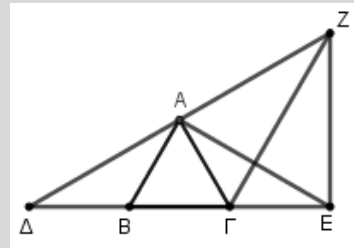
$$A + B + \Gamma = 180^\circ, \text{ οπότε η σχέση (1) γίνεται: } ZH\Gamma = \frac{A + B + \Gamma - A - 2\Gamma}{2} = \frac{B - \Gamma}{2}$$

1819. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $BD = BG$, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $GE = BG$. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ζ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel GZ$.



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο οι γωνίες του είναι ίσες με 60° . Είναι $ABD = AGE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή $AB = AD = AG = GE$, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα και ισοσκελή. Έστω ω κάθε μια από τις γωνίες που αντιστοιχούν στις βάσεις τους.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

$$ABD + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega = 60^\circ \Leftrightarrow \omega = 30^\circ$$

β) Επειδή $AG = GE$, το Γ ισαπέχει από τα Α και Ε, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ.

Είναι $\angle AZG = \omega + A = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ = \angle AGZ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ και ΓΕΖ έχουν:

- 1) τη πλευρά ΓΖ κοινή και
- 2) $AG = GE$,

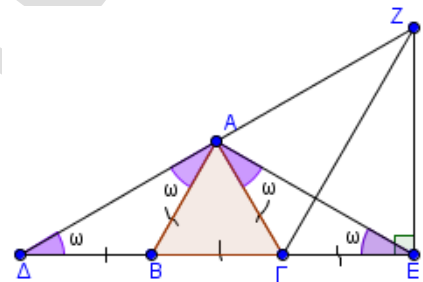
Δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν $ZA = ZE$.

Δηλαδή το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ. Επειδή το Γ και το Ζ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΕ, η ΓΖ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΓΕ το ΓΖ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή

$$\angle AGZ = \angle ZGE = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Οι γωνίες ΑΒΓ και ΖΓΕ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ, ΓΖ που τέμνονται από την ΒΓ και είναι ίσες, άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΖ είναι παράλληλες.

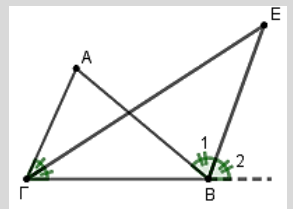


1851. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της γωνίας Γ και της εξωτερικής γωνίας του B τέμνονται στο E .

Δίνεται ότι $\hat{A}\hat{B}E = 70^\circ = 2\hat{\Gamma}\hat{E}B$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Επειδή BE είναι διχοτόμος της γωνίας B εξωτερικής, ισχύει ότι $B_1 = B_2 = 70^\circ$.

Είναι $2\hat{\Gamma}EB = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}EB = 35^\circ$.

Η γωνία B_2 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓBE οπότε $B_2 = \hat{\Gamma}EB + \hat{E}\hat{\Gamma}B \Leftrightarrow 70^\circ = 35^\circ + \hat{E}\hat{\Gamma}B \Leftrightarrow \hat{E}\hat{\Gamma}B = 35^\circ$.

Επειδή $\hat{E}\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}EB$ το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές. Είναι $B_2 + \hat{\Gamma}BE = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}BE = 110^\circ$

β) Επειδή ΓE διχοτόμος της γωνίας Γ και $\hat{E}\hat{\Gamma}B = 35^\circ$, είναι $\hat{A}\hat{\Gamma}B = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$

Είναι $B_{\text{εξ}} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 140^\circ + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει ότι: $A + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow A + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 70^\circ$

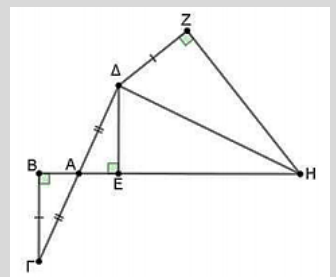
11882. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ και ΔZH είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$, $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$ και $\hat{\Delta}\hat{Z}\hat{H}$, αντίστοιχα.

Επίσης $A\Gamma = A\Delta$ και $B\Gamma = \Delta Z$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και ΔE είναι ίσα.

β) Η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$.

γ) Αν, επιπλέον, οι $A\Delta$ και ΔH είναι κάθετες, τότε $\hat{A}\hat{\Delta}E = \frac{\hat{E}\hat{H}\hat{Z}}{2}$.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν: $A\Gamma = A\Delta$ (υπόθεση) και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ ως κατακορυφήν. Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτεινουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου ισούται με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα. Επομένως έχουν και $B\Gamma = \Delta E$.

β) Είναι $\Delta E = B\Gamma = \Delta Z$, οπότε το Δ ισαπέχει από τις HA και HZ , άρα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$. Δηλαδή η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$.

γ) Επειδή η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$, ισχύει $\Delta HE = \frac{\hat{E}\hat{H}\hat{Z}}{2}$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta H$ είναι $\Delta AE + \Delta HE = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta HE = 90^\circ - \Delta AE$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ είναι $\Delta DE + \Delta AE = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta DE = 90^\circ - \Delta AE$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\Delta DE = \frac{\hat{E}\hat{H}\hat{Z}}{2}$.

13499. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB < A\Gamma$ και AH το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔZ και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}\Delta\Delta = \hat{\Delta}\hat{A}H$ και $E\hat{A}B = H\hat{A}E$.

β) $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

Λύση

α) Από το σχήμα έχουμε ότι:

$$\Gamma\Delta\Delta = \Gamma AB - \Delta AB = 90^\circ - \Delta AB \quad (1).$$

Οι γωνίες ΔAH και $A\Delta H$ του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta H$ είναι

συμπληρωματικές, οπότε: $\Delta AH = 90^\circ - A\Delta H$ (2).

Αφού $B\Delta = BA$, το τρίγωνο $B\Delta A$ θα είναι ισοσκελές με

βάση ΔA , οπότε οι γωνίες ΔAB και $A\Delta H$ θα είναι

ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Delta AB = A\Delta H$ (3).

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta\Delta = \Delta AH$ (4).

Έχουμε, επίσης, ότι: $EAB = \Gamma AB - \Gamma AE = 90^\circ - \Gamma AE$ (5).

Οι γωνίες HAE και AEH του ορθογωνίου τριγώνου AEH είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$$HAE = 90^\circ - AEH \quad (6).$$

Αφού $\Gamma E = \Gamma A$, το τρίγωνο ΓEA θα είναι ισοσκελές με βάση EA , οπότε οι γωνίες ΓAE και AEH θα είναι

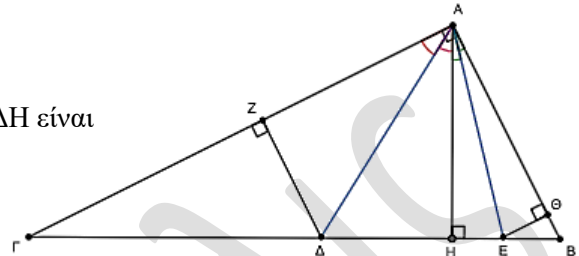
ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Gamma AE = AEH$ (7).

Άρα, από τις σχέσεις (5), (6) και (7) προκύπτει ότι $EAB = HAE$ (8).

β) Από (α) ερώτημα ισχύει ότι $EAB = HAE$, οπότε η AE είναι διχοτόμος της γωνίας HAB του τριγώνου AHB . Άρα, το σημείο E ισαπέχει από τις πλευρές AH και AB κι επομένως είναι $EH = E\Theta$.

Από (α) ερώτημα ισχύει, επίσης, ότι $\Gamma\Delta\Delta = \Delta AH$, οπότε η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $HA\Gamma$ του τριγώνου $AH\Gamma$. Άρα, το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές AH και $A\Gamma$ κι επομένως είναι $\Delta H = \Delta Z$.

Συνεπώς, $\Delta E = \Delta H + EH = \Delta Z + E\Theta$.



13537. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $A\Delta = B\Delta = B\Gamma$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

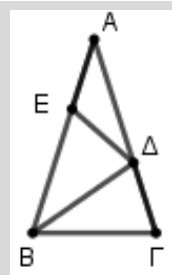
i. $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$

ii. $A = 36^\circ$

iii. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β) Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



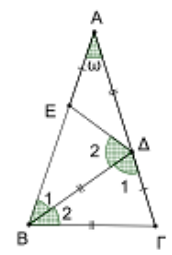
Λύση

α) Έστω $A = \omega$ (1).

i. Γνωρίζουμε ότι $A\Delta = B\Delta$, άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση AB , οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $B_1 = \omega$ (2)

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta B$, οπότε $\Delta_1 = B_1 + A = 2\omega$ (3). Είναι $B\Gamma = B\Delta$ (από τα δεδομένα), άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$, οπότε οι

προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\Gamma = \Delta_1 = 2\omega$ (4).

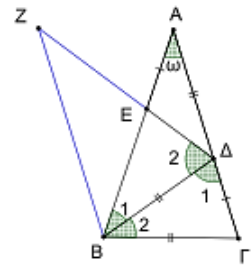


Από τις σχέσεις (1), (4) προκύπτει ότι $\Gamma = 2A$.

ii. Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ (από τα δεδομένα), οπότε και οι προσκείμενες στη βάση BΓ γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $B = \Gamma = 2\omega$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ έχουμε

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + 2\omega + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 5\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ, \text{ άρα}$$

$$A = 36^\circ.$$



iii. Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο AΔΕ είναι ισοσκελές είναι να αποδείξουμε ότι $AE = \Delta E$. Όμως από τα δεδομένα είναι $AE = \Delta \Gamma$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta E = \Delta \Gamma$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα BΓΔ και BEΔ τα οποία έχουν:

- BΔ κοινή πλευρά.
- $B\Gamma = BE$, γιατί $B\Gamma = A\Delta$ από τα δεδομένα και $BE = A\Delta$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$.
- $B_1 = B_2$ αφού $B_1 = \omega = 36^\circ$ (ABΔ ισοσκελές τρίγωνο) και $B_2 = B - B_1 = 2\omega - \omega = \omega = 36^\circ$. Τα τρίγωνα BΓΔ και BEΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες B_1, B_2 , δηλαδή $\Delta E = \Delta \Gamma$.

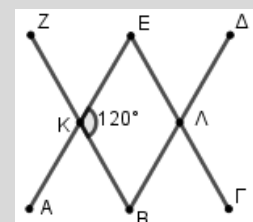
β) Στην ισότητα των τριγώνων BΓΔ και BEΔ έχουμε αποδείξει ότι $B\Gamma = BE$, οπότε και οι αντίστοιχες γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta_1 = \Delta_2$. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι $\Delta_1 = 72^\circ$ άρα και $\Delta_2 = 72^\circ$.

Τα τρίγωνα ABΓ και ZBΔ έχουν:

- $B\Gamma = B\Delta$, από τα δεδομένα.
- $A\Gamma = Z\Delta$, από το δεδομένο του ερωτήματος.
- $\Gamma = \Delta_2 = 72^\circ$.

Τα τρίγωνα ABΓ και ZBΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο BΔZ είναι ισοσκελές.

13697. Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα AE, BZ, BΔ και ΓΕ αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου. Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $AE \parallel B\Delta$ και $BZ \parallel \Gamma E$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή K κοινό μέσο των AE, BZ και Λ κοινό μέσο των BΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι AE και BZ με κορυφή το κοινό τους μέσο K, η γωνία $B\hat{K}E$, είναι ίση με 120° .



α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^\circ$.

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα AKB και BΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα.

Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Λύση

α) Οι γωνίες AKB και BKE είναι παραπληρωματικές, οπότε ισχύει

$$AKB + BKE = 180^\circ \Leftrightarrow AKB + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AKB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \quad (1)$$

Είναι $AKB = K\hat{B}\Lambda$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και BΔ με τέμνουσα την BZ.

Όμως $AKB = 60^\circ$ από τη σχέση (1) οπότε $K\hat{B}\Lambda = 60^\circ$ (2).

Είναι $\angle KBA = \angle B\Lambda\Gamma$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων BZ και ΓE με τέμνουσα την BA .

Όμως $\angle KBA = 60^\circ$ από σχέση (2), οπότε $\angle B\Lambda\Gamma = 60^\circ$ (3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\angle AKB = \angle KBA = \angle B\Lambda\Gamma = 60^\circ$ (4)

β) Τα τρίγωνα AKB και $B\Lambda\Gamma$ έχουν:

- $AK = BA = 20$ cm, ως μισά των ίσων τμημάτων AE και BA μήκους 40 cm όπου K και Λ τα μέσα τους.

- $KB = \Lambda\Gamma = 20$ cm, ως μισά των ίσων τμημάτων BZ και ΓE μήκους 40 cm όπου K και Λ τα μέσα τους.

- $\angle AKB = \angle B\Lambda\Gamma = 60^\circ$, από σχέση (4)

Επομένως τα τρίγωνα θα είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Οπότε θα είναι $\angle A_1 = \angle B_1$ και

$\angle B_2 = \angle \Gamma_2$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές KB , $\Lambda\Gamma$ και KA , ΛB αντίστοιχα.

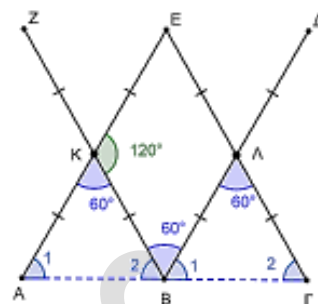
Επειδή είναι $AK = KB = 20$ cm, το τρίγωνο AKB θα είναι ισοσκελές με βάση AB , οπότε θα έχει τις προσκείμενες στη βάση του γωνίες ίσες, δηλαδή $\angle A_1 = \angle B_2$ (5).

Για τις γωνίες του τριγώνου AKB ισχύει ότι $\angle A_1 + \angle AKB + \angle B_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle A_1 + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$2\angle A_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow \angle A_1 = 60^\circ \text{ (6)}.$$

Από σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι $\angle AKB = \angle A_1 = \angle B_2 = 60^\circ$. Συνεπώς, το τρίγωνο AKB θα είναι ισόπλευρο γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, οπότε και το ίσο του τρίγωνο $B\Lambda\Gamma$ θα είναι και αυτό ισόπλευρο, οπότε κάθε γωνία του θα είναι ίση με 60° , δηλαδή $\angle B\Lambda\Gamma = \angle \Gamma_2 = \angle B_1 = 60^\circ$.

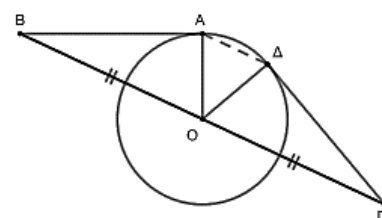
γ) Για να είναι τα A , B και Γ σημεία της ίδιας ευθείας, αρκεί να δειχθεί ότι η γωνία $AB\Gamma$ είναι ευθεία γωνία. Είναι $\angle AB\Gamma = \angle B_2 + \angle KBA + \angle B_1 = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, αφού είναι $\angle B_2 = \angle B_1 = 60^\circ$ ως γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων AKB και $B\Lambda\Gamma$. Επομένως, τα σημεία A , B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.



13750. Από σημείο B εξωτερικό ενός κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα BA . Ενώνουμε το σημείο B με το κέντρο O του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $ΟΓ = BO$. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι: i. $AB = \Delta\Gamma$ ii. $AD \parallel B\Gamma$

β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος BA είναι ίσο με την ακτίνα R , τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο $AO\Delta$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. $OA \perp AB$ και $OD \perp \Delta\Gamma$ διότι OA και OD είναι ακτίνες στα σημεία επαφής A και Δ αντίστοιχα.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB και $O\Delta\Gamma$, τα οποία έχουν:

- $OA = OD$, ακτίνες του κύκλου

- $OB = O\Gamma$, από την υπόθεσή

- $\angle OAB = \angle O\Delta\Gamma = 90^\circ$, αφού $OA \perp AB$ και $OD \perp \Delta\Gamma$

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση.

Άρα θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή $AB = \Delta\Gamma$.

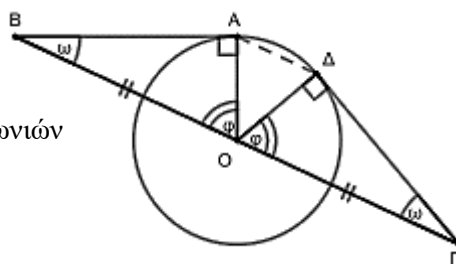
ii. Από την ισότητα των ορθογώνιων τριγώνων του α) i. ερωτήματος προκύπτει ότι $\angle OBA = \angle O\Gamma\Delta = \omega$, γιατί είναι οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές OA και OD

αντίστοιχα. Επίσης είναι $\angle AOB = \angle DO\Gamma = \phi$ ως οξείες

γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές

AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, με $\omega + \phi = 90^\circ$ (1), ως άθροισμα οξείων γωνιών ορθογώνιων τριγώνων.

Για τη γωνία $\angle AOD$ έχουμε:



$$\angle AOD = 180^\circ - 2\varphi = 2(90^\circ - \varphi) = 2\omega \text{ λόγω της (1).}$$

Το τρίγωνο $AO\Delta$ είναι ισοσκελές, αφού $OA = O\Delta = R$.

Για τις ίσες του γωνίες $\angle OAD$ και $\angle O\Delta A$ έχουμε:

$$\angle OAD = \angle O\Delta A = \frac{180^\circ - \angle AOD}{2} = \frac{180^\circ - 2\omega}{2} = \frac{2(90^\circ - \omega)}{2} = 90^\circ - \omega = \varphi \text{ λόγω της (1).}$$

Άρα $\angle OAD = \angle OAB = \varphi$ και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των AD και $B\Gamma$ που τέμνονται από την OA , οπότε $AD \parallel B\Gamma$.

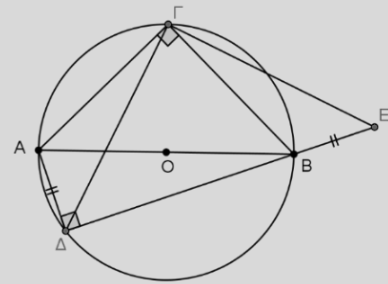
β) Αν το μήκος του BA είναι ίσο με R , τότε από το **α)** ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα OAB και $O\Delta\Gamma$ θα είναι και ισοσκελή, αφού $OA = AB = O\Delta = \Delta\Gamma = R$. Επομένως οι γωνίες ω και φ θα είναι ίσες και η κάθεμία θα ισούται με 45° . Τότε $\angle AOD = 180^\circ - 2\varphi = 90^\circ$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο OAD έχει τη γωνία της κορυφής του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

34316. Δίνεται κύκλος κέντρου O και διάμετρος του AB . Έστω Γ το μέσο ενός ημικυκλίου του, Δ τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και $\angle \Gamma B = \angle \Delta B = 90^\circ$. Στην προέκταση της ΔB προς το μέρος του B θεωρούμε σημείο E ώστε $BE = \Delta\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. οι γωνίες $\angle \Gamma \Delta$ και $\angle \Gamma B E$ είναι ίσες,
- ii. τα τρίγωνα $\Delta \Delta \Gamma$ και $B E \Gamma$ είναι ίσα.
- iii. η $\Gamma \Delta$ είναι κάθετη στην ΓE .

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



Λύση

α) i. Στο τετράπλευρο $A\Gamma\Delta B$ ισχύει ότι: $\angle \Gamma \Delta + \angle \Delta B + \angle \Delta \Gamma + \angle \Gamma A = 360^\circ \Leftrightarrow$

$$\angle \Gamma \Delta + 90^\circ + \angle \Delta \Gamma + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma \Delta = 180^\circ - \angle \Delta \Gamma \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \angle \Delta \Gamma + \angle \Gamma B E = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma B E = 180^\circ - \angle \Delta \Gamma \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\angle \Gamma \Delta = \angle \Gamma B E$.

ii. Τα τρίγωνα $\Delta \Delta \Gamma$ και $B E \Gamma$ έχουν:

1) $A\Gamma = B\Gamma$ γιατί τα τόξα $A\Gamma$ και $B\Gamma$ είναι ίσα και σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές στον ίδιο κύκλο.

2) $\Delta\Delta = BE$ υπόθεση

3) $\angle \Gamma \Delta = \angle \Gamma B E$ από α) i.

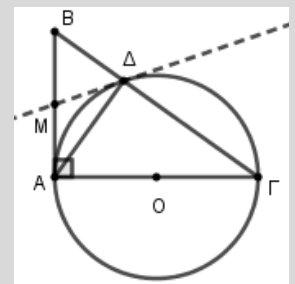
Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

iii. Επειδή τα τρίγωνα $\Delta \Delta \Gamma$ και $B E \Gamma$ είναι ίσα, έχουν και $\angle \Gamma \Delta = \angle \Gamma E$.

$$\text{Είναι } \angle \Gamma \Delta + \angle \Gamma B = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma E + \angle \Gamma B = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma E = 90^\circ, \text{ άρα η } \Gamma \Delta \text{ είναι κάθετη στην } \Gamma E.$$

β) Αν το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ τότε η $\Delta\Gamma$ διέρχεται από το κέντρο O και επειδή η $\Gamma \Delta$ είναι κάθετη στην ΓE , η ακτίνα OG στη περίπτωση αυτή θα είναι κάθετη στη ΓE . Επομένως η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου.

34329. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο κέντρου O , ο οποίος τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου σε σημείο Δ . Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά AB σε σημείο M . Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{\Gamma\Delta\Delta} = \hat{B}$,

β) $\hat{M\Delta B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

γ) το M είναι το μέσο του AB .

Λύση

α) Η γωνία $\hat{A\Delta\Gamma}$ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ έχουμε: $\hat{\Gamma\Delta\Delta} + \hat{\Gamma} + \hat{A\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma\Delta\Delta} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ (1)

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{B} + \hat{B\Delta\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 90^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma\Delta\Delta} = \hat{B}$.

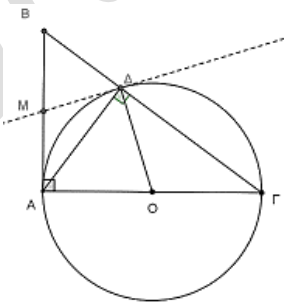
β) Τα OG , OD είναι ακτίνες του κύκλου οπότε το τρίγωνο $OD\Gamma$ είναι ισοσκελές και έχει $\hat{OD\Gamma} = \hat{\Gamma}$ (3).

Η OD είναι ακτίνα στο σημείο επαφής Δ , άρα $OD \perp \Delta M$, δηλαδή

$$\hat{M\Delta O} = 90^\circ. \text{ Είναι } \hat{M\Delta B} + \hat{M\Delta O} + \hat{OD\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{M\Delta B} + 90^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M\Delta B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}.$$

Επειδή $\hat{M\Delta B} = \hat{B}$, το τρίγωνο $M\Delta B$ είναι ισοσκελές.



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ είναι:

$$\hat{M\Delta\Delta} + 90^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M\Delta\Delta} = 90^\circ - \hat{B} \quad (4).$$

$$\text{Είναι } \hat{A\Delta B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta M} + \hat{M\Delta B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta M} + \hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta M} = 90^\circ - \hat{B} \quad (5).$$

Από τις (4), (5) προκύπτει ότι $\hat{A\Delta M} = \hat{M\Delta\Delta}$, οπότε το τρίγωνο $M\Delta\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Delta$ και έχει $MA = \Delta M$ (6).

Επειδή το τρίγωνο $M\Delta B$ έχει $\hat{M\Delta B} = \hat{B}$, είναι ισοσκελές με βάση την ΔB , οπότε $MB = \Delta M$ (7). Από τις (6), (7) προκύπτει ότι $MA = MB$, δηλαδή το M είναι το μέσο του AB .

37097. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE .

Στην προέκταση της ΓB προς το B , θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο,

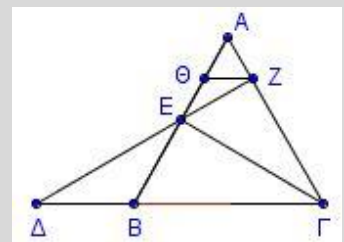
$$\text{ώστε } B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}. \text{ Αν η ευθεία } \Delta E \text{ τέμνει την } A\Gamma \text{ στο } Z \text{ και } Z\Theta \parallel B\Gamma:$$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Theta E Z$.

γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$.

δ) Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.



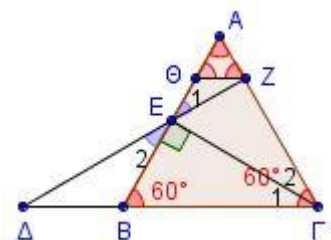
Λύση

α) Έστω a η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου.

Το ΓE είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος

$$\text{του. Είναι } BE = \frac{BA}{2} = \frac{a}{2} = B\Delta, \text{ άρα το τρίγωνο } B\Delta E \text{ είναι ισοσκελές.}$$

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του A , $AB\Gamma$ και $A\Gamma B$ είναι ίσες με 60° .



Είναι $\angle \Theta Z = \angle \Lambda \Gamma = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘZ , $\Lambda \Gamma$ που τέμνονται από την AB . Ακόμη είναι $\angle AZ\Theta = \angle \Lambda \Gamma B = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘZ , $\Lambda \Gamma$ που τέμνονται από την AG . Στο τρίγωνο $\Lambda \Theta Z$ και οι τρεις γωνίες του είναι ίσες με 60° , οπότε είναι ισόπλευρο.

β) Η γωνία $\Lambda \Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $BE\Delta$, άρα $\angle \Lambda \Gamma = \Delta + E_2 \Leftrightarrow 60^\circ = 2E_2 \Leftrightarrow E_2 = 30^\circ$. Είναι $E_1 = E_2 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν.

Είναι $\angle \Theta Z = 180^\circ - \angle \Lambda \Theta Z = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ΘEZ , έχουμε:

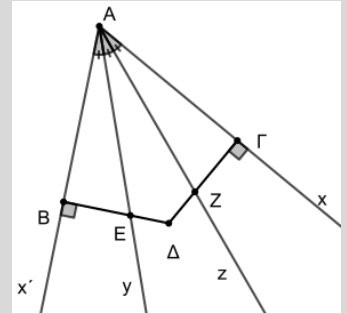
$$\angle \Theta Z + E_1 + \angle \Theta ZE = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 30^\circ + \angle \Theta ZE = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \Theta ZE = 30^\circ$$

γ) Επειδή $E_1 = \angle \Theta ZE = 30^\circ$, το τρίγωνο ΘZE είναι ισοσκελές με βάση την EZ , άρα $\Theta E = \Theta Z$.

Όμως $\Theta Z = \Theta \Lambda$ γιατί είναι πλευρές του ισόπλευρου, άρα $\Theta E = \Theta Z = \Theta \Lambda$ και $AE = 2\Theta Z$.

δ) Είναι $\Theta B = \Theta E + EB = \frac{1}{2}AE + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB + \frac{1}{2}AB = \frac{3}{4}AB \Leftrightarrow 3AB = 4\Theta B$.

37125. Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $\angle x'Ax$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ . Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $\angle x'Ax$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο $E\Lambda Z$ είναι ισοσκελές.

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\angle x'Ax$.

γ) Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma \Lambda \Delta$ είναι ίσες.

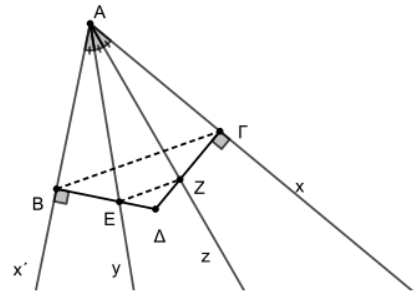
Λύση

α) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma Z$ είναι ορθογώνια και έχουν:

1) $AB = A\Gamma$, από την υπόθεση και

2) $\angle B\hat{A}E = \angle Z\hat{A}\Gamma$, αφού οι Ay , Az χωρίζουν τη γωνία $\angle x'Ax$ σε τρεις ίσες γωνίες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και $A\Gamma Z$ είναι ίσα γιατί έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα είναι $AE = AZ$ ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων, άρα το $E\Lambda Z$ είναι ισοσκελές τρίγωνο.



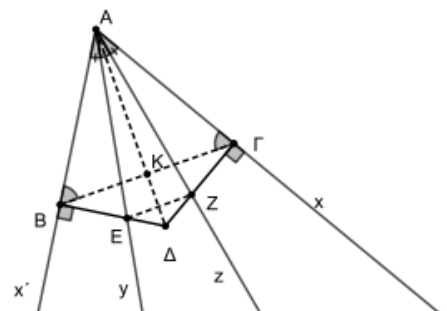
β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια και έχουν $A\Delta$ κοινή πλευρά και $AB = A\Gamma$, από την υπόθεση, οπότε θα είναι ίσα γιατί έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα θα είναι $B\Delta = \Gamma\Delta$ και $\angle B\hat{\Lambda}\Delta = \angle \Delta\hat{\Lambda}\Gamma$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $B\Delta$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, οπότε $A\Delta$ διχοτόμος της $\angle x'Ax$.

γ) Έστω K το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η AK είναι διχοτόμος άρα και ύψος. Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AK\Gamma$ ισχύει ότι:

$$\angle K\hat{A}\Gamma + \angle A\hat{\Gamma}K = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma\hat{\Lambda}\Delta + \angle A\hat{\Gamma}K = 90^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \angle \Gamma\hat{\Lambda}\Delta = 90^\circ - \angle A\hat{\Gamma}K$$

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, άρα $\angle A\hat{\Gamma}B = \angle A\hat{B}\Gamma$ και επομένως είναι $\angle A\hat{\Gamma}K = \angle A\hat{\Gamma}B = \angle A\hat{B}\Gamma$.



$$\text{Άρα } \hat{\Gamma\Delta\Lambda} = 90^\circ - \hat{A\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \hat{\Gamma\Delta\Lambda} = 90^\circ - \hat{A\hat{B}\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma\Delta\Lambda} = \hat{\Gamma\hat{B}\Delta}$$

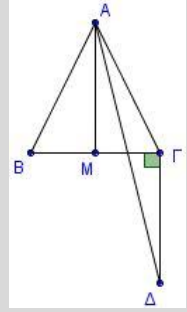
37164. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρνουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι:

α) $AM \parallel \Gamma\Delta$.

β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.

γ) $\hat{\Delta A\Gamma} = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$.

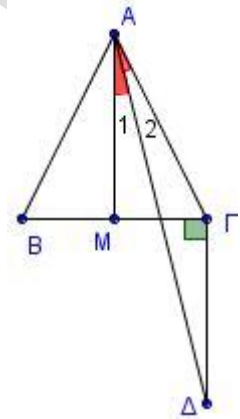
δ) $A\Delta < 2AB$.



Λύση

α) Επειδή AM διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη βάση του, θα είναι και ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή $AM \perp B\Gamma$ και $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$, είναι $AM \parallel \Gamma\Delta$.

β) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $\Gamma\Delta = AB$ είναι και $A\Gamma = \Gamma\Delta$, άρα το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Delta$, άρα $\hat{A_2} = \hat{\Delta}$. Όμως $\hat{A_1} = \hat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AM, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $A\Delta$, άρα και $\hat{A_1} = \hat{A_2}$, δηλαδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.



γ) Είναι $\Delta A\Gamma = \frac{MA\Gamma}{2} = \frac{\frac{BA\Gamma}{2}}{2} = \frac{BA\Gamma}{4}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$BA\Gamma + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma = 180^\circ - 2B.$$

$$\text{Τότε } \Delta A\Gamma = \frac{BA\Gamma}{4} = \frac{180^\circ - 2B}{4} = 45^\circ - \frac{B}{2}$$

δ) Από τη τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, έχουμε:

$$A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$$

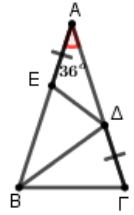
3ο Θέμα

12200. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 36^\circ$. Έστω $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B και E σημείο της πλευράς AB ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = B\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ) Η παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της ΔE (προς το E) στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B = \Gamma$ και $A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow$

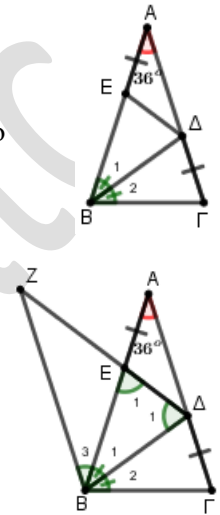
$$\Leftrightarrow 2B = 144^\circ \Leftrightarrow B = 72^\circ.$$

Επειδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της B , ισχύει ότι $B_1 = B_2 = \frac{1}{2}B = 36^\circ$. Επειδή $B_1 = A$, το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές με βάση την AB , οπότε $A\Delta = B\Delta$.

β) Είναι $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$, οπότε με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι: $AB - AE = A\Gamma - \Gamma\Delta \Leftrightarrow BE = A\Delta$. Όμως $A\Delta = B\Delta$, οπότε $BE = B\Delta$ και το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $B_3 = A = 36^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma$, BZ που τέμνονται από την AB . Επειδή το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την ΔE , είναι $\Delta_1 = E_1$. Στο τρίγωνο $B\Delta E$ είναι $B_1 + \Delta_1 + E_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 2\Delta_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 72^\circ$.

Όμως $ZB\Delta = B_1 + B_3 = 72^\circ$, άρα $ZB\Delta = \Delta_1$, οπότε το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

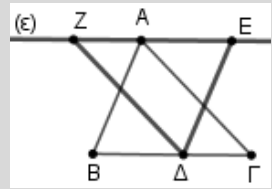


Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια

Παραλληλόγραμμα

Θέμα 2ο

13755. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη $B\Gamma$. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς την AB και AG , οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :



- α)** τα τετράπλευρα $ZAG\Delta$ και $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα.
β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

Λύση

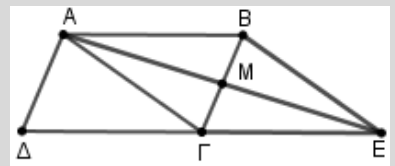
α) Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη $B\Gamma$, προκύπτει $ZA \parallel \Delta\Gamma$. Από την υπόθεση έχουμε $Z\Delta \parallel A\Gamma$. Άρα το τετράπλευρο $ZAG\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα. Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη $B\Gamma$, προκύπτει $AE \parallel B\Delta$. Από την υπόθεση έχουμε $\Delta E \parallel BA$. Άρα το τετράπλευρο $AB\Delta E$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν:

- $AB = \Delta E$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Delta E$
- $A\Gamma = \Delta Z$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $ZAG\Delta$
- $B\Gamma = ZE$, διότι $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$ και $ZE = ZA + AE$ και $B\Delta = AE$, $\Delta\Gamma = ZA$ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων $ZAG\Delta$, $AB\Delta E$ αντίστοιχα.

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

13816. Δίνεται παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $A\Delta < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι :



- α)** το τετράπλευρο $ABΕΓ$ είναι παραλληλόγραμμα.
β) τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά.

Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$ και του AE , οπότε στο τετράπλευρο $ABΕΓ$ οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμα.

β) Από το παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $\Delta\Gamma \parallel AB$ ως απέναντι πλευρές του. Όμοια από το παραλληλόγραμμα $ABΕΓ$ έχουμε $AB \parallel \Gamma E$ ως απέναντι πλευρές του. Άρα τα ευθύγραμμο τμήματα $\Delta\Gamma$ και ΓE είναι παράλληλα στην AB και επειδή έχουν κοινό σημείο το Γ , τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά.

13825. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τετράπλευρα $A\Delta MB$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα.
β) $\Delta A = AE$.

Λύση

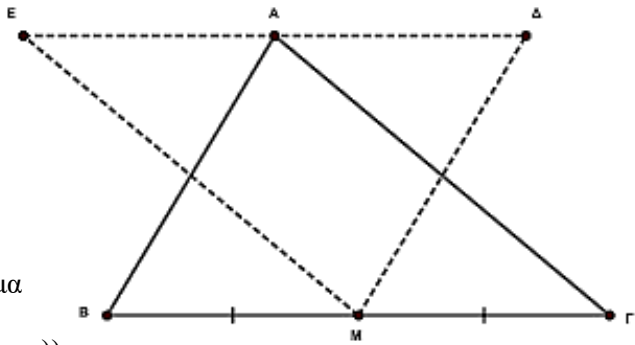
α) Το τετράπλευρο $A\Delta MB$ έχει $AB = \Delta M$ (από υπόθεση) και $AB \parallel \Delta M$ (από υπόθεση) άρα είναι παραλληλόγραμμα

αφού έχει 2 απέναντι πλευρές του, τις AB και MD παράλληλες και ίσες.

Το τετράπλευρο ΑΓΜΕ έχει $AG = EM$ (από υπόθεση) και $AG \parallel EM$ (από υπόθεση) άρα είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει 2 απέναντι πλευρές του, τις AG και EM παράλληλες και ίσες.

β) $DA = BM$ (1) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΔΜΒ (που δείξαμε στο ερώτημα α)), επίσης $AE = GM$ (2) ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΓΜΕ (που δείξαμε στο ερώτημα α)).

Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ επομένως $BM = GM$ (3). Από τις σχέσεις (1),(2),(3) έχουμε $DA = AE$.

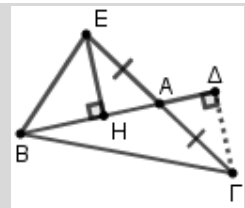


13833. Στο διπλανό σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι $AH = AD$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ έχουν:

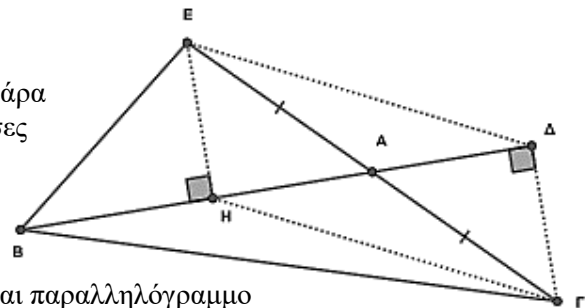
- $AG = AE$ (γιατί ΒΑ διάμεσος από υπόθεση)

- $\angle A\Gamma = \angle EAH$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΑΕΗ του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει ότι $AEH = AGD$ άρα και $AH = AD$ ως πλευρές ίσων τριγώνων απέναντι από ίσες γωνίες.

γ) Από υπόθεση έχουμε ότι ΒΑ διάμεσος του τριγώνου ΕΒΓ άρα $EA = AG$ και από το β) ερώτημα αποδείξαμε ότι $AH = AD$, άρα το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του ΕΓ και ΔΗ διχοτομούνται.



13829. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ των τμημάτων ΑΟ και ΓΟ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE = GZ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

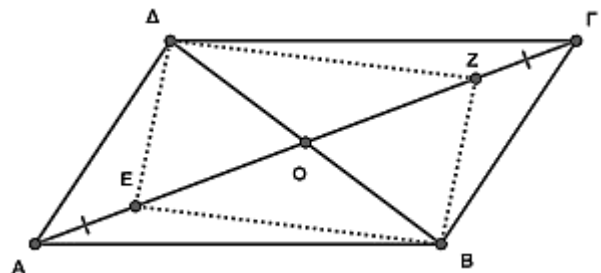
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ που έχουν:

- $AE = GZ$ (από υπόθεση)

- $AD = BG$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)

- $\angle EAD = \angle ZGB$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.



β) $OE=OA-AE$ και $OZ=OG-ZΓ$. Όμως $OA=OG$ αφού το σημείο O είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ και $AE=ZΓ$ από υπόθεση. Άρα $OE=OZ$ ως διαφορές ίσων τμημάτων. Επιπλέον $BO=OD$ αφού το σημείο O είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$, επομένως οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ΔEBZ$ διχοτομούνται και το τετράπλευρο $ΔEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

13834. Σε τυχαίο τρίγωνο $ABΓ$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $BΓ$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ=BΓ$ και προς το μέρος του $Γ$ κατά τμήμα $ΓH=BΓ$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME=AM$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

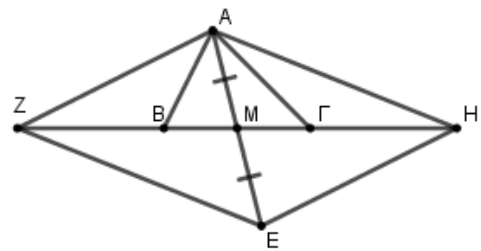
Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AMZ και EMH που έχουν:

- $AM=ME$ (υπόθεση)
- $MZ=MH$ (άθροισμα ίσων τμημάτων $MB+BZ$ και $ΜΓ+ΓH$)

- $AMZ = EMH$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.



β) Από υπόθεση έχουμε $AM=ME$ (1) και όπως χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη σύγκριση έχουμε $MZ=MH$ (2). Επομένως στο τετράπλευρο $AHEZ$ οι διαγώνιοι AE και ZH διχοτομούνται στο σημείο M , άρα το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

34386. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $AB = 2BΓ$. Προεκτείνουμε την πλευρά $AΔ$ (προς το μέρος του $Δ$) κατά τμήμα $ΔE = AΔ$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $ΔΓ$ στο H . Να αποδείξετε ότι

α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.

β) το $ΔEΓB$ είναι παραλληλόγραμμο.

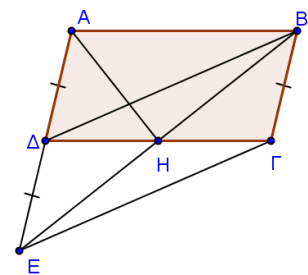
γ) η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .

Λύση

α) Επειδή το $ABΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή $AΔ = BΓ$.

Είναι $AE = AΔ + ΔE = 2AΔ = 2BΓ = AB$, άρα το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.

β) Επειδή τα σημεία $A, Δ, E$ είναι συνευθειακά και $BΓ \parallel AΔ$, είναι και $BΓ \parallel ΔE$. Όμως $BΓ = ΔE$, άρα το τετράπλευρο $ΔEΓB$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



γ) Επειδή το $ΔEΓB$ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιές του $ΓΔ$, BE διχοτομούνται στο H . Δηλαδή το H είναι μέσο του BE , οπότε η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .

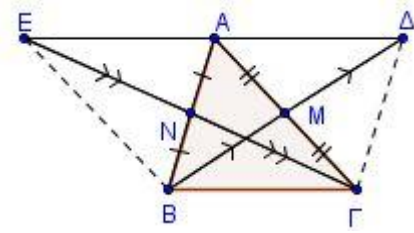
34388. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και $ΓN$. Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $MΔ = BM$ και την $ΓN$ (προς το N) κατά τμήμα $NE = ΓN$.

α) Να αποδείξετε ότι $AΔ \parallel BΓ$ και $AE \parallel BΓ$.

β) Είναι τα σημεία E, A και $Δ$ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Επειδή $AM = MG$ και $MD = BM$, οι διαγώνιες του τετράπλευρου $ABGD$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι AD , BG είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα είναι παράλληλες. Επειδή $AN = NB$ και $NE = GN$, οι διαγώνιες του τετράπλευρου $EBGA$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι AE , BG είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα είναι παράλληλες.



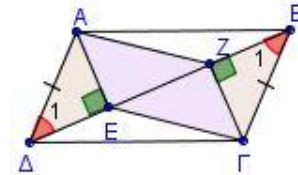
β) Οι AE και AD είναι παράλληλες στη BG , επομένως είναι και μεταξύ τους παράλληλες. Όμως έχουν κοινό σημείο το A , άρα ανήκουν στον ίδιο φορέα, δηλαδή τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά.

34389. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABGD$ και η διαγώνίός του BD . Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη BD , που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τρίγωνα ADE και ΓBZ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

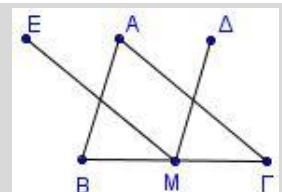
- α)** Τα ορθογώνια τρίγωνα ADE και ΓBZ έχουν:
 1) $AD = BG$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
 2) $\angle 1 = \angle 1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AD , BG που τέμνονται από την BD
 Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινουσας τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα.



β) Είναι $AE \perp BD$ και $\Gamma Z \perp BD$, άρα $AE \parallel \Gamma Z$. Όμως $AE = \Gamma Z$ γιατί τα τρίγωνα ADE και ΓBZ είναι ίσα, άρα το τετράπλευρο $AEGZ$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

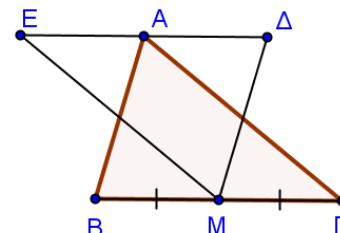
34391. Δίνεται τρίγωνο ABG . Από το μέσο M της BG φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά GA . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $\Delta A = AE$.
β) Τα σημεία Δ , A και E είναι συνευθειακά.
γ) $\Delta E = BG$.



Λύση

- α)** Επειδή τα τμήματα $M\Delta$ και BA είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο $ABMD$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και τα τμήματα $A\Delta$ και BM είναι ίσα και παράλληλα. Επειδή τα τμήματα ME και GA είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο $AEMG$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και οι πλευρές AE και MG είναι ίσες και παράλληλες. Επειδή $A\Delta = BM$ και $AE = MG = BM$ (M μέσο BG), είναι και $AE = A\Delta$.



β) Επειδή $A\Delta \parallel BM$ και $AE \parallel BM$, είναι και $AE \parallel A\Delta$. Όμως τα τμήματα AE και $A\Delta$ έχουν κοινό σημείο το A , άρα τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο φορέα, οπότε τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.

γ) Είναι $\Delta E = \Delta A + AE = BM + MG = BG$

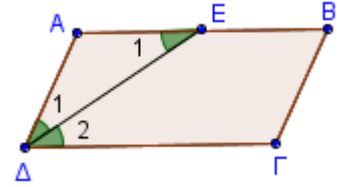
34394. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2\Delta\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β) Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

- α)** Είναι $\Delta_2 = E_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την DE και $\Delta_2 = \Delta_1$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Δ , άρα $\Delta_1 = E_1$. Το τρίγωνο $A\Delta E$ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές.
- β)** Επειδή το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την DE είναι $AE = \Delta\Delta$, όμως $AB = 2\Delta\Delta \Leftrightarrow AE + EB = 2\Delta\Delta \Leftrightarrow EB = \Delta\Delta$, οπότε το E είναι μέσο της AB .



34395. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος OG , ώστε $OE = OZ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = BZ$

β) Το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

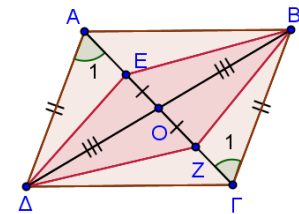
Λύση

α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

- $\Delta\Delta = B\Gamma$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου
- $\Delta E = \Gamma Z$ γιατί $OA = OG$ αφού οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου διχοτομούνται και $OE = OZ$
- $\Delta_1 = \Gamma_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta\Delta, B\Gamma$ που τέμνονται από την AG .

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta E = BZ$.

β) Επειδή $OE = OZ$ και $OB = OD$ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



34423. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς AB . Να αποδείξετε ότι:

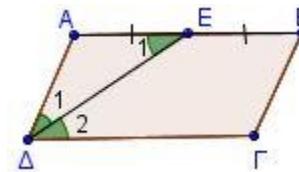
α) Το τρίγωνο $E\Delta\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

Λύση

α) Επειδή το E είναι μέσο της πλευράς AB , είναι:

$AE = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = \Delta\Delta$, άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ έχει δύο πλευρές του ίσες και είναι ισοσκελές.



β) Επειδή το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την DE , είναι $\Delta_1 = E_1$. Όμως $\Delta_2 = E_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την DE , άρα $\Delta_1 = \Delta_2$, δηλαδή η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

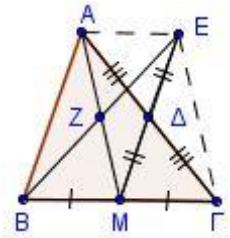
34425. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου MD του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $MD = DE$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .

Λύση

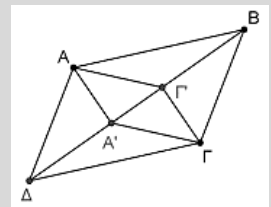
α) Επειδή $MD = DE$ και $AD = DG$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AM\Gamma E$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή το $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο οι πλευρές AE και $M\Gamma$ είναι ίσες και παράλληλες. Όμως $BM = M\Gamma$ και τα σημεία B, M, Γ είναι συνευθειακά, άρα και τα τμήματα AE και MB είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο $ABME$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Οι AE, BM είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $ABME$, άρα διχοτομούνται, δηλαδή το Z είναι το κοινό τους μέσο. Επομένως η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM .



34783. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και A', Γ' οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

- α)** $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$
β) $AA' = \Gamma\Gamma'$
γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Είναι $AA' \perp B\Delta$ και $\Gamma\Gamma' \perp B\Delta$, άρα $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$.

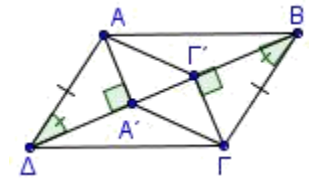
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AA'\Delta$ και $\Gamma\Gamma'B$ έχουν:

- 1) $A\Delta = B\Gamma$ γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
- 2) $\angle A\Delta A' = \angle \Gamma B \Gamma'$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων

$A\Delta, B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Delta$

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα, οπότε έχουν και $AA' = \Gamma\Gamma'$.

γ) Επειδή $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ και $AA' = \Gamma\Gamma'$, το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



36089. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του Δ και B τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

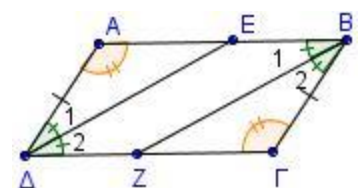
- α)** Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

- 1) $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
- 2) $\angle A = \angle \Gamma$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου
- 3) $\angle_1 = \angle_2$ γιατί είναι μισά των γωνιών B και Δ που είναι ίσες γιατί είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα είναι ίσα έχουν $\Delta E = BZ(1)$ και $AE = \Gamma Z$.

Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $AE = \Gamma Z$, είναι και $AB - AE = \Gamma\Delta - \Gamma Z \Leftrightarrow BE = \Delta Z$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

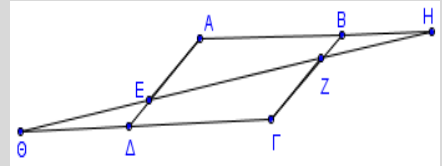
36090. Στις πλευρές AD και BC παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια, ώστε $AE = \Gamma Z$.

Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{HBZ} = \widehat{E\Delta\Theta}$

β) $\widehat{BZH} = \widehat{\Delta E\Theta}$

γ) $BH = \Theta\Delta$



Λύση

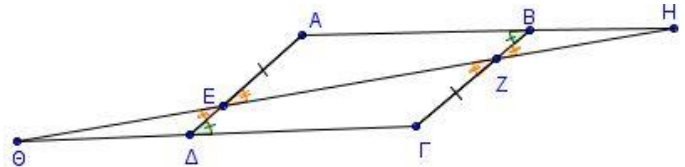
α) Είναι $B = \Delta$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, $\widehat{HBZ} = 180^\circ - B = 180^\circ - \Delta = \widehat{E\Delta\Theta}$

β) Είναι $\widehat{BZH} = \widehat{\Gamma ZE}(1)$ ως κατακορυφήν

και (2) $\widehat{\Delta E\Theta} = \widehat{AEZ}$ ως κατακορυφήν.

Όμως $\widehat{\Gamma ZE} = \widehat{AEZ}(3)$ ως εντός εναλλάξ των

παραλλήλων AD, BC που τέμνονται από την EZ οπότε από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι $\widehat{BZH} = \widehat{\Delta E\Theta}$.



γ) Τα τρίγωνα $\Delta E\Theta$ και BZH έχουν:

1) $E\Delta = BZ$, γιατί $AD = BC$ και $AE = \Gamma Z$

2) $\widehat{HBZ} = \widehat{E\Delta\Theta}$ και

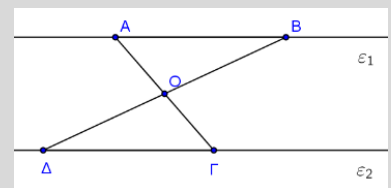
3) $\widehat{BZH} = \widehat{\Delta E\Theta}$

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BH = \Theta\Delta$.

36096. Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και τα σημεία A, B στην ϵ_1 και Δ και Γ στην ϵ_2 ώστε τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται στο μέσο O του $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

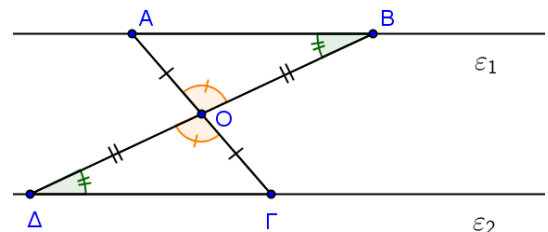
α) Τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ έχουν:

1) $BO = O\Delta$ γιατί το O είναι μέσο του $B\Delta$

2) $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma O\Delta}$ ως κατακορυφήν και

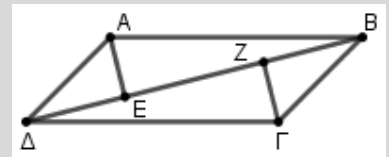
3) $\widehat{ABO} = \widehat{\Gamma\Delta O}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ϵ_1, ϵ_2 που τέμνονται από την $B\Delta$.

Με βάση το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AO = O\Gamma$, $AB = \Gamma\Delta$ και $\widehat{OAB} = \widehat{O\Gamma\Delta}$.



β) Επειδή $AO = O\Gamma$ και $BO = O\Delta$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

36105. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ φέρνουμε από τις κορυφές A και Γ καθέτους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:



Να αποδείξετε ότι:

α) $AE = GZ$

β) Το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

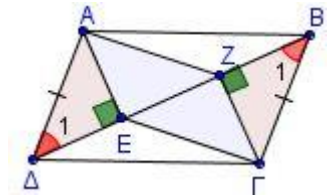
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma B Z$ έχουν:

1) $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και

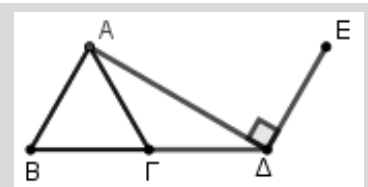
2) $\Delta_1 = B_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Delta$

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = GZ$.



β) Είναι $AE \perp B\Delta$ και $GZ \perp B\Delta$, άρα $AE \parallel GZ$. Όμως $AE = GZ$ από α) ερώτημα, άρα το τετράπλευρο $AEGZ$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

36115. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα ΔE κάθετο στην $A\Delta$ στο σημείο της Δ , τέτοιο, ώστε $\Delta E = B\Gamma$. (Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη $B\Delta$).



α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι το $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι

$BA\Gamma = \Gamma = B = 60^\circ$. Τότε $\Gamma_{εξ} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

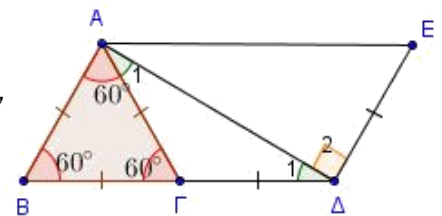
Επειδή $\Gamma\Delta = B\Gamma = A\Gamma$, το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Delta$, άρα $A_1 = \Delta_1$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$A_1 + \Delta_1 + \Gamma_{εξ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\Delta_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 30^\circ, \text{ άρα και } A_1 = 30^\circ. \text{ Άρα: } BA\Delta = BA\Gamma + A_1 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ.$$

Επομένως οι γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$ είναι: $BA\Delta = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $\Delta_1 = 30^\circ$



β) Είναι $BA\Delta = 90^\circ$, άρα $BA \perp A\Delta$. Όμως και $\Delta E \perp A\Delta$, άρα $AB \parallel \Delta E$.

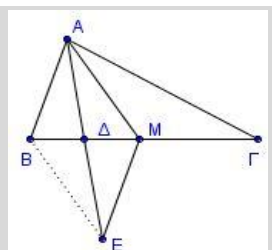
Είναι ακόμη $\Delta E = B\Gamma = AB$, οπότε το τετράπλευρο $AB\Delta E$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

36164. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκταση της ώστε $A\Delta = \Delta E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $ME = M\Gamma$.

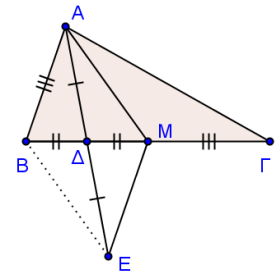


Λύση

α) Επειδή $AD = DE$ και $BD = DM$ (αφού η AD είναι διάμεσος στο τρίγωνο ABM) οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ABEM$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι $ME = AB$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και

$$BG = 2AB \Leftrightarrow AB = \frac{BG}{2} = MG, \text{ άρα } ME = MG.$$

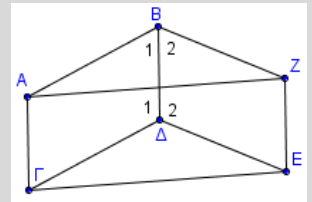


36327. Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $\hat{A}\hat{B}Z = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E$



Λύση

α) Επειδή το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσες και παράλληλες. Επειδή το $B\Delta EZ$ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του $B\Delta$ και ZE είναι ίσες και παράλληλες. Άρα οι $A\Gamma$ και ZE είναι ίσες και παράλληλες, οπότε και το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Οι γωνίες B_1, Δ_1 είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα $B_1 + \Delta_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 180^\circ - B_1$

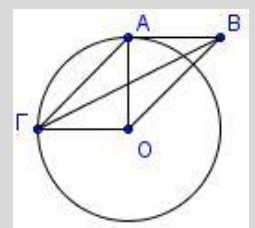
Οι γωνίες B_2, Δ_2 είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $BZ, \Delta E$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα $B_2 + \Delta_2 = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta_2 = 180^\circ - B_2$.

$$\text{Είναι } \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E = 360^\circ - \Delta_1 - \Delta_2 = 360^\circ - (180^\circ - B_1) - (180^\circ - B_2) = B_1 + B_2 = \hat{A}\hat{B}Z$$

36348. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA, OG και εφαπτόμενο στο κύκλο τμήμα AB με $AB = OG$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABOG$.

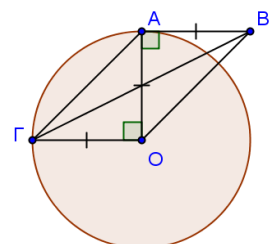


Λύση

α) Επειδή η OA είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη AB , είναι $OA \perp AB$. Όμως $OA \perp OG$, άρα $AB \parallel OG$. Επειδή $AB = OG$ και $AB \parallel OG$, στο τετράπλευρο $ABOG$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι AO και $B\Gamma$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.

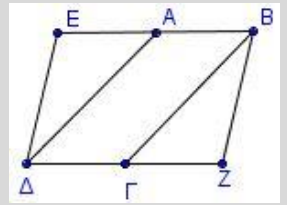
β) Επειδή $AB = OA = \rho$, το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\hat{B} = \hat{BOA} = 45^\circ$. Είναι $\hat{A}\hat{G}O = \hat{B} = 45^\circ$ γιατί είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.

Είναι $\hat{BOG} = \hat{BOA} + \hat{AOG} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ και $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{B} = \hat{BOG} = 135^\circ$ γιατί είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.



36225. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

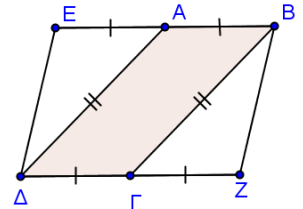
- α)** Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $E\Delta\Delta$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

- 1) $AE = AB = \Gamma\Delta = \Gamma Z$ (τα $AB, \Gamma\Delta$ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου)
 - 2) $\Delta\Delta = B\Gamma$ γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου και
 - 3) $B\Gamma Z = E\Delta\Delta$ γιατί είναι παραπληρωματικές των γωνιών A, Γ που είναι ίσες γιατί είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.
- Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή $BZ = E\Delta$ και $EB = 2AB = 2\Gamma\Delta = \Delta Z$, το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και είναι παραλληλόγραμμο.

37015. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

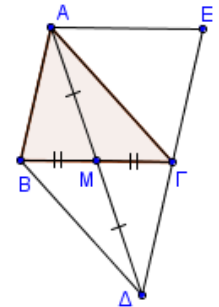
α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $BM = \frac{AE}{2}$.

Λύση

α) Επειδή $BM = M\Gamma$ και $M\Delta = MA$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AB\Delta\Gamma$ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή το $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Άρα και οι AB και ΓE είναι παράλληλες. Επειδή και οι $AE, B\Gamma$ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $AE = B\Gamma$, γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, ισχύει ότι: $BM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AE}{2}$.



Θέμα 4ο

1709. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία Γ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας A . Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax \parallel B\Gamma$ στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

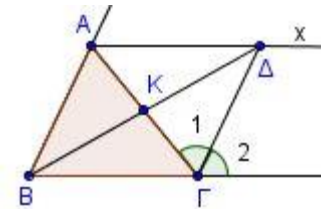
α) Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$.

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{εξ}$.

γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

Λύση

α) Επειδή τα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Οι $A\Gamma$, $B\Delta$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου και διχοτομούνται, δηλαδή η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο K της $A\Gamma$.



β) Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οι AB , $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες.

Είναι $\Gamma_1 = B\Delta\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.

Όμως $\Gamma_{εξ} = 2A \Leftrightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 = 2A \Leftrightarrow A + \Gamma_2 = 2A \Leftrightarrow \Gamma_2 = A$, δηλαδή $\Gamma_1 = \Gamma_2$, οπότε η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της $\Gamma_{εξ}$.

γ) Γνωρίζουμε ότι κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο μέσα και απέναντι γωνιών του, άρα $\Gamma_{εξ} = A + B$. Όμως $\Gamma_{εξ} = 2A$, άρα $2A = A + B \Leftrightarrow A = B$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

1730. Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ επιπλέον ισχύει $AB > A\Delta$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔE και BZ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και B .

α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Ισχυρισμός 1

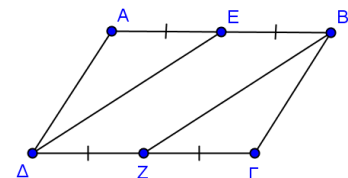
Είναι $\Delta Z = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = EB$ και $\Delta Z \parallel EB$ αφού $\Delta\Gamma \parallel AB$, οπότε το τετράπλευρο ΔEBZ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2

Επειδή το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι

$$\Delta EB = BZ\Delta \Leftrightarrow 180^\circ - A\hat{E}\Delta = 180^\circ - B\hat{Z}\Gamma \Leftrightarrow A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma.$$

2ος τρόπος: $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες



β) Ισχυρισμός 3

Έστω ότι η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ . Τότε $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}Z$.

Όμως $A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $E\Delta$, άρα

$\triangle ADE = \triangle AED$ και το τρίγωνο $\triangle ADE$ είναι ισοσκελές, δηλαδή $AE = AD$.

Είναι $AD = AE = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2AD$, δηλαδή τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle BZG$ είναι ισοσκελή στη περίπτωση που η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.

1731. Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και GD παραλληλογράμμου $ABGD$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $ABGD$ επιπλέον ισχύουν $AB > GD$ και η γωνία A είναι αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο $DEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle BZG$ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle BZG$ είναι ισοσκελή.

α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.

β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) **Ισχυρισμός 1**

Είναι $DZ = \frac{DG}{2} = \frac{AB}{2} = EB$ και $DZ \parallel EB$ αφού $DG \parallel AB$, οπότε το

τετράπλευρο $DEBZ$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2

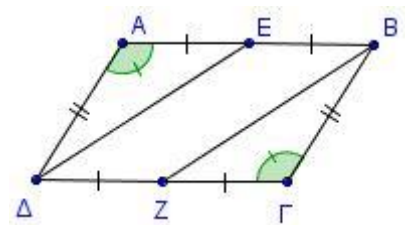
Τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle BZG$ έχουν:

1) $AD = BG$ γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου

2) $AE = \frac{AB}{2} = \frac{DG}{2} = ZG$

3) $\angle A = \angle G$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) **Ισχυρισμός 3**

Έστω ότι τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle BZG$ είναι ισοσκελή. Τότε $AD = AE = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2AD$

Δηλαδή τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle BZG$ είναι ισοσκελή στη περίπτωση που η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι διπλάσια της άλλης.

1746. Στο κυρτό εξάγωνο $ABGD\epsilon Z$ ισχύουν τα εξής:

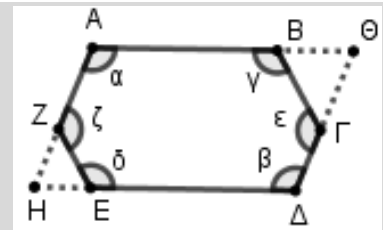
$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}, \quad \hat{\gamma} = \hat{\delta} \quad \text{και} \quad \hat{\epsilon} = \hat{\zeta}.$$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$.

β) Αν οι πλευρές AZ και DE προεκτεινόμενες τέμνονται στο H και οι πλευρές AB και DG προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ , να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες A και H είναι παραπληρωματικές.

ii. Το τετράπλευρο $A\Theta D H$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}, \quad \hat{\gamma} = \hat{\delta} \quad \text{και} \quad \hat{\epsilon} = \hat{\zeta}. (*)$$

α) Για τις γωνίες του εξαγώνου ισχύει ότι:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\delta} + \hat{\epsilon} + \hat{\zeta} = (6-2)180^\circ = 720^\circ \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} 2\hat{\alpha} + 2\hat{\gamma} + 2\hat{\epsilon} = 720^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon} = 360^\circ \quad (1)$$

β) i. Είναι $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} + \hat{\delta} + \hat{\zeta} = 360^\circ$ (2)

Οι γωνίες $\hat{H}\hat{Z}E, \hat{\zeta}$ και $\hat{H}\hat{E}Z, \hat{\delta}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές.

Άρα $\hat{H}\hat{Z}E + \hat{\zeta} = 180^\circ$ και $\hat{H}\hat{E}Z + \hat{\delta} = 180^\circ$ (3)

Στο τρίγωνο HZE ισχύει ότι: $\hat{H} + \hat{H}\hat{Z}E + \hat{H}\hat{E}Z = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{H} + 180^\circ - \hat{\zeta} + 180^\circ - \hat{\delta} = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$\hat{H} = \hat{\delta} + \hat{\zeta} - 180^\circ \stackrel{(2)}{=} 360^\circ - \hat{\alpha} - 180^\circ = 180^\circ - \hat{\alpha} \Leftrightarrow \hat{H} + \hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{H} + \hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{H} + \hat{A} = 180^\circ$$

ii. Επειδή οι γωνίες H και A είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΑΘ, ΗΔ που τέμνονται από την ΑΗ και επίσης είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΘ, ΗΔ είναι παράλληλες.

Οι γωνίες $\Theta\hat{B}\Gamma, \hat{\gamma}$ και $\Theta\hat{\Gamma}B, \hat{\varepsilon}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Άρα $\Theta\hat{B}\Gamma + \hat{\gamma} = 180^\circ$ και

$\Theta\hat{\Gamma}B + \hat{\varepsilon} = 180^\circ$ (4). Στο τρίγωνο ΘΒΓ είναι:

$$\hat{\Theta} + \Theta\hat{B}\Gamma + \Theta\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Theta} + 180^\circ - \hat{\gamma} + 180^\circ - \hat{\varepsilon} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

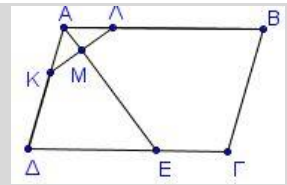
$$\hat{\Theta} = \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon} - 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{\Theta} = 360^\circ - \hat{\alpha} - 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Theta} = 180^\circ - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{\Theta} + \hat{A} = 180^\circ.$$

Επειδή οι γωνίες Α, Θ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΑΗ, ΘΔ που τέμνονται από την ΑΘ και είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΗ και ΘΔ είναι παράλληλες.

Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

1785. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$. **β)** $B\Gamma + \Gamma E = AB$. **γ)** $\hat{B} = 2 \cdot \hat{A}\hat{L}\hat{K}$



Λύση

α) Επειδή $AK = AL$, το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές και η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ΚΛ, άρα η ΑΜ είναι και διχοτόμος της γωνίας Α, δηλαδή $\hat{KAM} = \hat{MAL}$.

Όμως $\hat{MAL} = \hat{AED}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ, άρα $\hat{KAM} = \hat{AED}$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΕ, άρα $AD = DE$.

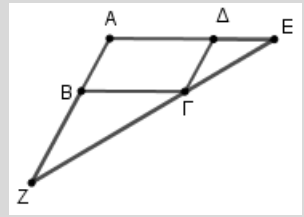
β) Είναι $DE = AD = B\Gamma$, οπότε $B\Gamma + \Gamma E = DE + \Gamma E = DG = AB$

γ) Από το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΚΛ έχουμε:

$A + \hat{AKL} + \hat{ALK} = 180^\circ \Leftrightarrow A + 2 \cdot \hat{ALK} = 180^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \hat{ALK} = 180^\circ - A$ (1). Οι γωνίες Α και Β είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, οπότε είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή $A + B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 180^\circ - A$ (2).

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $B = 2 \cdot \hat{ALK}$.

1805. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της $A\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στη προέκταση της AB θεωρούμε σημείο Z τέτοιο, ώστε $BZ = B\Gamma$.



α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta\Gamma E}$

ii. Τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.

β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό.

«Έχουμε: $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE) και $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta\Gamma E}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $\Delta\Gamma$). Όμως $\widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{\Gamma\Delta E} + \widehat{\Delta\Gamma\Gamma} = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta\Gamma E$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα : $\widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{B\Gamma Z} = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

Λύση

α) i. Επειδή $BZ = B\Gamma$, το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι B ισοσκελές οπότε

$$\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{BZE}.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $B\Gamma Z$ έχουμε:

$$\widehat{B\Gamma Z} + \widehat{B\Gamma Z} + \widehat{B\Gamma\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$180^\circ - \widehat{B} + 2\widehat{B\Gamma Z} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Gamma Z} = \frac{\widehat{B}}{2} \quad (1).$$

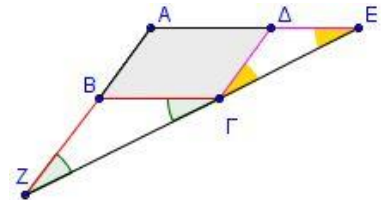
Επειδή $\Delta E = \Delta\Gamma$, το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι: $\widehat{\Delta\Gamma E} = \widehat{\Delta\Gamma E}$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Gamma\Delta E$, έχουμε:

$$\widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{\Gamma\Delta E} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Delta\Gamma E} + 180^\circ - \widehat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta\Gamma E} = \frac{\widehat{\Delta}}{2} \quad (2).$$

Όμως $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου, άρα από τις σχέσεις (1), (2)

προκύπτει ότι $\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{\Delta\Gamma E}$.



ii. Σκέψη: Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά θα δείξουμε ότι η γωνία που σχηματίζουν $(\widehat{Z\Gamma E})$ είναι ευθεία γωνία.

Επειδή οι γωνίες Γ και Δ του παραλληλογράμμου είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Delta, B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Gamma\Delta$, είναι παραπληρωματικές.

Είναι $\widehat{B\Gamma Z} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta\Gamma E} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{\Delta}}{2} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{\Gamma} + \widehat{B} = 180^\circ$, άρα τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά

β) Ο μαθητής χρησιμοποίησε ως δεδομένο ότι τα Z, Γ, E είναι συνευθειακά και το χρησιμοποίησε για να δείξει ότι οι γωνίες $B\Gamma Z$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσες.

1810. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το ΓA (τα σημεία Δ και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.

β) Η περίμετρος του τριγώνου $M\Delta E$ είναι ίση με την περίμετρο του.

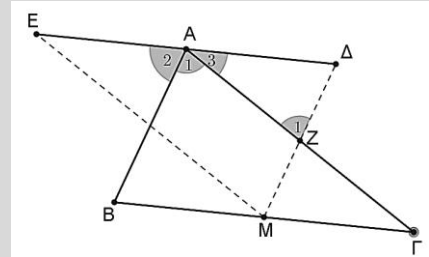
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής :

$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των $AB//M\Delta$ που τέμνονται από AZ)

$\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB//M\Delta$ που τέμνονται από DE). Όμως

$\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta Z$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ, A, E συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;



Λύση

α) $M\Delta // BA$ οπότε το τετράπλευρο $BADM$ είναι παραλληλόγραμμο και $A\Delta // BM$. Όμοια $ME // \Gamma A$ οπότε το τετράπλευρο $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμο και $AE // M\Gamma$. Από το A έχουμε $AE // B\Gamma$ και $A\Delta // B\Gamma$ άρα τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.

β) Αν Π η περίμετρος του τριγώνου $ME\Delta$ και Π_1 η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε $\Pi = ME + M\Delta + \Delta E = A\Gamma + AB + EA + A\Delta = A\Gamma + AB + M\Gamma + BM = A\Gamma + AB + B\Gamma = \Pi_1$

γ) Το λάθος υπάρχει στον συλλογισμό $\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ γιατί χρησιμοποιεί την ΔAE σαν ευθεία χωρίς να γνωρίζει αν τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά.

13742. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε $BK \perp B\Gamma$ έτσι ώστε $BK = A\Gamma$ (το σημείο K είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A).

α) Να αποδείξετε ότι $AM // BK$ και $AB = BK$.

β) Να δείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM .

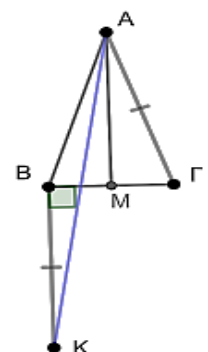
γ) Να αποδείξετε ότι $\hat{BKA} = 45^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

δ) Μπορεί το τετράπλευρο $ABKM$ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, το τμήμα AM είναι η διάμεσος προς τη βάση του $B\Gamma$, οπότε το AM είναι και ύψος και διχοτόμος της γωνίας A . Δηλαδή $AM \perp B\Gamma$ και επιπλέον οι γωνίες BAM και ΓAM είναι ίσες. Από την κατασκευή $KB \perp B\Gamma$ και επειδή $AM \perp B\Gamma$, τότε $AM // KB$, ως κάθετες στη $B\Gamma$ σε διαφορετικά σημεία της. Επιπλέον δίνεται ότι $BK = A\Gamma$ και ξέρουμε ότι οι πλευρές AB και $A\Gamma$ είναι ίσες, οπότε $AB = BK$.

β) Δείξαμε στο ερώτημα α) ότι $AB = BK$, άρα το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{BAK} = \hat{BKA}$. Επιπλέον έχουμε ότι $AM // BK$, οπότε οι γωνίες KAM και BKA θα είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των $AM // BK$ που τέμνονται από την AK .



Άρα ισχύει ότι $\angle BAK = \angle BKA = \angle KAM$ (1) οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΜ.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΚ οι τρεις γωνίες του έχουν άθροισμα 180° , δηλαδή $\angle BAK + \angle KBA + \angle BKA = 180^\circ$. Επιπλέον $\angle KBA = \angle AB\Gamma + 90^\circ$, οπότε λόγω της (1) έχουμε:

$$2\angle BKA + \angle B + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle BKA + \angle B = 90^\circ.$$

Όμως οι γωνίες Β και Γ είναι ίσες ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, οπότε

$$2\angle BKA = 90^\circ - \angle \Gamma \Leftrightarrow \angle BKA = 45^\circ - \frac{\angle \Gamma}{2}.$$

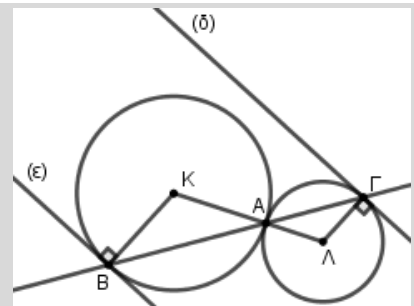
δ) Το τετράπλευρο ΑΒΚΜ έχει τις δυο απέναντι πλευρές του ΑΜ και ΒΚ παράλληλες. Αν ήταν παραλληλόγραμμο οι ΑΜ και ΒΚ θα ήταν και ίσες. Αν $AM = BK$ τότε θα ισχύει ότι $AM = AB$. Όμως τα τμήματα ΑΜ και ΑΒ είναι κάθετο και πλάγιο τμήμα αντίστοιχα προς τη ΒΓ, οπότε ισχύει ότι $AM < AB$. Συνεπώς έχουμε ότι $AM < KB$ και το τετράπλευρο ΑΒΚΜ δεν μπορεί να είναι παραλληλόγραμμο.

13845. Οι κύκλοι (K, R) , (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle KBA = \angle \Gamma A$.

β) $(\epsilon) \parallel (\delta)$.

γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο ΚΓΛΒ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



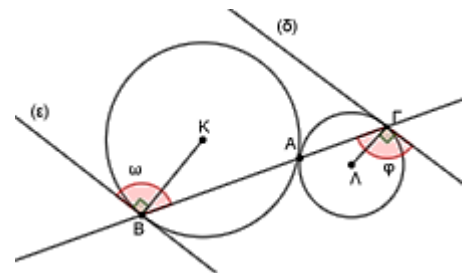
Λύση

α) Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές με $KB = KA$, ως ακτίνες του κύκλου (K, R) . Άρα $\angle KBA = \angle KAB$ (1). Το τρίγωνο ΑΛΓ είναι ισοσκελές με $LA = LG$, ως ακτίνες του κύκλου (Λ, ρ) . Άρα $\angle LA\Gamma = \angle LGA$ (2). Οι γωνίες ΚΑΒ και ΛΑΓ είναι κατακορυφήν, οπότε είναι ίσες. Άρα από τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει $\angle KBA = \angle \Gamma A$.

β) Έστω ω και ϕ οι γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα.

Για τις γωνίες ω , ϕ έχουμε $\hat{\omega} = 90^\circ + \angle KBA$ και $\hat{\phi} = 90^\circ + \angle \Gamma A$.

Από το ερώτημα (α) οι γωνίες ΚΒΑ και ΛΓΑ είναι ίσες, οπότε και οι γωνίες ω , ϕ είναι ίσες. Οι ίσες γωνίες ω και ϕ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών (ε) και (δ) που τέμνονται από τη ΒΓ, συνεπώς $(\epsilon) \parallel (\delta)$.

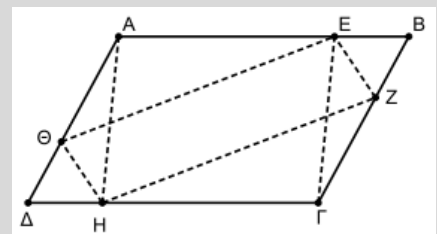


37108. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta \Theta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Λύση

α) Επειδή $AB \parallel \Gamma \Delta$ είναι και $AE \parallel \Gamma H$. Όμως είναι και $AE = \Gamma H$, άρα το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο γιατί δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

β) Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΔΗΘ έχουν:

1) $BZ = \Delta\Theta$

2) $\Delta H = BE$ γιατί $(\Delta H = \Delta\Gamma - H\Gamma = AB - AE = BE)$ και

3) $\hat{A} = \hat{B}$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και $\Theta H = EZ$ (1).

Τα τρίγωνα $A\Theta E$ και $\Gamma H Z$ έχουν:

1) $AE = \Gamma H$

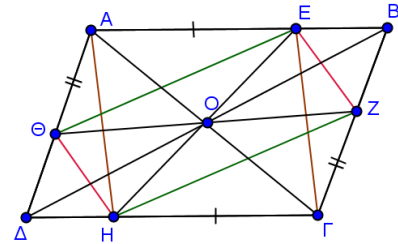
2) $A\Theta = \Gamma Z$ ($A\Theta = A\Delta - \Theta\Delta = B\Gamma - BZ = \Gamma Z$) και

3) $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Theta E = HZ$ (2). Από τις (1), (2) το τετράπλευρο $EZH\Theta$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα $EH, Z\Theta$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $EZH\Theta$, οπότε διχοτομούνται σε σημείο O . Τα AG, EH είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $AHGE$, οπότε διχοτομούνται.

Όμως το μέσο της EH είναι το O , άρα το O είναι μέσο και της AG . Οι AG, BD είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $ABGD$, άρα διχοτομούνται. Όμως η AG έχει μέσο το O , άρα και η BD έχει μέσο το O . Τελικά τα τμήματα AG, BD, EH και $Z\Theta$ έχουν κοινό μέσο το O .

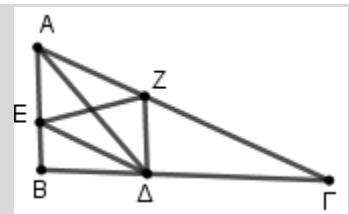


37117. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει ότι $A\Delta = \Delta\Gamma$. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$ και η ΔZ παράλληλη στην AB . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $E\Delta$ και $A\Gamma$ είναι παράλληλα.

β) Το τρίγωνο $E\Delta A$ είναι ισοσκελές.

γ) Τα τμήματα $A\Delta$ και EZ διχοτομούνται.

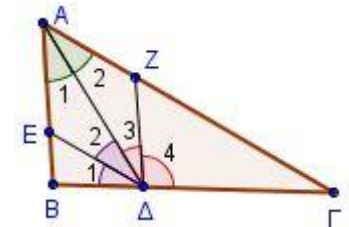


Λύση

α) Επειδή $A\Delta = \Delta\Gamma$, το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$, άρα $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = \omega$. Η γωνία $B\Delta A$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, άρα

$$B\hat{\Delta}A = \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} = 2\omega. \text{ Είναι } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \frac{B\hat{\Delta}A}{2} = \frac{2\omega}{2} = \omega.$$

Οι γωνίες $E\hat{\Delta}A$ και $\hat{A}_2$ είναι εντός εναλλάξ των $\Delta E, A\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Delta$ και είναι ίσες με ω , άρα τα τμήματα ΔE και $A\Gamma$ είναι παράλληλα.



β) Είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_2 = \omega$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Delta$.

γ) Επειδή $\Delta Z \parallel AB$ και $\Delta E \parallel A\Gamma$, στο τετράπλευρο $A\Delta Z E$ οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Τα $A\Delta$ και EZ είναι διαγώνιες παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται.

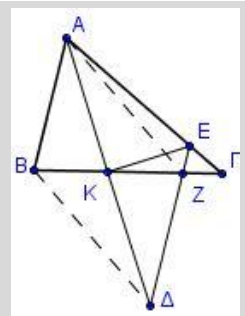
37131. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β) Η EK είναι μεσοκάθετος του $A\Delta$.

γ) Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα.

δ) Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Είναι $A_1 = \Delta_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την $A\Delta$ και $A_1 = A_2$ λόγω της διχοτόμησης, άρα είναι και $A_2 = \Delta_1$ οπότε το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

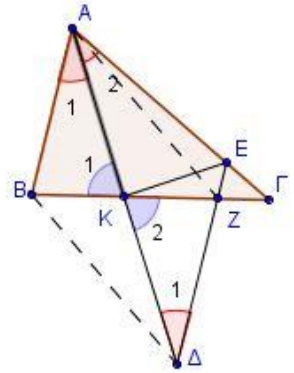
β) Η EK είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου AED , άρα είναι και ύψος του, δηλαδή η EK είναι μεσοκάθετος του AD .

γ) Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ έχουν:

- 1) $AK = K\Delta$
- 2) $K_1 = K_2$ ως κατακορυφήν
- 3) $A_1 = \Delta_1$

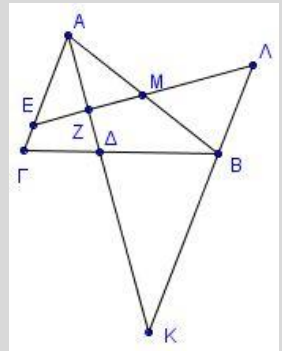
Με βάση το κριτήριο $\Gamma\Pi\Gamma$ τα τρίγωνα είναι ίσα.

δ) Επειδή τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα, έχουν και $BK = KZ$, όμως είναι και $AK = K\Delta$, δηλαδή στο τετράπλευρο $AZ\Delta B$ οι διαγωνίες του διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



37160. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην $A\Delta$ τέμνει το $A\Gamma$ στο E . Η παράλληλη από το B στο $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο K και την προέκταση της EM στο Λ . Να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τρίγωνα AEM , $MB\Lambda$ και ABK είναι ισοσκελή.
β) Το τετράπλευρο $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Έστω Z το σημείο τομής των AD, ME . Η AZ είναι ύψος και διχοτόμος στο τρίγωνο AEM , άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $AE = ME$.

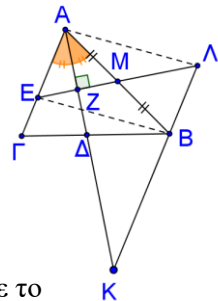
Είναι $AEM = M\Lambda B$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma, \Lambda K$ που τέμνονται από την $E\Lambda$ και $AME = BM\Lambda$ ως κατακορυφήν, άρα $BM\Lambda = M\Lambda B$, οπότε το τρίγωνο $BM\Lambda$ είναι ισοσκελές.

Είναι $\Gamma A\Delta = K$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma, K\Lambda$ που τέμνονται από την AK και $\Gamma A\Delta = \Delta AB$ γιατί η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A , άρα $\Delta AB = K$, οπότε το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα AEM και $MB\Lambda$ έχουν:

- 1) $AM = MB$
- 2) $AME = BM\Lambda$ ως κατακορυφήν και
- 3) $AEM = M\Lambda B$

άρα από το κριτήριο $\Gamma\Pi\Gamma$, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ME = M\Lambda$. Στο τετράπλευρο $A\Lambda BE$ τα $E\Lambda, AB$ είναι διαγωνίες του που διχοτομούνται στο M , οπότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.



Θέμα 3ο

11897. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AM που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Gamma = GE$.

β) Το τετράπλευρο $AM\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα.

γ) $\hat{B} + \hat{B}\hat{A}M = \hat{G}\hat{E}\Delta$

Λύση

α) Τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και $GE\Delta$ έχουν:

- $A\Gamma = \Gamma\Delta$ (υπόθεση)

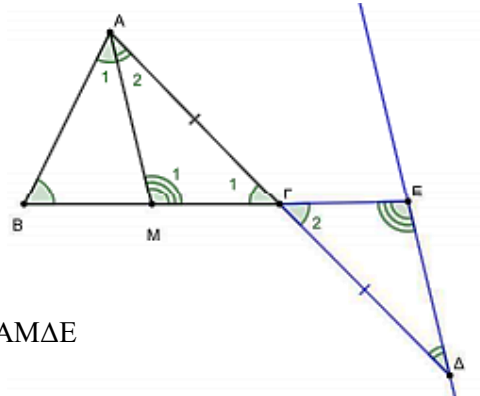
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ ως κατακορυφήν

- $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AM , ΔE που τέμνονται από την $A\Delta$.

Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και $GE\Delta$ είναι ίσα, οπότε έχουν και $M\Gamma = GE$.

β) Επειδή $M\Gamma = GE$ και $A\Gamma = \Gamma\Delta$ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AM\Delta E$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμα.

γ) Στο τρίγωνο BAM η γωνία $\hat{M}_1$ είναι εξωτερική, οπότε $\hat{M}_1 = \hat{B} + \hat{B}\hat{A}M$. Όμως $\hat{M}_1 = \hat{G}\hat{E}\Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AM , $E\Delta$ που τέμνονται από την ME , άρα $\hat{B} + \hat{B}\hat{A}M = \hat{G}\hat{E}\Delta$.



ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

2ο Θέμα

34781. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = M\Gamma$

β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία M και N είναι μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

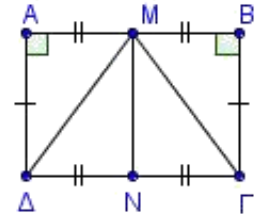
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\Delta$ και $MB\Gamma$ έχουν:

1) $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές ορθογωνίου

2) $AM = MB$ γιατί το M είναι μέσο του AB .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M\Delta = M\Gamma$.



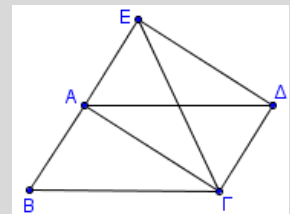
β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $M\Gamma\Delta$ το MN είναι διάμεσος, άρα είναι και ύψος, δηλαδή το MN είναι μεσοκάθετος του $\Gamma\Delta$.

36175. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο A είναι μέσο του BE .

β) Το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

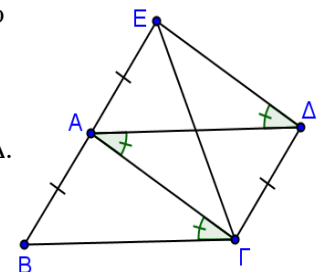
γ) $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{A\Delta E}$



Λύση

α) Είναι $AB = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και $AE = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $A\Gamma\Delta E$, άρα είναι και $AB = AE$, δηλαδή το A είναι μέσο του BE .

β) Είναι $B\Gamma = A\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Όμως $A\Delta = \Gamma E$ γιατί οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες, άρα $B\Gamma = \Gamma E$, οπότε το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές.



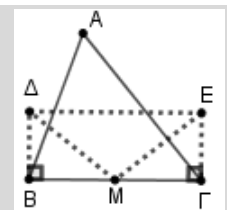
γ) Είναι $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{\Gamma A \Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$ και $\widehat{A\Delta E} = \widehat{\Gamma A \Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma$, ΔE που τέμνονται από την $A\Delta$, άρα είναι και $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{A\Delta E}$.

36339. Στο σχήμα που ακολουθεί, το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, και τα τμήματα $B\Delta$ και $E\Gamma$ είναι κάθετα στη $B\Gamma$ στα σημεία B , Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

β) το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

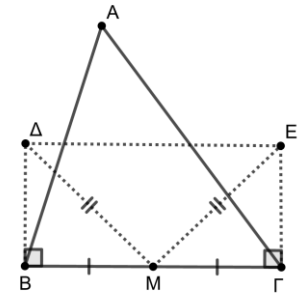


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\Gamma E$ έχουν:

- 1) $MB = MG$ επειδή το M είναι μέσο του $BΓ$ και
 2) $MD = ME$, άρα τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.
 Επομένως $BD = GE$

β) Επειδή $BD \perp BΓ$ και $GE \perp BΓ$ είναι $BD \parallel GE$. Επιπλέον $BD = GE$ γιατί τα τρίγωνα BDM και MGE είναι ίσα, οπότε στο τετράπλευρο $BDEΓ$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\angle BΓ = 90^\circ$, το τετράπλευρο $BDEΓ$ είναι ορθογώνιο.



36353. Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δύο διαμέτρους AB και $ΓΔ$.
 Να αποδείξετε ότι:

- α)** Οι χορδές $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του κύκλου είναι ίσες.
β) Το τετράπλευρο $ΑΓΒΔ$ είναι ορθογώνιο.

Λύση

- α)** Τα τρίγωνα $ΟΑΓ$ και $ΟΒΔ$ έχουν:
 1) $ΟΑ = ΟΒ = ρ$
 2) $ΟΓ = ΟΔ = ρ$ όπου $ρ$ η ακτίνα του κύκλου και
 3) $\angle ΑΟΓ = \angle ΒΟΔ$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΓ = ΒΔ$.

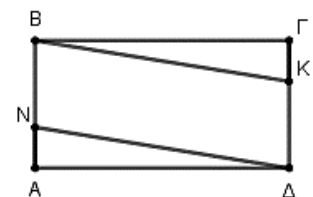
β) Επειδή $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ρ$, οι διαγώνιες $ΑΒ, ΓΔ$ του τετραπλεύρου $ΑΓΒΔ$ διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

37008. Έστω ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ και τα σημεία N και K των $ΑΒ$ και $ΔΓ$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΑΝ = ΚΓ$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** τα τρίγωνα $ΑΝΔ$ και $ΒΓΚ$ είναι ίσα.
β) το τετράπλευρο $ΝΒΚΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

- α)** Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΝΔ$ και $ΒΓΚ$ έχουν:
 - $ΑΝ = ΓΚ$ (υπόθεση)
 - $ΑΔ = ΒΓ$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου
 Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα.



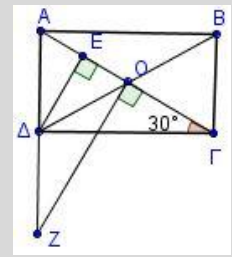
- β)** Είναι $ΑΒ = ΓΔ$ και $ΑΝ = ΓΚ$, οπότε και $ΑΒ - ΑΝ = ΓΔ - ΓΚ \Leftrightarrow ΒΝ = ΚΔ$
 Ακόμη επειδή τα τρίγωνα $ΑΝΔ$ και $ΒΓΚ$ είναι ίσα, έχουν και $ΔΝ = ΒΚ$.
 Το τετράπλευρο $ΝΒΚΔ$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και είναι

4ο Θέμα

1729. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{\Delta}\Gamma A = 30^\circ$ και O το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\Delta\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔE και τη διαγώνιο ΔB σε τρεις ίσες γωνίες.

β) Φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο O η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο Z . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ είναι ίσα.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta A\Gamma + \Delta\Gamma A = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta A\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta A\Gamma = 60^\circ$$

Οι $A\Gamma$, $B\Delta$ είναι διαγώνιες του ορθογώνιου και είναι ίσες, άρα και $OA = OD$ ως μισά των ίσων διαγωνίων. Το τρίγωνο $O\Delta\Delta$ έχει $OA = OD$ και $\Delta A\Gamma = 60^\circ$, οπότε είναι ισόπλευρο. Το ΔE είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα είναι και διχοτόμος του, δηλαδή $\Delta\Delta E = E\Delta O = 30^\circ$.

Είναι $\Delta O\Gamma = 90^\circ - \Delta\Delta O = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Επειδή $\Delta\Delta E = E\Delta O = \Delta O\Gamma = 30^\circ$, η γωνία $A\Delta\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔE και τη διαγώνιο ΔB σε τρεις ίσες γωνίες.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ έχουν:

- 1) $OA = B\Gamma$ γιατί $OA = A\Delta$ από το ισόπλευρο $O\Delta\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές στο ορθογώνιο
- 2) $\Delta\Gamma B = 90^\circ - \Delta\Gamma\Delta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ = \Delta A\Gamma$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

1733. Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο O και τυχαίο σημείο M του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:

i. $OM = OM_1$.

ii. Τα σημεία M , O και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό του M_2 ως προς την ε_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

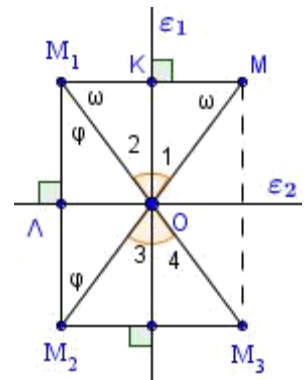
α) i. Επειδή το M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 , η ε_1 είναι μεσοκάθετος του MM_1 . Το O ανήκει στη μεσοκάθετο του MM_1 , οπότε ισαπέχει από τα M και M_1 , δηλαδή $OM = OM_1$.

ii. Επειδή το τρίγωνο OMM_1 είναι ισοσκελές με βάση τη MM_1 είναι

$$OMM_1 = OM_1M = \omega.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OMM_1 , έχουμε:

$$MOM_1 + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow MOM_1 = 180^\circ - 2\omega \quad (1)$$



Επειδή το M_2 είναι το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , η ε_2 είναι μεσοκάθετος του M_2M_1 . Το τρίγωνο OM_1M_2 είναι ισοσκελές με βάση τη M_1M_2 , άρα $OM_1M_2 = OM_2M_1 = \varphi$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OM_2M_1 , έχουμε:

$$M_2OM_1 + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow M_2OM_1 = 180^\circ - 2\varphi \quad (1)$$

Επειδή $MM_1 \perp \varepsilon_1$, $M_1M_2 \perp \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$, είναι και $M_1M_2 \perp MM_1$, άρα $MM_1M_2 = \omega + \varphi = 90^\circ$

$MOM_2 = MOM_1 + M_2OM_1 = 180^\circ - 2\omega + 180^\circ - 2\varphi = 360^\circ - 2(\omega + \varphi) = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ άρα τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Είναι $MM_1M_2 = \omega + \varphi = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

β) Είναι $M_2M_3 \perp \varepsilon_1$, άρα $M_2M_3 \parallel MM_1$.

M_1, O, M_3 συνευθειακά (απόδειξη όμοια με α)ii). Τα τρίγωνα OMM_1 και OM_2M_3 έχουν

$OM = OM_1 = OM_2 = OM_3$ και $MOM_1 = O_1 + O_2 = O_3 + O_4 = M_3OM_2$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M_2M_3 = MM_1$. Το τετράπλευρο $MM_1M_2M_3$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον $MM_1M_2 = 90^\circ$, οπότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

1735. Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$.

β) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.

γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών AB και (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

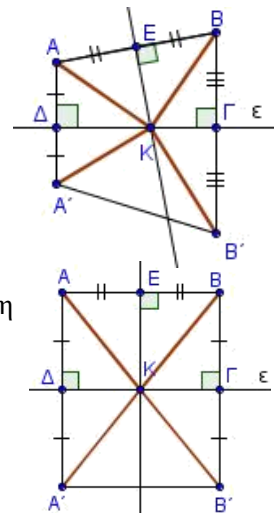
Λύση

α) Επειδή $AA' \perp \varepsilon$ και $BB' \perp \varepsilon$, είναι $AA' \parallel BB'$.

β) Επειδή το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του AB ισαπέχει από τα A και B , δηλαδή $KA = KB$ (1).

Επειδή το A' είναι το συμμετρικό του A ως προς την (ε), η $K\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AA' , άρα $KA = KA'$ (2). Επειδή το B' είναι το συμμετρικό του B ως προς την (ε), η $K\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του BB' , άρα $KB = KB'$ (3). Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι $KA' = KB'$, δηλαδή το K ισαπέχει από τα A' και B' , άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του $A'B'$.

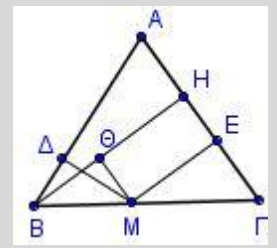
γ) Όταν το $ABB'A'$ είναι ορθογώνιο, τότε το $A\Delta KE$ είναι ορθογώνιο, οπότε $AB \perp AA'$, $\varepsilon \perp AA'$, άρα $AB \parallel \varepsilon$.



1800. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο.
 β) $B\Theta = \Delta M$.
 γ) $M\Delta + ME = BH$.



Λύση

α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$ και $B\Theta M$ έχουν:

1) $\Delta BM = \Theta MB$, γιατί $\Delta BM = \Gamma$ (στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$) και $\Theta MB = \Gamma$ ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $M\Theta$, ΓA που τέμνονται από την $B\Gamma$.

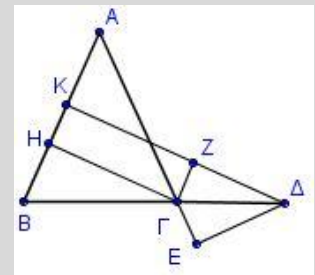
2) τη πλευρά MB κοινή.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτεινουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Theta = \Delta M$,

γ) $M\Delta + ME \stackrel{B\Theta = \Delta M}{=} B\Theta + \Theta H = BH \quad ME = \Theta H$ (Απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $MEH\Theta$)

1816. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔK κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη B .
 β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\Gamma E$.
 γ) Το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.
 δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$



Λύση

α) Επειδή $\Gamma Z \perp \Delta K$ και $BA \perp \Delta K$, οι ευθείες ΓZ και AB είναι παράλληλες. Οι γωνίες $Z\Gamma\Delta$ και B είναι ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma Z$ που τέμνονται από την $B\Delta$.

β) Είναι $\Delta\Gamma E = A\Gamma B$ ως κατακορυφήν, $A\Gamma B = B$

γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου και $B = Z\Gamma\Delta$, άρα και $\Delta\Gamma E = Z\Gamma\Delta$, οπότε η $\Gamma\Delta$ διχοτομεί τη γωνία $Z\Gamma E$.

γ) Τα ορθογώνια τρίγωνα $Z\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

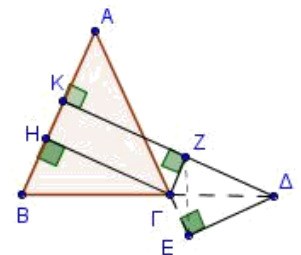
1) τη πλευρά $\Delta\Gamma$ κοινή και

2) $\Delta\Gamma E = Z\Gamma\Delta$,

δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτεινουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου ισούται με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα και έχουν $\Delta Z = \Delta E$. Άρα το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές.

δ) Το τετράπλευρο $KH\Gamma Z$ έχει 3 ορθές οπότε είναι ορθογώνιο. Οι $KZ, H\Gamma$ είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου και είναι ίσες.

Είναι $\Delta K - \Delta E = \Delta Z + ZK - \Delta Z = ZK = H\Gamma$

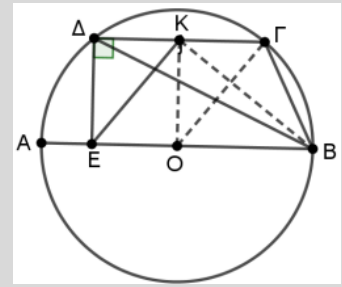


1879. Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB .
Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ και K το μέσο της.
Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔE κάθετο στη $\Delta\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $KGOE$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $\angle \hat{E}K = \frac{\angle \hat{O}\Gamma}{2}$

γ) $KE < KB$



Λύση

α) Επειδή $\Delta E \perp \Delta\Gamma$ και $\Gamma\Delta \parallel AB$ είναι και $\Delta E \perp AB$.

Επειδή το OK είναι απόστημα της χορδής AB , είναι $OK \perp \Gamma\Delta$. Το τετράπλευρο ΔEOK έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο, άρα $\Delta K = EO$. Όμως $\Delta K = K\Gamma$, άρα $K\Gamma = EO$, οπότε το $KGOE$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔEK και ΔOK έχουν:

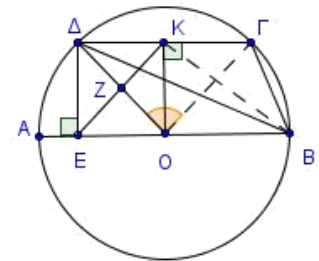
1) τη πλευρά ΔK κοινή και

2) $\Delta E = OK$,

άρα τα δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες και είναι ίσα, οπότε έχουν και $\angle \hat{E}K = \angle \hat{O}K$.

Στο τρίγωνο ΔOG η OK είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η OK είναι και

διχοτόμος. Άρα $\Delta OG = 2\Delta OK = 2\Delta EK \Leftrightarrow \angle \hat{E}K = \frac{\angle \hat{O}\Gamma}{2}$



γ) Είναι $KE = OD$ (διαγώνιοι ορθογωνίου $KEO\Delta$), $OD = OB$ (Ακτίνες)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $OB < BK$, άρα $KE < KB$.

13746. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Στην προέκταση της διαμέσου AD προς το Δ παίρνουμε σημείο E , έτσι ώστε $AD = DE$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

ii. Η διάμεσος AD είναι μικρότερη από το ημίθροισμα των πλευρών AB και $A\Gamma$ που την περιέχουν.

β) Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το διπλάσιο της διαμέσου AD ισούται με την πλευρά $B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου $ABE\Gamma$ και το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ έχουν:

• $AD = DE$, από υπόθεση

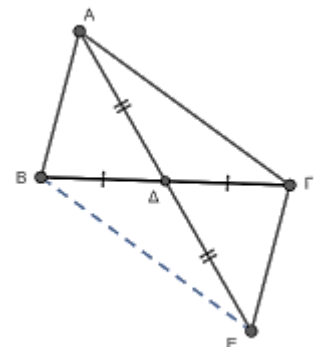
• $BD = \Delta\Gamma$, διότι Δ μέσο της $B\Gamma$

• $\angle ADB = \angle E\Delta\Gamma$ ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές, ίσες, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ είναι ίσα.

Επομένως θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $AB = \Gamma E$ (1).

ii. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma E$ έχουμε :



$$AE < AG + AB. \text{ Όμως } AE = 2AD, \text{ οπότε έχουμε ότι } 2AD < AB + AG \Leftrightarrow AD < \frac{AB + AG}{2}$$

Δηλαδή η διάμεσος AD είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών AB και AG του τριγώνου ABG που την περιέχουν.

β) Δίνεται ότι $2AD = BG$ ή $AE = BG$. Δηλαδή στο τετράπλευρο $ABEG$ οι διαγωνίες του είναι ίσες.

Επιπλέον έχουμε ότι $AD = DE$ από την κατασκευή και $BD = DG$, αφού D μέσο της BG .

Δηλαδή οι διαγωνίες του τετράπλευρου $ABEG$ διχοτομούνται, οπότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο και επιπλέον είναι ίσες, άρα το τετράπλευρο $ABEG$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

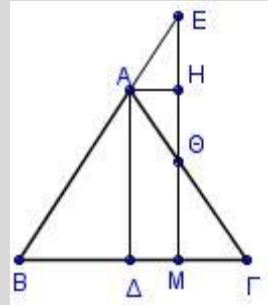
Τότε στο τρίγωνο ABG είναι $\angle A = 90^\circ$, αφού το $ABEG$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα το ABG είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

14887. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG ($AB = AG$) και τυχαίο σημείο M της πλευράς BG . Από το M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά BG που τέμνει τις ευθείες AB και AG στα σημεία E και Θ αντίστοιχα. Αν AD και AH τα ύψη των τριγώνων ABG και $A\Theta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\angle A\hat{H} = 90^\circ$.

β) Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές.

γ) $M\Theta + ME = 2AD$.



Λύση

α) Το τετράπλευρο ΔMHA έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο. Άρα $\angle A\hat{H} = 90^\circ$.

β) Το AD είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ABG , άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος του. Η AD είναι διχοτόμος της γωνίας A , η AH είναι κάθετη στην AD , άρα η AH θα διχοτομεί την γωνία ΘAE που είναι εφεξής και παραπληρωματική της A .

Στο τρίγωνο $A\Theta H$ το AH είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $AD = MH$ γιατί είναι απέναντι πλευρές ορθογωνίου και $\Theta H = HE$ αφού η AH εκτός από ύψος και διχοτόμος είναι και διάμεσος στο τρίγωνο $A\Theta H$.

$$\text{Είναι } M\Theta + ME = M\Theta + M\Theta + \Theta E = 2M\Theta + 2\Theta H = 2(M\Theta + \Theta H) = 2MH = 2AD$$

34326. Έστω κύκλος κέντρου O και AG μια διάμετρος του. Θεωρούμε δυο ίσες χορδές AD , $B\Gamma$ και χορδές $\Delta\Gamma$, AB τέτοιες ώστε να είναι κάθετες στις AD , $B\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω K και Λ τα μέσα των χορδών $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

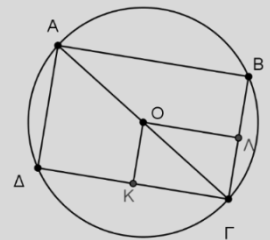
Να αποδείξετε ότι:

α) οι χορδές AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες.

β) το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

γ) η $B\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου,

δ) το τετράπλευρο $OK\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο.



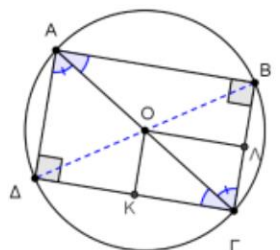
Λύση

α) Τα τρίγωνα $\Delta D\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι ορθογώνια και έχουν:

1) AG κοινή πλευρά και 2) $AD = B\Gamma$ (υπόθεση)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

Οπότε $\angle A\hat{\Gamma}\Delta = \angle \Gamma\hat{A}B$ άρα οι $\Delta\Gamma$ και AB είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από την AG σχηματίζουν εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.



β) Είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$ ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}B$, άρα οι $A\Delta$, $B\Gamma$ παράλληλες γιατί τεμνόμενες από την $A\Gamma$ σχηματίζουν εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Έχει και τουλάχιστον μία ορθή γωνία άρα τελικά είναι ορθογώνιο.

γ) Οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ διάμετροι του ορθογωνίου οπότε θα διχοτομούνται.

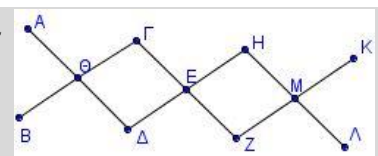
Η $A\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου και το O κέντρο του κύκλου άρα μέσο της $A\Gamma$. Επομένως το O είναι και μέσο της $B\Delta$ και η $B\Delta$ διάμετρος.

δ) Είναι $OA = OG$ (ακτίνες του κύκλου) άρα το τρίγωνο ΔOG είναι ισοσκελές. Επειδή το K μέσο της $\Delta\Gamma$, τότε το OK είναι διάμεσος άρα και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΔOG . Επομένως $\angle OK\Gamma = 90^\circ$.

Ομοίως το τρίγωνο ΓOB ισοσκελές και Λ μέσο της $B\Gamma$ άρα $\angle \Lambda\Gamma = 90^\circ$.

Είναι επίσης $B\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$ άρα το τετράπλευρο $OK\Lambda\Gamma$ έχει τρεις ορθές γωνίες, επομένως είναι ορθογώνιο.

37083. Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου ($A\Delta$, $B\Gamma$, ΓZ , ΔH , ZK , $H\Lambda$) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (A , B , Γ , Δ , Θ , E , M , H , K , Λ , Z). Αν το σημείο Θ , είναι μέσο των τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$ ενώ το σημείο E είναι μέσο των τμημάτων ΓZ και ΔH , να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο $\Gamma H Z \Delta$ είναι ορθογώνιο.

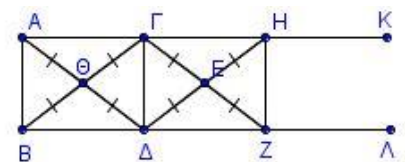
β) Τα σημεία B, Δ, Z είναι συνευθειακά.

γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma Z \Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α) Επειδή $E\Gamma = E\Delta = EH = EZ$, στο τετράπλευρο $\Gamma H Z \Delta$ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή $\Theta A = \Theta B = \Theta \Gamma = \Theta \Delta$, στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο, οπότε $B\Delta\Gamma = 90^\circ$.



Επειδή το $\Gamma H Z \Delta$ είναι ορθογώνιο, είναι $\Gamma\Delta Z = 90^\circ$. Είναι

$B\Delta Z = B\Delta\Gamma + \Gamma\Delta Z = 180^\circ$, οπότε τα σημεία B, Δ, Z είναι συνευθειακά.

γ) Το τετράπλευρο $\Theta\Gamma\Delta E$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Άρα είναι ρόμβος και $\Gamma\Theta\Delta = \Gamma E\Delta$.

Τα τρίγωνα $B\Theta\Delta$ και $E\Delta Z$ έχουν

- $B\Theta\Delta = \Delta E Z$ σαν εφεξής και παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\Gamma\hat{\Theta}\Delta$, $\Gamma E\Delta$
- $B\Theta = \Delta E$
- $\Theta\Delta = EZ$

Επομένως τα τρίγωνα $B\Theta\Delta$ και $E\Delta Z$ είναι ίσα και $B\Delta = \Delta Z$.

Επειδή το $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι ίσα και παράλληλα. Όμως τα σημεία B, Δ, Z είναι συνευθειακά. Άρα τα τμήματα $A\Gamma$ και ΔZ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο $A\Gamma Z \Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

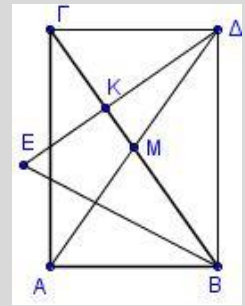
37102. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσό του AM την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του M , κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας B στο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β) $\hat{K}\hat{E}B = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$

γ) $\Delta E = B\Delta$.



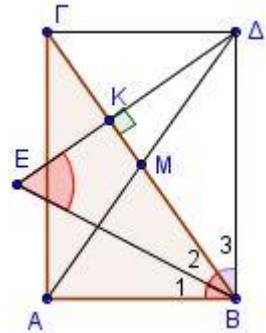
Λύση

α) Επειδή $AM = M\Delta$ και $BM = M\Gamma$, οι διαγώνιες του τετράπλευρου $AB\Delta\Gamma$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον έχει $\hat{A} = 90^\circ$, άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου EKB έχουμε:

$$\hat{K}EB + \hat{B}_2 = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{K}EB + \frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{K}EB = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$$

γ) Είναι $\hat{\Delta}BE = 90^\circ - \hat{B}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} = \hat{K}EB$, δηλαδή το τρίγωνο ΔBE έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την BE και έχει $\Delta E = B\Delta$



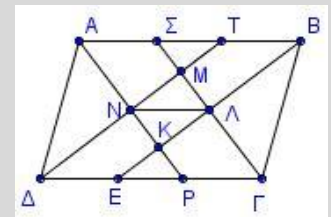
37167. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του AP , BE , $\Gamma\Sigma$ και ΔT (όπου P, E στην $\Delta\Gamma$ και Σ, T στην AB) τέμνονται στα σημεία K, Λ, M και N όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.

β) το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

γ) $\Lambda N \parallel AB$

δ) $\Lambda N = AB - A\Delta$



Λύση

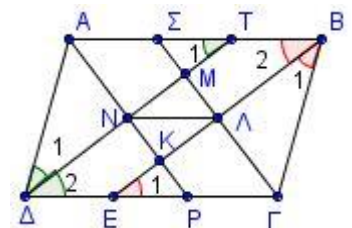
α) Τα τρίγωνα $\Delta\Delta T$ και $B\Gamma E$ έχουν:

- 1) $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ γιατί είναι μισά των απέναντι γωνιών B και Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$
- 2) $A\Delta = B\Gamma$ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου κοινή και
- 3) $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου

Με βάση το κριτήριο $\Gamma\Pi\Gamma$ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{\Delta}T = \hat{B}E$ (1) και $\hat{A}T = \hat{E}\Gamma$.

Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $BT = \Delta E$, είναι και $B\Gamma = \Delta E$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.



β) Όμοια $\Delta\Sigma\Gamma P$ παραλληλόγραμμο οπότε $AP \parallel \Sigma\Gamma$ και $NK \parallel M\Lambda$ Επειδή το ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο, είναι $MN \parallel K\Lambda$, οπότε και το $K\Lambda MN$ είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $\hat{\Delta}_2 = \hat{T}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Delta\Gamma$ που τέμνονται από την ΔT και $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Delta}_1$ γιατί η ΔT είναι διχοτόμος της γωνίας Δ , άρα είναι και $\hat{\Delta}_1 = \hat{T}_1$. Το τρίγωνο $\Delta\Delta T$ έχει δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΔT . Η ΛN είναι διχοτόμος του τριγώνου $\Delta\Delta T$, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή $\hat{N} = 90^\circ$. Επειδή το παραλληλόγραμμο $K\Lambda MN$ έχει μία ορθή, είναι ορθογώνιο.

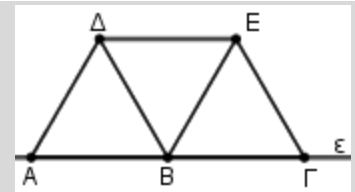
γ) Επειδή τα τρίγωνα $\triangle ADT$ και $\triangle BE\Gamma$ είναι ίσα και $AD = AT$ αφού το τρίγωνο $\triangle ADT$ είναι ισοσκελές, είναι $AD = AT = \Gamma E = \Gamma B$. Η $\Gamma\Lambda$ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle BE\Gamma$, οπότε είναι και διάμεσός του, άρα $BL = \frac{BE}{2}$. Όμως $TN = \frac{TD}{2}$ και $TD = BE$ αφού το $\triangle EBT$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $BL = TN$. Επειδή είναι και $BL \parallel TN$ αφού $TD \parallel BE$, το τετράπλευρο $BTNL$ είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε $LN \parallel AB$.

δ) Είναι $LN = BT = AB - AT = \frac{AT=AD}{\triangle ADT \text{ ισοσκελές}} = AB - AD$

ΡΟΜΒΟΣ

Θέμα 2ο

13767. Σε ευθεία ϵ θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\triangle ABD$ και $\triangle BE\Gamma$ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ϵ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\angle DBE$.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle BDE$ είναι ισόπλευρο.
 γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ADEB$ είναι ρόμβος.

Λύση

α) Οι γωνίες των ισόπλευρων τριγώνων $\triangle ABD$ και $\triangle BE\Gamma$ είναι 60° καθεμιά. Η γωνία $\angle AB\Gamma$ είναι ευθεία, οπότε: $\angle ABD + \angle DBE + \angle EB\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \angle DBE + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle DBE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

β) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $\triangle ABD$: $AB = AD = BD$ (1)

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $\triangle BE\Gamma$ ισχύει: $B\Gamma = BE = \Gamma E$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $BD = BE$, αφού $AB = B\Gamma$ από υπόθεση. Επομένως, το τρίγωνο $\triangle BDE$ είναι ισοσκελές με βάση DE , οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες στη βάση θα είναι ίσες.

Συνεπώς, $\angle BDE = \angle BED$ (3).

Στο τρίγωνο $\triangle BDE$ ισχύει: $\angle BDE + \angle BED + \angle DBE = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \angle BDE + \angle BDE + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle BDE = 120^\circ \Leftrightarrow \angle BDE = 60^\circ = \angle BED$.

Αφού οι γωνίες του τριγώνου $\triangle BDE$ είναι ίσες με 60° καθεμιά, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $\triangle BDE$ είναι ισόπλευρο.

ή

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $\triangle ABD$ ισχύει: $AB = AD = BD$ (1)

Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $\triangle BE\Gamma$ ισχύει: $B\Gamma = BE = \Gamma E$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $BD = BE$, αφού $AB = B\Gamma$ από υπόθεση. Επομένως, το τρίγωνο $\triangle BDE$ είναι ισοσκελές με τη γωνία του $\angle DBE = 60^\circ$ οπότε είναι ισόπλευρο.

γ) Για τις πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $\triangle BDE$: $DE = BE = BD$ (4)

Το τετράπλευρο $ADEB$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, αφού $AD = AB = BE = DE$ από τις σχέσεις (1), (2) και (4), οπότε είναι ρόμβος.

13832. Στο σχήμα το Μ είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ.

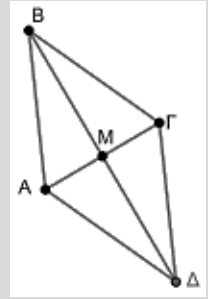
Επίσης $\hat{A}MB = \hat{G}MB$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.

ii. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;



Λύση

α) i. Οι γωνίες ΑΜΒ και ΓΜΒ είναι παραπληρωματικές. Όμως σύμφωνα με την υπόθεση είναι και ίσες.

Άρα η κάθε μια είναι ορθή γωνία, δηλαδή $\hat{A}MB = \hat{G}MB = 90^\circ$.

Επομένως οι ΒΔ και ΑΓ είναι κάθετες.

ii. Το Μ είναι μέσο των διαγωνίων του ΑΒΓΔ, άρα οι διαγωνίες του διχοτομούνται. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον από το ερώτημα αι) οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, γιατί είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγωνίες του ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.

β) Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος επομένως θα έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Άρα κάθε πλευρά του κήπου χρειάζεται $30:4=7,5$ μέτρα φράχτη. Συνεπώς, αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ χωρίς φράχτη, θα χρειαστούμε $30 - 7,5 = 22,5$ μέτρα φράχτη.

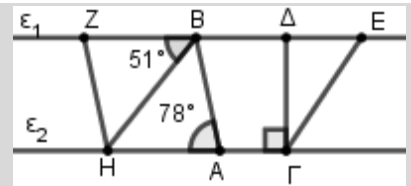
13842. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος.

Επίσης δίνονται οι γωνίες $\hat{B}AH = 70^\circ$, $\hat{Z}BH = 51^\circ$ και η $\hat{A}\hat{G}\hat{\Delta}$ είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}BH$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.

γ) Αν η γωνία Ε του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56° , να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου ΓΔΕ.



Λύση

α) Εφόσον το ΑΒΖΗ είναι ρόμβος η διαγωνίός του ΒΗ διχοτομεί τη γωνία του ΑΒΖ. Επομένως $\hat{A}BH = \hat{Z}BH = 51^\circ$.

β) Η γωνία $\hat{A}BZ = \hat{A}BH + \hat{Z}BH = 102^\circ$. Άρα οι εντός και επί τα αυτά γωνίες $\hat{A}BZ = 102^\circ$ και $\hat{B}AH = 78^\circ$, των ϵ_1 και ϵ_2 με τέμνουσα την ΑΒ είναι παραπληρωματικές. Επομένως οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.

γ) Η ΓΔ τέμνει κάθετα την ϵ_2 από την υπόθεση (εφόσον η γωνία $\hat{A}\hat{G}\hat{\Delta}$ είναι ορθή), συνεπώς τέμνει κάθετα και την ϵ_1 που είναι παράλληλη της ϵ_2 . Άρα η γωνία ΓΔΕ είναι ορθή και το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο. Άρα οι οξείες γωνίες του Γ και Ε είναι συμπληρωματικές. Επομένως $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{E} = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$.

34498. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = AD$. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ.

Να αποδείξετε ότι:

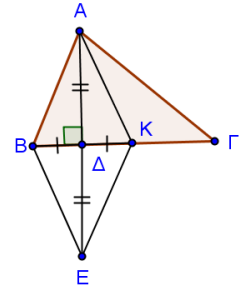
α) Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος.

Λύση

α) Στο τρίγωνο ABK το AD είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή $DE = AD$, $BD = DK$ και $AE \perp BK$, στο τετράπλευρο $ABEK$ οι διαγωνίες του διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.

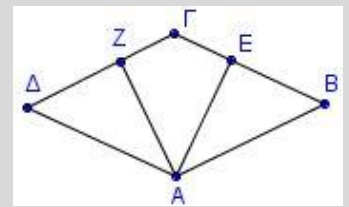


34504. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.

β) Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.



Λύση

α) Έστω ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:

1) $AD = AB$ πλευρές του ρόμβου και

2) $\Delta = B$ απέναντι γωνίες του ρόμβου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AZ = AE$.

β) Έστω ότι στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AZ = AE$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:

1) $AZ = AE$ και

2) $\Delta = B$ απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AD = AB$.

Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

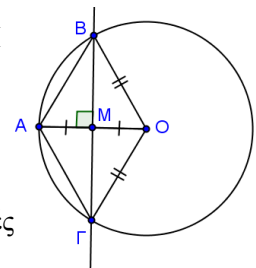
34513. Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μια ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο.

β) Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος.

Λύση

α) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Τότε $OA = OB = OG = \rho$. Στο τρίγωνο BAO η BM είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την OA , οπότε $AB = OB = \rho$. Στο τρίγωνο BAO και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ισόπλευρο.



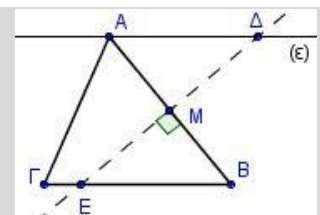
β) Στο τρίγωνο ΓAO η GM είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την OA , οπότε $A\Gamma = OG = \rho$. Το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ρόμβος.

36107. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε από την κορυφή A ευθεία (ϵ) παράλληλη στη $B\Gamma$. Η κάθετη στο μέσο M της πλευράς AB τέμνει την (ϵ) στο Δ και την $B\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και EMB .

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ρόμβος.



Λύση

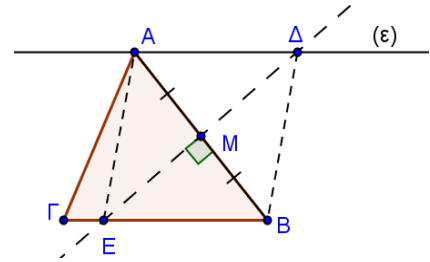
α) Επειδή τα σημεία E, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του AB ισαπέχουν από τα σημεία A και B, δηλαδή $\Delta A = \Delta B$ και $EA = EB$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AMΔ και EMB έχουν:

1) $AM = MB$ γιατί το M είναι μέσο του AB και

2) $\angle M\Delta A = \angle MBE$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων (ε), BΓ που τέμνονται από την AB.

Τα τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίσα, άρα είναι ίσα.



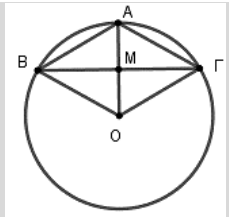
γ) Επειδή τα τρίγωνα AMΔ και EMB είναι ίσα, έχουν και $M\Delta = ME$.

Στο τετράπλευρο AΔBE οι διαγώνιές του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος.

36349. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα OA και τη χορδή BΓ κάθετη στην OA στο μέσο της M.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AΓOB είναι ρόμβος.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου AΓOB.



Λύση

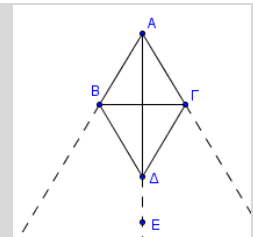
α) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου. Τότε $OA = OB = OG = \rho$. Στο τρίγωνο BAO η BM είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την OA, οπότε $AB = OB = \rho$. Στο τρίγωνο AΓO η ΓM είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την OA, δηλαδή $AG = OG$. Επειδή το τετράπλευρο AΓOB έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο BAO και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι ισόπλευρο, οπότε $\angle OBA = 60^\circ$. Επειδή οι απέναντι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες, είναι και $\angle OGA = \angle OBA = 60^\circ$. Επειδή οι γωνίες OBA και BOΓ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB, OΓ που τέμνονται από την OB, είναι $\angle OBA + \angle BOG = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BOG = 120^\circ$ και $\angle BAG = \angle BOG = 120^\circ$.

36351. Δίνεται ρόμβος ABΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου AΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο E. Να αποδείξετε ότι:

α) Το E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και AΓ (προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα).

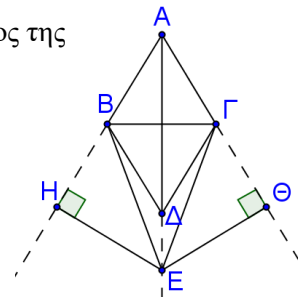
β) Το σημείο E ισαπέχει από τα σημεία B και Γ.



Λύση

α) Επειδή οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, η AΔ είναι διχοτόμος της γωνίας A. Επειδή το E είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας A, ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, δηλαδή ισαπέχει από τις AB και AΓ. ($HE = H\Theta$)

β) Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται κάθετα, άρα η AΔ είναι μεσοκάθετος της BΓ. Επειδή το E ανήκει στη μεσοκάθετο του BΓ, ισαπέχει από τα B και Γ. ($EB = EG$)



Θέμα 4ο

1740. Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

β) Στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

Λύση

α) Π1: Έστω ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος και έστω AE η απόσταση των παραλλήλων AD, BG και AZ η απόσταση των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AEB και $A\Delta Z$ έχουν:

1) $AB = A\Delta$ πλευρές του ρόμβου

2) $B = \Delta$ απέναντι γωνίες του ρόμβου.

Τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = AZ$.

Π2: Έστω ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και οι αποστάσεις AE, AZ είναι ίσες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AEB και $A\Delta Z$ έχουν:

1) $AE = AZ$

2) $B = \Delta$ απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου.

Τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = A\Delta$.

Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

β) Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν, οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

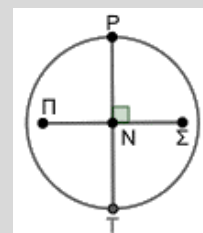
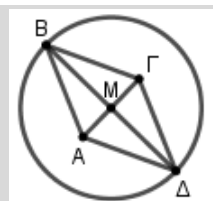
13857.α) Στο σχήμα η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο M . Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.
Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

γ) Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα PT και $\Pi\Sigma$ τέμνονται κάθετα στο N και $\Pi N = N\Sigma$. Επίσης η PT είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το N . Να αποδείξετε ότι $\Pi P = P\Sigma = \Sigma T = T\Pi$.



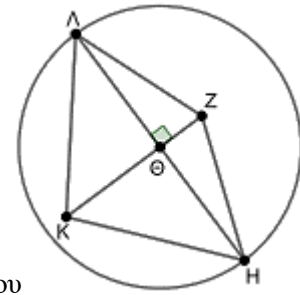
Λύση

α) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος της $A\Gamma$ από την υπόθεση, άρα ισχύει $AM = M\Gamma$. Επιπλέον $BM = M\Delta$, γιατί από την υπόθεση το M είναι κέντρο του κύκλου με διάμετρο $B\Delta$. Επομένως, οι διαγώνιοι του $AB\Gamma\Delta$ διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Ακόμα οι $B\Delta$ και $A\Gamma$ είναι κάθετες, γιατί η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος της $A\Gamma$ από την υπόθεση. Εφόσον οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι κάθετες το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

β) Η Πρόταση 1 έχει αποδειχθεί στο ερώτημα α), άρα είναι αληθής. Η Πρόταση 2 είναι ψευδής. Στο παρακάτω σχήμα η διαγώνιος ΛΗ του τετραπλεύρου ΚΛΖΗ είναι κάθετη στη διαγώνιό του ΖΚ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Θ, σημείο τομής των διαγωνίων. Δηλαδή το ΚΛΖΗ πληροί την υπόθεση της Πρότασης 2.

Ωστόσο το τετράπλευρο ΚΛΖΗ δεν είναι ρόμβος.

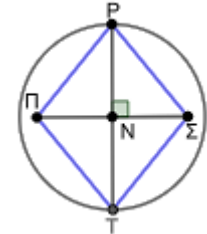
Πράγματι ισχύει $K\Theta > \Theta Z$, άρα οι διαγώνιοι του ΚΛΖΗ δεν έχουν κοινό μέσο (το Θ είναι μέσο της ΛΗ, αλλά όχι της ΖΚ). Άρα το ΚΛΖΗ δεν είναι παραλληλόγραμμο, γιατί αν ήταν θα έπρεπε $K\Theta = \Theta Z$ (καθώς οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται). Επομένως δεν είναι και ρόμβος.



γ) Σχεδιάζουμε το τετράπλευρο ΠΡΣΤ. Η διαγώνιος του ΡΤ είναι μεσοκάθετος της ΠΣ, εφόσον είναι κάθετες και $ΠΝ = ΝΣ$, από την υπόθεση. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου που έχει ως κέντρο το Ν, σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου. Άρα από την Πρόταση 1 (του ερωτήματος β)) που αποδείχθηκε στο α) το ΠΡΣΤ είναι ρόμβος.

Συνεπώς έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Δηλαδή $ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ$.



37109. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ,Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια, ώστε να ισχύει $BK = ΚΛ = ΛΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

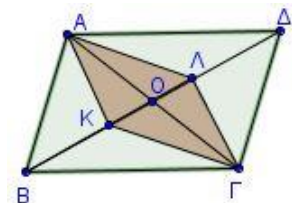
β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Επειδή οι διαγώνιες διχοτομούνται, είναι $BO = OD$. Όμως $BK = ΛΔ$, άρα και $BO - BK = OD - ΛΔ \Leftrightarrow KO = OL$.

Επειδή $AO = OG$ και $KO = OL$, το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιές του διχοτομούνται.



β) Αν το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος τότε οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ θα είναι κάθετες. Τότε όμως και στο παραλληλόγραμμο ΑΚΓΛ οι διαγώνιες του θα είναι κάθετες και θα είναι ρόμβος.

γ) Για να είναι το ΑΚΓΛ ορθογώνιο πρέπει οι διαγώνιές του να είναι ίσες, δηλαδή $KΛ = ΑΓ$. Όμως

$$KΛ = \frac{1}{3}BΔ, \text{ άρα } ΑΓ = \frac{1}{3}BΔ \Leftrightarrow BΔ = 3ΑΓ.$$

37141. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < ΑΓ$ και

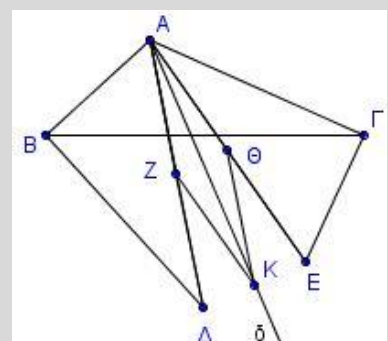
$\hat{A} > 90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $BΔ = ΑΓ$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $ΓΕ = ΑΒ$.

Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνίας $\hat{Δ}ΑΕ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΑΕ$.

β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ.

γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο, ώστε $KZ = ΑΖ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος.



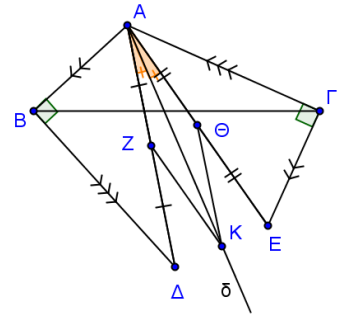
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ έχουν:

1) $GE = AB$ και

2) $B\Delta = AG$,

δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, οπότε είναι ίσα και ισχύει ότι $A\Delta = AE$.



β) Αρκεί να δείξουμε ότι $KZ = K\Theta$.

Τα τρίγωνα AZK και $A\Theta K$ έχουν:

1) $AZ = A\Theta$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών $A\Delta$ και AE

2) τη πλευρά AK κοινή και

3) $\angle ZAK = \angle K A \Theta$ λόγω της διχοτόμησης

Από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $KZ = K\Theta$.

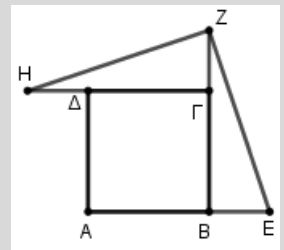
γ) Αν $KZ = AZ$, τότε επειδή $KZ = K\Theta$ και $AZ = A\Theta$, το τετράπλευρο $AZK\Theta$ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ**Θέμα 2ο**

13536. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB προς το B , $B\Gamma$ προς το Γ και $\Gamma\Delta$ προς το Δ θεωρούμε σημεία E , Z και H αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z = \Delta H$.

α) Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$.

β) Να αποδείξετε ότι $\angle EZH = 90^\circ$.

**Λύση**

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $Z\Gamma H$ και BZE έχουν:

- $BE = \Gamma Z$ υπόθεση

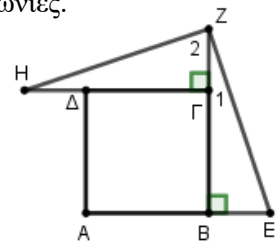
- $BZ = \Gamma H$ ως άθροισμα των ίσων τμημάτων $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ (πλευρές τετραγώνου) και ΓZ , ΔH (δεδομένο) αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα BEZ και ΓZH είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα θα είναι $ZE = ZH$, γιατί είναι οι πλευρές απέναντι από τις ορθές γωνίες.

β) Επειδή τα τρίγωνα $Z\Gamma H$ και BZE είναι ίσα έχουν και $H = Z_1$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $Z\Gamma$ και BE .

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $Z\Gamma H$ έχουμε:

$$H + Z_2 + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \overset{H=Z_1}{Z_1} + Z_2 = 90^\circ \Leftrightarrow \angle EZH = 90^\circ$$



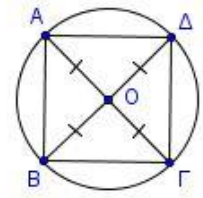
14883. Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι $A\Gamma$ και $B\Delta$ ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Επειδή $OA = OB = OG = OD = \rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου, οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται και είναι ίσες ($AG = BD = 2\rho$) άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

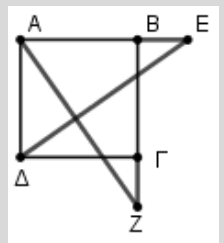


β) Γνωρίζουμε ότι ένα ορθογώνιο είναι τετράγωνο, όταν είναι και ρόμβος γι' αυτό πρέπει οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ να είναι και κάθετες.

36165. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$.

Να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα.
β) Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες.

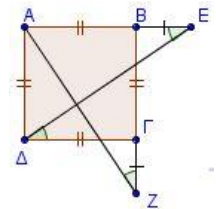


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ έχουν:

- 1) $AD = AB$ πλευρές του τετραγώνου και
- 2) $AE = BZ$, γιατί $AB = B\Gamma$ και $BE = \Gamma Z$, άρα τα τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες και είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΒ είναι ίσα έχουν και $\angle EAD = \angle AZB$. Όμως $\angle EAD = \angle ED\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΕ άρα και $\angle ED\Gamma = \angle AZB$.

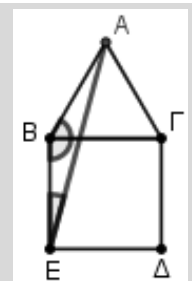


36173. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες:

- i. $\hat{A}BE$
- ii. $\hat{B}EA$

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) i. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60° , άρα $\angle A = \angle AB\Gamma = \angle A\Gamma B = 60^\circ$.

Επειδή το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο, οι γωνίες του είναι ορθές, άρα

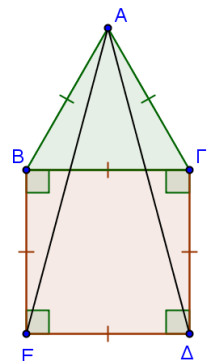
$$\angle ABE = \angle AB\Gamma + \angle \Gamma BE = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$$

ii. Επειδή $AB = B\Gamma = BE$, το τρίγωνο BEA είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ, οπότε $\angle BEA = \angle BAE$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BEA έχουμε:

$$\angle BEA + \angle BAE + \angle ABE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle BEA + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle BEA = 30^\circ \Leftrightarrow \angle BEA = 15^\circ$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

- 1) $AB = A\Gamma$ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου
- 2) $BE = \Gamma\Delta$ πλευρές του τετραγώνου



$$3) \angle A\Gamma\Delta = \angle A\Gamma B + \angle B\Gamma\Delta = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ = \angle ABE$$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = AD$, άρα το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

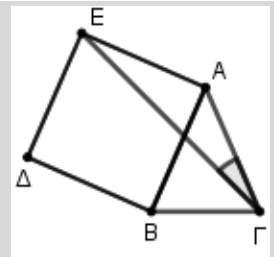
36174. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $ABDE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

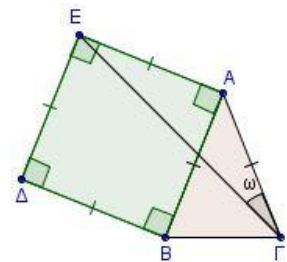
β) $2\hat{E}\Gamma A = 90^\circ - \hat{B}\hat{A}\Gamma$.



Λύση

α) Είναι $AB = AE$ γιατί είναι πλευρές τετραγώνου και $AB = A\Gamma$, άρα $AE = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $A\Gamma E$ έχει δύο πλευρές του ίσες και είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $\angle A\Gamma E = \angle E\Gamma A$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Gamma E$ έχουμε: $\angle A\Gamma E + \angle E\Gamma A + \angle E\hat{A}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle E\hat{A}\Gamma + 90^\circ + \hat{B}\hat{A}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{E}\hat{A}\Gamma = 90^\circ - \hat{B}\hat{A}\Gamma$.

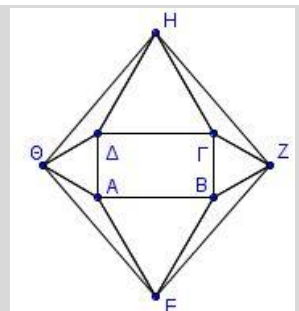


4ο Θέμα

1734. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta A\Theta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $H\Delta\Theta$, $\Theta A E$, $E B Z$ και $H\Gamma Z$ έχουν:

1) $H\Delta = AE = BE = \Gamma H$ γιατί είναι ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων $H\Delta\Gamma$ και EAB

2) $\Theta\Delta = \Theta A = BZ = \Gamma Z$ γιατί είναι ίσες πλευρές των ίσων ισόπλευρων τριγώνων $\Theta\Delta A$ και $B\Gamma Z$

3) $\angle H\Delta\Theta = \angle \Theta A E = \angle E B Z = \angle \Gamma H Z = 360^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 150^\circ$

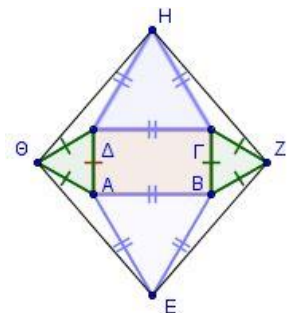
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $H\Theta = \Theta E = E Z = Z H$.

Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ έχει όλες του τις πλευρές ίσες και είναι ρόμβος.

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε τα τρίγωνα $H\Delta\Theta$, $\Theta A E$, $E B Z$ και $H\Gamma Z$ είναι ισοσκελή και ίσα. Τότε

$\angle H\Theta\Delta = \angle \Theta H\Delta = \angle \Gamma H Z = \angle H Z \Gamma = \angle B Z E = \angle Z E B = \angle A E \Theta = \angle \Theta A E = \angle \Theta E A = \omega$ και από το άθροισμα γωνιών σε καθένα από τα τρίγωνα $H\Delta\Theta$, $\Theta A E$, $E B Z$ και $H\Gamma Z$, έχουμε: $150^\circ + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = 15^\circ$.

Τότε $\angle H\Theta E = \angle \Theta E Z = \angle E Z H = \angle Z H \Theta = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$, δηλαδή το $EZH\Theta$ είναι ορθογώνιο και ρόμβος, άρα είναι τετράγωνο.

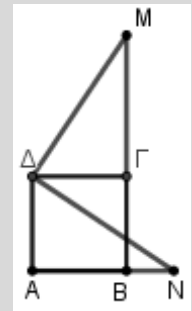


1750. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα BN και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta N = \Delta M$

β) $\Delta N \perp \Delta M$



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta\Delta N$ και $\Delta\Gamma M$ έχουν:

- 1) $\Delta\Gamma = \Delta\Delta$ πλευρές του τετραγώνου και
- 2) $\Gamma M = AN$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta N = \Delta M$.

β) Επειδή τα τρίγωνα $\Delta\Delta N$ και $\Delta\Gamma M$ είναι ίσα, οι γωνίες $M\Delta\Gamma$ και $A\Delta N$ είναι ίσες.

Είναι $M\Delta N = M\Delta\Gamma + \Gamma\Delta N = A\Delta N + \Gamma\Delta N = A\Delta\Gamma = 90^\circ$, άρα $\Delta N \perp \Delta M$

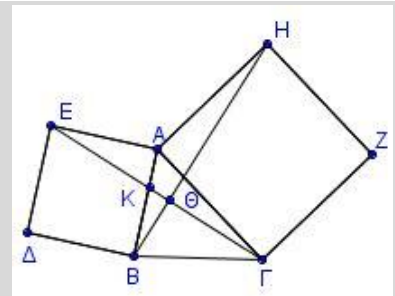
1788. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{EAH} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B}$

β) $E\Gamma = BH$

γ) Η $E\Gamma$ είναι κάθετη στη BH .



Λύση

α) Επειδή $\widehat{EAB} = \widehat{HAG} = 90^\circ$ είναι και

$$\widehat{EAH} + \widehat{BAG} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{EAH} = 180^\circ - \widehat{BAG} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι: $\widehat{BAG} + \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B} = 180^\circ \Leftrightarrow$

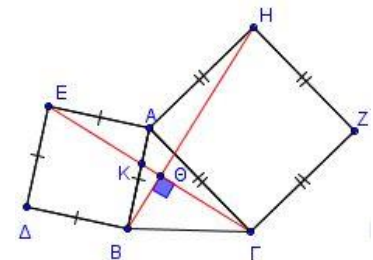
$$\widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B} = 180^\circ - \widehat{BAG} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι: $\widehat{EAH} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B}$.

β) Τα τρίγωνα EAG και HAB έχουν:

- 1) $AH = AG$ πλευρές τετραγώνου,
- 2) $AE = AB$ πλευρές τετραγώνου και
- 3) $\widehat{EAG} = \widehat{HAB} = 90^\circ + \widehat{BAG}$

Από το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $E\Gamma = BH$.



γ) Έστω Θ το σημείο τομής των $E\Gamma, BH$ και K το σημείο τομής των $E\Gamma, AB$. Επειδή τα τρίγωνα EAG και HAB είναι ίσα, ισχύει ότι: $\widehat{ABH} = \widehat{GEA}$. Στο τρίγωνο AEK είναι $\widehat{GEA} + \widehat{EKA} = 90^\circ$, όμως

$$\widehat{EKA} = \widehat{BK\Gamma} \text{ ως κατακορυφήν, οπότε } \widehat{ABH} + \widehat{BK\Gamma} = 90^\circ.$$

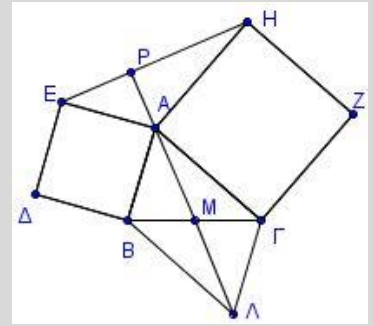
Στο τρίγωνο $BK\Theta$ είναι $\widehat{B\Theta K} + \widehat{ABH} + \widehat{BK\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Theta K} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Theta K} = 90^\circ$, άρα $E\Gamma \perp BH$.

1795. Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο, ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Lambda = AE$.

β) $\hat{A}\Gamma\Lambda = \hat{E}\hat{A}H$.

γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH .



Λύση

α) Στο τετράπλευρο $AB\Lambda\Gamma$ οι διαγώνιές του διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο και $\Gamma\Lambda = AB$. Όμως $AE = AB$ γιατί είναι πλευρές τετραγώνου, άρα $\Gamma\Lambda = AE$.

β) Επειδή $\hat{E}AB = \hat{H}A\Gamma = 90^\circ$, ισχύει ότι

$$\hat{E}AH + \hat{B}A\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E}AH = 180^\circ - \hat{B}A\Gamma \quad (1).$$

Επειδή το τετράπλευρο $AB\Lambda\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο και οι γωνίες $\hat{B}A\Gamma$ και $\hat{A}\Gamma\Lambda$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Lambda$ που τέμνονται από την $A\Gamma$, οπότε είναι παραπληρωματικές. Είναι $\hat{B}A\Gamma + \hat{A}\Gamma\Lambda = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\Gamma\Lambda = 180^\circ - \hat{B}A\Gamma \quad (2).$

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $\hat{E}AH = \hat{A}\Gamma\Lambda$.

γ) Τα τρίγωνα EAH και $A\Gamma\Lambda$ έχουν:

1) $A\Gamma = AH$ πλευρές του τετραγώνου $A\Gamma ZH$

2) $AE = \Gamma\Lambda$ από α) ερώτημα

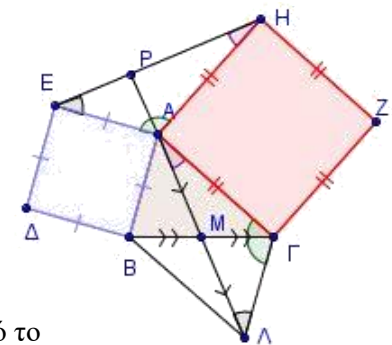
3) $\hat{E}AH = \hat{A}\Gamma\Lambda$ από β) ερώτημα

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{P}HA = \hat{\Lambda}A\Gamma$. Στο τρίγωνο PAH είναι:

$$\hat{P}HA + \hat{P}AH = \hat{M}A\Gamma + \hat{P}AH = 180^\circ - \hat{H}A\Gamma = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \text{ οπότε από το}$$

άθροισμα των γωνιών του προκύπτει ότι και $\hat{A}PH = 90^\circ$

Άρα η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την EH .



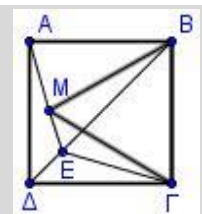
1814. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $MB\Gamma$.

Αν η προέκταση της AM τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Delta}AE = 15^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΔAE και $\Delta E\Gamma$ είναι ίσα.

γ) Η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}GM$.



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $\hat{MB}\Gamma = 60^\circ$. Έστω α η πλευρά του τετραγώνου.

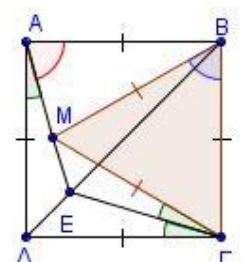
Τότε $B\Gamma = BM = M\Gamma = AM = \alpha$, και το

τρίγωνο ABM είναι ισοσκελές. Είναι $\hat{A}BM + \hat{MB}\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}BM = 30^\circ$. Στο

τρίγωνο ABM ισχύει ότι:

$$\hat{M}AB + \hat{A}MB + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{M}AB = 150^\circ \Leftrightarrow \hat{M}AB = 75^\circ.$$

Τότε $\hat{\Delta}AE = 90^\circ - \hat{M}AB = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$



β) Τα τρίγωνα $\triangle A\Delta E$ και $\triangle E\Gamma$ έχουν:

1) τη πλευρά ΔE κοινή

2) $A\Delta = \Delta\Gamma = \alpha$

3) $\angle A\Delta E = \angle E\Gamma = 45^\circ$ γιατί η διαγώνιος του τετραγώνου διχοτομεί τις γωνίες του.

Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα $\triangle A\Delta E$ και $\triangle E\Gamma$ είναι ίσα ισχύει ότι $\angle \Gamma E = \angle A\Delta E = 15^\circ$. Επειδή το τρίγωνο $\triangle B\Gamma M$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\angle B\Gamma M = 60^\circ$.

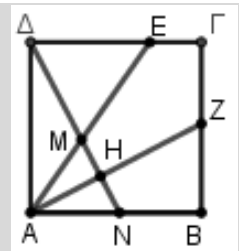
Τότε $\angle E\Gamma M = \angle \Gamma B - \angle B\Gamma M - \angle \Gamma E = 90^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 15^\circ = \angle \Gamma E$, άρα η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle \Gamma M$.

1825. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο E στην πλευρά $\Delta\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο AZ της γωνίας EAB και τη ΔH κάθετη από το Δ προς την AZ , η οποία τέμνει την AE στο M και την AB στο N . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\triangle A\Delta N$ και $\triangle ABZ$ είναι ίσα.

β) $AM = AN$ και $\Delta E = EM$.

γ) $AE = \Delta E + BZ$



Λύση

α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle A\Delta N$ και $\triangle ABZ$. Έχουν:

i) $A\Delta = AB$ (πλευρές τετραγώνου)

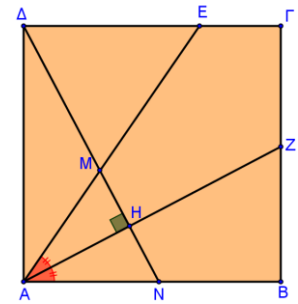
ii) $\angle \Delta\hat{A}N = \angle Z\hat{A}B$ (Οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)

Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, επομένως είναι ίσα.

β) Στο τρίγωνο $\triangle AMN$ η AH είναι διχοτόμος και ύψος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα $AM = AN$ (1). Στο τρίγωνο $\triangle EM\Delta$ είναι $\angle \Delta\hat{M} = \angle \Delta\hat{A}N$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Delta\Gamma$ που τέμνονται από τη ΔN και

$\angle \Delta\hat{M}E = \angle \Delta\hat{A}N$ ως κατακορυφήν γωνίες. Επειδή όμως $\angle \Delta\hat{M}N = \angle \Delta\hat{A}N$ (ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AMN$) θα είναι ίσες και οι

γωνίες $\angle \Delta\hat{M}E, \angle \Delta\hat{M}A$. Επομένως το τρίγωνο $\triangle AMN$ είναι ισοσκελές και $\Delta E = EM$ (2)



γ) $AE = AM + ME \stackrel{(1),(2)}{=} AN + \Delta E \stackrel{\angle \Delta\hat{A}N = \angle Z\hat{A}B}{=} BZ + \Delta E$

1894. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του $\angle \Delta$.

Έστω K και P οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

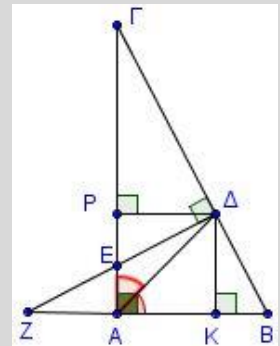
Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το A) στο σημείο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = \angle \Delta\hat{E}\Gamma$

ii. $\Delta E = \Delta B$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\angle \Delta\Gamma Z$.



Λύση

α) i. Επειδή $AB \perp AG$ και $BG \perp DE$, οι γωνίες

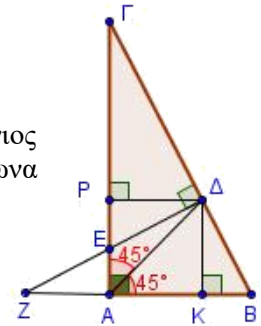
B και $\Delta E \Gamma$ είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες και είναι ίσες.

ii. Το τετράπλευρο $AKDP$ έχει τρεις ορθές, άρα είναι ορθογώνιο. Επιπλέον η διαγώνιος του AD διχοτομεί τη γωνία A , οπότε το $AKDP$ είναι τετράγωνο. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔPE και ΔKB έχουν:

1) $\Delta P = \Delta K$ πλευρές του τετραγώνου και

2) $B = \Delta E \Gamma$,

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta E = \Delta B$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta P \Gamma$ και $\Delta K Z$ έχουν:

1) $\Delta P = \Delta K$ πλευρές του τετραγώνου και

2) $\Gamma = Z$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta \Gamma = \Delta Z$. Το τρίγωνο $\Delta \Gamma Z$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45° . Επομένως $\Delta \Gamma Z = 45^\circ$.

13744. Δίνεται τετράγωνο $AB \Gamma \Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB και $B \Gamma$ προς το B και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία E και Z τέτοια ώστε $BE = \Gamma Z$. Αν P είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $\Delta E \Delta$ και $B \hat{Z} A$ είναι ίσες.

ii. Τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής P των AZ και ΔE είναι τέτοιο ώστε $PB = AB$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου E στην προέκταση του τμήματος AB .

Λύση

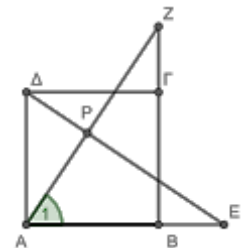
α) i. $AB = B \Gamma$, ως πλευρές του τετραγώνου, $BE = \Gamma Z$, από την υπόθεση. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες έχουμε $AE = BZ$ (1), ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta \Delta E$ και ABZ έχουν:

• $\Delta \Delta = AB$, ως πλευρές του τετραγώνου $AB \Gamma \Delta$

• $AE = BZ$, από τη σχέση (1)

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta \Delta E$ και ABZ έχουν τις κάθετες πλευρές τους μια προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα. Οι γωνίες $\Delta E \Delta$ και $B \hat{Z} A$ είναι ίσες γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές $\Delta \Delta$ και AB αντίστοιχα.



ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABZ το άθροισμα των δύο οξείων γωνιών του είναι 90° , δηλαδή:

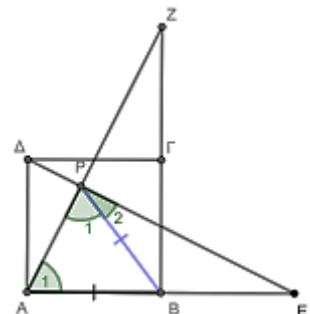
$A_1 + B \hat{Z} A = 90^\circ$, αλλά $B \hat{Z} A = \Delta E \Delta$, από το α) i. ερώτημα, οπότε $A_1 + \Delta E \Delta = 90^\circ \Leftrightarrow A_1 + \Delta E P = 90^\circ$ (όπου P το σημείο τομής των AZ και ΔE). Στο τρίγωνο AEP το άθροισμα δύο γωνιών του είναι 90° , οπότε η τρίτη γωνία του θα είναι 90° . Δηλαδή $\Delta P E = 90^\circ$, έτσι τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

β) Από την υπόθεση $PB = AB$, άρα το

τρίγωνο BAP είναι ισοσκελές, οπότε $A_1 = P_1$,
ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του.

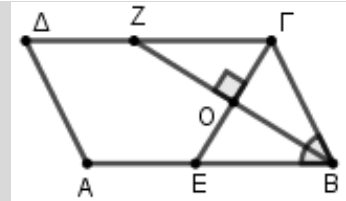
Από το προηγούμενο ερώτημα $A_1 + \Delta E P = 90^\circ$, ως άθροισμα των οξείων γωνιών ορθογωνίου τριγώνου, οπότε $P_1 + \Delta E P = 90^\circ$ (1).

Επιπλέον ισχύει $P_1 + P_2 = 90^\circ$ (2) επειδή $\Delta P E = 90^\circ$ από το α) ii.



Από τις (1) και (2) έχουμε $ΑΕΡ = Ρ_2$, ή $ΒΕΡ = Ρ_2$, άρα το τρίγωνο ΒΕΡ είναι ισοσκελές με $ΕΒ = ΡΒ$.
 Όμως $ΡΒ = ΑΒ$, από υπόθεση, οπότε $ΒΕ = ΑΒ$ και η θέση του σημείου Ε προσδιορίζεται στην προέκταση του ΑΒ ώστε $ΒΕ = ΑΒ$.

13850. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας Β. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Β ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο;

Λύση

α) Έχουμε ΒΖ διχοτόμος της γωνίας Β και ΒΟ ⊥ ΓΕ από υπόθεση. Συνεπώς το τμήμα ΒΟ στο τρίγωνο ΕΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΓ.

β) Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ τα οποία έχουν:

- ΟΓ=ΟΕ (Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ)

- ΖΓΟ = ΒΕΟ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται από την ΓΕ)

Τα τρίγωνα ΟΖΓ, ΟΒΕ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

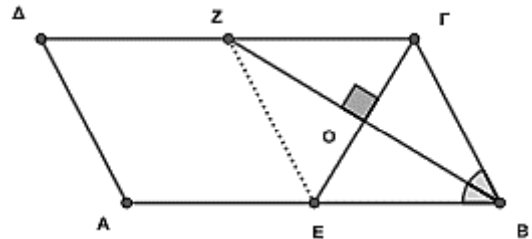
γ) Από τη σύγκριση στο ερώτημα β) έχουμε ΟΖ=ΟΒ ως πλευρές των ίσων τριγώνων ΖΟΓ και ΒΟΕ

απέναντι από τις ίσες γωνίες ΖΓΟ και ΒΕΟ και ΟΓ=ΟΕ

(Ο μέσο της ΓΕ γιατί το ΒΟ είναι διχοτόμος

άρα και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΕΒΓ).

Το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι ΓΕ και ΒΖ διχοτομούνται στο σημείο Ο και επειδή είναι κάθετες από υπόθεση ($ΒΖ \perp ΓΕ$) είναι ρόμβος.



δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ τετράγωνο θα πρέπει να είναι εκτός από ρόμβος (ερώτημα γ)) και ορθογώνιο άρα θα πρέπει $Β = 90^\circ$.

13848. Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.

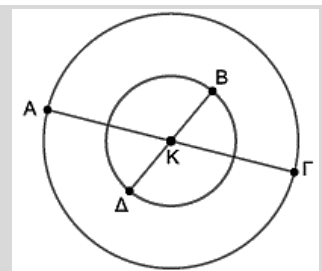
α) Αν ισχύει $ΑΓ > ΒΔ$:

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

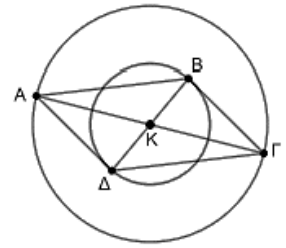
β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής: «Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

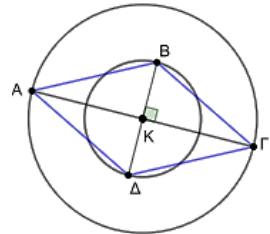


Λύση

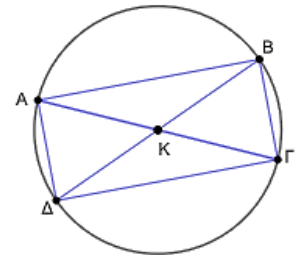
α) i. Ισχύει ότι $BK = K\Delta$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου (K, KB).
Ομοίως $AK = K\Gamma$ στον κύκλο με κέντρο K και ακτίνα AK .
Άρα οι διαγώνιοι του $AB\Gamma\Delta$ διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.



ii. Αν οι AG και $B\Delta$ είναι κάθετες τότε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχει κάθετες διαγώνιους. Συνεπώς είναι ρόμβος. Άρα η επιπλέον υπόθεση είναι ότι «οι AG και $B\Delta$ είναι κάθετες».



β) Αν οι κύκλοι ταυτίζονται, τότε $AG = B\Delta$. Συνεπώς οι διαγώνιοι AG και $B\Delta$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες. Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο. Για να είναι τετράγωνο πρέπει επιπλέον οι AG και $B\Delta$ να είναι κάθετες, κάτι που δεν αναφέρεται στην υπόθεση του β). Ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής καθώς το $AB\Gamma\Delta$ δεν είναι αναγκαία τετράγωνο.



13841. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο Z τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BE = E\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $BE \parallel Z\Delta$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος.

δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε το τετράπλευρο ΔEBZ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

α) Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ άρα $\Delta BZ = E\Delta B$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $E\Delta$ και BZ που τέμνονται από την $B\Delta$. Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , άρα $\Delta BZ = \Delta BE$. Συνεπώς $E\Delta B = \Delta BE$ ως ίσες με την ΔBZ , άρα το τρίγωνο $BE\Delta$ είναι ισοσκελές με $BE = E\Delta$.

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα BMZ και ΔME τα οποία έχουν:

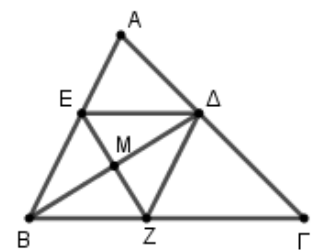
- $BM = M\Delta$ (υπόθεση)

- $\Delta BZ = E\Delta B$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $E\Delta$ και BZ που τέμνονται από την $B\Delta$)

- $BMZ = \Delta ME$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα BMZ , ΔME είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα και $BZ = \Delta E$ ως απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες BMZ και ΔME .

Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις πλευρές του BZ και ΔE παράλληλες και ίσες άρα και $BE \parallel Z\Delta$ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου).



γ) Από το α) ερώτημα έχουμε $BE = E\Delta$, άρα το παραλληλόγραμμο ΔEBZ είναι ρόμβος αφού έχει δυο διαδοχικές πλευρές του ίσες.

2ος τρόπος

Η διαγώνιος $B\Delta$ διχοτόμος της γωνίας B του παραλληλογράμμου ΔEBZ οπότε είναι ρόμβος.

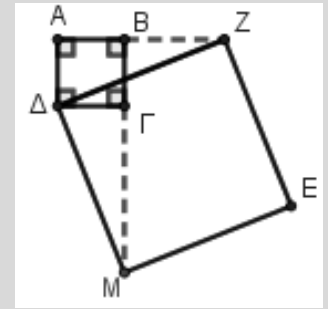
δ) Για να είναι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ τετράγωνο, εφόσον είναι ρόμβος, πρέπει η γωνία Β να είναι ορθή. Όταν η γωνία Β είναι ορθή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.

34336. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΖ. Θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα και οι γωνίες $\hat{A}\hat{D}Z$ και $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}M$ είναι ίσες.

β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο.

γ) οι γωνίες ΒΖΕ και ΕΜΒ είναι παραπληρωματικές.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ έχουν:

1) ΑΔ = ΓΔ πλευρές του τετραγώνου

2) ΑΖ = ΓΜ υπόθεση

Επειδή τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, είναι ίσα, οπότε και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους είναι ίσα. Επομένως $\hat{A}\hat{D}Z = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}M$.

β) Είναι $\hat{A}\hat{D}Z + \hat{Z}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}\hat{\Delta}M + \hat{Z}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{M}\hat{\Delta}Z = 90^\circ$.

Το παραλληλόγραμμο ΜΔΖΕ έχει μία γωνία ορθή και είναι ορθογώνιο. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα, έχουν και ΔΖ = ΔΜ, οπότε το ορθογώνιο ΜΔΖΕ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και είναι τετράγωνο.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα, έχουν και $\hat{A}\hat{Z}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{M}\Delta$.

Είναι $\hat{B}\hat{Z}E + \hat{E}\hat{M}B} = \hat{B}\hat{Z}\Delta + \hat{\Delta}\hat{Z}E + \hat{E}\hat{M}B} = \hat{\Gamma}\hat{M}\Delta + \hat{E}\hat{M}B} + 90^\circ = \hat{E}\hat{M}\Delta + 90^\circ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε οι γωνίες ΒΖΕ και ΕΜΒ είναι παραπληρωματικές.

Εφαρμογές παραλληλογράμμων

Θέμα 2ο

12639. Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

- α) το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.
β) το ΑΕ ισούται με το 1/4 του ΑΓ.

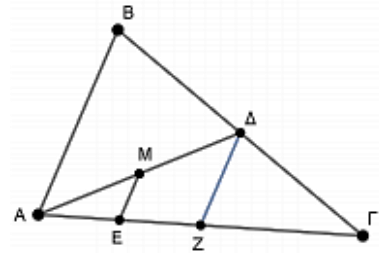
Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, εφόσον από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΑΒ, αυτή θα περάσει από το μέσο της τρίτης πλευράς. Επομένως το Ζ είναι το μέσον της πλευράς ΑΓ.

β) Λόγω του (α) ερωτήματος είναι $AZ = \frac{AG}{2}$.

Στο τρίγωνο ΑΔΖ, το Μ είναι μέσο της πλευράς του ΑΔ και η ΜΕ // ΔΖ εφόσον και οι δύο είναι παράλληλες στην ΑΒ.

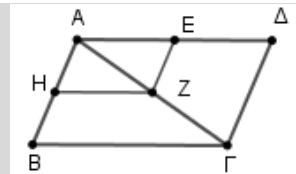
Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΖ, άρα $AE = \frac{AZ}{2} = \frac{\frac{AG}{2}}{2} = \frac{AG}{4}$.



13532. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = \frac{AB}{2}$.

β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΓΔ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ, άρα είναι παράλληλο στη ΓΔ και ίσο με το μισό της, δηλαδή $ZH // \Gamma\Delta$ (1) και $ZH = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$, γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα $ZH = \frac{AB}{2}$.

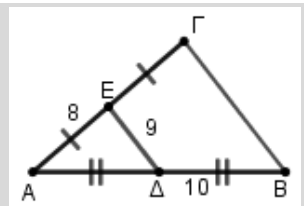
β) Αφού το Ε είναι το μέσο της ΑΒ, θα είναι $AE = \frac{AB}{2}$. Όμως από το ερώτημα α) είναι $ZH = \frac{AB}{2}$ άρα $AE = ZH$. Επιπλέον, είναι $AE // \Gamma\Delta$ (2), γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $AE // ZH$. Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΖΗ είναι ίσες και παράλληλες.

14877. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και Ε μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $AE = 8$, $ED = 9$ και $DB = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι οι ΒΓ και ΔΕ είναι παράλληλες.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.



Λύση

α) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, η ΔΕ είναι παράλληλη στη ΒΓ και ισούται

με το μισό της.

β) Είναι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2\Delta E = 18$

γ) Η περίμετρος του τριγώνου ABΓ είναι: $AB + B\Gamma + A\Gamma = 20 + 18 + 16 = 54$ και η περίμετρος του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ: $\Delta E + E\Gamma + \Gamma B + B\Delta = 9 + 8 + 18 + 10 = 45$.

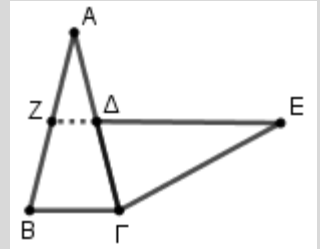
Το τρίγωνο έχει μεγαλύτερη περίμετρο.

34332. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ABΓ και ΕΓΔ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $B\Gamma = \frac{AB}{2}$. Έστω Ζ το σημείο στο οποίο η προέκταση της ΕΔ

προς το Δ τέμνει την ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABΓ και ΓΔΕ είναι ίσα.

β) το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABΓ και ΕΔΓ έχουν:

1) $AB = E\Delta$ υπόθεση

2) $A\Gamma = E\Gamma$ υπόθεση

3) $\Gamma\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = B\Gamma$

Τα δύο τρίγωνα έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ABΓ και ΕΔΓ είναι ίσα έχουν και $\hat{E}\Delta\Gamma = \hat{B}$. Όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα $\hat{E}\Delta\Gamma = \hat{\Gamma}$.

Οι γωνίες αυτές όμως είναι εντός εναλλάξ των ΔΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ, άρα $\Delta Z \parallel B\Gamma$. Στο τρίγωνο ABΓ το Δ είναι μέσο της ΑΓ και $\Delta Z \parallel B\Gamma$, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΒ.

34398. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$ (στη λύση αποδεικνύει ότι $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$)

β) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

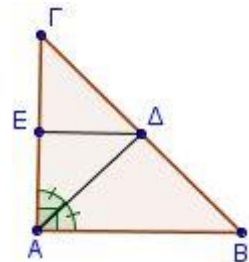
γ) $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$.

Λύση

α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του.

Επειδή το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και η ΔΕ είναι παράλληλη στην ΑΒ, το Ε είναι μέσο της ΑΓ, οπότε $\Delta E = \frac{AB}{2}$. Όμως $AB = A\Gamma$, οπότε $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$.

β) Είναι $A\Gamma \perp AB$ και $AB \parallel \Delta E$, άρα είναι και $A\Gamma \perp \Delta E$, οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, έχει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΔ είναι $\hat{\Gamma} = 45^\circ$, οπότε είναι ισοσκελές.

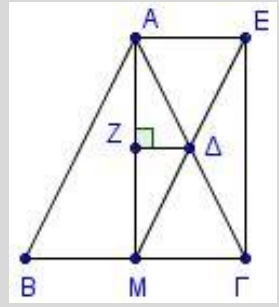


34426. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Στο τρίγωνο $AM\Gamma$ θεωρούμε τη διάμεσο $M\Delta$ την οποία προεκτείνουμε προς το Δ κατά τμήμα $\Delta E = M\Delta$. Φέρουμε από το σημείο Δ τμήμα ΔZ κάθετο στην AM . Να αποδείξετε ότι:

Αν το σημείο Z είναι η προβολή του Δ στην AM , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$.



Λύση

α) Επειδή $M\Delta = \Delta E$ και $A\Delta = \Delta\Gamma$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AM\Gamma E$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

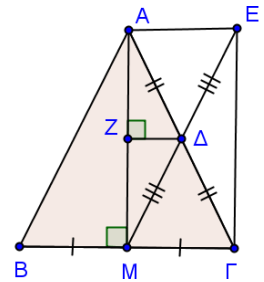
Η AM είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη βάση του,

άρα είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή $\angle AM\Gamma = 90^\circ$.

Το παραλληλόγραμμο $AM\Gamma E$ έχει μια γωνία του ορθή, οπότε είναι ορθογώνιο.

β) Είναι $\Delta Z \perp AM$ και $\Gamma M \perp AM$, άρα $\Delta Z \parallel \Gamma M$. Στο τρίγωνο $AM\Gamma$, το Δ είναι μέσο της $A\Gamma$ και η ΔZ είναι παράλληλη στη ΓM , άρα το Z

είναι μέσο της AM και $\Delta Z = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$.



34494. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και GA αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE .

Λύση

α) Τα Δ, Z είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $\Delta Z \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \Delta Z \parallel BE$

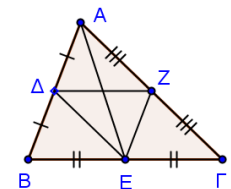
και $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2} = BE$.

Το τετράπλευρο ΔBEZ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα

$\Delta E \parallel A\Gamma \Leftrightarrow \Delta E \parallel AZ$ και $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2} = AZ$. Το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ έχει δύο

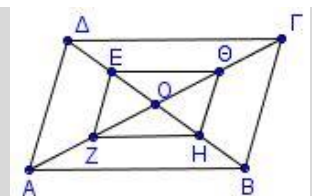
απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Οι $AE, \Delta Z$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $A\Delta EZ$, οπότε διχοτομούνται.



34512. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O είναι το κέντρο του. Έστω E, Z, H, Θ τα μέσα των OD, OA, OB και OG αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε τη περίμετρο του $EZH\Theta$.



Λύση

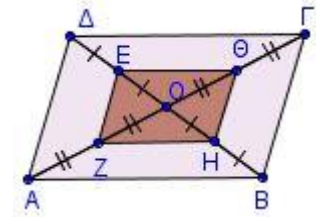
α) Τα E, Z είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο OAD , άρα $EZ = \frac{AD}{2}$. Τα Z, H είναι μέσα δύο πλευρών

στο τρίγωνο OAB, άρα $ZH = \frac{AB}{2}$.

Τα Η,Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο OBG, άρα $\Theta H = \frac{BG}{2}$.

Τα Ε,Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο OΓΔ, άρα $E\Theta = \frac{GD}{2}$.

Επειδή $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$, είναι $EZ = H\Theta$ και $ZH = E\Theta$, δηλαδή στο τετράπλευρο EZHΘ οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Επειδή η περίμετρος του παραλληλογράμμου ABΓΔ είναι 40, ισχύει ότι: $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 40$.

$$\text{Είναι } EZ + ZH + H\Theta + \Theta E = \frac{A\Delta}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{B\Gamma}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

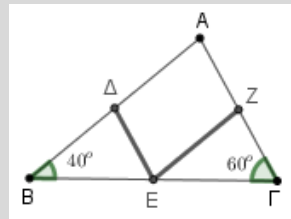
34768. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Επιπλέον τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών AB, BΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ABΓ.

β) Να αποδείξετε ότι $DE \parallel A\Gamma$ και $ZE \parallel AB$.

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BΔΕ.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ, έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 40^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 80^\circ$$

β) Επειδή τα σημεία Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, ισχύει ότι $DE \parallel A\Gamma$. Είναι $\angle B\hat{\Delta}E = \hat{A} = 80^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Επειδή τα Ε,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, ισχύει ότι: $EZ \parallel AB$.

γ) $\angle \hat{\Delta}B = \hat{A} = 80^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΕΔ, ΑΓ που τέμνονται από την ΑΒ. $\angle \hat{E}B = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΒΓ.

36088. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$.

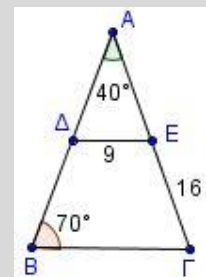
Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

ii. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 18$.

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ABΓ.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 70^\circ, \text{ άρα } \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ και το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με βάση τη BΓ, άρα ίσες πλευρές έχει τις AB και ΑΓ.}$$

β) Επειδή τα Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, ισχύει ότι: $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 9 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 18$.

γ) Είναι $ΕΓ = 16 \Leftrightarrow \frac{ΑΓ}{2} = 16 \Leftrightarrow ΑΓ = 32$, οπότε και $ΑΒ = 32$.

Είναι $2τ = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 32 + 18 + 32 = 82$

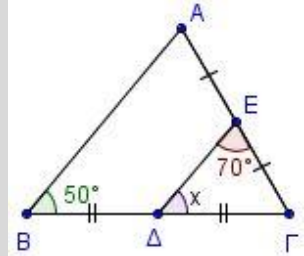
36091. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $ΒΓ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\hat{\Delta E Γ} = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel ΑΒ$.

β) Να υπολογίσετε

i. τη γωνία $\hat{x}$.

ii. τις γωνίες A και Γ του τριγώνου $ΑΒΓ$.



Λύση

α) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $ΑΒΓ$, το τμήμα ΔE είναι παράλληλο στη τρίτη πλευρά του τριγώνου, την $ΑΒ$.

β) i. Είναι $\hat{x} = \hat{B} = 50^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ΑΒ, \Delta E$ που τέμνονται από την $ΒΓ$.

ii. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta E Γ$ έχουμε:

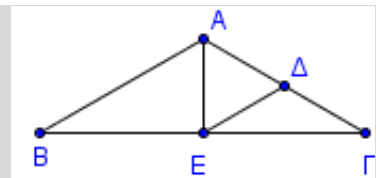
$$70^\circ + \hat{x} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 50^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$$

Είναι $\hat{A} = \hat{E} = 70^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ΑΒ, \Delta E$ που τέμνονται από την $ΑΓ$.

36224. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των $ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta Γ$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.



Λύση

α) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει ότι

$$\Delta E \parallel ΑΒ \text{ και } \Delta E = \frac{ΑΒ}{2}.$$

$$\text{Είναι } \Delta Γ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} = \Delta E, \text{ άρα το τρίγωνο } E\Delta Γ \text{ είναι ισοσκελές.}$$

Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $ΒΓ$, έχει $\Gamma = B = 30^\circ$.

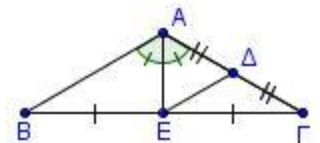
Επειδή το τρίγωνο $\Delta E Γ$ είναι ισοσκελές με βάση την $EΓ$, ισχύει ότι $\Delta E Γ = \Gamma = 30^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta E Γ$ έχουμε:

$$E\Delta Γ + \Delta E Γ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow E\Delta Γ + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow E\Delta Γ = 120^\circ$$

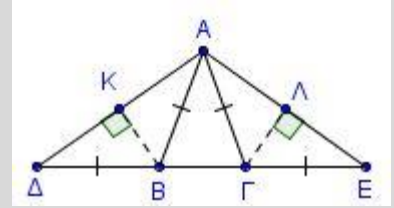
β) Αρχικά επειδή $A\Delta = \Delta Γ = \Delta E$, το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Η $AΕ$ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ που αντιστοιχεί στη βάση του $ΒΓ$, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας A , οπότε $E\Delta\Delta = 60^\circ$.

Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές και έχει μια γωνία του 60° , άρα είναι ισόπλευρο.



36356. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Delta$ με $AB = B\Delta = 5$ και $A\Gamma E$ με $A\Gamma = \Gamma E = 5$ έτσι ώστε τα σημεία Δ , B , Γ και E να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους BK και $\Gamma\Lambda$ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

- i.** τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή.
- ii.** τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.

Λύση

α) i. Επειδή $AB = B\Delta$ και $A\Gamma = \Gamma E$ τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή.

ii. Το BK είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Delta$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή το K είναι μέσο του $A\Delta$. Όμοια το $\Gamma\Lambda$ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $A\Gamma E$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσός του, δηλαδή το Λ είναι μέσο του $A\Gamma$.

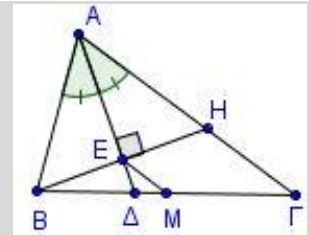
β) Είναι $AB + A\Gamma + B\Gamma = 12 \Leftrightarrow 5 + 5 + B\Gamma = 12 \Leftrightarrow B\Gamma = 2$.

Το τμήμα $K\Lambda$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $A\Delta E$, άρα

$$K\Lambda = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta B + B\Gamma + \Gamma E}{2} = \frac{5 + 2 + 5}{2} = 6$$

4ο Θέμα

1723. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) και η διχοτόμος του $A\Delta$. Φέρουμε από το B κάθετη στην $A\Delta$ που τέμνει την $A\Delta$ στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.

β) $EM \parallel H\Gamma$

γ) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

Λύση

α) Στο τρίγωνο ABH το AE είναι ύψος και διχοτόμος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και το AE είναι και διάμεσος του τριγώνου.

β) Στο τρίγωνο $BH\Gamma$ τα E, M είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $EM \parallel H\Gamma$ και $EM = \frac{H\Gamma}{2}$.

γ) Επειδή το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $AB = AH$. Είναι

$$EM = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AH}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$

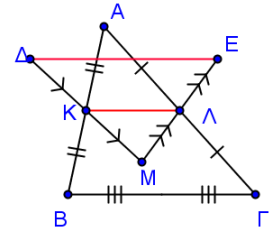
1741. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.

β) Στη περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΜΔΕ τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $ΚΛ \parallel ΔΕ$ (1)
 Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $ΚΛ \parallel ΒΓ$ (2)
 Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ$.

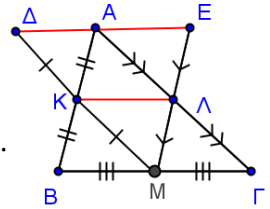


β) Τα Κ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα

$$KM = \frac{AG}{2} \text{ και } KM \parallel AG. \text{ Όμως } KM = \frac{DM}{2}, \text{ άρα } DM = AG \text{ και } DM \parallel AG$$

,οπότε το τετράπλευρο έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $ΔΑ \parallel ΜΓ$ (3) ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

Τα Μ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $ΜΛ \parallel ΑΒ$ και $ΜΛ = \frac{AB}{2}$.



Όμως $ΜΛ = \frac{ME}{2}$, άρα τα ME, AB είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο

ABME είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $ΑΕ \parallel ΔΜ$ (4) ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Από τις σχέσεις (3),(4) προκύπτει ότι $ΔΑ \parallel ΑΕ$ και επειδή τα δύο τμήματα έχουν κοινό σημείο το Α, τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά.

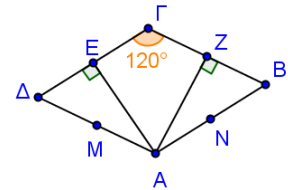
1743. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$. Έστω ΑΕ και ΑΖ οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

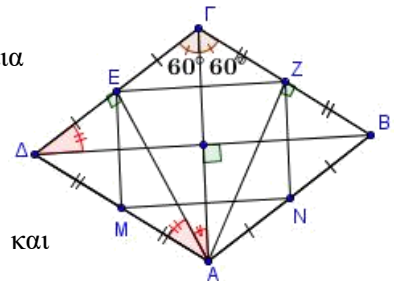
ii. $ΑΓ \perp ΕΖ$

β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο.



Λύση

α) i. Επειδή οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, είναι $\angle EGA = \angle AGZ = 60^\circ$. Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι ισοσκελή και έχουν μια γωνία 60° , άρα είναι ισόπλευρα. Τα ΑΕ, ΑΖ είναι ύψη στα ισόπλευρα τρίγωνα, άρα είναι και διάμεσοί του, δηλαδή τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.



ii. Επειδή τα Ε, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΔΒ, είναι $EZ \parallel ΒΔ$ και

$$EZ = \frac{BD}{2} \quad (1). \text{ Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιες } ΑΓ, ΒΔ \text{ του ρόμβου είναι κάθετες}$$

και αφού $EZ \parallel ΒΔ$, θα είναι και $ΑΓ \perp ΕΖ$.

β) Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $MN \parallel ΒΔ$ και $MN = \frac{BD}{2}$ (2). Από (1),(2)

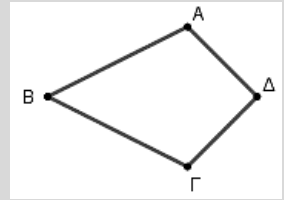
συνεπάγεται ότι τα τμήματα ΕΖ και ΜΝ είναι ίσα και παράλληλα δηλαδή το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι παραλληλόγραμμο. Τα Ε,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΓΔ, άρα $ΕΜ \parallel ΑΓ$.

Επειδή $ΑΓ \perp ΒΔ$, $ΕΜ \parallel ΑΓ$ και $EZ \parallel ΒΔ$, είναι $EZ \perp ΜΝ$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΕΜΝΖ έχει $\angle ΜΕΖ = 90^\circ$, είναι ορθογώνιο.

1745. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA=BG$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

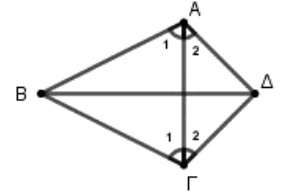
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.
 β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα.
 γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



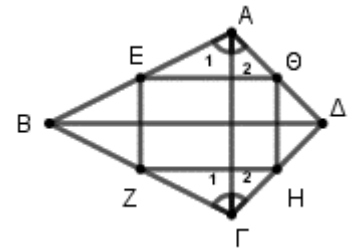
Λύση

α) Επειδή $BA=BG$ το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, οπότε οι γωνίες α_1, γ_1 που είναι στη βάση του είναι ίσες. Επειδή όμως $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, είναι $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = \gamma - \gamma_1 = \gamma_2$, οπότε το τρίγωνο ΔΑΓ έχει δύο γωνίες ίσες οπότε είναι ισοσκελές.



β) Επειδή $BA = BG$ και $DA = DG$, τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα Α και Γ, οπότε η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ, άρα $BD \perp AG$.

γ) Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Στο τρίγωνο ΒΑΓ τα Ε, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε $EZ \parallel AG$ και $EZ = AG/2$. Στο τρίγωνο ΔΑΓ τα Θ, Η είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε $\Theta H \parallel AG$ και $\Theta H = AG/2$. Επειδή $EZ \parallel AG$ και $\Theta H \parallel AG$, είναι και $EZ \parallel \Theta H$. Επειδή επιπλέον $\Theta H = EZ$, το τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο ΒΑΔ τα Ε, Θ είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε $E\Theta \parallel BD$.



Επειδή $E\Theta \parallel BD$, $EZ \parallel AG$ και $AG \perp BD$, είναι και $E\Theta \perp EZ$, δηλαδή $\angle E = 90^\circ$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ έχει μια ορθή γωνία και είναι ορθογώνιο.

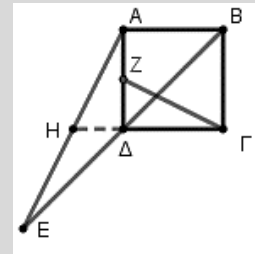
1766. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ.

Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$

β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα.

γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.



Λύση

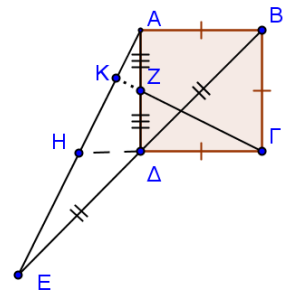
α) Επειδή το Δ είναι μέσο του ΒΕ και η ΔΗ είναι παράλληλη στη πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΕ, το Η είναι μέσο της πλευράς ΑΕ και ισχύει ότι $\Delta H = \frac{AB}{2}$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ έχουν:

1) $\Delta H = \frac{AB}{2} = \frac{AD}{2} = \Delta Z$ και

2) $AD = DG$ πλευρές του τετραγώνου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

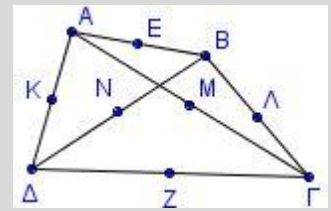


γ) Έστω ότι η ΓΖ τέμνει την ΑΗ στο Κ. Είναι $\angle KZA = \angle ZDG$ ως κατακορυφήν και $\angle KAZ = \angle DZG$ γιατί τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΔΖΒ είναι ίσα.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΔΖΓ έχουμε: $\angle DZG + \angle ZDG = 90^\circ$. Στο τρίγωνο ΑΚΖ έχουμε: $\angle KAZ + \angle KZA = \angle DZG + \angle ZDG = 90^\circ$, οπότε από το άθροισμα γωνιών του προκύπτει ότι και $\angle AKZ = 90^\circ$, άρα η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.

1773. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΑΔ = ΒΓ$. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ,ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ είναι ρόμβος.
 β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΜΝ.
 γ) $ΚΕ = ΖΛ$
 δ) Τα τμήματα ΚΛ,ΜΝ,ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο.



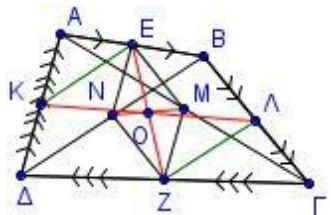
Λύση

α) Στα τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ, ΑΔΓ, ΑΒΓ, τα Ε,Ν,Ζ,Μ είναι μέσα πλευρών άρα $ΕΝ = \parallel \frac{ΑΔ}{2}$, $ΝΖ = \parallel \frac{ΒΓ}{2}$,

$$ΜΖ = \parallel \frac{ΑΔ}{2} \text{ και } ΜΕ = \parallel \frac{ΒΓ}{2}.$$

Επειδή $ΑΔ = ΒΓ$, είναι και $ΕΝ = ΝΖ = ΖΜ = ΜΕ$, οπότε το τετράπλευρο ΕΜΖΝ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

β) Επειδή το ΕΜΖΝ είναι ρόμβος, οι διαγώνιές του είναι κάθετες, άρα $ΕΖ \perp ΜΝ$ και διέρχεται από το μέσο της ΜΝ. Επομένως ΕΖ μεσοκάθετος της ΜΝ.



γ) Τα Κ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΒ, άρα $ΚΕ = \frac{ΒΔ}{2}$ και $ΚΕ \parallel ΒΔ$. Τα Λ,Ζ είναι μέσα

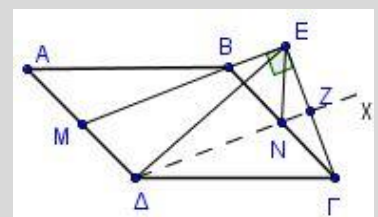
δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $ΛΖ = \frac{ΒΔ}{2}$ και $ΛΖ \parallel ΒΔ$. Είναι $ΚΕ = ΛΖ = \frac{ΒΔ}{2}$.

δ) Επειδή τα ΚΕ, ΖΛ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΕΚΖΛ είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΕΖ, ΚΛ είναι διαγώνιες του που διχοτομούνται σε σημείο Ο. Τα ΕΖ,ΜΝ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΕΜΖΝ, οπότε διχοτομούνται. Όμως το Ο είναι μέσο της ΕΖ, οπότε θα είναι μέσο και του ΜΝ. Άρα τα ΚΛ,ΜΝ,ΕΖ έχουν κοινό μέσο, οπότε διέρχονται από το ίδιο σημείο.

1775. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ ($ΓΕ \perp ΜΒ$). Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ ($Δχ \parallel ΜΒ$) τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν,Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.
 β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ.
 γ) $ΔΕ = ΔΓ$.

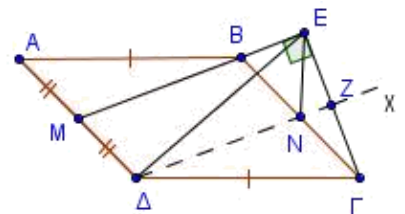


Λύση

α) Επειδή $ΑΔ \parallel ΒΓ$, είναι και $ΜΔ \parallel ΒΝ$. Όμως είναι και $ΔΝ \parallel ΜΒ$, άρα το τετράπλευρο ΜΒΝΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι $ΒΝ = ΜΔ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΒΓ}{2}$, άρα το Ν είναι μέσο του τμήματος ΒΓ. Στο τρίγωνο ΒΕΓ, το Ν είναι μέσο της ΒΓ και η ΝΖ είναι παράλληλη στη ΒΕ, άρα το Ζ είναι μέσο του ΕΓ.

γ) $ΔΖ \parallel ΜΕ$ και $ΜΕ \perp ΓΕ$ δηλαδή $ΔΖ \perp ΓΕ$. Στο τρίγωνο ΔΕΓ το ΔΖ είναι ύψος και διάμεσος(από β ερώτημα), άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΔΕ = ΔΓ$.



1794. α) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ πρέπει απαραίτητα να είναι ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

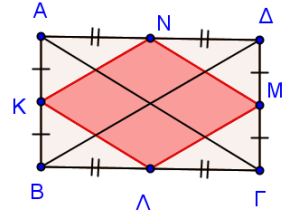
Λύση

α) Τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΚΛ \parallel ΑΓ$ και

$$ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2} \quad (1).$$

Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ, άρα $ΜΝ \parallel ΑΓ$ και

$$ΜΝ = \frac{ΑΓ}{2} \quad (2).$$



Τα Λ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $ΛΜ \parallel ΒΔ$ και $ΛΜ = \frac{ΒΔ}{2}$ (3). Τα Κ,Ν είναι μέσα

δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $ΚΝ \parallel ΒΔ$ και $ΚΝ = \frac{ΒΔ}{2}$ (4). Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, οι

διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες, οπότε από τις (1),(2),(3),(4) προκύπτει ότι $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΝΚ$, οπότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

β) Αν το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα έχει ίσες διαγώνιες για να ισχύουν τα παραπάνω, οπότε δεν είναι απαραίτητο να είναι ορθογώνιο.

1798. α) Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

Λύση

α) Τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΚΛ \parallel ΑΓ$ και $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$ (1).

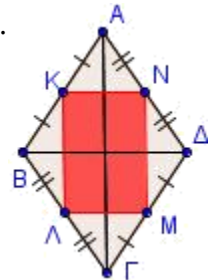
Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ, άρα $ΜΝ \parallel ΑΓ$ και $ΜΝ = \frac{ΑΓ}{2}$

(2).

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι το ΚΛΜΝ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Τα Κ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών του

τριγώνου ΑΒΔ, άρα $ΚΝ \parallel ΒΔ$ και $ΚΝ = \frac{ΒΔ}{2}$. Επειδή οι ΑΓ,ΒΔ είναι διαγώνιες του

ρόμβου, είναι κάθετες, οπότε και οι ΚΛ, ΚΝ που είναι παράλληλες προς αυτές θα είναι κάθετες, δηλαδή $Κ = 90^\circ$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.



β) Τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, άρα $ΚΛ \parallel ΑΓ$ και

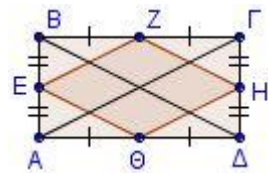
$$ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2} \quad (1).$$

Τα Μ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ, άρα $ΜΝ \parallel ΑΓ$ και

$ΜΝ = \frac{ΑΓ}{2}$ (2). Τα Λ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $ΛΜ \parallel ΒΔ$ και $ΛΜ = \frac{ΒΔ}{2}$ (3). Τα

Κ,Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $ΚΝ \parallel ΒΔ$ και $ΚΝ = \frac{ΒΔ}{2}$ (4).

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες, οπότε από τις (1),(2),(3),(4) προκύπτει ότι $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΝΚ$, οπότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

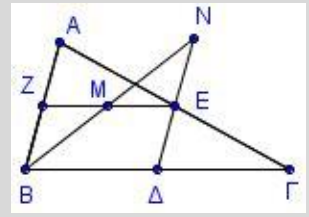


1801. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει τη ZE στο σημείο M και την προέκταση της DE στο σημείο N , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα BZM και MEN είναι ισοσκελή.

γ) $BZ + NE = \Delta\Gamma$



Λύση

α) Τα Z, E είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $ZE \parallel B\Gamma$. Τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $\Delta E \parallel AB$. Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο

β) Είναι $\Delta BM = ZMB$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ZE, B\Delta$ που

τέμνονται από τη BN και $\Delta BM = ZBM$ λόγω της διχοτόμησης, άρα

$ZBM = ZMB$ οπότε το τρίγωνο ZBM είναι ισοσκελές. Είναι

$ZBM = MNE$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, N\Delta$ που τέμνονται

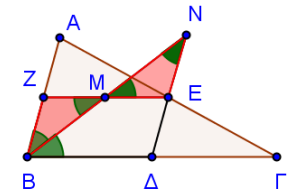
από την BN και $ZMB = NME$ ως κατακορυφήν, άρα $MNE = NME$,

οπότε το τρίγωνο MEN είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο BZM είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $BZ = ZM$ και επειδή το τρίγωνο MEN είναι ισοσκελές ισχύει ότι $ME = EN$.

Είναι $ZE = B\Delta$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και $B\Delta = \Delta\Gamma$ (Δ μέσο $B\Gamma$), οπότε

$BZ + NE = ZM + ME = ZE = B\Delta = \Delta\Gamma$.

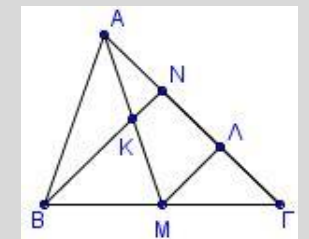


1802. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσός του και K το μέσο του AM . Αν η προέκταση της BK τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο N , και Λ είναι το μέσο του ΓN , να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο N είναι μέσο του $A\Lambda$.

β) $K\hat{M}\Gamma = M\hat{B}K + A\hat{K}N$

γ) $BK = 3KN$



Λύση

α) Στο τρίγωνο $BN\Gamma$ τα M, Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $M\Lambda \parallel BN$ και $M\Lambda = \frac{BN}{2}$ (1). Στο τρίγωνο $AM\Lambda$ το K είναι μέσο της AM και $KN \parallel M\Lambda$, άρα το N είναι μέσο της $A\Lambda$.

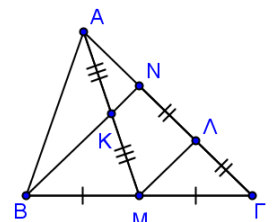
β) Η γωνία $KM\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο BKM , οπότε $KM\Gamma = MBK + BKM$.

Όμως $BKM = AKN$ ως κατακορυφήν, άρα $KM\Gamma = MBK + AKN$.

γ) Επειδή τα K, N είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AM\Lambda$, ισχύει ότι:

$$KN = \frac{M\Lambda}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{BN}{2}}{2} = \frac{BN}{4}.$$

$$\text{Είναι } BK = BN - KN = BN - \frac{BN}{4} = \frac{3}{4}BN = 3\frac{BN}{4} = 3KN$$



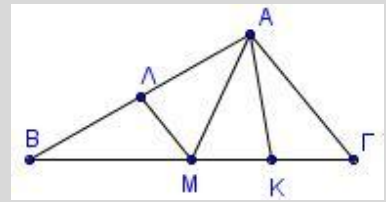
1803. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω AM διάμεσος του $AB\Gamma$ και K, Λ τα μέσα των $M\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{M}\Lambda\Gamma = \hat{A}\hat{M}\Gamma$.

β) $M\Lambda = MK$.

γ) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΛMK .



Λύση

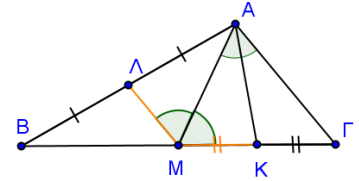
α) Είναι $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2A\Gamma}{2} = A\Gamma$, άρα το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές

με βάση την AM και ισχύει ότι $\hat{M}\Lambda\Gamma = \hat{A}\hat{M}\Gamma$ (1).

β) Τα M, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα

$M\Lambda \parallel A\Gamma$ και $M\Lambda = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{M\Gamma}{2} = MK$ ($A\Gamma = M\Gamma$ από ισοσκελές τρίγωνο

$AM\Gamma$ και K μέσο).

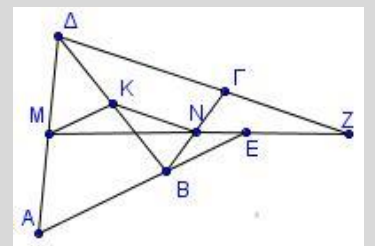


γ) $\hat{M}\Lambda\Gamma = \hat{A}\hat{M}\Gamma$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΛM και $A\Gamma$ που τέμνονται από την AM . Από (1) και (2) έχουμε $\hat{M}\Lambda\Gamma = \hat{A}\hat{M}\Gamma$. Άρα η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΛMK .

1804. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των $A\Delta$, $B\Gamma$, $B\Delta$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των $AB, \Delta\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $MK = KN$

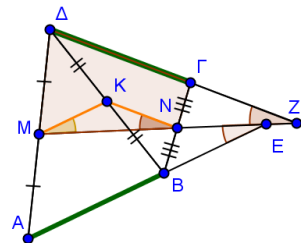
β) $\hat{M}\hat{E}\hat{A} = \hat{M}\hat{Z}\hat{\Delta}$



Λύση

α) Τα σημεία M και K είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΔBA , άρα $MK \parallel AB$ και $MK = \frac{AB}{2}$. Τα σημεία K, N είναι μέσα δύο πλευρών στο

τρίγωνο $B\Gamma\Delta$, άρα $KN \parallel \Gamma\Delta$ και $KN = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$ άρα και $MK = KN$.

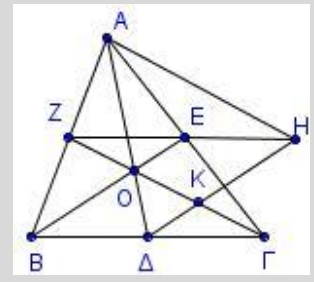


β) Είναι $\hat{M}\hat{E}\hat{A} = \hat{N}\hat{M}\hat{K}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων MK, AE που τέμνονται από την ME και $\hat{M}\hat{Z}\hat{\Delta} = \hat{K}\hat{N}\hat{M}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $KN, \Delta Z$ που τέμνονται από την MZ .

Όμως $\hat{N}\hat{M}\hat{K} = \hat{K}\hat{N}\hat{M}$ γιατί το τρίγωνο KMN είναι ισοσκελές, άρα και $\hat{M}\hat{E}\hat{A} = \hat{M}\hat{Z}\hat{\Delta}$.

1820. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του AD , BE και ΓZ . Προεκτείνουμε το τμήμα ZE (προς το E) κατά τμήμα $EH = ZE$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.
 β) Η περίμετρος του τριγώνου $A\Delta H$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$.
 γ) Οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$.



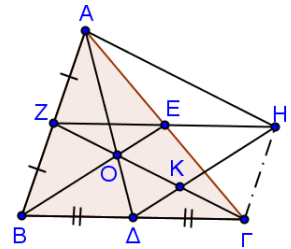
Λύση

α) Επειδή τα Z, E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, ισχύει ότι $ZE \parallel B\Gamma \Leftrightarrow EH \parallel B\Delta$ και

$$ZE = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow EH = B\Delta.$$

Στο τετράπλευρο $EH\Delta B$ δύο απέναντι πλευρές του, οι EH , ΔB είναι ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι $BE = \Delta H$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $EH\Delta B$. Επειδή $EH = ZE$ και $AE = E\Gamma$ οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AZ\Gamma H$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει ότι $\Gamma Z = AH$, γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Για τη περίμετρο του τριγώνου $A\Delta H$ έχουμε:
 $AD + \Delta H + AH = AD + BE + \Gamma Z$.



γ) Στο τρίγωνο $BO\Gamma$ το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$ και $\Delta K \parallel BO$, άρα το K είναι μέσο της $O\Gamma$, δηλαδή $\Gamma K = KO$ (1). Στο τρίγωνο ZKH το E είναι μέσο της ZH και $EO \parallel KH$, άρα το O είναι μέσο της ZK , δηλαδή $KO = OZ$ (2). Από τις (1), (2) είναι $\Gamma K = KO = OZ$, δηλαδή οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$.

1898. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Έστω E, Z και H τα μέσα των $B\Delta$, $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

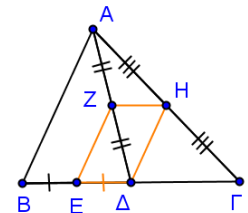
- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο.
 β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔEZH να είναι ρόμβος.
 γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο (η γωνία B ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔEZH .

Λύση

α) Τα E, Z είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Delta$, άρα $EZ \parallel AB$ και $EZ = \frac{AB}{2}$.

Τα Δ, H είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $\Delta H \parallel AB$ και $\Delta H = \frac{AB}{2}$.

Είναι $EZ = \Delta H$ και $EZ \parallel \Delta H$, οπότε το ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

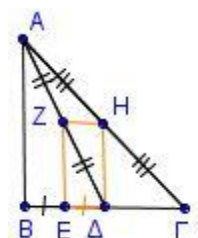


β) Είναι ZH , $E\Delta$ απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΔEZH , οπότε

$$ZH = E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = \frac{B\Gamma}{4}. \text{ Τα } Z, E \text{ είναι μέσα στο τρίγωνο } AB\Gamma, \text{ άρα } ZE \parallel AB \text{ και}$$

$$ZE = \frac{AB}{2}.$$

Αν το ΔEZH είναι ρόμβος, τότε $ZE = ZH \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{B\Gamma}{4} \Leftrightarrow 2AB = B\Gamma$.



γ) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο B , τότε επειδή $\Delta H \parallel AB$ και

$B\Gamma \perp AB$, θα είναι και $B\Gamma \perp \Delta H$, δηλαδή $H\Delta E = 90^\circ$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΔEZH θα έχει μια ορθή γωνία και θα είναι ορθογώνιο.

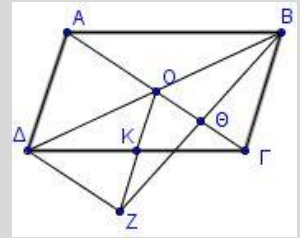
1877. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο AG στο Θ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα OG και BZ διχοτομούνται.

β) $AO = \Delta Z$

γ) Τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα.



Λύση

α) Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ τα O, K είναι μέσα δύο πλευρών άρα

$OK \parallel B\Gamma$ και $OK = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2OK = OZ$. Στο τετράπλευρο $B\Gamma ZO$ οι πλευρές του OZ και $B\Gamma$ είναι

ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγωνίες του διχοτομούνται.

Δηλαδή τα τμήματα OG και BZ διχοτομούνται.

β) Επειδή η OZ είναι ίση και παράλληλη με την $B\Gamma$ και η $B\Gamma$ με τη σειρά της είναι ίση και παράλληλη με την $A\Delta$, τα τμήματα OZ και $A\Delta$ είναι ίσα και παράλληλα.

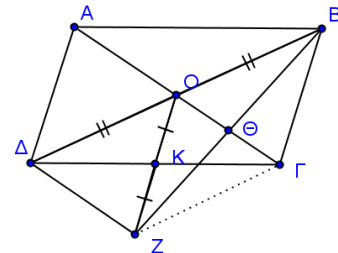
γ) Τα τρίγωνα AOB και $\Delta Z\Gamma$ έχουν:

1) $AO = \Delta Z$

2) $\Gamma Z = OB$ γιατί είναι απέναντι πλευρές στο παραλληλόγραμμο $B\Gamma ZO$ και

3) $AB = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$.

Άρα λόγω του κριτηρίου ΠΠΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα.



13743. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M στην πλευρά AB . Από το M φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ που τέμνει την AG στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta M\Gamma = B\Gamma M$.

β) Αν το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές με βάση AB , να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου M στην AB ώστε το τρίγωνο $\Delta M\Gamma$ να είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.

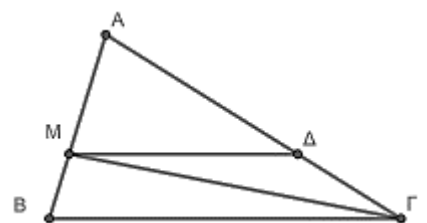
γ) Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB και E το μέσο του τμήματος $B\Gamma$ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $M\Delta EB$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

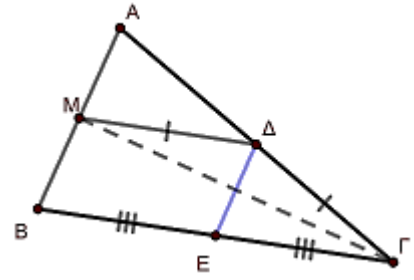
α) Είναι $\Delta M\Gamma = B\Gamma M$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $M\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $M\Gamma$.

β) Αν το $\Delta M\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$, τότε οι γωνίες στη βάση του θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta M\Gamma = \Delta\Gamma M$.

Στο ερώτημα α) αποδείξαμε ότι $\Delta M\Gamma = B\Gamma M$,



οπότε $\Delta ΓΜ = ΒΓΜ$, άρα η ΓΜ θα είναι διχοτόμος της γωνίας Γ.
 Όμως από την υπόθεση το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Γ θα είναι και διάμεσος προς τη βάση του.
 Δηλαδή το ζητούμενο σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΒ.



γ) Το Μ είναι το μέσο της ΑΒ και έχουμε φέρει $ΜΔ//ΒΓ$, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΓ. Δίνεται ότι το σημείο Ε είναι μέσο της ΒΓ άρα το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το ΔΕ είναι παράλληλο στην ΑΒ, ή $ΔΕ//ΜΒ$. Το τετράπλευρο ΜΔΕΒ έχει τις απέναντι πλευρές του ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο

13745. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

α) Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

i. $ΜΕ = ΜΖ$.

ii. Το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με $2ΑΒ$.

β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:

i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;

ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

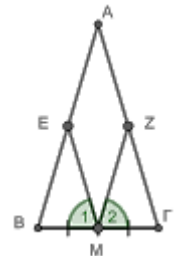
Λύση

α) i. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε $ΜΕ//ΑΓ$, οπότε το Ε είναι μέσο της ΑΒ και

$$ΜΕ = \frac{ΑΓ}{2} \quad (1), \text{ ομοίως επειδή από το μέσο Μ φέρουμε } ΜΖ//ΑΒ, \text{ το Ζ είναι μέσο της ΑΓ}$$

$$\text{και } ΜΖ = \frac{ΑΒ}{2} \quad (2).$$

Επιπλέον δίνεται ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, οπότε από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΜΕ = ΜΖ$.



ii. Από την υπόθεση είναι $ΜΕ//ΑΓ$ ή $ΜΕ//ΑΖ$ και $ΜΖ//ΑΒ$ ή $ΜΖ//ΑΕ$, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΜΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

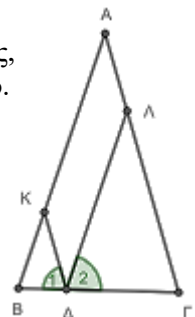
Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΜΕ και ΜΖ είναι ίσες από το α) i. ερώτημα, οπότε το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος.

$$\text{Η περίμετρος του ρόμβου αυτού είναι ίση με } ΑΕ + ΕΜ + ΜΖ + ΑΖ = 4ΑΕ = 4 \frac{ΑΒ}{2} = 2ΑΒ.$$

Το τετράπλευρο ΑΕΜΖ είναι ρόμβος οπότε οι τέσσερις πλευρές του είναι ίσες με ΑΕ και $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ αφού Ε μέσο της ΑΒ.

β) i. Από την κατασκευή οι απέναντι πλευρές του τετράπλευρου ΑΚΔΛ είναι παράλληλες, αφού $ΔΚ//ΑΓ$ ή $ΔΚ//ΑΛ$ και $ΔΛ//ΑΒ$ ή $ΔΛ//ΑΚ$. Άρα το ΑΚΔΛ είναι παραλληλόγραμμο. Θα αποδείξουμε ότι το ΑΚΔΛ, όταν το Δ δεν είναι το μέσο του ΒΓ δε μπορεί να είναι ρόμβος. Οι γωνίες Γ και $Δ_1$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΚ και ΑΓ με τέμνουσα την ΒΓ, οπότε $Δ_1 = Γ$, άρα $Δ_1 = Β$, (αφού οι γωνίες Β και Γ είναι ίσες ως γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου).

Οπότε το ΒΚΔ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $ΚΔ = ΚΒ$ (3).



Όμοια οι γωνίες B και Δ_2 είναι εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $\Delta\Lambda$ και AB με τέμνουσα την $B\Gamma$, οπότε $\Delta_2 = B$, άρα $\Delta_2 = \Gamma$. Άρα το τρίγωνο $\Delta\Lambda\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Delta\Lambda = \Lambda\Gamma$ (4).

Επειδή $\Delta_1 = B$ και $\Delta_2 = B$, προκύπτει ότι $\Delta_1 = \Delta_2 = B = \Gamma$. Δηλαδή τα ισοσκελή τρίγωνα $B\Lambda\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες του, $B\Lambda\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ είναι μεταξύ τους ίσες. Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το μέσο M της $B\Gamma$ τα τμήματα $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ δεν είναι ίσα, οπότε και τα τρίγωνα $B\Lambda\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ δεν είναι ίσα. (Αν ήταν ίσα θα έπρεπε και οι πλευρές $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\Lambda\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ αντίστοιχα, να είναι ίσες). Οι πλευρές $\Delta\Lambda$ και $\Lambda\Delta$ δεν είναι ίσες, γιατί αν ήταν ίσες, τα τρίγωνα $B\Lambda\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ θα ήταν ίσα από το κριτήριο ΓΠΓ. Άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι τα τρίγωνα $B\Lambda\Delta$ και $\Gamma\Lambda\Delta$ δεν είναι ίσα. Οπότε οι διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου $AK\Delta\Lambda$ δεν είναι ίσες, επομένως αυτό δεν είναι ρόμβος.

ii. Για την περίμετρο του παραλληλογράμμου $AK\Delta\Lambda$ έχουμε ότι είναι ίση με $AK + K\Delta + \Delta\Lambda + \Lambda A$ με τη βοήθεια των σχέσεων (3) και (4) του β) i. ερωτήματος η περίμετρος γίνεται ίση με $AK + KB + \Gamma\Lambda + \Lambda A = AB + \Lambda\Gamma = AB + AB = 2AB$.

Παρατηρούμε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται όταν το Δ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερή και ίση με $2AB$.

13856. Σε τρίγωνο ΔEZ , φέρουμε τη διάμεσο ΔM και στην προέκτασή της προς το μέρος του M παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $AM = M\Theta$. Προεκτείνουμε την πλευρά EZ προς το E κατά τμήμα $EA = EZ$ και προς το Z κατά τμήμα $Z\Gamma = EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔAM και $\Theta M\Gamma$ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Theta A\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι $A\Delta = 12$. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου EH του τριγώνου ΔEZ στο σχήμα του Γιάννη;

Λύση

α) Το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς EZ άρα $ME = MZ$, επίσης $EA = EZ = Z\Gamma$ (από υπόθεση) άρα: $ME + EA = MZ + Z\Gamma$ ή $MA = M\Gamma$.

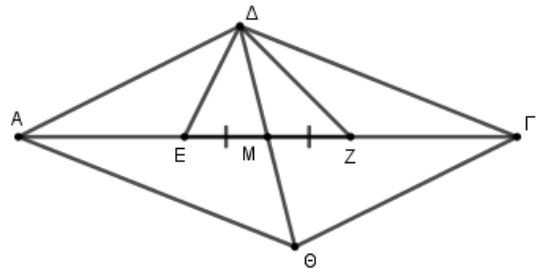
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔAM και $\Theta M\Gamma$

που έχουν:

- $\Delta M = M\Theta$ (από υπόθεση)
- $MA = M\Gamma$ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων $ME + EA$ και $MZ + Z\Gamma$)

- $\Delta MA = \Theta M\Gamma$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

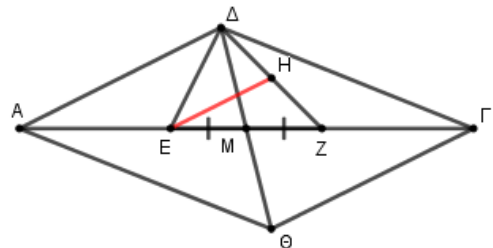


β) Το σημείο M είναι το μέσο του τμήματος $\Delta\Theta$ (από υπόθεση) και μέσο του τμήματος $A\Gamma$ (ii στη σύγκριση του ερωτήματος α)).

Στο τετράπλευρο $\Theta A\Delta\Gamma$ οι διαγώνιοι $\Delta\Theta$ και $A\Gamma$ διχοτομούνται στο σημείο M , άρα το τετράπλευρο $\Theta A\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το σημείο H είναι το μέσο της πλευράς ΔZ αφού η EH είναι διάμεσος. Από υπόθεση έχουμε $EA = EZ$, άρα το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AZ . Στο τρίγωνο $A\Delta Z$ τα σημεία E και H είναι μέσα πλευρών άρα $EH = \frac{A\Delta}{2}$ ή $EH = \frac{12}{2} = 6$.

Στο σχήμα του Γιάννη η διάμεσος EH του τριγώνου ΔEZ θα έχει μήκος 6.



37096. α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

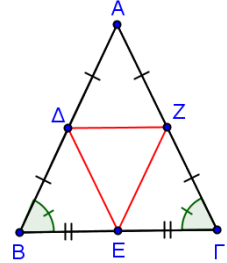
- i. ισόπλευρο τρίγωνο.
- ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

Λύση

α) Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E, Z τα μέσα των $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα.

1ος τρόπος: Τα τρίγωνα $BE\Delta$ και ΓZE έχουν:

- 1) $B\Delta = \Gamma Z$ μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$
 - 2) $BE = E\Gamma$
 - 3) $B = \Gamma$ στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου
- Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και $\Delta E = EZ$, οπότε το τρίγωνο ΔEZ είναι ισοσκελές.



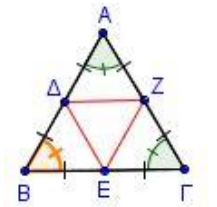
2ος τρόπος: Τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$. Τα E, Z είναι μέσα δύο

πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $EZ = \frac{AB}{2}$.

Επειδή $AB = A\Gamma$, είναι και $\Delta E = EZ$, δηλαδή το τρίγωνο ΔEZ είναι ισοσκελές.

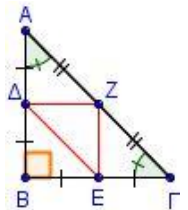
β) i. Επειδή τα Δ, Z είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου

$AB\Gamma$, ισχύει ότι $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2}$. Επειδή $AB = B\Gamma = A\Gamma$ είναι και $\Delta E = EZ = \Delta Z$, οπότε το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.



ii. Έστω ότι $B = 90^\circ$, τότε επειδή $\Delta Z \parallel B\Gamma$, $ZE \parallel AB$ και $AB \perp B\Gamma$ θα είναι και $\Delta Z \perp ZE$, άρα το τρίγωνο ΔEZ είναι ορθογώνιο.

Επειδή $EZ = \frac{AB}{2}$, $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2}$ και $AB = B\Gamma$ θα είναι και $\Delta Z = ZE$, οπότε το τρίγωνο ΔEZ είναι και ισοσκελές.

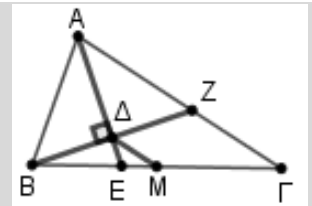


37106. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < B\Gamma$ και η διχοτόμος BE της γωνίας B . Αν $AZ \perp BE$, όπου Z σημείο της $B\Gamma$ και M το μέσον της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.

β) $\Delta M \parallel B\Gamma$ και $\Delta M = \frac{B\Gamma - AB}{2}$.

γ) $\angle \Delta M = \frac{B}{2}$, όπου B η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ABZ το $B\Delta$ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και $B\Delta$ διάμεσος.

β) Τα Δ, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AZ\Gamma$, άρα $\Delta M \parallel Z\Gamma \Leftrightarrow \Delta M \parallel B\Gamma$ και

$$\Delta M = \frac{Z\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma - BZ}{2} \stackrel{BZ=AB}{=} \frac{B\Gamma - AB}{2} \quad \text{ABZ ισοσκελές}$$

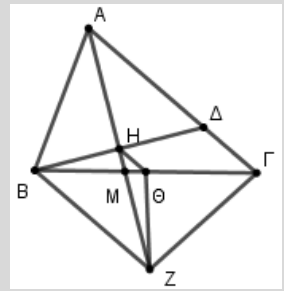
γ) $\angle \Delta M = \angle B\Gamma = \frac{B}{2}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\Delta M, B\Gamma$ που τέμνονται από την BE .

37165. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας A , η οποία τέμνει την AM στο H και την $A\Gamma$ στο Δ . Στην προέκταση της AH θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι

α) το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

β) $H\Theta // BZ$.

γ) $H\Theta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το AH είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και το AH είναι και διάμεσος. Άρα $BH = H\Delta$. Επίσης από υπόθεση ισχύει ότι $AH = HZ$. Συνεπώς, στο τετράπλευρο $ABZ\Delta$ οι διαγώνιες του AZ , $B\Delta$ διχοτομούνται κάθετα, άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

β) Το $H\Theta$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $B\Delta\Gamma$, άρα $H\Theta // \Delta\Gamma \Leftrightarrow H\Theta // A\Delta$ (1)
Επειδή το $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος ισχύει ότι $BZ // A\Delta$ (3). Από τις (1), (3) προκύπτει ότι $H\Theta // BZ$

γ) Το $H\Theta$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $B\Delta$ και $B\Gamma$ του τριγώνου $B\Delta\Gamma$ οπότε

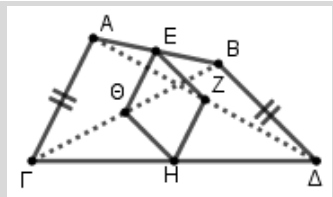
$$H\Theta = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - A\Delta}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2} \quad \text{διότι } AB = A\Delta \text{ αφού } ABZ\Delta \text{ είναι ρόμβος.}$$

3ο Θέμα

11896. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος ισχύει ότι $A\Delta = B\Gamma$ και τα σημεία E, Z, H και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων $AB, A\Gamma, \Gamma\Delta$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α. $EZ \parallel H\Theta$

β. Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα E, Z είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε $EZ \parallel \frac{B\Gamma}{2}$ (1)

Στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ τα Θ, H είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε $\Theta H \parallel \frac{B\Gamma}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $EZ \parallel H\Theta$.

β) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο $B\Delta\Delta$ τα E, Θ είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε $E\Theta \parallel \frac{A\Delta}{2}$. Όμως $A\Delta = B\Gamma$, οπότε

$E\Theta = EZ$. Στο παραλληλόγραμμο $EZH\Theta$ δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

12068. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και M το μέσο της υποτείνουσας του $B\Gamma$. Από το M φέρουμε $M\Delta \perp AB$ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔZ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο MBZ είναι ισοσκελές.

ii. Το τετράπλευρο $AMBZ$ είναι ρόμβος.

β) Αν το αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το $AMBZ$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

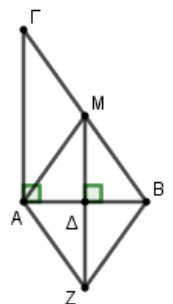
Λύση

α) i. Στο τρίγωνο MBZ το $B\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την MZ .

ii. Είναι $M\Delta \perp AB$ και $A\Gamma \perp AB$ άρα $M\Delta \parallel A\Gamma$.

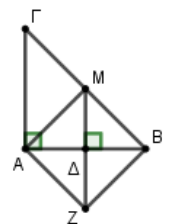
Επειδή M μέσο της $B\Gamma$ και $M\Delta \parallel A\Gamma$, το Δ είναι μέσο της AB .

Στο τετράπλευρο $MAZB$ οι διαγωνίες του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος.



β) Είναι $M\Delta = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow MZ = A\Gamma$.

Αν το $AB\Gamma$ ήταν ορθογώνιο και ισοσκελές τότε $AB = A\Gamma$, οπότε και $MZ = AB$, οπότε ο ρόμβος θα είχε τις διαγωνίες του ίσες και θα ήταν τετράγωνο.



Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

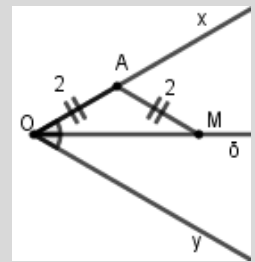
2ο Θέμα

13653. Σχεδιάζουμε γωνία $\widehat{xOy} = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο Α επί της πλευράς Οx, τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $\widehat{xOy}$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\widehat{\delta Oy}$.

β) Τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.

γ) Το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.



Λύση

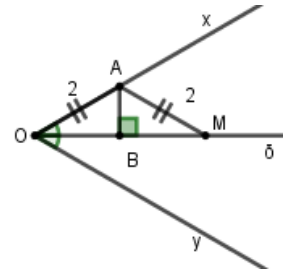
α) Η ημιευθεία Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xOy}$, οπότε οι γωνίες $\widehat{xOd}$ και $\widehat{\delta Oy}$ θα είναι ίσες. Άρα, $\widehat{xOd} = \widehat{\delta Oy} = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.

β) Είναι $\widehat{AOM} = \widehat{xOd} = 30^\circ$. Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με βάση ΟΜ, αφού $AO = AM$. Επομένως, οι γωνίες $\widehat{AOM}$ και $\widehat{AMO}$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση. Άρα, $\widehat{AOM} = \widehat{AMO} = 30^\circ$. Στο τρίγωνο ΑΟΜ ισχύει: $\widehat{AOM} + \widehat{AMO} + \widehat{MAO} = 180^\circ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + \widehat{MAO} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{MAO} = 120^\circ$.

γ) Φέρουμε το ύψος ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ είναι $\widehat{AOB} = 30^\circ$, οπότε, η απέναντι κάθετη πλευρά, δηλαδή η ΑΒ, ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΑ.

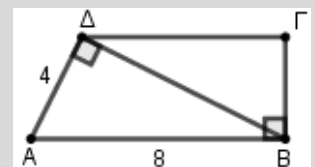
$$\text{Άρα, } AB = \frac{OA}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



13828. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν $AD=4$ και $AB=8$ τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{\Delta AB}$.

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραpezίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΑΒ είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΑΔ άρα η οξεία γωνία $\widehat{\Delta BA}$ ισούται με 30° δηλαδή $\widehat{\Delta BA} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\widehat{\Delta AB} + \widehat{\Delta} + \widehat{\Delta BA} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta AB} = 60^\circ$.

β) Οι βάσεις ΑΒ και ΔΓ του τραpezίου ΑΒΓΔ είναι κάθετες στην ΒΓ άρα το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο στο Γ. Οι γωνίες ΑΒΔ και ΒΔΓ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $\widehat{ABD} = \widehat{BDG} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ η κάθετη πλευρά ΒΓ βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία 30° άρα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΔ, δηλαδή $BG = \frac{BD}{2} \Leftrightarrow BD = 2BG$.

13831. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{A} = 90^\circ$.

α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB > A\Gamma$. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί;

β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30° , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$;

ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

Λύση

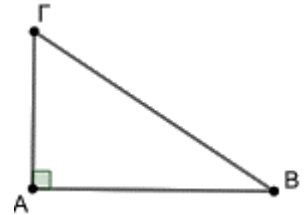
α) Το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο. Απέναντι από την ορθή γωνία A είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Αυτή είναι η $B\Gamma$. Οι άλλες δύο πλευρές είναι μικρότερες από την $B\Gamma$ και, λόγω της υπόθεσης $AB > A\Gamma$, άρα η μικρότερη πλευρά του τριγώνου είναι η $A\Gamma$.

Όμως, απέναντι από τη μικρότερη πλευρά ενός τριγώνου βρίσκεται η μικρότερη γωνία του. Άρα, η γωνία B είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου.

β) i. Εφόσον η μια οξεία γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 30° η άλλη οξεία γωνία του είναι συμπληρωματική της, άρα 60° . Όμως η μικρότερη γωνία του τριγώνου είναι η B , άρα

$$B = 30^\circ \text{ και } \Gamma = 60^\circ.$$

ii. Η $B\Gamma$ είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Εφόσον $B = 30^\circ$ η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας B είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα η πλευρά $A\Gamma$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



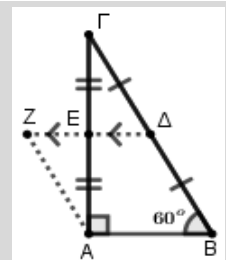
13837. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

Θεωρούμε τα σημεία Δ και E που είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Προεκτείνουμε την ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = AZ$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AEZ και $\Gamma E\Delta$ που έχουν:

- $AE = E\Gamma$ (από υπόθεση)

- $EZ = E\Delta$ (από υπόθεση)

- $\angle AEZ = \angle \Gamma E\Delta$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, άρα $AZ = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\angle AEZ$ και $\angle \Gamma E\Delta$.

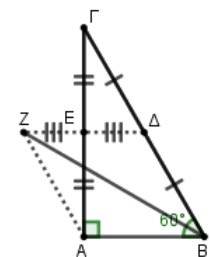
ή

Το E μέσο των $Z\Delta, A\Gamma$ άρα οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AZ\Gamma\Delta$ διχοτομούνται οπότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και $AZ = \Gamma\Delta$ (απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου)

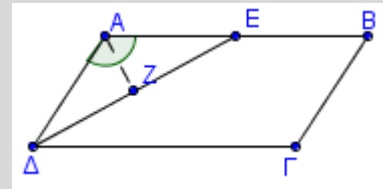
β) $AZ = \Gamma\Delta$ από το α) ερώτημα και $\Gamma\Delta = \Delta B$ επειδή το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Άρα $AZ = \Delta B = \frac{B\Gamma}{2}$.

Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε ότι $\Gamma = 30^\circ$, συνεπώς η απέναντι κάθετη πλευρά AB ισούται με το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$,

δηλαδή $AB = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα $AZ = AB$ και το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.



14876. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη ΔE . Να αποδείξετε ότι:



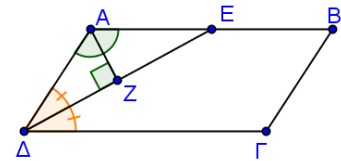
- α) $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$ β) $AZ = \frac{AB}{4}$

Λύση

α) Είναι $\angle E\Delta\Gamma = \angle A\Delta E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την ΔE και $\angle E\Delta\Gamma = \angle A\Delta E$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Δ , άρα είναι και $\angle A\Delta E = \angle A\Delta\Gamma$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta E$, έχουμε:

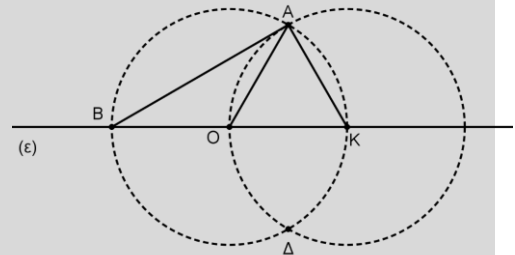
$$\angle A + \angle A\Delta E + \angle A\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\angle A\Delta E = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle A\Delta E = 60^\circ \Leftrightarrow \angle A\Delta E = 30^\circ.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι $\angle A\Delta E = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά από τη γωνία αυτή ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή, $AZ = \frac{A\Delta}{2}$. Όμως $AB = 2A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \frac{AB}{2}$, άρα



$$AZ = \frac{\frac{AB}{2}}{2} = \frac{AB}{4}.$$

34314. Θεωρούμε δυο ίσους κύκλους (O, ρ) και (K, ρ) τεμνόμενους στα σημεία A και Δ , με τα κέντρα τους O και K να βρίσκονται σε ευθεία (ϵ) που τέμνει τον κύκλο (O, ρ) σε σημείο B , και τη διάκεντρό τους OK να είναι ίση με ρ .



- α) Να αποδείξετε ότι:
- το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο,
 - το τρίγωνο ABK είναι ορθογώνιο.
- β) Να υπολογίσετε τη γωνία ABK .

Λύση

α) i. Είναι $OA = OK = KA = \rho$, οπότε το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο.

ii. Επειδή $OA = OB = OK = \rho$ στο τρίγωνο ABK μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα αυτή τη πλευρά.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABK είναι $AK = \frac{BK}{2}$, οπότε $\hat{ABK} = 30^\circ$.

34393. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά ΔA (προς το A) κατά τμήμα $AH = \Delta A$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\Delta\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο ΔZH είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Z .

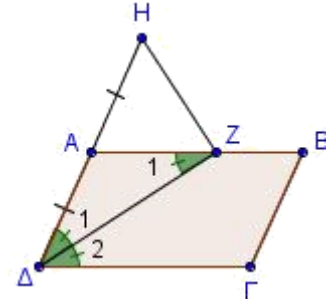
Λύση

α) Είναι $\Delta_2 = Z_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την ΔZ και $\Delta_2 = \Delta_1$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Δ , άρα $\Delta_1 = Z_1$. Το τρίγωνο $\Delta\Delta Z$ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο $\Delta\Delta Z$ είναι ισοσκελές με βάση τη ΔZ , είναι

$\Delta A = AZ$, όμως $\Delta A = AH$, άρα $ZA = \Delta A = AH = \frac{\Delta H}{2}$. Στο τρίγωνο ΔZH η

διάμεσος του ZA είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔH , δηλαδή $Z = 90^\circ$.



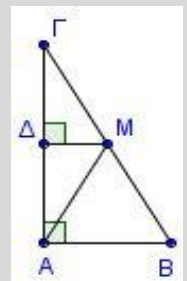
34406. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8\text{cm}$.

Έστω AM η διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$.

Αν $\hat{AM}\Gamma = 120^\circ$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $AB = 4\text{cm}$.

β) Να βρείτε το μήκος της $M\Delta$.



Λύση

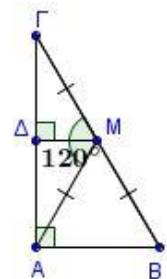
α) Επειδή η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει ότι $AM = MB = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, οπότε τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και AMB είναι ισοσκελή με βάσεις τις $A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Επειδή το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$, ισχύει ότι: $\Gamma = \Gamma AM$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AM\Gamma$ έχουμε:

$$\Gamma + \Gamma AM + AM\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma = 60^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ.$$

Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η απέναντι κάθετη πλευρά,

δηλαδή η AB είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2} = 4\text{cm}$.



β) Η $M\Delta$ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο $AM\Gamma$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος του. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα M, Δ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $M\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2\text{cm}$.

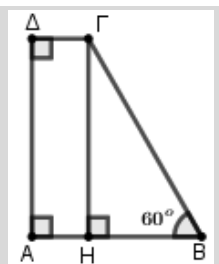
34408. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$,

$AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Delta\Gamma$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $\Gamma H \perp AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $HB = 2\Delta\Gamma$.

β) το τετράπλευρο $AH\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AH = \frac{1}{2}HB$.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BHΓ είναι $\hat{B} + \hat{B}\hat{\Gamma}H + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{B}\hat{\Gamma}H + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$\hat{B}\hat{\Gamma}H = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ, \text{ οπότε } BH = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow HB = \frac{4\Delta\Gamma}{2} = 2\Delta\Gamma.$$

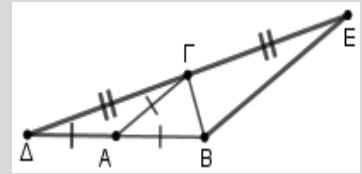
β) Το τετράπλευρο AHΓΔ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο. Οι ΓΔ, AH είναι απέναντι πλευρές του, άρα $AH = \Gamma\Delta = \frac{1}{2}HB$.

34411. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = A\Gamma$).

Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στη προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο.

β) $BE \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$.



Λύση

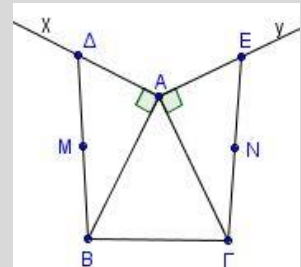
α) Είναι $A\Delta = AB = A\Gamma$, άρα $\Gamma A = \frac{\Delta B}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο ΔΓΒ μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΔB, δηλαδή $B\Gamma\Delta = 90^\circ$.

β) Επειδή $AB = A\Delta$ και $\Delta\Gamma = \Gamma E$, τα σημεία A, Γ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΔBE, άρα $A\Gamma \parallel BE$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$.

34420. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = A\Gamma$). Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$ όπως στο διπλανό σχήμα. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Αν M και N τα μέσα των τμημάτων BΔ και ΓE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.



Λύση

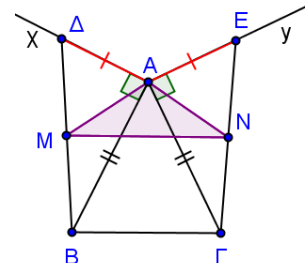
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα AΔB και AΕΓ έχουν:

- 1) $AB = A\Gamma$ και
- 2) $A\Delta = AE$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta = \Gamma E$

β) Το AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου AΔB, άρα $AM = \frac{B\Delta}{2}$. Το AN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

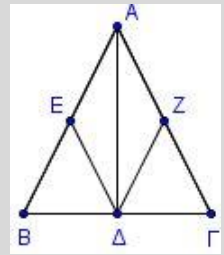
υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου AΕΓ, άρα $AN = \frac{\Gamma E}{2}$.

Επειδή $B\Delta = \Gamma E$, είναι και $AM = AN$, άρα το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές.



34492. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

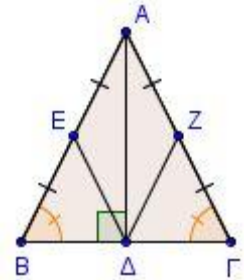
- α)** Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ έχουν:

- $BE = \Gamma Z$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$
- $B\Delta = \Gamma\Delta$, γιατί το $A\Delta$ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσός του και
- $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.
 Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ η ΔE είναι διάμεσος που

αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\Delta E = \frac{AB}{2} = AE = BE$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta \Gamma$, το ΔZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = AZ = Z\Gamma \quad (2)$$

Επειδή $AB = A\Gamma$, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι στο τετράπλευρο $AZ\Delta E$ οι πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

34495. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος του $A\Delta$ και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

β) Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔE . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

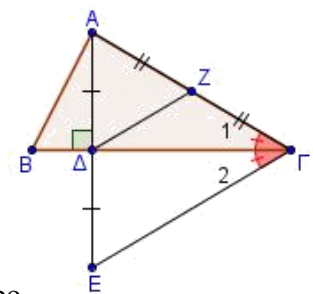
Λύση

α) Η ΔZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα

του ορθογωνίου τριγώνου $A\Delta \Gamma$, άρα $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$.

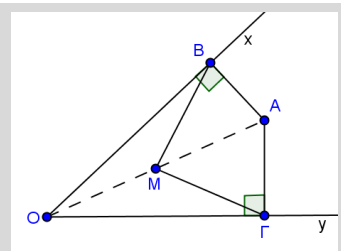
β) Στο τρίγωνο $A\Gamma E$ η $\Gamma\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η $\Gamma\Delta$ είναι και διχοτόμος του τριγώνου. Άρα $\Gamma_2 = \Gamma_1 = 30^\circ$ και $A\Gamma E = 60^\circ$.

Το ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma E$ έχει μια γωνία του ίση με 60° , άρα είναι ισόπλευρο.



34515. Δίνεται γωνία xOy και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες $AB, A\Gamma$ προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε M το μέσο του OA . Να αποδείξετε ότι:

- α)** Το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.
γ) $\hat{BMA} = 2\hat{xOA}$.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BOA το BM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$BM = \frac{OA}{2}. \text{ Όμως και } AM = \frac{OA}{2}, \text{ οπότε } BM = AM \text{ και το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές.}$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΓO το ΓM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα,

$$\text{άρα } \Gamma M = \frac{OA}{2}. \text{ Επειδή } BM = \Gamma M, \text{ το τρίγωνο B}\Gamma M \text{ είναι ισοσκελές με βάση τη B}\Gamma.$$

γ) Επειδή $BM = OM = \frac{OA}{2}$, το τρίγωνο OBM είναι ισοσκελές με βάση την OB και ισχύει ότι

$$\angle O A = \angle M B O. \text{ Η γωνία BMA είναι εξωτερική στο}$$

$$\text{τρίγωνο BMO, άρα } \angle BMA = \angle O A + \angle M B O = 2\angle O A.$$

36086. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και M το μέσο της BΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου ABΓ.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο AMΓ είναι ισοσκελές.

γ) Να βρείτε τη γωνία AMΓ.

Λύση

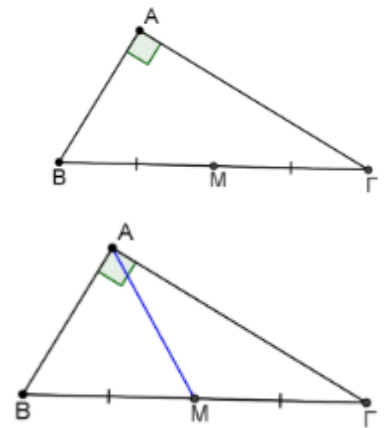
α) Στο τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 2\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 3\hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

β) Το AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$. Όμως και $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $AM = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο AMΓ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο AMΓ είναι ισοσκελές με βάση την MΓ, είναι $\angle A M \Gamma = \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Στο τρίγωνο AMΓ είναι

$$\angle A M \Gamma + \hat{\Gamma} + \angle A M \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + \angle A M \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A M \Gamma = 120^\circ$$



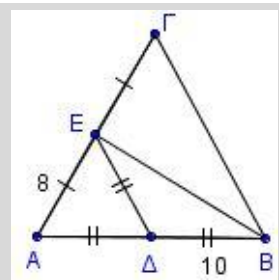
36093. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $AD = DE = DB$ με $AE = 8$ και $DB = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.

ii. $B\Gamma = 20$.

β) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ABΓ.



Λύση

α) Επειδή $DE = AD = DB = \frac{AB}{2}$, στο τρίγωνο AEB μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα αυτή τη πλευρά.

β) Αρχικά είναι $AD = DE = DB = 10$.

$$\text{Τα } \Delta, E \text{ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο AB}\Gamma, \text{ άρα } DE = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 20.$$

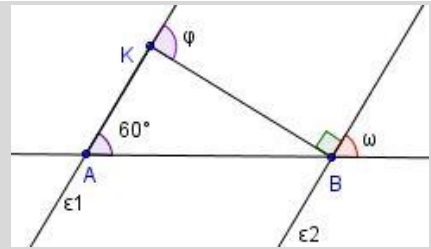
γ) Είναι $2\tau = AB + B\Gamma + A\Gamma = 2\Delta B + 20 + 2AE = 20 + 20 + 16 = 56$

36097. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ .

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή σας.



Λύση

α) Είναι $\omega = A = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που τέμνονται από την AB .

Επειδή $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB \perp \varepsilon_2$, είναι και $AB \perp \varepsilon_1$, άρα $\varphi = 90^\circ$.

β) Επειδή $K = 90^\circ$ το τρίγωνο ABK είναι ορθογώνιο.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ABK έχουμε:

$A + ABK = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + ABK = 90^\circ \Leftrightarrow ABK = 30^\circ$, τότε όμως η απέναντι κάθετη πλευρά του τριγώνου ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $AK = \frac{AB}{2} = 3$.

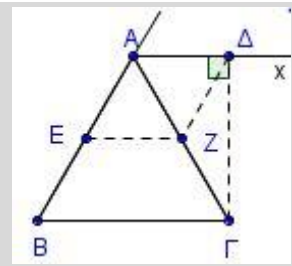
36103. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Ax της γωνίας A και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην Ax . Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EZ = AE = AZ$,

β) η γωνία $A\Gamma\Delta$ είναι ίση με 60° .

γ) το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $A = B = \Gamma = 60^\circ$

Είναι $A_{εξ} = 180^\circ - A = 120^\circ$ και $A_2 = \frac{A_{εξ}}{2} = 60^\circ = \Gamma$.

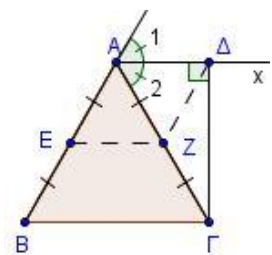
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ η διάμεσος του $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = AZ$.

Το τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60° , άρα είναι ισόπλευρο, οπότε $EZ = AE = AZ$.

β) Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι $A_2 + A\Gamma\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow A\Gamma\Delta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

γ) Τα σημεία E, Z είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $EZ = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$.

Ακόμη είναι $AE = \frac{AB}{2}$, $A\Delta = \Delta Z = AZ = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB}{2}$, άρα το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.



36109. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Αν η πλευρά $B\Gamma = 2\text{ cm}$, να βρείτε το μήκος της AB .

Λύση

α) Επειδή $A + \Gamma = 120^\circ$ και είναι και $A = 3\Gamma$

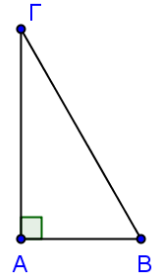
$$3\Gamma + \Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ \text{ και } A = 3\Gamma = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + B + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Gamma = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά του

$$\text{τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, άρα } AB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{2}{2} = 1\text{ cm}$$

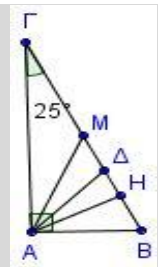


36111. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$.

Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας A .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}MB$, $\hat{H}AB$, $\hat{A}DB$.

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{M}AD = \hat{D}AH = 20^\circ$.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B + 25^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 65^\circ.$$

Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG = MB.$$

Τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και AMB είναι ισοσκελή με βάσεις τις $A\Gamma$, AB αντίστοιχα, οπότε $\hat{M}A\Gamma = \Gamma = 25^\circ$ και $\hat{M}AB = B = 65^\circ$.

Η γωνία AMB είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AM\Gamma$, άρα $\hat{A}MB = \hat{M}A\Gamma + \Gamma = 50^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου HAB έχουμε:

$$\hat{H}AB + B = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{H}AB + 65^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{H}AB = 25^\circ.$$

Η γωνία $A\Delta B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, άρα

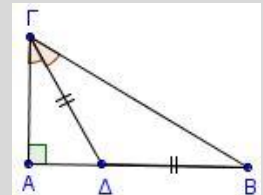
$$\hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta\Gamma + \Gamma = \frac{A}{2} + 25^\circ = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ.$$

β) Είναι $\hat{M}AD = \hat{A}\Delta\Gamma - \hat{M}A\Gamma = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$ και $\hat{D}AH = \hat{A}\Delta B - \hat{H}AB = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$

36116. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{ cm}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = 30^\circ$. **β)** $AB = 3\text{ cm}$



Λύση

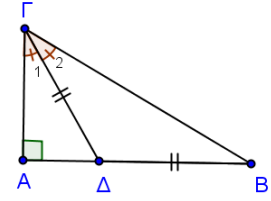
α) Επειδή $\Gamma\Delta = \Delta B$, το τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, άρα

$$B = \Gamma_2 = \frac{\Gamma}{2}$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{\Gamma}{2} + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma + 2\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$3\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 60^\circ \text{ και } B = \frac{\Gamma}{2} = 30^\circ$$



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι $\Gamma_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 30^\circ$, άρα $A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$. Τότε

$$AB = A\Delta + \Delta B = 1 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

36169. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB .

Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$

$$\text{έχουμε: } B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 55^\circ$$

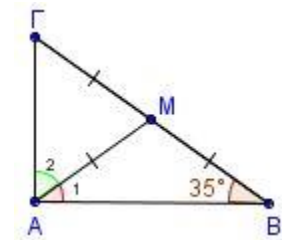
β) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma.$$

Επειδή $AM = MB$, το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με βάση την AB , άρα

$$A_1 = B = 35^\circ. \text{ Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου } AMB \text{ έχουμε:}$$

$$AMB + A_1 + B = 180^\circ \Leftrightarrow AMB + 35^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AMB = 110^\circ$$

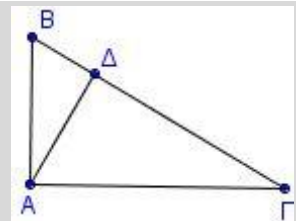


36171. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και $A\Delta$ το ύψος του.

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να υπολογιστεί η γωνία $B\Delta\Delta$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \frac{AB}{2}$.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 3\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ \text{ και } B = 2\Gamma = 60^\circ.$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Delta$ έχουμε:

$$\hat{B} + B\hat{A}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + B\hat{A}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow B\hat{A}\Delta = 30^\circ$$

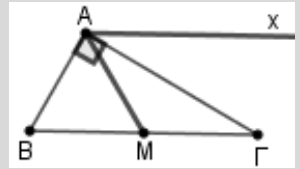
γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της

$$\text{υποτείνουσας, δηλαδή } B\Delta = \frac{AB}{2}.$$

36328. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$

β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx .



Λύση

α) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$, άρα $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$.

β) Είναι $\hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A} = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{x}$ ως εντός εναλλάξ των

παράλληλων $Ax, B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$, όμως $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$, άρα $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{x}$, άρα η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx .

36342. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$.

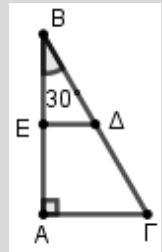
Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) $A\Gamma$

β) $B\Gamma$

γ) $A\Delta$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



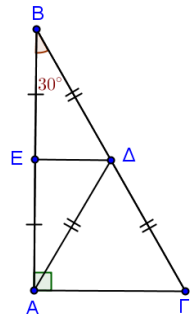
Λύση

α) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι

$$\Delta E = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = 2$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B = 30^\circ$, άρα $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 4$.

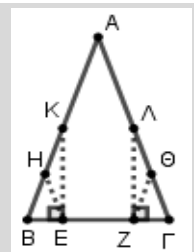
γ) Η $A\Delta$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = 2$.



36343. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $KE\Gamma$ και ΛZB είναι ίσα.

β) $EH = Z\Theta$, όπου H, Θ τα μέσα των τμημάτων $K\Gamma, \Lambda B$ αντίστοιχα.



Λύση

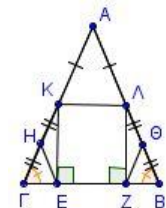
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $KE\Gamma$ και ΛZB έχουν:

1) $K\Gamma = \Lambda B$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$.

2) $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίσες, είναι ίσα.

β) Η EH είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του



ορθογωνίου τριγώνου ΚΕΓ, άρα $EH = \frac{KG}{2}$. Η ΖΘ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΛΖΒ, άρα $Z\Theta = \frac{\Lambda B}{2}$. Επειδή $KG = \Lambda B$, είναι και $EH = Z\Theta$.

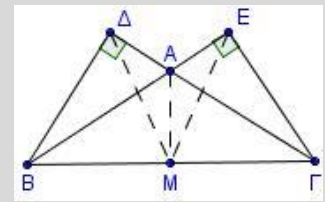
36350. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και $\hat{A} > 90^\circ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $BD = GE$.

β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $MD = ME$.

ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ.



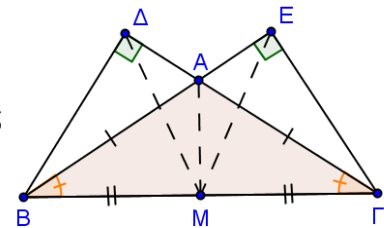
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ έχουν:

1) την πλευρά ΒΓ κοινή και

2) $\hat{B} = \hat{G}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίσες, είναι ίσα, οπότε έχουν και $BD = GE$.



β) i. Το ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του

ορθογωνίου τριγώνου ΔΒΓ, άρα $DM = \frac{BG}{2}$ (1). Το ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα

του ορθογωνίου τριγώνου ΕΒΓ, άρα $EM = \frac{BG}{2}$ (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $MD = ME$.

ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ έχουν:

1) $BD = GE$ και

2) $AB = AG$, δηλαδή

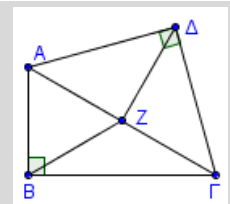
έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά μια προς μία ίσες, άρα είναι ίσα και έχουν $AD = AE$.

Επειδή $MD = ME$ και $AD = AE$, τα Μ, Α ισαπέχουν από τα Δ και Ε, άρα η ΜΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΔΕ, η ΜΑ είναι μεσοκάθετος της βάσης ΔΕ, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας ΔΜΕ.

36355. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 90^\circ$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $\hat{A} = 90^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$.

β) Αν $\angle A\Gamma B = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ.



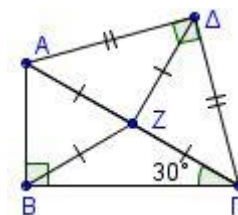
Λύση

α) Η ΒΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα

$BZ = \frac{AG}{2}$ (1). Η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του

$\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{B}\hat{A}\Gamma + \hat{\Delta}\hat{A}\Gamma = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$ ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ, άρα

$\Delta Z = \frac{AG}{2}$ (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $BZ = \Delta Z$.



β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{B}\hat{A}\Gamma + \hat{A}\hat{\Gamma}B = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\Gamma = 60^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του είναι ίσες με 45° , δηλαδή

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = 45^\circ. \text{Είναι και } B\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B + A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$$

37006. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και την διάμέσό του AM στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

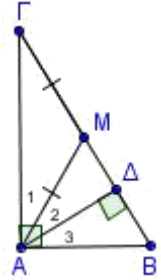
α) $\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{A}\Delta$

β) $A\hat{M}\Delta = 2\hat{\Gamma}$.

Λύση

α) Οι γωνίες B και $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι οξείες με πλευρές κάθετες ($AB \perp A\Gamma$ και $B\Gamma \perp A\Delta$ οπότε είναι ίσες.

β) Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, άρα το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές και έχει $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$. Η γωνία $A\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AM\Gamma$, άρα $A\hat{M}\Delta = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1 = 2\hat{\Gamma}$.



37007. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$.

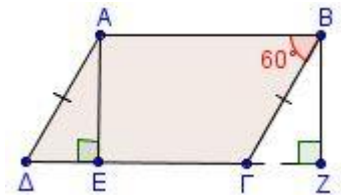
γ) το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο.

Λύση

α) Επειδή $BZ \perp \Delta\Gamma$ και $\Delta\Gamma \parallel AB$, είναι $BZ \perp AB$.

Τότε $\hat{\Gamma}\hat{B}Z = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε στο ορθογώνιο

τρίγωνο $B\Gamma Z$ ισχύει ότι $\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta}{2}$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ έχουν:

- 1) $A\Delta = B\Gamma$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και
 - 2) $B\hat{\Gamma}Z = \hat{B} = 60^\circ = \hat{\Delta}$ γιατί οι γωνίες $B\hat{\Gamma}Z$ και B είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$ και οι γωνίες B και Δ είναι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.
- Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίση και είναι ίσα.

γ) Επειδή $\hat{E} = \hat{Z} = A\hat{B}Z = 90^\circ$, το τετράπλευρο $ABZE$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

37016. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$

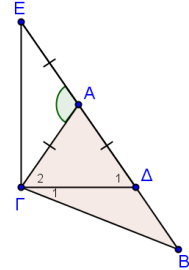
β) η γωνία EAG είναι διπλάσια της γωνίας $A\Delta\Gamma$.

Λύση

α) Επειδή $AE = A\Gamma = A\Delta$, στο τρίγωνο $E\Gamma\Delta$ η διάμεσος του ΓA είναι ίση με το μισό της πλευράς DE στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή, δηλαδή $E\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$, άρα $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$.

β) Επειδή $A\Delta = A\Gamma$, το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $\Delta\Gamma$, άρα $\hat{\Gamma}_2 = A\hat{\Delta}\Gamma$. Η γωνία EAG είναι εξωτερική στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, άρα:

$$E\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma}_2 + A\hat{\Delta}\Gamma = 2A\hat{\Delta}\Gamma.$$

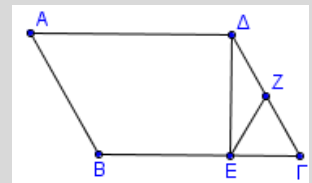


37017. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και Γ του παραλληλογράμμου.

β) Αν K είναι το μέσο της AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $EZ\Gamma$.



Λύση

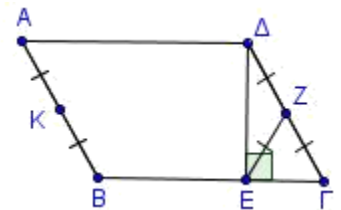
α) Οι γωνίες A και B είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB . Δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ$.

Οι γωνίες A και Γ είναι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου, άρα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

β) Η EZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $\Delta E\Gamma$, άρα $EZ = \frac{\Delta\Gamma}{2}$. Όμως $AK = \frac{AB}{2}$ και $AB = \Gamma\Delta$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, άρα είναι και $EZ = AK$.

γ) Είναι $EZ = \frac{\Delta\Gamma}{2} = Z\Gamma$, άρα το τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι ισοσκελές και επειδή έχει

$\hat{\Gamma} = 60^\circ$, είναι ισόπλευρο. Άρα $E\hat{Z}\Gamma = 60^\circ$.



4ο Θέμα

1737. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH . Ονομάζουμε Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν M είναι το σημείο τομής του τμήματος $H\Delta$ με την πλευρά AB και N είναι το σημείο τομής του HE με την πλευρά $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) $AH = A\Delta = AE$.

β) Η γωνία EHD είναι ορθή.

γ) Τα σημεία E, A και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \Delta E/2$.

Λύση

α) Στο τρίγωνο $AH\Delta$, η AK είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AH = A\Delta$ και η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $H\Delta\Delta$.

Στο τρίγωνο EAH το AL είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AH = AE$ και η AL είναι διχοτόμος της γωνίας $E\Delta H$.

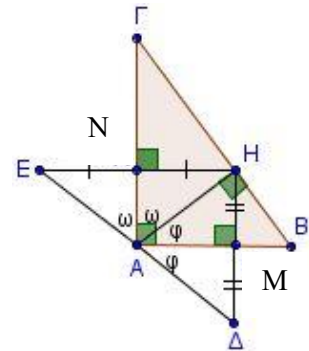
Άρα $AH = A\Delta = AE$

β) Το τετράπλευρο $NAMH$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο, άρα $EHD = 90^\circ$.

γ) Έστω $E\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}H = \omega$ και $H\hat{A}K = K\hat{A}\Delta = \phi$. Επειδή $\Delta\hat{A}K = 90^\circ$, είναι

$\omega + \phi = 90^\circ$. Είναι $E\hat{A}\Delta = \omega + \omega + \phi + \phi = 2\omega + 2\phi = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, άρα τα

σημεία E, A, Δ είναι συνευθειακά. Στο τρίγωνο EHD τα M, N είναι μέσα δύο πλευρών του, οπότε $MN = \Delta E/2$.

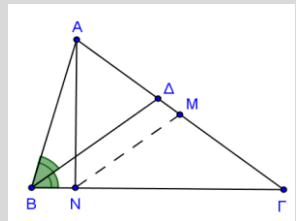


1738. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος $B\Delta$ της γωνίας B . Από το μέσο M της $A\Gamma$ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο $B\Delta$ που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ) $AN \perp B\Gamma$.



Λύση

α) Είναι $\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{2\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές.

β) Είναι $M\hat{N}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $B\Delta, MN$ που τέμνονται από την $B\Gamma$ και επειδή $\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}$ είναι και $M\hat{N}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Το τρίγωνο $MN\Gamma$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $N\Gamma$, είναι $MN = M\Gamma = MA = \frac{A\Gamma}{2}$. Στο τρίγωνο

$AN\Gamma$ η διάμεσός του NM είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A\hat{N}\Gamma = 90^\circ$, δηλαδή $AN \perp B\Gamma$.

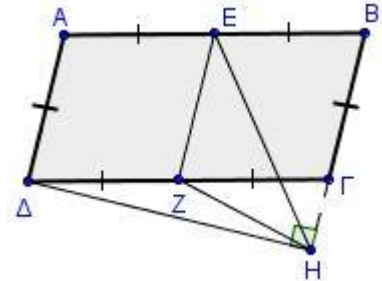
1759. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία A αμβλεία, ισχύει ότι $AB = 2A\Delta$. Τα σημεία E και Z , είναι μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος.
 β) Το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές.
 γ) Το τμήμα HE , είναι διχοτόμος της γωνίας $ZH\Gamma$.

Λύση

α) Είναι $AE = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \Delta Z$ και επειδή $AE \parallel \Delta Z$, το τετράπλευρο

$A\Delta ZE$ είναι παραλληλόγραμμο. Όμως $AE = \frac{AB}{2} = A\Delta$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο $A\Delta ZE$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.



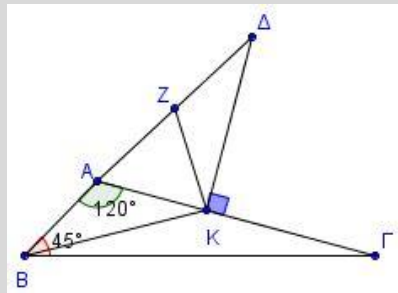
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $H\Gamma\Delta$ το HZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί

στην υποτείνουσα, άρα $HZ = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2\Delta Z}{2} = \Delta Z$ ^{$A\Delta ZE$ ρόμβος} $= EZ$, άρα το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή το τρίγωνο EHZ είναι ισοσκελές με βάση την EH , ισχύει ότι $\hat{ZEH} = \hat{ZHE}$. Όμως $\hat{ZEH} = \hat{E\hat{H}\Gamma}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων EZ, BH που τέμνονται από την EH , άρα και $\hat{ZHE} = \hat{E\hat{H}\Gamma}$, δηλαδή η EH διχοτομεί τη γωνία $ZH\Gamma$.

1761. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία A ίση με 120° και γωνία B ίση με 45° . Στην προέκταση της BA προς το A , παίρνουμε τμήμα $A\Delta = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ που την τέμνει στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{A\Delta K} = 30^\circ$
 β) Το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.
 γ) Αν Z το μέσο της ΔA , τότε $\hat{ZKB} = 90^\circ$.
 δ) Το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Delta$.



Λύση

α) Είναι $\hat{K\hat{A}\Delta} + \hat{\Gamma\hat{A}B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{K\hat{A}\Delta} + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{K\hat{A}\Delta} = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $K\hat{A}\Delta$ ισχύει ότι: $\hat{K\hat{A}\Delta} + \hat{A\hat{A}K} = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \hat{A\hat{A}K} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\hat{A}K} = 30^\circ$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta K$ είναι $\hat{A\hat{A}K} = 30^\circ$, άρα $AK = \frac{A\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$, άρα το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.

γ) $AZ = \frac{A\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB = AK$. Άρα A μέσο και $AK = \frac{BZ}{2}$.

Επομένως το τρίγωνο BKZ είναι ορθογώνιο με $\hat{B\hat{K}Z} = 90^\circ$

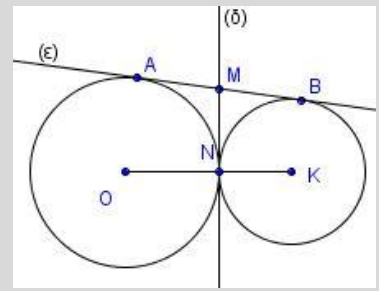
δ) Επειδή $\hat{A\hat{B}K} = \hat{A\hat{A}K} = 30^\circ$, το τρίγωνο $KB\Delta$ είναι ισοσκελές, άρα $KB = K\Delta$. Επειδή το K ισαπέχει από τα B, Δ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του $B\Delta$.

1771. Δύο κύκλοι (O, ρ_1) , (K, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την ε στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

β) $\widehat{OMK} = 90^\circ$

γ) $\widehat{ANB} = 90^\circ$



Λύση

α) Τα MA, MN είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Μ προς τον κύκλο (O, ρ_1) , άρα είναι ίσα.

Τα MB, MN είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Μ προς τον κύκλο (K, ρ_2) , άρα είναι ίσα. Δηλαδή $MA = MB = MN$.

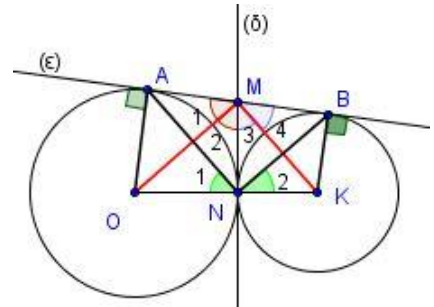
β) Η διακεντρική ευθεία MO διχοτομεί τη γωνία AMO, άρα $\widehat{AMO} = \widehat{OMN} = \hat{\omega}$.

Η διακεντρική ευθεία MK διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων NMB, άρα $\widehat{NMK} = \widehat{KMB} = \hat{\varphi}$.

Είναι $\widehat{AMB} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + \varphi = 90^\circ$, άρα

$\widehat{OMK} = \omega + \varphi = 90^\circ$.

γ) $NM = \frac{AB}{2}$ και NM διάμεσος στο τρίγωνο ANB. Άρα το τρίγωνο ANB ορθογώνιο με ορθή την γωνία ANB.

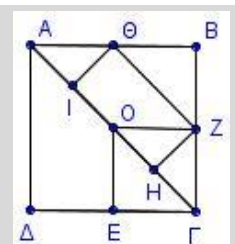


1781. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε $AI = IO = OH = HG$. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο.

β) $ZH = \frac{AG}{4}$.

γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\Theta Z} = 2\widehat{\Theta I}$.



α) Τα Ο, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα $OE \parallel AD$ και $OE = \frac{AD}{2}$.

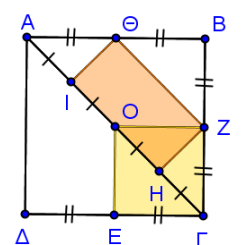
Όμως $AD \parallel BG$, οπότε $OE \parallel ZG$ και $OE = \frac{BG}{2} = GZ$. Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει $\widehat{\Gamma} = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο. Είναι

$OE = EG = GZ = ZO = \frac{AD}{2} = \frac{GD}{2}$, οπότε το ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο.

β) Η ΖΗ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΖΓ που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα, άρα $ZH = \frac{OG}{2} = \frac{\frac{AG}{2}}{2} = \frac{AG}{4}$.

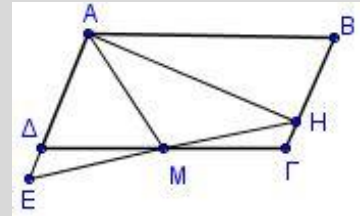
γ) Επειδή τα Θ, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Theta Z \parallel AG \Leftrightarrow \Theta Z \parallel IH$ και $\widehat{\Theta Z} = \frac{AG}{2}$.



$$\text{Είναι } \text{IH} = \text{IO} + \text{OH} = \frac{\text{AO}}{2} + \frac{\text{ΟΓ}}{2} = \frac{\text{ΑΓ}}{2} = \text{ΘΖ}.$$

Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΖΓ, το ΖΗ είναι διάμεσος, οπότε είναι και ύψος, δηλαδή $\text{ΖΗΟ} = 90^\circ$. Επειδή το παραλληλόγραμμο ΙΘΖΗ έχει μία ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

1787. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\text{AB} = 2\text{BG}$, τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:



α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ.

β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.

γ) $\hat{E} = \hat{\Delta\text{M}\text{A}}$.

Λύση

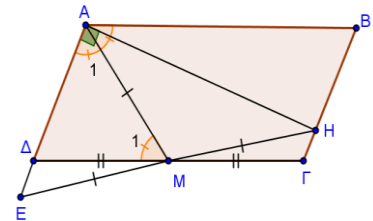
α) Είναι $\text{BAM} = \text{M}_1$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΜ.

Επειδή το Μ είναι μέσο του ΔΓ ισχύει ότι

$$\Delta\text{M} = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{\text{AB}}{2} = \frac{2\text{BG}}{2} = \text{BG} = \text{AD}, \text{ άρα το τρίγωνο } \Delta\text{M}\text{A} \text{ είναι}$$

ισοσκελές και έχει $\Delta\text{M}\text{A} = \text{A}_1$ (2).

Από τις (1),(2) είναι $\text{BAM} = \text{A}_1$, οπότε η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ.



β) Τα τρίγωνα ΔΕΜ και ΜΗΓ έχουν:

1) $\Delta\text{M} = \text{M}\Gamma$

2) $\Delta\text{M}\text{E} = \text{H}\text{M}\Gamma$ ως κατακορυφήν και

3) $\text{E}\Delta\text{M} = \Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ.

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\text{M}\text{E} = \text{M}\text{H}$.

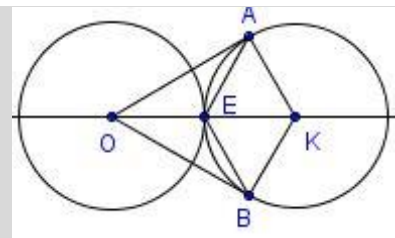
Επειδή $\Delta\text{M} = \text{M}\Gamma$ και $\text{M}\text{E} = \text{M}\text{H}$, τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ, η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$\text{AM} = \text{M}\text{E} = \text{M}\text{H} = \frac{\text{EH}}{2}, \text{ οπότε το τρίγωνο } \text{A}\text{M}\text{E} \text{ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι } \text{E} = \text{A}_1. \text{ Όμως είναι και}$$

$$\Delta\text{M}\text{A} = \text{A}_1, \text{ άρα } \text{E} = \Delta\text{M}\text{A}.$$

1796. Δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (K, ρ) , να αποδείξετε ότι:



α) $\text{AE} = \text{BE}$.

β) $\hat{\text{AOK}} = 30^\circ$.

γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

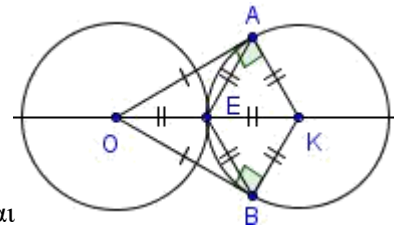
Λύση

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΒΕ έχουν:

1) τη πλευρά ΟΕ κοινή

2) $\text{OA} = \text{OB}$ γιατί τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα και

3) $\text{AOE} = \text{EOB}$ γιατί η διακεντρική ευθεία OK διχοτομεί τη γωνία AOB των εφαπτομένων
Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $\text{AE} = \text{BE}$.



β) Επειδή η ΑΚ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την ΟΑ, θα είναι $ΟΑ \perp ΑΚ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΚ είναι $ΑΚ = ρ$ και

$OK = 2\rho = 2AK \Leftrightarrow AK = \frac{OK}{2}$, δηλαδή μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, άρα η απέναντι γωνία από τη πλευρά αυτή είναι 30° , δηλαδή $\angle AOK = 30^\circ$.

γ) Το τμήμα ΑΕ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $AE = \frac{OK}{2} = \rho$. Το τμήμα ΒΕ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΚ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $BE = \frac{OK}{2} = \rho$. Επειδή $AE = BE = KB = AK = \rho$, το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

1806. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του AM και σε τυχαίο σημείο K αυτής φέρουμε κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του ΔE να αποδείξετε ότι:

a) $B = BAM$.

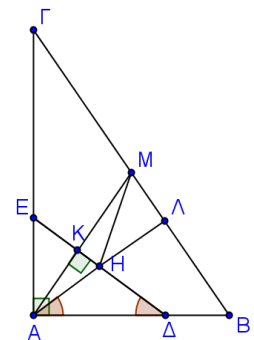
β) $A\hat{\Delta}H = \Delta\hat{A}H.$

γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ.

Λύση

α) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $AM = \frac{BG}{2} = MB = MG$, άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ και ισχύει ότι $\angle B = \angle BAM$.

β) Το ΑΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, άρα $AH = \frac{\Delta E}{2} = HD = HE$, άρα το τρίγωνο ΑΗΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ και ισχύει ότι $\angle A\hat{D}H = \angle A\hat{H}D$.



γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ, έχουμε:
 $BAM + A\Delta H = 90^\circ \Leftrightarrow B + A\Delta H = 90^\circ \Leftrightarrow A\Delta H = 90^\circ - B = \Delta A H$. Στο τρίγωνο ΑΛΒ έχουμε
 $\Delta A H + B = 90^\circ$  $\angle B + \angle B = 90^\circ$. Άρα και $A\Lambda B = 90^\circ$, δηλαδή $AH \perp BG$.

1808. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της DE (προς το E) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στη προέκταση της ED (προς το Δ) θεωρούμε σημείο K τέτοιο, ώστε $\Delta K = AD$. Να αποδείξετε ότι:

$$a) \quad K\Delta = \Lambda E.$$

β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα.

Λύση

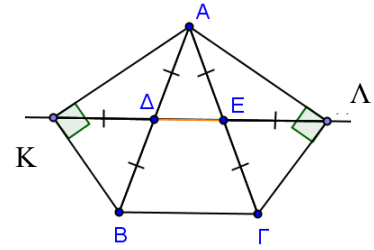
α) Είναι $K\Delta = A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = AE = \Lambda E$.

β) Επειδή $K\Delta = \frac{AB}{2}$, μια διάμεσος στο

τρίγωνο ΑΚΒ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή.

Επειδή $\Lambda E = \frac{A\Gamma}{2}$, μια διάμεσος στο τρίγωνο ΑΚΒ ισούται με το μισό

της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή.



γ) Τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΑΕΛ έχουν:

1) $AD = AE$

2) $KD = LE$ και

3) $\angle A\Delta K = \angle A\Delta E$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\angle ADE$ και $\angle AED$
(το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές)

Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AK = AL$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ έχουν:

1) $AK = AL$ και

2) $AB = AG$,

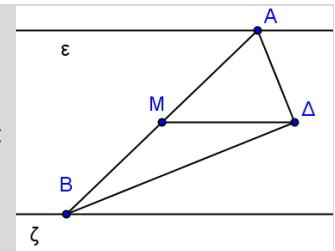
δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.

1811. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ϵ) και (ζ) και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

α) $\angle B\Delta A = 90^\circ$

β) $\angle B\Delta M = 2\angle M\Delta A$

γ) $M\Delta \parallel \epsilon$



Λύση

α) Έστω ΑΔ, ΒΔ οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών ΓΑΜ και ΜΒΕ. Έστω $\angle M\Delta B = \angle \Delta B E = \omega$ και

$\angle M\Delta A = \angle \Delta A \Gamma = \varphi$. Επειδή οι γωνίες ΓΑΜ και ΜΒΕ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ϵ, ζ που τέμνονται από την ΑΒ, είναι παραπληρωματικές, άρα

$\angle \Gamma A M + \angle M B E = 180^\circ \Leftrightarrow 2\varphi + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi + \omega = 90^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΒ, έχουμε:

$$\angle B\Delta A + \omega + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B\Delta A + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B\Delta A = 90^\circ$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε

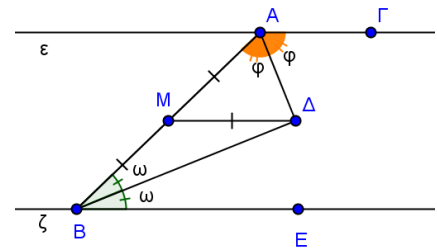
$$\Delta M = \frac{AB}{2} = MA = MB, \text{ άρα το τρίγωνο } AM\Delta \text{ είναι ισοσκελές και οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση}$$

του ΑΔ είναι ίσες. Δηλαδή $\angle M\Delta A = \angle M\Delta A = \varphi$.

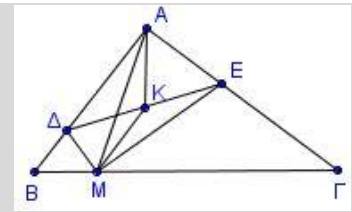
Η γωνία ΒΜΔ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΔ, οπότε: $\angle B\Delta M = \angle M\Delta A + \angle M\Delta A = 2\angle M\Delta A$

γ) Είναι $\angle B\Delta M + \angle M B E = 2\varphi + 2\omega = 180^\circ$.

Οι γωνίες ΒΜΔ και ΜΒΕ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΜΔ, (ζ) που τέμνονται από την ΜΒ και επειδή είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΜΔ και (ζ) είναι παράλληλες, άρα και $M\Delta \parallel \epsilon$.



1812. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών BMA και $AM\Gamma$ οι οποίες τέμνουν τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔME είναι ορθή.

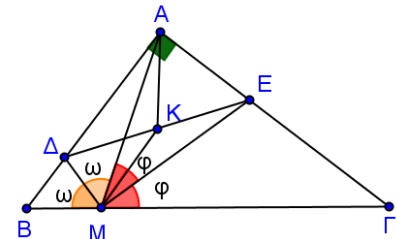
β) Αν K το μέσο του ΔE , να αποδείξετε ότι $MK = KA$.

Λύση

α) Επειδή η $M\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας BMA , είναι $\angle BMD = \angle DMA = \omega$ και επειδή η ME είναι διχοτόμος της γωνίας $AM\Gamma$, ισχύει ότι $\angle AME = \angle EM\Gamma = \varphi$.

Είναι $\angle AMB + \angle AM\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\omega + \varphi = 90^\circ$. Όμως $\angle DME = \omega + \varphi$, άρα $\angle DME = 90^\circ$.

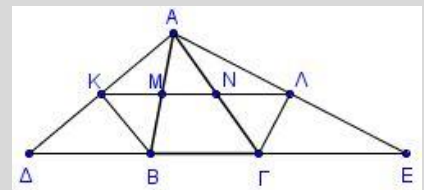


β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔDE , η AK είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $AK = \frac{\Delta E}{2}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔME , η MK είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $MK = \frac{\Delta E}{2}$.

Οπότε $AK = MK = \frac{\Delta E}{2}$.

1824. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB προς το B , θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στη προέκταση της $B\Gamma$ προς το Γ , θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Gamma E = A\Gamma$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A\Delta$ και $A E$ στα σημεία K και Λ αντίστοιχα και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



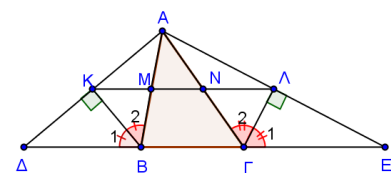
α) Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και $A E$ αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή.

γ) $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$

Λύση

α) Επειδή $B\Delta = AB$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές και το BK είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου. Άρα το K είναι μέσο του $A\Delta$. Επειδή $\Gamma E = A\Gamma$, το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές και το $\Gamma\Lambda$ είναι διχοτόμος που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου. Άρα το Λ είναι μέσο του $A E$.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AKB το KM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $KM = \frac{AB}{2} = MA$, άρα το τρίγωνο KMA είναι ισοσκελές. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Lambda\Gamma$ το ΛN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα $\Lambda N = \frac{A\Gamma}{2} = NA$, άρα το τρίγωνο $AN\Lambda$ είναι ισοσκελές.

γ) Στο τρίγωνο $A\Delta E$ τα K, Λ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα η $K\Lambda$ είναι παράλληλη στη $B\Gamma$. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το K είναι μέσο της $A\Delta$ και η KM είναι παράλληλη στην $B\Delta$, άρα το M είναι μέσο της AB . Στο

τρίγωνο ΑΓΕ το Λ είναι μέσο του ΑΕ και η ΑΝ είναι παράλληλη στην ΓΕ, άρα το Ν είναι μέσο της ΑΓ.

Άρα $KM = \frac{AB}{2}$ και $NL = \frac{GE}{2}$. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ, Ν είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $MN = \frac{BG}{2}$.

Είναι $KL = KM + MN + NL = \frac{AB}{2} + \frac{BG}{2} + \frac{GE}{2} = \frac{AB}{2} + \frac{BG}{2} + \frac{AG}{2} = \frac{AB + BG + AG}{2}$.

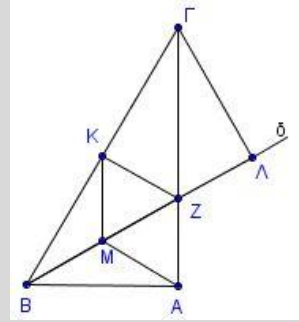
1872. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΓ στο Ζ.

Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα.

Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.
- β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος.
- γ) $\Gamma Z = 2ZA$
- δ) $BL = AG$



Λύση

α) Επειδή η Βδ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, ισχύει ότι: $\Gamma BZ = ABZ = 30^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών

του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε: $B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$.

Επειδή $\Gamma BZ = \Gamma$, το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές με $BZ = Z\Gamma$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ το ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$AM = \frac{BZ}{2} = BM = MZ$. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου

ΒΑΖ, έχουμε: $ABZ + BZA = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + BZA = 90^\circ \Leftrightarrow BZA = 60^\circ$ και αφού $AM = MZ$, το τρίγωνο ΑΜΖ είναι ισόπλευρο και $AM = MZ = AZ$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Gamma = 30^\circ$, άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2} = BK$.

Τα τρίγωνα ΖΚΒ και ΖΑΒ έχουν:

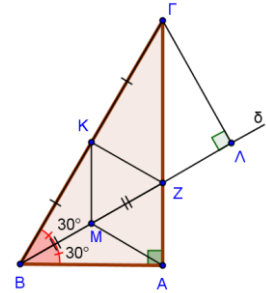
- 1) $AB = BK$
- 2) τη πλευρά ΒΖ κοινή και
- 3) $\Gamma BZ = ABZ = 30^\circ$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $BKZ = A = 90^\circ$ και $KZ = AZ$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΖ το ΚΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα

$KM = \frac{BZ}{2} = BM = MZ$ (3).

Από τις (1),(2),(3) το τετράπλευρο ΑΜΚΖ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.



γ) Είναι $AZ = MZ = \frac{BZ}{2}$ και $BZ = Z\Gamma$, άρα $AZ = \frac{\Gamma Z}{2} \Leftrightarrow \Gamma Z = 2AZ$.

δ) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΑ και ΓΖΛ έχουν:

- 1) $BZ = Z\Gamma$ και
- 2) $\Gamma Z\Lambda = BZA$ ως κατακορυφήν,

δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $Z\Lambda = ZA$.

Είναι $BZ = Z\Gamma$ και $Z\Lambda = ZA$, άρα και $BZ + Z\Lambda = \Gamma Z + ZA \Leftrightarrow BL = AG$

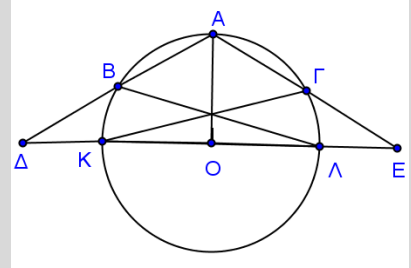
1874. Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $KL = 2\rho$.

Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην KL . Φέρουμε τις χορδές $AB = AG = \rho$. Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και AG αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου KL . Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{BAG} = 120^\circ$

β) Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

γ) $K\Gamma = \Lambda B$



Λύση

α) Είναι $OA = OB = OG = AB = AG = \rho$, οπότε τα τρίγωνα OAB και

OAG είναι ισόπλευρα, άρα $\widehat{BAO} = \widehat{GAO} = 60^\circ$. Άρα

$$\widehat{BAG} = \widehat{BAO} + \widehat{GAO} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

β) Στο τρίγωνο ΔOA είναι $\Delta + \widehat{BAO} = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta = 30^\circ$. Τότε

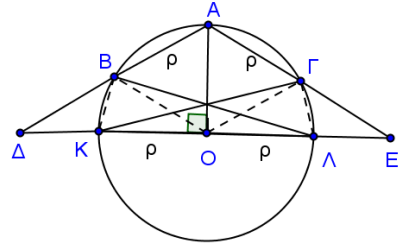
$$OA = \frac{A\Delta}{2} \Leftrightarrow A\Delta = 2\rho \text{ και επειδή } AB = \rho \text{ είναι και } B\Delta = \rho, \text{ άρα το}$$

B είναι μέσο της $A\Delta$. Όμοια $E = 30^\circ$, άρα $OA = \frac{AE}{2} \Leftrightarrow AE = 2\rho$, και αφού $AG = \rho$, το Γ είναι μέσο του AE .

γ) Είναι $\widehat{AOB} = \widehat{AOG} = 60^\circ$ άρα $\widehat{(AB)} = \widehat{(AG)} = 60^\circ$. Επειδή $\widehat{(AK)} = \widehat{(AL)} = 90^\circ$, θα είναι $\widehat{(BK)} = \widehat{(GL)} = 30^\circ$.

Είναι $\widehat{KAG} = \widehat{KB} + \widehat{BAG} = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ$ και όμοια $\widehat{LAB} = 150^\circ$,

δηλαδή $\widehat{LAB} = \widehat{KAG}$ και επειδή σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές, είναι και $K\Gamma = \Lambda B$.

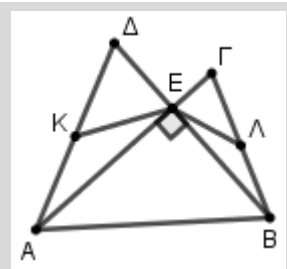


1876. Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $AB\Delta$ ($BA = B\Delta$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται κάθετα στο σημείο E , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $E\Delta = E\Gamma$.

β) $\Delta\Gamma \parallel AB$.

γ) Το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές και $K\Lambda \parallel AB$.



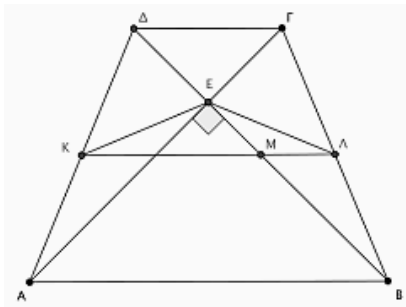
Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ίσα, έχουν και $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$ (απέναντι από ίσες πλευρές). Άρα το τρίγωνο EAB είναι ισοσκελές οπότε $EA = EB$. όμως $B\Delta = A\Gamma$, οπότε και $B\Delta - BE = A\Gamma - AE \Leftrightarrow E\Delta = E\Gamma$.

β) Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $\Gamma E = \Delta E$, οπότε: $\widehat{\Gamma\Delta E} = 45^\circ$. Το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $EA = EB$, οπότε: $\widehat{AB\Delta} = 45^\circ$. Άρα οι ευθείες AB και $\Delta\Gamma$ οι οποίες τέμνονται από την $B\Delta$ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $\widehat{\Gamma\Delta E}$ και $\widehat{AB\Delta}$ ίσες, οπότε $\Delta\Gamma \parallel AB$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔEA η EK είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $A\Delta$, οπότε: $EK = A\Delta/2$.

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ η ΕΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε: $ΕΛ = ΒΓ/2$. Όμως $ΑΔ = ΒΓ$, άρα $ΕΚ = ΕΛ$, οπότε το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές. Στο τρίγωνο ΑΔΒ φέρουμε από το μέσο Κ του ΑΔ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ η οποία τέμνει την ΔΒ στο μέσο της Μ. Το τμήμα ΜΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΔΒ και ΒΓ του τριγώνου ΔΓΒ οπότε $ΜΛ \parallel ΔΓ$, άρα και $ΜΛ \parallel ΑΒ$ και επειδή από το Μ διέρχεται μοναδική παράλληλη στην ΑΒ προκύπτει ότι τα σημεία Κ, Μ, Λ είναι συνευθειακά. Επομένως $ΚΛ \parallel ΑΒ$.



1895. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ ($ΑΓ=ΓΒ$). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές.
β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.

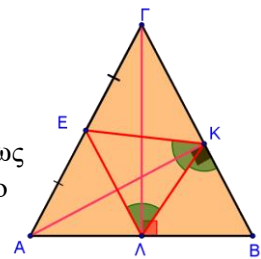
Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ η ΚΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $ΚΕ = \frac{ΑΓ}{2}$

Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο

ΓΛΑ: $ΛΕ = \frac{ΓΑ}{2}$. Επομένως $ΚΕ=ΛΕ$ και το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές.

β) Στο τρίγωνο ΓΑΒ τα Ε,Λ είναι μέσα οπότε $ΛΕ \parallel ΓΒ$ και $ΕΛΚ = ΛΚΒ$ (1) (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΛ και ΒΓ που τέμνονται από την ΚΛ). Από το α) ερώτημα $ΕΛΚ = ΕΚΛ$ (2) (τρίγωνο ΕΚΛ ισοσκελές). Από (1),(2) $ΕΚΛ = ΛΚΒ$. Επομένως η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.



13520. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Ρ εκτός του κύκλου.

Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ.

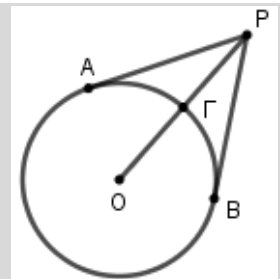
Η ΡΟ τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο ΑΒ στο Γ και $ΑΡΒ = 60^\circ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΟΡ = 2\rho$.

β) $ΑΓΒ = 120^\circ$

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ που είναι κάθετες στα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΡ και ΟΒΡ είναι ορθογώνια. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΡΒ, οπότε

$Ρ_1 = Ρ_2 = 30^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΟ είναι $Ρ_1 = 30^\circ$, οπότε

$$ΟΑ = \frac{ΟΡ}{2} \Leftrightarrow 2ΟΑ = ΟΡ \Leftrightarrow ΟΡ = 2\rho$$

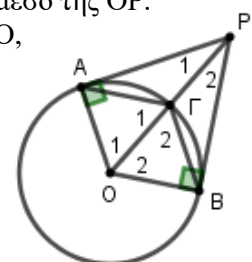
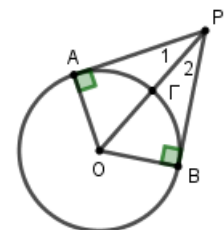
β) Επειδή η ΟΓ είναι ακτίνα του κύκλου είναι $ΟΓ = \rho$. Όμως $ΡΟ = 2\rho$, άρα το Γ είναι μέσο της ΟΡ.

Η ΑΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΟ,

οπότε $ΑΓ = \frac{ΡΟ}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$. Όμοια στο τρίγωνο ΡΒΟ η ΒΓ είναι διάμεσος που

αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $ΒΓ = \frac{ΡΟ}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$. Επειδή $ΟΑ = ΑΓ = ΟΓ = \rho$,

το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $Γ_1 = 60^\circ$.



Επειδή $OB=BG=OG=\rho$, το τρίγωνο BOG είναι ισόπλευρο, οπότε $\Gamma_2 = 60^\circ$.

Είναι $\angle B = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 120^\circ$.

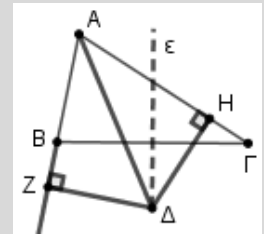
γ) Επειδή $OA=AG=GB=OB=\rho$ το τετράπλευρο $OAGB$ έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

13522. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την μεσοκάθετο (ϵ) της $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα DZ και DH προς τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$.

γ) Αν η γωνία $\hat{A} = 60^\circ$ και M το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$ έχουν:

- την πλευρά $A\Delta$ κοινή

- $\angle B\Delta\Delta = \angle \Delta A\Gamma$ γιατί η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A .

Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$ είναι ίσα, επειδή έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

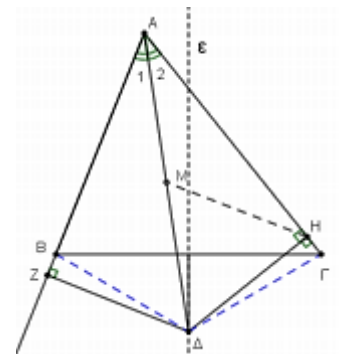
β) Φέρνουμε τις ΔB , $\Delta \Gamma$. Επειδή το Δ ανήκει στην μεσοκάθετο της $B\Gamma$ θα ισαπέχει από τα B και Γ , άρα $B\Delta = \Gamma\Delta$ (1).

Τα ορθογώνια τρίγωνα $BZ\Delta$ και $\Gamma H\Delta$ έχουν:

- $B\Delta = \Gamma\Delta$, από (1).

- $\angle Z = \angle H$ (2), επειδή είναι πλευρές των ίσων τριγώνων $AZ\Delta$ και $AH\Delta$, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες A_1, A_2 αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με μία κάθετη πλευρά και υποτείνουσα αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Άρα, $ZB = H\Gamma$.



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AH\Delta$ η HM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, οπότε

$$HM = \frac{A\Delta}{2} \quad (2).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι $A_1 = \frac{A}{2} = 30^\circ$, οπότε $\Delta Z = \frac{A\Delta}{2}$ (3).

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι $HM = \Delta Z$.

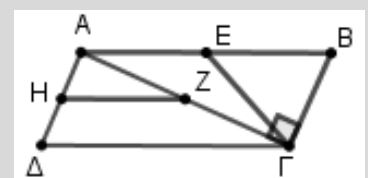
13540. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε η διαγωνίός του $A\Gamma$ να είναι κάθετη στη $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα E , Z και H των AB , $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $GE = ZH$

ii. Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta \Gamma E$.

β) Αν $\Delta H = \frac{AB}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.



Λύση

α) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma B$ η GE είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, οπότε

$GE = \frac{AB}{2}$ (1). Στο τρίγωνο $A\Delta \Gamma$ τα H , Z είναι μέσα δύο πλευρών του οπότε $HZ = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (2). Επειδή οι AB ,

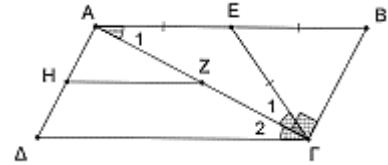
$\Gamma\Delta$ είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, είναι ίσες, οπότε από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\Gamma E = ZH$.

ii. Είναι $\Gamma E = AE = \frac{AB}{2}$, οπότε το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές με

βάση την $A\Gamma$ και $A_1 = \Gamma_1$ (3) γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

Είναι $A_1 = \Gamma_2$ (4) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει ότι $\Gamma_1 = \Gamma_2$, οπότε η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma E$.



β) Επειδή το H είναι μέσο της $A\Delta$, είναι $A\Delta = 2\Delta H = \frac{AB}{2}$.

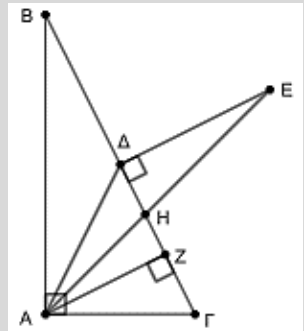
Είναι $\Gamma E = EB = \frac{AB}{2}$, οπότε $\Gamma E = EB = B\Gamma$, αφού $B\Gamma = A\Delta = \frac{AB}{2}$, άρα το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρο.

13672. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB > A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο AH της γωνίας A στο σημείο E . Έστω AZ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma A Z} = \hat{\Delta A B}$.

β) $A\Delta = \Delta E$.

γ) $\hat{Z A \Delta} = \hat{\Gamma} - \hat{B}$



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, η $A\Delta$ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα $B\Gamma$, οπότε $A\Delta = \Delta B = \Delta\Gamma$. Οι οξείες γωνίες B και Γ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $B = 90^\circ - \Gamma$ (1) Οι οξείες γωνίες $\Gamma A Z$ και Γ του ορθογωνίου τριγώνου $ZA\Gamma$ είναι συμπληρωματικές, οπότε: $\Gamma A Z = 90^\circ - \Gamma$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\Gamma A Z = B$. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = \Delta B$, οπότε θα είναι $\Delta A B = B$. Επομένως, οι γωνίες $\Gamma A Z$ και $\Delta A B$ θα είναι ίσες, δηλαδή $\Gamma A Z = \Delta A B$ (3).

β) Η AH είναι διχοτόμος της γωνίας A , οπότε $\hat{\Gamma A H} = \hat{H A B}$ (4).

Με αφαίρεση των σχέσεων (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma A H} - \hat{\Gamma A Z} = \hat{H A B} - \hat{\Delta A B} \Leftrightarrow \hat{Z A H} = \hat{H A \Delta} \quad (5).$$

Επίσης, $AZ \parallel \Delta E$ διότι είναι κάθετες στη $B\Gamma$. Άρα, $\hat{Z A H} = E$ (6), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AZ και ΔE τεμνόμενων από την $A\Gamma$.

Από τις ισότητες (5) και (6) προκύπτει ότι $\hat{H A \Delta} = E$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$ άρα $\Delta E = A\Delta$.

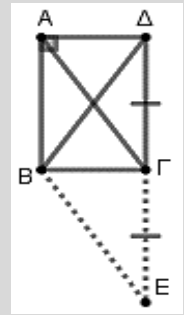
γ) Είναι $\hat{\Gamma A Z} + \hat{Z A \Delta} + \hat{\Delta A B} = A$, οπότε $\hat{Z A \Delta} = A - \hat{\Gamma A Z} - \hat{\Delta A B} = 90^\circ - B - B = \Gamma - B$, αφού είναι $\hat{\Gamma A Z} = \hat{\Delta A B} = B$ και $\Gamma = 90^\circ - B$.

13851. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Αν $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{E} = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι $B\Delta = 2A\Delta$.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ οι απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες δηλαδή $AB = \Gamma\Delta$, επιπλέον από υπόθεση έχουμε ότι $\Gamma\Delta = \Gamma E$, άρα $AB = \Gamma E$.

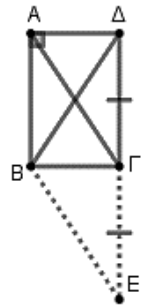
Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε $AB \parallel \Gamma\Delta$ άρα και $AB \parallel \Gamma E$.

Το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΑΒ και ΓΕ παράλληλες και ίσες.

β) Στο παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχουμε $AG = BE$ ως απέναντι πλευρές επίσης στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχουμε $AG = B\Delta$ ως διαγώνιοι του ορθογωνίου, άρα $BE = B\Delta$ δηλαδή το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

ή

Στο τρίγωνο ΔΒΕ η ΒΓ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη ΔΕ.



γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΒΕ η ΒΓ είναι ύψος, διάμεσος άρα διχοτόμος του τριγώνου οπότε

$$\hat{\Delta}\hat{B}\hat{G} = \frac{\hat{\Delta}\hat{B}\hat{E}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

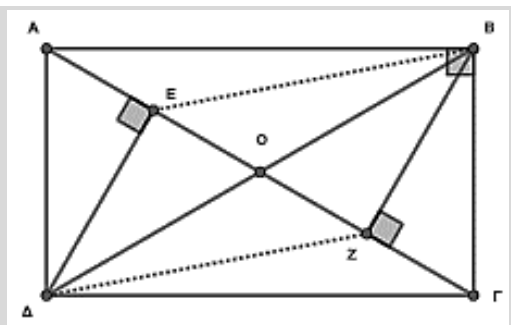
Επίσης $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{G} = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ των ΑΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ. Από το άθροισμα των γωνιών τριγώνου στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{A} = 30^\circ$ οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας άρα $A\Delta = \frac{B\Delta}{2}$ ή $B\Delta = 2A\Delta$.

13852. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$ και με κέντρο Ο. Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αν $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E} = 60^\circ$ και $OE = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.



Λύση

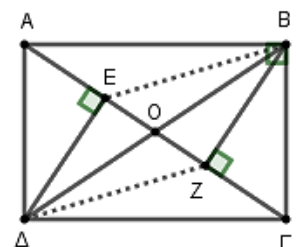
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ έχουν:

- $\angle EOD = \angle ZOB$ ως κατακορυφήν
- $DO = OB$, Ο μέσο της διαγωνίου ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Στα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ οι γωνίες $\angle ODE$ και $\angle OBZ$ είναι ίσες ως

συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\angle EOD$ και $\angle ZOB$.



Από τη σύγκριση του α) ερωτήματος έχουμε $EO=ZO$ ως πλευρές των ίσων τριγώνων απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle ODE$ και $\angle OBZ$. Το τετράπλευρο $EBZD$ είναι παραλληλόγραμμο διότι οι διαγώνιοι του EZ και BD διχοτομούνται στο O αφού $EO=OZ$ και $DO=OB$ (O μέσο της BD).

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle A\Gamma\Delta$ έχουμε $\angle A\Gamma\Delta = 60^\circ$ συνεπώς $\angle \Gamma\Delta A = 30^\circ$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες και $\Gamma O = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = \Delta O$ δηλαδή το τρίγωνο $\triangle DO\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση

$\Gamma\Delta$ και $\angle \Gamma\Delta A = 30^\circ$, άρα $\angle DO\Gamma = 120^\circ$ και $\angle DOA = 60^\circ$ ως παραπληρωματική της $\angle DO\Gamma$.

Συνεπώς το τρίγωνο $\triangle ADO$ είναι ισόπλευρο και η ΔE είναι ύψος άρα και διάμεσος. Το σημείο E είναι το μέσο του τμήματος AO με $AE=EO=5$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ADE$ έχουμε $\angle ADE = 60^\circ$ συνεπώς $\angle AED = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά AE ισούται με το μισό της υποτείνουσας AD , δηλαδή $AE = \frac{AD}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{AD}{2} \Leftrightarrow AD = 10$.

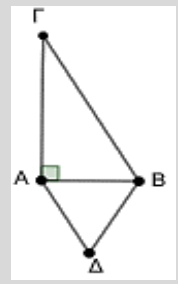
13853. Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. Επίσης οι AD και $B\Gamma$ είναι παράλληλες και το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Αν η περίμετρος του $AB\Delta$ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του $AB\Gamma$.

γ) Αν το σημείο K είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το $A\Delta BK$ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου K .

Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $A\Delta BK$; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Λύση

α) Οι γωνίες $\angle DAB$ και $\angle AB\Gamma$ είναι εντός και εναλλάξ των παραλλήλων AD και $B\Gamma$ με τέμνουσα την AB . Επομένως $\angle DAB = \angle AB\Gamma$. Όμως το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο, επομένως η καθεμία από τις γωνίες του είναι 60° . Δηλαδή $\angle DAB = \angle AB\Gamma = 60^\circ$. Όμως οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\angle A\Gamma B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

β) Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο, άρα έχει ίσες πλευρές. Επομένως το μήκος κάθε πλευράς του είναι $AB = AD = BD = 12 : 3 = 4$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\Gamma = \angle A\Gamma B = 30^\circ$, επομένως η απέναντι πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 8$.

γ) Αν το $A\Delta BK$ του παρακάτω σχήματος είναι παραλληλόγραμμο τότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες (ιδιότητα παραλληλογράμμου).

Επίσης $AD = \Delta B$ οπότε είναι ρόμβος αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

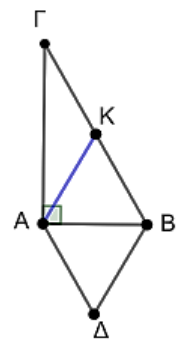
Άρα $BK = AK$. Είναι $\angle AB\Gamma = 60^\circ$ οπότε το τρίγωνο ABK είναι ισόπλευρο άρα $BK = AK = AB$.

Η γωνία $\angle \Gamma\hat{K}A$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\angle A\hat{K}B$ οπότε είναι

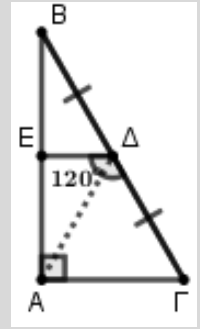
$$\angle \Gamma\hat{K}A = 180^\circ - \angle A\hat{K}B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο $A\Gamma K$ έχουμε

$$\angle \Gamma\hat{A}K + \angle \Gamma\hat{K}A + \angle A\hat{\Gamma}K = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma\hat{A}K + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma\hat{A}K = 30^\circ \text{ οπότε το τρίγωνο } A\Gamma K \text{ είναι ισοσκελές και } AK = K\Gamma. \text{ Επομένως } BK = K\Gamma \text{ άρα το } K \text{ είναι μέσο του } B\Gamma.$$



13855. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά AG που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\angle E\Delta\Gamma = 120^\circ$, τότε:



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\Delta\Gamma A$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά AG προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma Z = AG$ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\angle AHZ = 90^\circ$.

Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και $DE \parallel AG$ άρα το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AB . Οι γωνίες $\angle E\Delta\Gamma$ και $\angle \Delta\Gamma A$ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ED και AG που τέμνονται από την $\Gamma\Delta$, συνεπώς είναι παραπληρωματικές άρα

$$\angle E\Delta\Gamma + \angle \Delta\Gamma A = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \angle \Delta\Gamma A = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \Delta\Gamma A = 60^\circ.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \Delta\Gamma. \text{ Στο ίδιο τρίγωνο οι γωνίες } B \text{ και } \Gamma \text{ είναι συμπληρωματικές, από το α) ερώτημα}$$

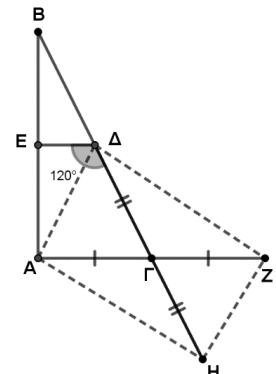
έχουμε $\Gamma = 60^\circ$ άρα $B = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $B = 30^\circ$ άρα η απέναντι κάθετη πλευρά AG ισούται με το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$, δηλαδή $AG = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AG = \Delta\Gamma$. Συνεπώς το τρίγωνο

$A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο αφού έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες $A\Delta = AG = \Delta\Gamma$.
ή

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \Delta\Gamma$ οπότε το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι

ισοσκελές με γωνία $\angle \Delta\Gamma A = 60^\circ$ οπότε είναι ισόπλευρο.



γ) Από την κατασκευή των $\Gamma Z, \Gamma H$ το Γ είναι μέσο των $\Delta H, AZ$, οι οποίες είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου $A\Delta ZH$. Επομένως το $A\Delta ZH$ είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης $AZ = 2AG = 2\Delta\Gamma = \Delta H$ οπότε το παραλληλόγραμμο $AZ\Delta H$ είναι ορθογώνιο αφού έχει ίσες διαγώνιες.

Άρα $\angle AHZ = 90^\circ$.

14566. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$.

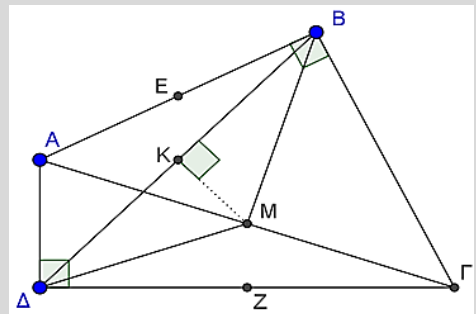
Αν τα σημεία E, Z, M είναι τα μέσα των $AB, \Gamma\Delta$, και AG αντιστοίχως και το MK είναι κάθετο στην $B\Delta$, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο $BM\Delta$ είναι ισοσκελές και το K είναι το μέσο του $B\Delta$.

β) i. $EK = \frac{A\Delta}{2}$.

ii. $MZ = EK$.

γ) Το τετράπλευρο $KEMZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

14879. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

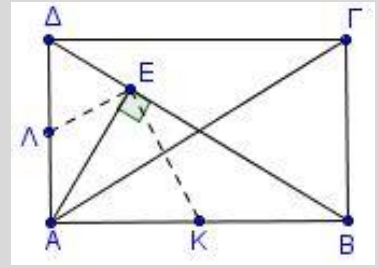
Από την κορυφή Α φέρουμε $AE \perp BD$.

Έστω Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως, τότε:

α) i. Να αποδείξετε ότι: $\widehat{KEL} = 90^\circ$

ii. $KL = \frac{AG}{2}$

β) Αν $\widehat{BAG} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $KL = BG$.



Λύση

α) i. Το ΕΛ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου ΑΕΔ, οπότε

$$EL = LA = \frac{AD}{2}.$$

Τότε το τρίγωνο ΛΕΑ είναι ισοσκελές οπότε $\angle LEA = \angle LAE$ (1). Το ΕΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου ΑΕΒ, οπότε $EK = KA = \frac{AB}{2}$. Τότε το τρίγωνο ΚΕΑ είναι ισοσκελές οπότε $\angle KEA = \angle KAE$ (2).

$$\text{Είναι } \angle KEL = \angle LEA + \angle KEA = \angle LAE + \angle KAE = \angle LAK = 90^\circ$$

ii. Επειδή τα Κ, Λ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ, ισχύει ότι $KL = \frac{BD}{2}$. Όμως $BD = AG$ γιατί οι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες, άρα $KL = \frac{AG}{2}$.

β) Αν $\widehat{BAG} = 30^\circ$, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $BG = \frac{AG}{2} = \frac{BD}{2} = KL$

14881. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{NKM} = \widehat{NMK}$.

β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ.

γ) $AM = KN + LP$.

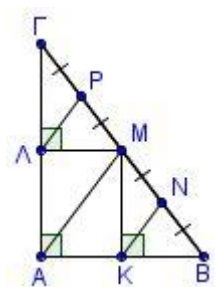
Λύση

α) Το ΚΝ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΜΚΒ, οπότε $KN = \frac{MB}{2} = MN = NB$, άρα το τρίγωνο ΚΝΜ είναι ισοσκελές και οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του ΜΚ είναι ίσες. Δηλαδή $\widehat{NKM} = \widehat{NMK}$.

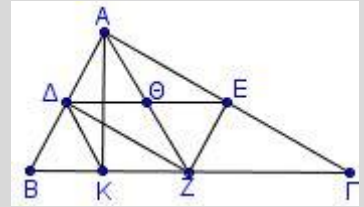
β) Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $AM = \frac{BG}{2} = MB = MG$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΒ, η ΜΚ είναι ύψος, οπότε είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ.

γ) Είναι $KN + LP = \frac{MB}{2} + \frac{MG}{2} \stackrel{AM=MB=MG}{=} \frac{AM}{2} + \frac{AM}{2} = AM$



14886. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), τα μέσα Δ, E, Z των πλευρών του και το ύψος του AK . Αν Θ είναι το σημείο τομής των $AZ, \Delta E$, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο.

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$

β) Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$,

i. να βρείτε τη γωνία AZB .

ii. να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$.

Λύση

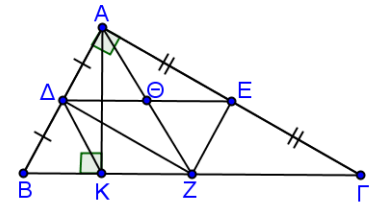
α) i. Επειδή τα E, Z είναι μέσα πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, είναι $EZ \parallel AB \Leftrightarrow EZ \parallel A\Delta$ και

$$EZ = \frac{AB}{2} = A\Delta. \text{ Στο τετράπλευρο } A\Delta ZE \text{ δύο απέναντι πλευρές του, οι } A\Delta, EZ \text{ είναι ίσες και}$$

παράλληλες και μια γωνία του, η A , είναι ορθή, οπότε το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο.

ii. Τα Δ, E είναι μέσα πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$ και

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}. \text{ Οι } AZ, \Delta E \text{ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου } A\Delta ZE, \text{ οπότε είναι}$$



$$\text{ίσες και διχοτομούνται. Άρα } A\Theta = \Theta E = \frac{\Delta E}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$$

β) i. Επειδή $\angle Z\epsilon\Gamma = 90^\circ$, το ZE είναι ύψος στο τρίγωνο $AZ\Gamma$ και επειδή είναι και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $\angle Z\Lambda\Gamma = \angle \Gamma = 30^\circ$.

Η γωνία AZB είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AZ\Gamma$, άρα $\angle AZB = \angle Z\Lambda\Gamma + \angle \Gamma = 60^\circ$.

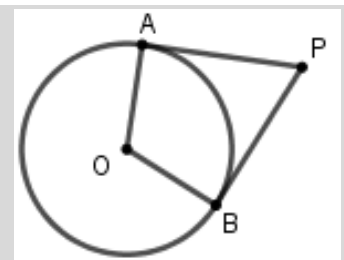
ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\angle \Gamma = 30^\circ$, άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε: $B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου AKB έχουμε:

$$\angle BAK + B = 90^\circ \Leftrightarrow \angle BAK = 30^\circ. \text{ Τότε } BK = \frac{AB}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$$

34315. Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας 4 cm και εξωτερικό του σημείο P . Έστω PA, PB τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρονται από το P , τα σημεία επαφής τους A, B με τον κύκλο αντίστοιχα και τέτοια ώστε η γωνία $\angle APB$ να ισούται με 60° .



α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνίας $\angle AOB$ είναι ίσο με 120° .

β) Αν PO η διακεντρική ευθεία του σημείου P , τότε να υπολογίσετε:

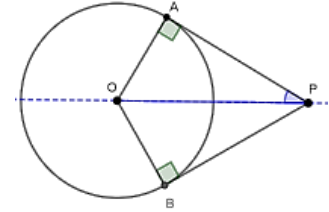
i. το μέτρο της γωνίας $\angle APO$

ii. το μήκος του τμήματος OP .

Λύση

α) Οι OA, OB είναι ακτίνες του κύκλου και A, B σημεία επαφής, άρα $OA \perp PA$ και $OB \perp PB$.

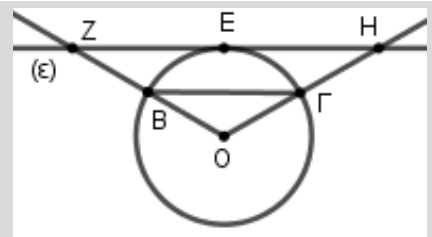
Στο τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι $\widehat{A\hat{O}B} + \hat{A} + \hat{B} + \widehat{A\hat{P}B} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{O}B} + 90^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{A\hat{O}B} = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$.



β) i. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\hat{P}B}$ των εφαπτομένων, άρα $\widehat{A\hat{P}O} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΡ είναι $\widehat{A\hat{P}O} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά είναι το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $OA = \frac{PO}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{PO}{2} \Leftrightarrow PO = 2\rho$.

34318. Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και Ε το μέσο του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ (προς το Β και το Γ αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Gamma \parallel (\epsilon)$.

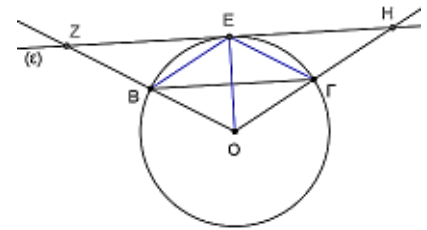
ii. $OZ = OH$.

β) Αν το σημείο Β είναι το μέσο του ΟΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ.

Λύση

α) i. Η ΟΕ είναι ακτίνα στο σημείο επαφής Ε, άρα $OE \perp ZH$ (1).

Επειδή το Ε είναι το μέσο του τόξου ΒΓ, οι επίκεντρες γωνίες $\widehat{B\hat{O}E}$ και $\widehat{G\hat{O}E}$ είναι ίσες. Η ΟΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Ο στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ, άρα είναι και ύψος του, δηλαδή $OE \perp B\Gamma$ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $ZH \parallel B\Gamma$.



ii. Η ΟΕ είναι ύψος και διχοτόμος στο τρίγωνο ΟΖΗ, άρα είναι ισοσκελές με $OZ = OH$.

β) Στο τρίγωνο ΖΟΗ το Β είναι μέσο της ΟΖ και $B\Gamma \parallel ZH$, άρα Γ μέσο της ΟΗ. Τα Β, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΖΟΗ, άρα $BE \parallel OH$ και $BE = \frac{1}{2}OH = OG = \rho$. Επειδή $OB = BE = OE = \rho$, το

τρίγωνο ΟΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε $\widehat{B\hat{O}E} = 60^\circ$. Τότε $\widehat{B\hat{O}G} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΖ έχουμε:

$$\widehat{B\hat{O}E} + 90^\circ + \hat{Z} = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 90^\circ + \hat{Z} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

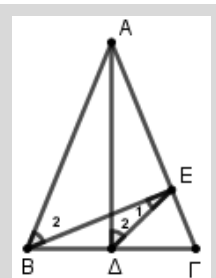
Στο τρίγωνο ΟΖΗ η ΟΕ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε είναι ισοσκελές με $\hat{H} = \hat{Z} = 30^\circ$.

34321. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 2ED$

β) $\hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$

γ) $\hat{B}_2 = \hat{A}_2$



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ η ΕΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, άρα

$$E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2E\Delta.$$

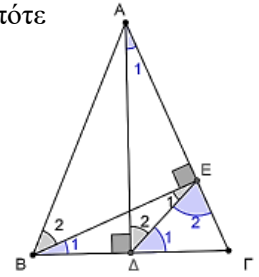
β) Είναι $E\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = B\Delta$, οπότε το τρίγωνο $E\Delta B$ είναι ισοσκελές με βάση την EB , οπότε

$\hat{E}_1 = \hat{B}_1$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEG από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\hat{B}_1 + \hat{\Gamma} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma}.$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ - \frac{1}{2}\hat{A}, \text{ οπότε}$$

$$\hat{B}_1 = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\hat{A}\right) = 90^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{A}, \text{ οπότε και } \hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}.$$



γ) Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Delta E$, οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 + \hat{E}_1 = 2\hat{E}_1$.

$$\text{Είναι } \hat{\Delta}_2 = 90^\circ - \hat{\Delta}_1 = 90^\circ - 2\hat{E}_1 = 90^\circ - 2 \cdot \frac{\hat{A}}{2} = 90^\circ - \hat{A} \quad (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEA από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\hat{B}_2 + \hat{A} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_2 = 90^\circ - \hat{A} \quad (2).$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$.

34330. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και

$\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) με τις κορυφές τους A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$

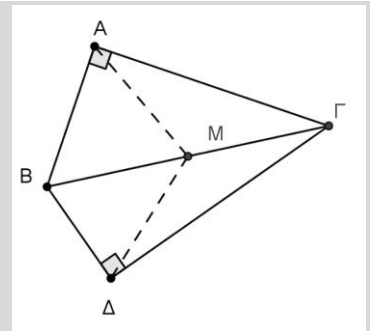
και το μέσο M της $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές,

β) $\hat{A}\hat{M}\hat{\Delta} = 2\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$.

γ) τα A, B, Δ και Γ είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, άρα

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} \quad (1).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η ΔM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

$$\text{υποτείνουσά του, άρα } \Delta M = \frac{B\Gamma}{2} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι

$AM = \Delta M$, οπότε το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) Είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Gamma$, άρα $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$. Η

γωνία $\hat{A}\hat{M}\hat{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AM\Gamma$, άρα

$$\hat{A}\hat{M}\hat{B} = \hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} + \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A} = 2\hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A} \quad (3).$$

Είναι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $\Delta M\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $\Delta\Gamma$, άρα $\hat{M}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$. Η

γωνία $\hat{B}\hat{M}\hat{\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Delta M\Gamma$, άρα $\hat{B}\hat{M}\hat{\Delta} = \hat{M}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} + \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = (4).$

$$\text{Είναι } \hat{A}\hat{M}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{M}\hat{B} + \hat{B}\hat{M}\hat{\Delta} \stackrel{(3)}{=} 2\hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A} + 2\hat{M}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} \stackrel{(4)}{=} 2\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}.$$

γ) Είναι $MA=MB=M\Delta=M\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$, οπότε ο κύκλος με κέντρο το M διέρχεται από τα σημεία A, B, Δ και Γ.

34334. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) $HE=EG$ και $HZ=Z\Gamma$.

β) το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) $\hat{Z\Delta E} = \hat{Z\hat{H}E}$.

δ) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΓ το ΗΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, άρα

$$HE = \frac{1}{2} AG = EG = AE.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΓ το ΗΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

$$\text{υποτείνουσά του, άρα } HZ = \frac{1}{2} B\Gamma = BZ = Z\Gamma.$$

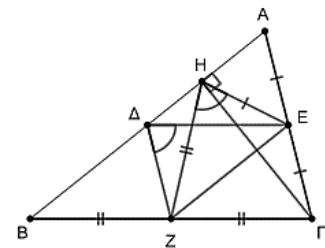
β) Τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $DE \parallel B\Gamma$ και

$$DE = \frac{1}{2} B\Gamma = Z\Gamma. \text{ Επειδή } DE \parallel Z\Gamma \text{ το τετράπλευρο } DE\Gamma Z \text{ έχει δύο}$$

απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή το ΔΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, άρα $\hat{Z\Delta E} = \hat{Z\hat{H}E}$. Επειδή $HZ=Z\Gamma$ το τρίγωνο ΖΗΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΗΓ, οπότε $\hat{Z\hat{H}G} = \hat{Z\hat{H}G}$ (1). Επειδή $EH=EG$ το τρίγωνο ΗΕΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΗΓ, άρα $\hat{G\hat{H}E} = \hat{E\hat{H}G}$ (2).

$$\text{Είναι } \hat{Z\Delta E} = \hat{Z\hat{H}E} = \hat{Z\hat{H}G} + \hat{E\hat{H}G} \stackrel{(1),(2)}{=} \hat{Z\hat{H}G} + \hat{G\hat{H}E} = \hat{Z\hat{H}E}.$$



37075. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $AG = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν $OG = AG$ και $\Delta B = O\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{GO\Delta} = 60^\circ$

ii. $\hat{OAG} = \hat{O\Delta B} = 30^\circ$

β) Αν Μ το μέσον του τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

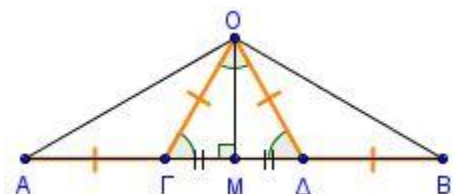
Λύση

α) i. Είναι $AG = OG = \Gamma\Delta = \Delta B = O\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισόπλευρο και οι γωνίες του είναι ίσες με 60° . Άρα $\hat{GO\Delta} = 60^\circ$.

ii. Επειδή $OG = AG$, το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές και έχει $\hat{OAG} = \hat{AOG}$.

Η γωνία ΟΓΔ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΑ, άρα

$$\hat{O\Gamma\Delta} = \hat{OAG} + \hat{AOG} \Leftrightarrow 60^\circ = \hat{OAG} + \hat{AOG} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\hat{OAG} \Leftrightarrow \hat{OAG} = 30^\circ$$



Όμοια : Η γωνία $\angle O\Delta B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $O\Gamma A$, άρα

$$\angle O\Delta B = \angle BO\Delta + \angle BO\Gamma \Leftrightarrow 60^\circ = \angle BO\Delta + \angle BO\Gamma \Leftrightarrow 60^\circ = 2\angle BO\Gamma \Leftrightarrow \angle BO\Gamma = 30^\circ$$

β) Επειδή $\angle O\Delta\Gamma = \angle O\Delta B = 30^\circ$, το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και η διάμεσός του OM είναι και ύψος του. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OMA , είναι $\angle OAM = 30^\circ$, άρα $OM = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow 2OM = OA$.

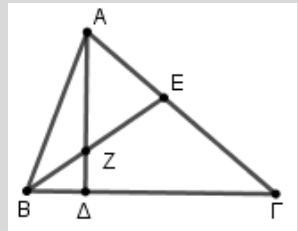
37082. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και έστω AD ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ = BZ$

ii. $AD = \frac{3}{2} BZ$

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.



Λύση

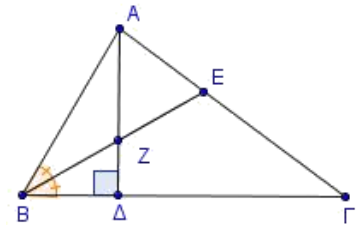
α) i. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι:

$$\angle A + \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \xrightarrow{\angle A + \angle \Gamma = 2\angle B} 2\angle B + \angle B = 180^\circ \Leftrightarrow 3\angle B = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B = 60^\circ .$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ADB είναι $\angle B + \angle BAD = 90^\circ \Leftrightarrow \angle BAD = 30^\circ$.

Επειδή η BE είναι διχοτόμος της γωνίας B , ισχύει ότι: $\angle ABE = \frac{\angle B}{2} = 30^\circ$.

Επειδή $\angle ABE = \angle BAD = 30^\circ$, το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές, οπότε $AZ = AB$.



ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο BZD είναι $\angle ZBD = 30^\circ$, άρα $ZD = \frac{1}{2} BZ$.

$$\text{Είναι } AD = AZ + ZD = BZ + \frac{1}{2} BZ = \frac{3}{2} BZ .$$

β) Αν το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, τότε $\angle A\Gamma = 60^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AD\Gamma$ είναι $\angle A\Gamma + \angle \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma = 30^\circ$. $\angle B = 60^\circ$ από α) i), τότε

$$\angle B\Delta\Gamma + \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B\Delta\Gamma = 90^\circ .$$

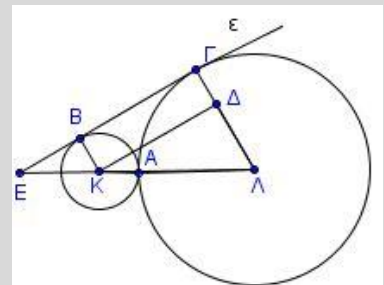
37088. Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο A .

Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην ϵ που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι $\angle K\Lambda = 30^\circ$.

γ) Να αποδείξετε ότι $E\Lambda = 6\rho$.



Λύση

α) Επειδή τα $KB, \Gamma\Delta$ είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής με την ϵ , ισχύει ότι $KB \perp \epsilon$ και $\Gamma\Delta \perp \epsilon$. Επειδή $K\Delta \parallel \epsilon$ θα είναι και $KB \perp K\Delta$, $\Gamma\Delta \perp K\Delta$. Το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ έχει 3 ορθές και είναι ορθογώνιο.

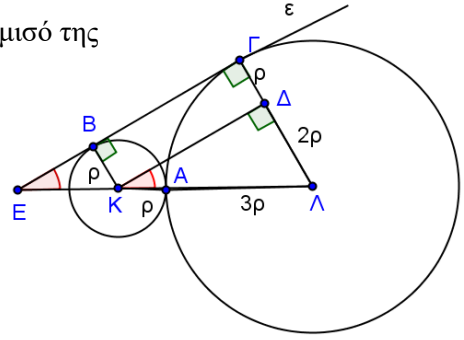
β) Είναι $\Delta\Lambda = \Lambda\Gamma - \Gamma\Delta = 3\rho - \rho = 2\rho$ και

$$ΚΛ = ΚΑ + ΑΛ = \rho + 3\rho = 4\rho.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΚΔΛ$ η κάθετη πλευρά $\Delta\Lambda$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας $ΚΛ$, άρα η απέναντι γωνία, δηλαδή η $\Delta\hat{Κ}\Lambda$ είναι ίση με 30° .

γ) Είναι $\hat{E} = \Delta\hat{Κ}\Lambda = 30^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΚΔ$ και $ΕΓ$ που τέμνονται από την $ΕΛ$, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΓΛ$ ισχύει ότι:

$$\Gamma\Lambda = \frac{ΕΛ}{2} \Leftrightarrow ΕΛ = 2\Gamma\Lambda = 2 \cdot 3\rho = 6\rho$$



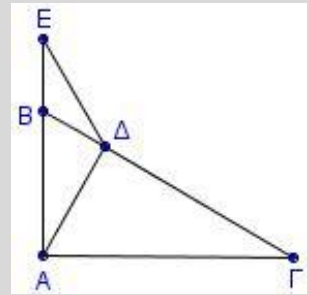
37100. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με τη γωνία A ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του $ΑΔ$ και σημείο E στην προέκταση της $ΑΒ$ τέτοιο, ώστε $BE = B\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$

ii. $AE = \Gamma\Delta$



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 3\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ \text{ και } B = 60^\circ.$$

$$\text{Είναι } \angle EBD = 180^\circ - B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου $B\Delta E$ έχουμε:

$$\angle EBD + \angle E + \angle EDB = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\angle E = 180^\circ \Leftrightarrow \angle E = 30^\circ = \angle EDB$$

β)i. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου

$$\text{τριγώνου } AB\Delta \text{ έχουμε: } \angle B\Delta A + B = 90^\circ \Leftrightarrow \angle B\Delta A + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow$$

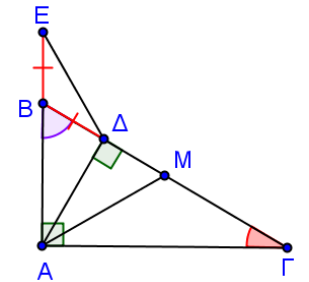
$$\Leftrightarrow \angle B\Delta A = 30^\circ, \text{ οπότε στο}$$

$$\text{τρίγωνο αυτό ισχύει ότι: } B\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow BE = \frac{AB}{2}.$$

ii. Έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Επειδή η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$, ισχύει ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB$. Το ισοσκελές τρίγωνο AMB

έχει $B = 60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο και $AB = BM = M\Gamma$. Στο ισόπλευρο τρίγωνο AMB το AD είναι ύψος άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή $B\Delta = \Delta M$. Είναι $AE = AB + BE = M\Gamma + B\Delta = M\Gamma + \Delta M = \Gamma\Delta$.



37101. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με τις γωνίες B και Γ οξείες και Δ, M και E τα μέσα των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

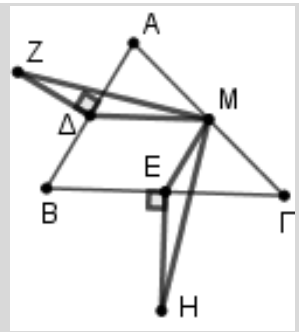
Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Z και H αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ και $EH = \frac{B\Gamma}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH είναι ίσα.

β) Αν τα σημεία Z, Δ, E είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.



Λύση

α) i. Επειδή τα σημεία Δ και M είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, ισχύει ότι

$$\Delta M \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \Delta M \parallel BE \text{ και } \Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = BE.$$

Στο τετράπλευρο $B\Delta ME$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH έχουν:

1) $Z\Delta = \frac{AB}{2} = B\Delta = ME$ γιατί τα $B\Delta$ και ME είναι απέναντι πλευρές

παραλληλογράμμου

2) $M\Delta = BE = \frac{B\Gamma}{2} = EH$ γιατί τα $M\Delta$, BE είναι απέναντι πλευρές

παραλληλογράμμου και

3) $\angle MEH = \angle Z\Delta M$ γιατί $\angle MEH = 90^\circ + \angle MEG$, $\angle Z\Delta M = 90^\circ + \angle \Delta M$,

$\angle MEG = B$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ME, AB που τέμνονται από την BE και

$\angle \Delta M = B$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $M\Delta, B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Delta$.

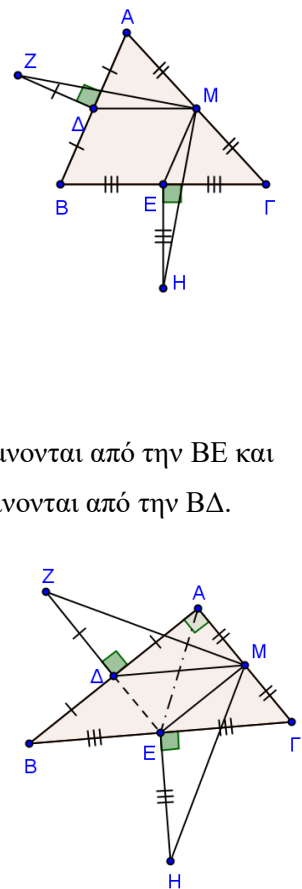
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή η $Z\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AB , αν τα Z, Δ, E είναι συνευθειακά, τότε το E ανήκει στη μεσοκάθετο του AB οπότε ισαπέχει από τα A και B . Δηλαδή

$$EA = EB. \text{ Όμως } EB = \frac{B\Gamma}{2}, \text{ άρα}$$

$$\text{και } AE = \frac{B\Gamma}{2}. \text{ Στο τρίγωνο } AB\Gamma \text{ μια διάμεσός του, η } AE \text{ είναι ίση με το μισό}$$

της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$.



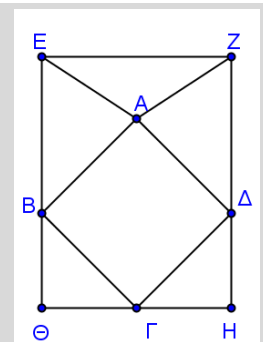
37126. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο $EZH\Theta$ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο A της μεσοκαθέτου του τμήματος EZ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους $E\Theta$, ΘH , HZ στα σημεία B, Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης A . Για τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ABE) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ. η γωνία $\Theta B\Gamma$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

ii. Η διαδρομή $AB\Gamma\Delta A$ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.

β) Αν η AZ είναι διπλάσια από την απόσταση του A από τον τοίχο EZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AEZ .



Λύση

α) i. Τα τρίγωνα EAB και ZAD είναι ίσα γιατί έχουν:

1) $EA = AZ$ (A σημείο της μεσοκαθέτου του EZ)

2) $\hat{E}B = \hat{Z}D$ γιατί $E = Z = 90^\circ$ και $\angle AEZ = \angle AZE$ αφού το $\triangle AZE$ τρίγωνο είναι ισοσκελές.

3) $\hat{E}AB = \hat{Z}AD$ γιατί τα τρίγωνα AEB και AZD έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες τους γωνίες θα είναι ίσες.

Λόγω του ΓΠΓ τα τρίγωνα EAB και ZAD είναι ίσα.

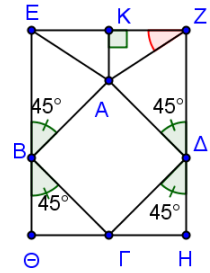
ii. Επειδή οι γωνίες πρόσκρουσης και ανάκλασης είναι 45° , ισχύει ότι

$$\angle ABE = \angle B\Gamma\Theta = \angle B\Gamma\Theta = \angle \Delta\Gamma H = \angle H\Delta\Gamma = \angle A\Delta Z = 45^\circ, \text{ άρα}$$

$\angle AB\Gamma = \angle B\Gamma\Delta = \angle \Gamma\Delta A = 90^\circ$, οπότε το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο.

Επειδή τα τρίγωνα EAB και ZAD είναι ίσα, είναι και $AB = AD$.

Το ορθογώνιο ABΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, επομένως είναι τετράγωνο.



β) Έστω AK η απόσταση του A από τον τοίχο EZ. Είναι $AZ = 2AK \Leftrightarrow AK = \frac{AZ}{2}$,

δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο AKZ μια κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, άρα η απέναντι γωνία από την πλευρά αυτή είναι 30° , δηλαδή $\angle AZK = 30^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές με βάση την EZ, ισχύει ότι: $\angle AEZ = \angle AZK = 30^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AEZ, έχουμε:

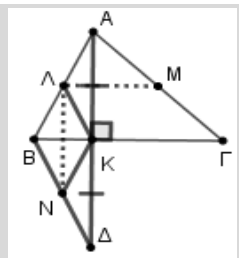
$$\angle EAZ + \angle AEZ + \angle AZK = 180^\circ \Leftrightarrow \angle EAZ + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle EAZ = 120^\circ$$

37132. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Στην προέκταση του ύψους του AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Έστω Λ, Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων AB, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABΔ είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο BΛΚΝ είναι ρόμβος.

γ) $LM \perp LN$.



Λύση

α) Αφού το AK είναι ύψος στο τρίγωνο ABΓ, άρα το AΔ είναι κάθετο στο ΒΓ. Αφού είναι $AK = K\Delta$, άρα το K είναι μέσο του AΔ. Οπότε, στο τρίγωνο ABΔ το BK είναι ύψος και διάμεσος στην πλευρά AΔ. Άρα το τρίγωνο ABΔ είναι ισοσκελές με βάση την AΔ και ίσες πλευρές τις BA και BΔ.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο AKB το ΚΛ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα BA, άρα είναι $KL = BA/2$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BKΔ το ΚΝ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα BΔ, άρα είναι $KN = B\Delta/2$ (2)

Επειδή τα Λ, Ν είναι μέσα των BA, BΔ αντίστοιχα, θα είναι $BL = BA/2$ (3) και $BN = B\Delta/2$ (4). Επειδή το τρίγωνο ABΔ είναι ισοσκελές με $BA = B\Delta$ (από α) ερώτημα) τότε από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) θα είναι $KL = LB = BN = NK$. Οπότε, το τετράπλευρο BΛΚΝ είναι ρόμβος γιατί έχει όλες του τις πλευρές ίσες.

γ) Οι LN και BK είναι διαγώνιοι του ρόμβου BNΚΛ, άρα είναι κάθετες, δηλαδή $LN \perp BK$, οπότε θα είναι $LN \perp B\Gamma$. Αφού το LM ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, τότε είναι $LM \parallel B\Gamma$. Οπότε, αφού LM, BΓ παράλληλες μεταξύ τους και η LN είναι κάθετη στην μία από αυτές, την BΓ, τότε η LN θα είναι κάθετη και στην άλλη, δηλαδή $LN \perp LM$.

37133. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο μέσο M της $B\Gamma$.

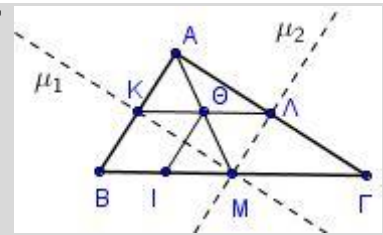
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

ii. Το τετράπλευρο $A\Lambda M K$ είναι ορθογώνιο.

iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των AM και $K\Lambda$.

β) Αν I σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) i. Επειδή το σημείο M ανήκει στις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, ισχύει από τα σημεία A, B, Γ , δηλαδή

$$MA = MB = MG = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος του AM ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$.

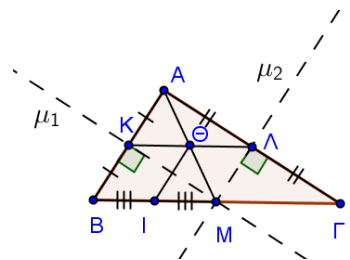
ii. Το τετράπλευρο $A\Lambda M K$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

iii. Επειδή το $A\Lambda M K$ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιές του $AM, K\Lambda$ είναι ίσες και διχοτομούνται. Είναι

$$K\Lambda = AM \Leftrightarrow 2\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}.$$

β) Τα σημεία K, Θ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABM , άρα $K\Theta \parallel BM$ και $K\Theta = \frac{BM}{2} = \frac{B\Gamma}{4} = BI$.

Το τετράπλευρο $K\Theta IB$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

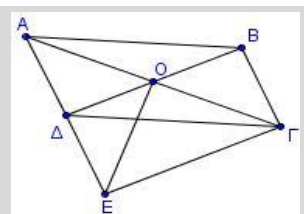


37136. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ στο κέντρο του O , αυτή να τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ σε σημείο E τέτοιο, ώστε $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\epsilon\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο $B\Gamma\epsilon\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται, άρα το O είναι κοινό μέσο των $A\Gamma, B\Delta$.

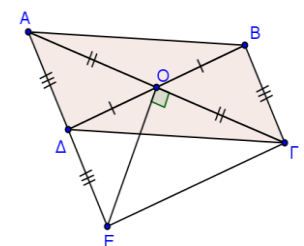
Στο τρίγωνο $A\epsilon\Gamma$ η EO είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Είναι $B\Gamma = A\Delta = \Delta E$ και $B\Gamma \parallel \Delta E$, αφού η $B\Gamma$ είναι παράλληλη στην $A\Delta$, άρα στο τετράπλευρο $B\Gamma\epsilon\Delta$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AO\epsilon$ η OD είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

$$\text{υποτείνουσα, άρα } OD = \frac{AE}{2} = \frac{2A\Delta}{2} = A\Delta.$$

Όμως $OD = OB$ και $A\Delta = B\Gamma$, άρα $OB = B\Gamma$ και το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές.

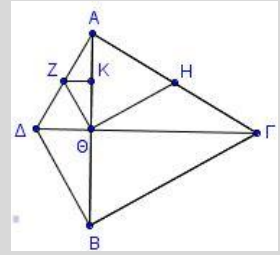


37138. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με βάση την AB κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta B$, εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Z και H των πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του AB .

β) Αν η $\Delta\Gamma$ τέμνει την AB στο Θ , να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\Theta H$ είναι ορθή.

γ) Αν η ZK είναι κάθετη στην AB από το σημείο Z , να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$.

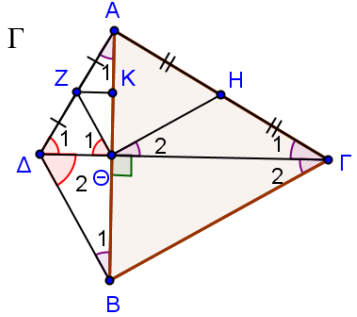


Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\Gamma A = \Gamma B$, δηλαδή το Γ ισαπέχει από τα A και B , οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .

Επειδή το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές με $\Delta = 120^\circ$, έχει βάση την AB και $\Delta A = \Delta B$, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τα A και B , οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του AB .

Επειδή τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στη μεσοκάθετο του AB , η $\Gamma\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.



β) Επειδή η $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AB , η $\Gamma\Delta$ θα είναι και διχοτόμος

των γωνιών Δ και Γ , δηλαδή $\Delta_1 = \Delta_2 = 60^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Theta\Delta$ η ΘZ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$\Theta Z = \frac{A\Delta}{2} = Z\Delta \text{ και αφού } \Delta_1 = 60^\circ, \text{ το τρίγωνο } \Delta\Theta Z \text{ είναι ισόπλευρο. Άρα } \Theta_1 = 60^\circ. \text{ Από το άθροισμα}$$

γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $A\Theta\Gamma$, έχουμε: $\Gamma_1 + \Theta A\Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma_1 + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma_1 = 30^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Theta\Gamma$ η ΘH είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$\Theta H = \frac{A\Gamma}{2} = H\Gamma, \text{ άρα το τρίγωνο } \Theta H\Gamma \text{ είναι ισοσκελές με βάση την } \Theta\Gamma \text{ και } \Theta_2 = \Gamma_1 = 30^\circ.$$

$$\text{Είναι } \Theta_1 + Z\Theta H + \Theta_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + Z\Theta H + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Z\Theta H = 90^\circ$$

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Theta\Delta$ έχουμε:

$$\Delta_1 + A_1 = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + A_1 = 90^\circ \Leftrightarrow A_1 = 30^\circ, \text{ τότε για την απέναντι πλευρά στο τρίγωνο } AZK \text{ ισχύει ότι:}$$

$$ZK = \frac{AZ}{2} = \frac{\frac{A\Delta}{2}}{2} = \frac{A\Delta}{4}.$$

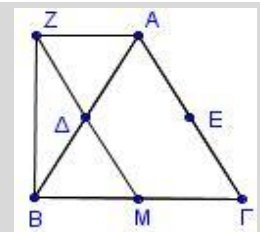
37140. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ, E και M των $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στη προέκταση του $M\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο $ZAGM$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα τμήματα ZE και $A\Delta$ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

δ) Η BZ είναι κάθετη στη ZA .



Λύση

α) Έστω a η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου. Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ έχουν:

1) $\Delta Z = \Delta M$

2) $A\Delta = \Delta B$ γιατί το Δ είναι μέσο του AB και

3) $\angle A\Delta Z = \angle B\Delta M$ ως κατακορυφήν.

Λόγω του κριτηρίου ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Τα Δ, Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα η ΔΜ είναι παράλληλη στην ΑΓ και

$\Delta M = \frac{AG}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Όμως $ZM = 2\Delta M$, οπότε τα τμήματα ΖΜ και ΑΓ είναι ίσα και παράλληλα και το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

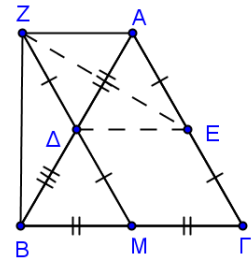
γ) Τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$ και

$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Επειδή το ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $ZA = MG = \frac{\alpha}{2}$.

Επειδή $Z\Delta = \Delta E = AE = AZ = \frac{\alpha}{2}$, το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ρόμβος. Τα ΖΕ, ΑΔ είναι διαγώνιες του ρόμβου, οπότε διχοτομούνται κάθετα.

δ) Είναι $B\Delta = \Delta M = \Delta Z = \frac{\alpha}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο ΒΜΖ η διάμεσος του ΒΔ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί. Άρα το τρίγωνο ΒΜΖ είναι ορθογώνιο με $ZBM = 90^\circ$, δηλαδή $ZB \perp BM$.



37142. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$. Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με $A\Delta = AE$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ, Η και Μ των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

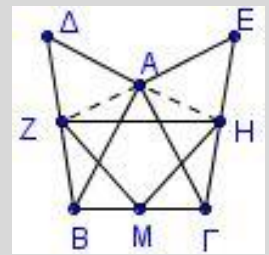
- i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.
- ii. Το τρίγωνο ΖΑΗ είναι ισοσκελές.
- iii. Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ.

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έγραψε τα εξής:

- « 1. $A\Delta = AE$ από την υπόθεση
- 2. $AB = AG$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
- 3. $\hat{\Delta AB} = \hat{EAG}$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίσα».

Ο καθηγητής είπε ότι η λύση περιέχει λάθος, μπορείς να το εντοπίσεις;



Λύση

α)i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:

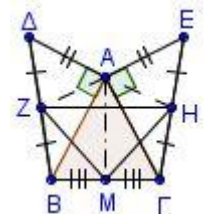
1) $A\Delta = AE$ και 2) $AB = AG$, δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, άρα είναι ίσα.

ii. Η ΑΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

ΔAB , άρα $AZ = \frac{B\Delta}{2}$. Η ΑΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του

ορθογωνίου τριγώνου ΕΑΓ, άρα $AH = \frac{E\Gamma}{2}$. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα

έχουν και $\Delta B = E\Gamma$, άρα είναι και $AZ = AH$, οπότε το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.



iii. Τα τρίγωνα ΜΒΖ και ΓΗΜ έχουν:

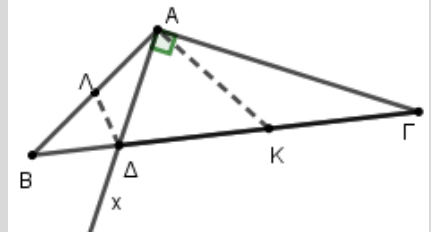
1) $MB = MG$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ

2) $BZ = \frac{B\Delta}{2} = \frac{E\Gamma}{2} = GH$ και

3) $ZBM = M\Gamma H \Leftrightarrow ZBA + B = A\Gamma H + \hat{\Gamma}$ ($ZBA = A\hat{\Gamma}H$ γιατί τα τρίγωνα ΔDB και $\Delta E\Gamma$ είναι ίσα και $B = \hat{\Gamma}$ από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$).
 Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα MZB και ΓHM είναι ίσα, οπότε έχουν και $MZ = MH$. Επειδή $AZ = AH$ και $MZ = MH$, τα σημεία M , A ισαπέχουν από τα Z και H , άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ZH , δηλαδή η AM είναι μεσοκάθετος του ZH .

β) Οι γωνίες ΔAB και $\Delta E\Gamma$ δεν είναι κατακορυφήν γιατί οι πλευρές τους δεν είναι αντικείμενες ημιευθείες.

37156. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $BA\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$.
 Φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη στην $A\Gamma$ στο A , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Έστω Λ το μέσο του AB και K το μέσο του $\Delta\Gamma$.
 Να αποδείξετε ότι:



- α) Το τρίγωνο ΔDB είναι ισοσκελές
- β) $\Delta\Gamma = 2 \cdot B\Delta$
- γ) $\Lambda\Delta \parallel AK$
- δ) $AK = 2 \cdot \Lambda\Delta$

Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ισχύει ότι: $B = \Gamma$.

Είναι $A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 30^\circ = \Gamma$.

Είναι $A = 120^\circ \Leftrightarrow B\Delta\Delta + 90^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow B\Delta\Delta = 30^\circ$.

Επειδή $B\Delta\Delta = B$, το τρίγωνο ΔDB είναι ισοσκελές.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Delta\Gamma$ είναι $\Gamma = 30^\circ$, άρα $\Delta\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2\Delta\Delta$. Όμως $\Delta\Delta = \Delta B$ αφού το τρίγωνο ΔDB είναι ισοσκελές, άρα $\Delta\Gamma = 2\Delta B$

γ) Η $\Delta\Delta$ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο $\Delta\Delta B$, οπότε είναι και ύψος, δηλαδή $\Delta\Delta \perp AB$ (1). Η AK είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Delta\Gamma$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του, άρα

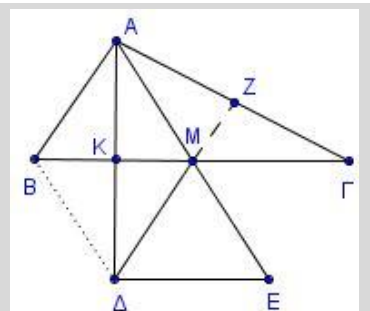
$AK = \Delta K = K\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2}$. Είναι $\Delta\Delta\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\Delta\Gamma = 60^\circ$ και επειδή $AK = \Delta K$, το τρίγωνο $\Delta\Delta K$ είναι

ισόπλευρο, άρα $\Delta\Delta K = 60^\circ$. Είναι $B\Delta K = B\Delta\Delta + \Delta\Delta K = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, άρα $AK \perp AB$ (2).

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $\Delta\Delta \parallel AK$

δ) Στο τρίγωνο $B\Delta K$ το Λ είναι μέσο της AB και η $\Delta\Delta$ είναι παράλληλη στην AK , άρα το Δ είναι μέσο της BK και ισχύει ότι $\Delta\Delta = \frac{AK}{2} \Leftrightarrow AK = 2\Delta\Delta$.

37157. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια, ώστε $AM = AB$.
 Φέρουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδείξετε ότι:



α) $\Delta E \perp \Delta\Delta$ και $\Delta E = 2KM$.

β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος.

δ) Η προέκταση της ΔM τέμνει την $A\Gamma$ στο μέσον του Z .

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα Κ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $KM \parallel \Delta E$ και

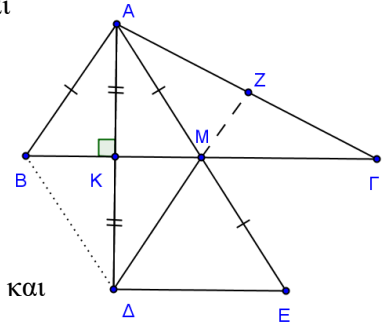
$$KM = \frac{\Delta E}{2} \Leftrightarrow \Delta E = 2KM. \text{ Επειδή } KM \perp \Delta\Delta \text{ και } KM \parallel \Delta E, \text{ είναι και } \Delta E \perp \Delta\Delta.$$

β) Στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ οι ΑΕ, ΒΓ είναι διαγωνίες του που διχοτομούνται στο Μ, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές και η ΑΚ είναι ύψος του, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου. Στο τετράπλευρο ΑΒΔΜ οι ΑΔ, ΒΜ είναι διαγωνίες του που διχοτομούνται κάθετα, άρα το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

δ) Επειδή ΑΒΔΜ ρόμβος, είναι $\Delta M \parallel AB$ άρα και $MZ \parallel AB$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Μ είναι μέσο της ΒΓ και η ΜΖ είναι παράλληλη στην ΑΒ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.

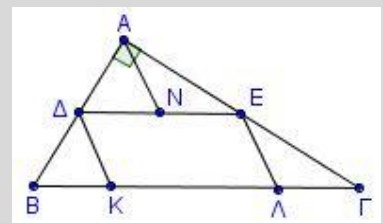


37158. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και Δ, Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$.

β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) $\Delta E = 2\Delta K$



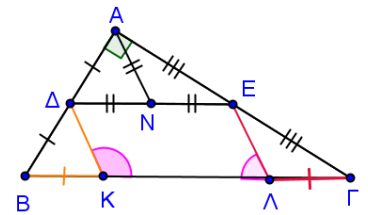
Λύση

α) Επειδή $\Delta K = KB$ το τρίγωνο ΔΚΒ είναι ισοσκελές οπότε $B\Delta K = B$.

Η γωνία ΔΚΛ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΒΚ, άρα $\Delta K\Lambda = B\Delta K + B = 2B$.

Επειδή $E\Lambda = \Lambda\Gamma$ το τρίγωνο ΕΛΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\Lambda E\Gamma = \Gamma$. Η γωνία ΕΛΚ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΛΓ, άρα

$$E\Lambda K = \Lambda E\Gamma + \Gamma = 2\Gamma$$



β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $B + \Gamma = 90^\circ$.

Είναι $\Delta K\Lambda + E\Lambda K = 2B + 2\Gamma = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ΔΚ, ΕΛ που τέμνονται από την ΒΓ, οι ευθείες ΔΚ, ΕΛ είναι παράλληλες. Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

Στο τετράπλευρο ΔΕΛΚ οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

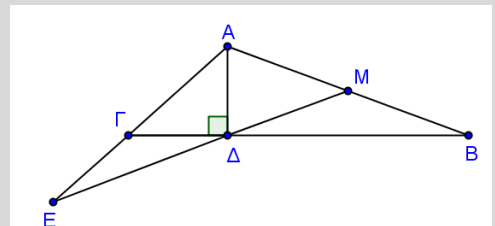
$$\gamma) \text{ Είναι } \Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{BK + K\Lambda + \Lambda\Gamma}{2} \Leftrightarrow \overset{K\Lambda = \Delta E}{\Leftrightarrow} 2\Delta E = \Delta K + \Delta E + E\Lambda \Leftrightarrow \overset{\Delta K = E\Lambda}{\Leftrightarrow} 2\Delta E - \Delta E = 2\Delta K \Leftrightarrow \Delta E = 2\Delta K.$$

37159. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ ($AB > AG$), ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{E}$

β) $\hat{\Gamma} = 2\hat{B} = \hat{A}\hat{M}\Delta$

γ) $\Gamma E < A\Gamma$



Λύση

α) Επειδή $\Gamma\Delta = \Gamma\epsilon$, το τρίγωνο $\Gamma\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές, οπότε και $\epsilon = \Gamma\Delta\epsilon$ (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ η ΔM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του άρα

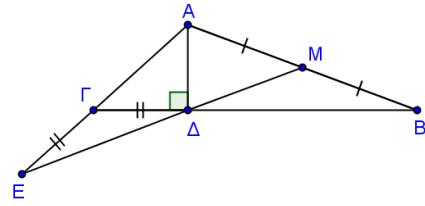
$$\Delta M = \frac{AB}{2} = MB, \text{ οπότε το τρίγωνο } \Delta MB \text{ είναι ισοσκελές}$$

και ισχύει $M\Delta B = B$ (2).

Επειδή $M\Delta B = \Gamma\Delta\epsilon$ ως κατακορυφήν, από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $B = \epsilon$.

β) Η γωνία Γ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Gamma\Delta\epsilon$, οπότε $\Gamma = \epsilon + \Gamma\Delta\epsilon = 2\epsilon = 2B$. Η γωνία $AM\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $M\Delta B$, άρα $AM\Delta = M\Delta B + B = 2B$.

γ) Η $A\Gamma$ είναι υποτείνουσα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του. Δηλαδή $A\Gamma > \Gamma\Delta$, όμως $\Gamma\Delta = \Gamma\epsilon$ άρα $A\Gamma > \Gamma\epsilon$.



3^ο Θέμα

12165. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την AB στο μέσο της E .

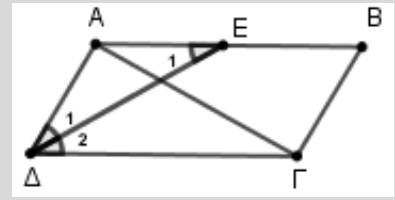
α) Να αποδείξετε ότι $AB = 2 \cdot A\Delta$.

β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο

E στην $\Gamma\Delta$ την τέμνει στο H , τότε να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta E}{HE} = 2$.

γ) Αν M είναι το μέσο της $\Gamma\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισόπλευρο.

δ) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ$.



Λύση

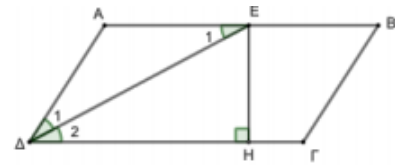
α) Επειδή η DE είναι διχοτόμος της Δ , είναι $\Delta_1 = \Delta_2$. Όμως $\Delta_2 = E_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την DE , άρα $\Delta_1 = E_1$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την DE .

Είναι $A\Delta = DE$ και E μέσο της AB άρα $A\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2A\Delta$.

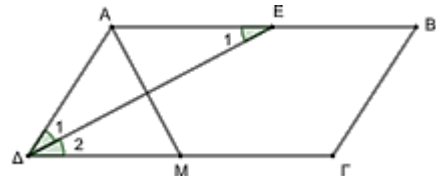
β) Οι γωνίες A και Δ του παραλληλογράμμου είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την AD , οπότε $A + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 60^\circ$, άρα

$\Delta_1 = \Delta_2 = 30^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο DEH είναι $\Delta_2 = 30^\circ$ άρα

$$EH = \frac{ED}{2} \Leftrightarrow \frac{DE}{HE} = 2.$$



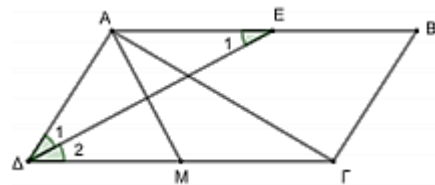
γ) Από το ερώτημα (α) έχουμε $AB = 2 \cdot A\Delta$ και $AB = \Delta\Gamma$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, οπότε $\Delta\Gamma = 2 \cdot A\Delta$ (1). Επειδή το M είναι μέσο του $\Delta\Gamma$, έχουμε $\Delta\Gamma = 2 \cdot \Delta M$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $A\Delta = \Delta M$. Άρα το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές και επειδή η γωνία Δ είναι 60° το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



δ) Επειδή το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισόπλευρο είναι

$$AM = \Delta M = \frac{\Delta\Gamma}{2}, \text{ οπότε στο τρίγωνο } \Delta A\Gamma \text{ η } AM \text{ είναι}$$

διάμεσος και ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $\Delta\Gamma$, οπότε $\hat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ$.



Βαρύκεντρο – Ορθόκεντρο**Θέμα 4ο**

1706. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π**, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η **Π** και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

Λύση

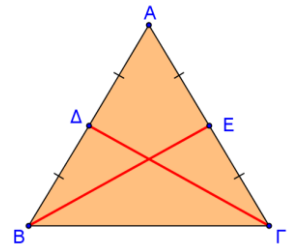
α) Συγκρίνω τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$.

1) $B\Delta = E\Gamma$ (μιά των ίσων πλευρών AB και AG του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

2) $B\Gamma$ κοινή πλευρά

3) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (προσκειμένες στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$)

Άρα (Π-Γ-Π) τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα και $BE = \Gamma\Delta$ ($\mu_\beta = \mu_\gamma$)



β) Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔZB και $EZ\Gamma$

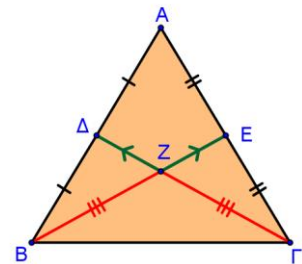
1) $\Delta Z = ZE$ ($\Delta Z = \frac{1}{3}BE = \frac{1}{3}\Gamma\Delta = ZE$)

2) $BZ = \Gamma Z$ ($BZ = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}\Gamma\Delta = \Gamma Z$)

3) $\hat{\Delta ZB} = \hat{EZ\Gamma}$ (κατά κορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα ΔZB και $EZ\Gamma$ είναι ίσα και $\Delta B = E\Gamma \Leftrightarrow 2\Delta B = 2E\Gamma \Leftrightarrow AB = AG$.

Επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



γ) Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$ αν και μόνο αν οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

1728. Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{B\hat{Z}\Gamma}$.

γ) Οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο AG του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Λύση

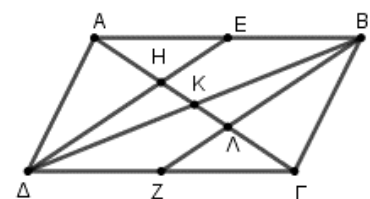
α) Είναι $\Delta Z = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = EB$ και $\Delta Z \parallel EB$ αφού $\Delta\Gamma \parallel AB$, οπότε το τετράπλευρο ΔEBZ έχει δύο

απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι $\hat{\Delta EB} = \hat{BZ\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 180^\circ - \hat{A\hat{E}\Delta} = 180^\circ - \hat{B\hat{Z}\Gamma} \Leftrightarrow \hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{B\hat{Z}\Gamma}$.

2ος τρόπος: $\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{B\hat{Z}\Gamma}$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες



γ) Έστω K το κέντρο του παραλληλογράμμου, H το σημείο τομής των ΔE , AG και Λ το σημείο τομής των

BZ, ΑΓ. Στο τρίγωνο ΑΔΒ οι ΑΚ, ΔΕ είναι διάμεσοι, οπότε το σημείο τομής τους Η είναι βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα $AH = \frac{2}{3} AK = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AG = \frac{1}{3} AG$ (1). Στο τρίγωνο ΒΓΔ οι ΒΖ, ΓΚ είναι διάμεσοι του, οπότε

το σημείο τομής τους Λ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα $GL = \frac{2}{3} GK = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} AG = \frac{1}{3} AG$ (2).

Είναι $HL = AG - AH - GL = \frac{1}{3} AG$ (3).

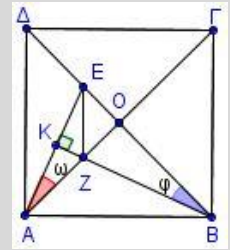
Από τις (1), (2), (3) είναι $AH = HL = LG$.

1748. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες.

β) $BZ = AE$ και $GZ = BE$.

γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ.



Λύση

α) Οι γωνίες ω και φ είναι ίσες γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες ($AE \perp BK$ και $AG \perp BD$ γιατί οι διαγώνιες του τετραγώνου είναι κάθετες)

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΕ και ΒΟΖ έχουν:

1) $AO = OB$ μισά των ίσων διαγωνίων του τετραγώνου και

2) $\hat{\omega} = \hat{\phi}$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $BZ = AE$ και $OZ = OE$

Είναι $GO = OB$ και $OZ = OE$, άρα και $GO + OZ = OB + OE \Leftrightarrow GZ = BE$.

γ) Στο τρίγωνο ΕΑΒ τα ΒΚ και ΑΟ είναι ύψη του, άρα το σημείο τομής τους Ζ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Άρα το ΕΖ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου, δηλαδή $EZ \perp AB$.

1754. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και το ύψος του ΑΔ.

Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο, ώστε $HA = HB$.

Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ.

Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στη ΒΕ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ.

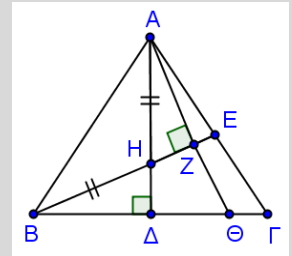
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα.

ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$

iii. Η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΕ έχουν:

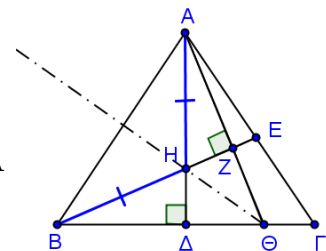
1) $HA = HB$ και

2) $BH \Delta = AHZ$ ως κατακορυφήν άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

ii. Επειδή $HA = HB$, το τρίγωνο ΗΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $HAB = HBA$

(1). Ακόμη επειδή τα τρίγωνα ΗΒΔ και ΗΑΖ είναι ίσα, ισχύει ότι

$HAB = HBA$ (2).



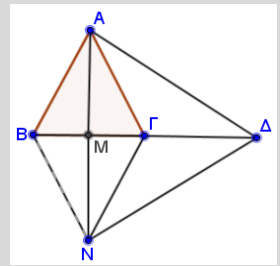
Από (1)+(2) $\Rightarrow \text{HAB} + \text{HAZ} = \text{HBA} + \text{HBD} \Leftrightarrow \text{BAZ} = \text{ABD}$, οπότε το τρίγωνο ΘAB είναι ισοσκελές και έχει $\Theta\text{A} = \Theta\text{B}$. Επειδή $\Theta\text{A} = \Theta\text{B}$ και $\text{ZA} = \text{DB}$ $\left(\overset{\Delta}{\text{HBD}} = \overset{\Delta}{\text{HAZ}} \right)$ είναι και $\Theta\text{E} = \Theta\Delta$.

iii. Επειδή $\Theta\text{A} = \Theta\text{B}$ και $\text{HA} = \text{HB}$, τα σημεία Θ , H ισαπέχουν από τα άκρα A, B του τμήματος AB , άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του AB . Δηλαδή η ΘH είναι μεσοκάθετος του AB .

β) Τα τμήματα AZ, BD είναι ύψη του τριγώνου AHB που τέμνονται στο Θ , άρα το σημείο αυτό είναι το ορθόκέντρο του τριγώνου AHB .

1760. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG ($\text{AB} = \text{AG}$) και AM το ύψος του στη πλευρά BG . Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $\text{MN} = \text{AM}$. Στη προέκταση του BG προς το μέρος του G θεωρούμε τμήμα $\text{GD} = \text{BG}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ABNG είναι ρόμβος.
- β) Το τρίγωνο ADN είναι ισοσκελές.
- γ) Το σημείο G είναι το βαρύκέντρο του τριγώνου ADN .



Λύση

α) Το AM είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ABG που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος. Οι AN, BG είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου ABNG και διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο ADN η DM είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

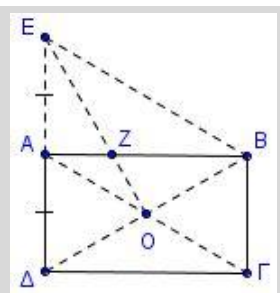
$$\gamma) \text{Είναι } \text{GM} = \frac{1}{2}\text{BG} = \frac{1}{2}\text{DG} \Leftrightarrow \text{DG} = 2\text{GM} = 2(\text{DM} - \text{DG}) \Leftrightarrow$$

$$\text{DG} = 2\text{DM} - 2\text{DG} \Leftrightarrow 3\text{DG} = 2\text{DM} \Leftrightarrow \text{DG} = \frac{2}{3}\text{DM}.$$

Το σημείο G βρίσκεται στη διάμεσο DM και απέχει από τη κορυφή Δ απόσταση ίση με τα $2/3$ της διαμέσου, άρα είναι το βαρύκέντρο του τριγώνου.

1764. Δίνεται ορθογώνιο ABGD με κέντρο O και $\text{AB} > \text{BG}$, $\text{AG} = 2\text{BG}$. Στην προέκταση της πλευράς ΔA (προς το A) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta\text{A} = \text{AE}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο AEBG είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Το τρίγωνο EBD είναι ισόπλευρο.
- γ) Αν η EO τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι $\Delta\text{Z} \perp \text{EB}$.



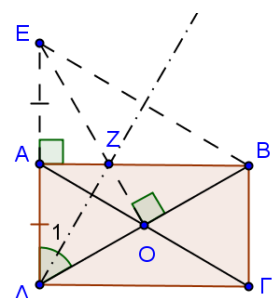
Λύση

α) Επειδή $\text{AE} = \text{AD} = \text{BG}$, $\text{AD} \parallel \text{BG}$ και τα σημεία $\text{A}, \Delta, \text{E}$ είναι συνευθειακά, τα τμήματα AE και BG είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο AEBG είναι παραλληλόγραμμο.

β) Η AB είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο EBD είναι ισοσκελές.

$$\text{Είναι } \text{AO} = \frac{\text{AG}}{2} = \frac{\text{BD}}{2} = \text{OD} \text{ και } \frac{\text{AG}}{2} = \text{BG} = \text{AD}, \text{ οπότε το τρίγωνο } \text{OAD} \text{ έχει}$$

τις πλευρές του ίσες και είναι ισόπλευρο. Τότε οι γωνίες του είναι ίσες με 60° , άρα $\Delta_1 = 60^\circ$. Στο ισοσκελές τρίγωνο EDB μια γωνία του είναι 60° , οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



γ) Τα EO , BA είναι ύψη στο ισόπλευρο τρίγωνο EAB , οπότε το σημείο τομής τους Z είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου και η ΔZ είναι το τρίτο ύψος του. Δηλαδή $\Delta Z \perp EB$.

1777. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, BE , ΓZ τα ύψη από τις κορυφές B, Γ αντίστοιχα και H το ορθόκεντρο του τριγώνου.

Επίσης δίνονται τα M, N, K, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $A\Gamma$, ΓH , BH αντίστοιχα.

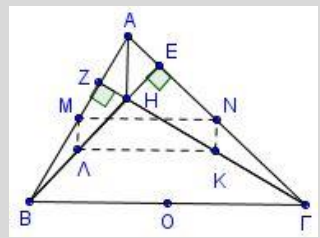
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN = \Lambda K$

ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$

iii. Το τετράπλευρο $MNKL$ είναι ορθογώνιο.

β) Αν O είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\angle MOK = 90^\circ$.



Λύση

α) i. Τα M, N είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα

$MN \parallel B\Gamma$ και $MN = \frac{B\Gamma}{2}$. Τα K, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $H\Gamma$, άρα $K\Lambda \parallel B\Gamma$ και

$$K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}. \text{Είναι } MN = K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}.$$

ii. Τα N, K είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AH\Gamma$, άρα $NK \parallel AH$ και $NK = \frac{AH}{2}$. Τα M, Λ είναι μέσα

δύο πλευρών στο τρίγωνο AHB , άρα $M\Lambda \parallel AH$ και $M\Lambda = \frac{AH}{2}$. Είναι $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$.

iii. Επειδή $MN \parallel K\Lambda$ και $MN = K\Lambda$, το τετράπλευρο $MNKL$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή το H είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι $AH \perp B\Gamma$. Επειδή $MN \parallel B\Gamma$ και $M\Lambda \parallel AH$, είναι $MN \perp M\Lambda$, άρα το παραλληλόγραμμο $MNKL$ έχει μία ορθή γωνία και είναι ορθογώνιο.

β) Τα K, O είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $H\Gamma$, άρα $KO \parallel BH$.

Τα M, O είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$, άρα $MO \parallel A\Gamma$. Όμως $BH \perp A\Gamma$ άρα και $KO \perp MO$, δηλαδή $\angle MOK = 90^\circ$.

1780. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$

(προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$.

Έστω M το μέσο της $A\Delta$ και N το σημείο τομής των ευθειών AE και $\Gamma\Delta$.

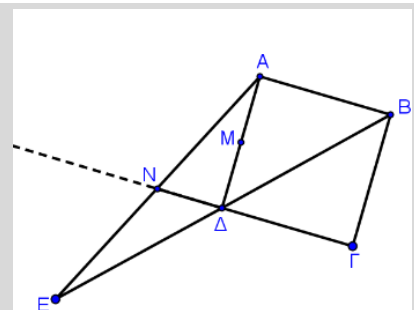
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $NM\Delta$.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN \perp A\Gamma$

ii. $\Gamma M \perp AN$



Λύση

α) Στο τρίγωνο EAB το Δ είναι μέσο της EB και η ΔN είναι παράλληλη στην AB (απέναντι πλευρές

τετραγώνου), άρα το N είναι μέσο της AE και ισχύει ότι $\Delta N = \frac{AB}{2}$. Όμως $AB = A\Delta$ και $\Delta M = \frac{A\Delta}{2}$, άρα

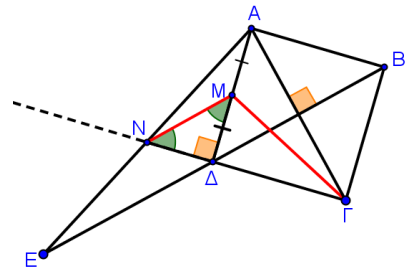
$$\Delta N = \Delta M$$

β) Το τρίγωνο ΝΜΔ είναι ορθογώνιο με $\Delta N = \Delta M$, δηλαδή είναι και

$$\text{ισοσκελές, άρα } \Delta NM = \Delta MN = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$

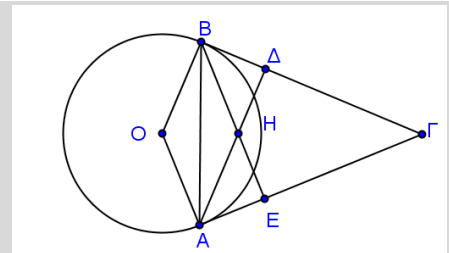
γ) i. Στο τρίγωνο ΑΔΕ τα Μ, Ν είναι μέσα δύο πλευρών, άρα η ΜΝ είναι παράλληλη στην ΔΕ. Η ΔΕ όμως είναι κάθετη στην ΑΓ αφού οι διαγώνιες ενός τετραγώνου είναι κάθετες, άρα και $MN \perp AG$.

ii. Στο τρίγωνο ΑΝΓ τα ΝΜ και ΑΔ είναι ύψη του, άρα το σημείο τομής τους, δηλαδή το Μ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Οπότε και το ΓΜ είναι ύψος του τριγώνου, δηλαδή $GM \perp AN$.



1823. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται σε σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

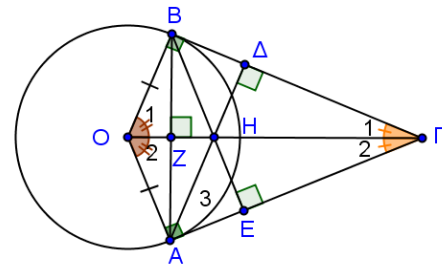
- α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές.
- β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος.
- γ) Τα σημεία Ο, Η, Γ είναι συνευθειακά.



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα, άρα $AG = BG$. Η διακεντρική ευθεία ΓΟ διχοτομεί τη γωνία ΒΓΑ των εφαπτομένων καθώς και τη γωνία ΒΟΑ των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΑ η ΓΖ είναι διχοτόμος, οπότε είναι ύψος και διάμεσος δηλαδή είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. Το σημείο Η είναι το σημείο τομής των υψών ΑΔ και ΒΕ (ορθόκεντρο), άρα ανήκει στη ΓΖ. Επειδή το σημείο Η ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή $HA = HB$, άρα το τρίγωνο ΗΒΑ είναι ισοσκελές.

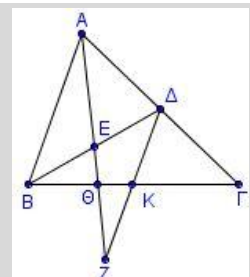


β) Επειδή ΟΑ, ΟΒ ακτίνες, ισχύει ότι $OA \perp AG$ και $OB \perp BG$. Όμως $BE \perp AG$ και $AD \perp BG$, άρα $OA \parallel BE$ και $OB \parallel AD$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $OA = OB = R$, το παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

γ) Τα σημεία Ο, Η, Γ ανήκουν στη διακεντρική ευθεία ΟΓ. Επομένως τα σημεία Ο, Η, Γ είναι συνευθειακά.

1827. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $EZ = AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της ΑΖ με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ.

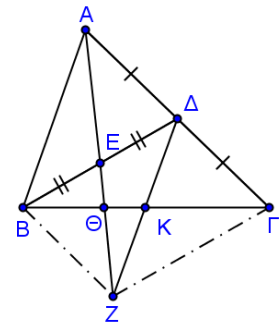


Λύση

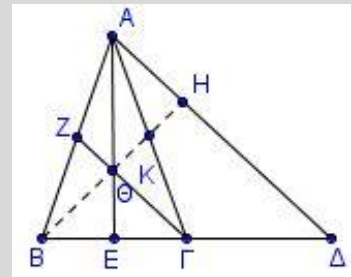
α) Οι ΑΖ, ΒΔ είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΒΖΔ και διχοτομούνται, άρα είναι παραλληλόγραμμο.

β) Οι BZ, AΔ είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα $BZ = AΔ$ και $BZ \parallel AΔ$. Όμως $AΔ = ΔΓ$, οπότε $BZ = ΔΓ$ και $BZ \parallel ΔΓ$, άρα το BΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

γ) Επειδή το BΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του διχοτομούνται. Άρα το Κ είναι μέσο του ΔΖ. Στο τρίγωνο BΔΖ τα ΕΖ, ΒΚ είναι διάμεσοι, άρα το Θ που είναι το σημείο τομής τους είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.



1878. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AΓ$. Προεκτείνουμε το BΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $ΓΔ = BΓ$. Φέρουμε τις διαμέσους AΕ και ΓΖ του τριγώνου ABΓ που τέμνονται στο Θ. Το BΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το AΓ στο Κ και το AΔ στο Η. Να αποδείξετε ότι:
 α) Το ZΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
 β) $AH = ΘΓ$
 γ) $AH = 2ΖΘ$



Λύση

α) Στο τρίγωνο ABΓ τα Ζ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών, άρα

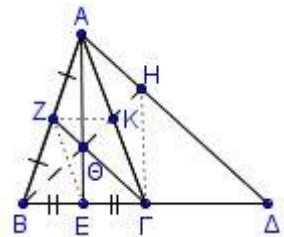
$$ZE \parallel AΓ \Leftrightarrow ZE \parallel ΚΓ \text{ και } ZE = \frac{AΓ}{2} \quad (1).$$

Επειδή AΕ, ΓΖ διάμεσοι, το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου, οπότε

$$ΘΖ = \frac{1}{3} ΓΖ, \text{ δηλαδή } ΓΘ = 2ΘΖ. \text{ όμως } ΓΘ = AH, \text{ άρα } AH = 2ΖΘ$$

β) Στο τρίγωνο AΒΔ τα Ζ, Γ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα

$ZΓ \parallel AΔ \Leftrightarrow ΘΓ \parallel AH$ (3). Στο τρίγωνο BΗΔ το Γ είναι μέσο του ΒΔ και $ΓΘ \parallel ΗΔ$, άρα το Θ είναι μέσο του BΗ. Στο τρίγωνο BΗΓ τα Θ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $ΘΕ \parallel ΗΓ \Leftrightarrow AΘ \parallel ΗΓ$ (4). Από τις (3), (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο AΘΓΗ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Άρα $AH = ΘΓ$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.



γ) **1ος τρόπος:** Στο τρίγωνο BAH τα Ζ, Θ είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $ZΘ = \frac{AH}{2} \Leftrightarrow AH = 2ΖΘ$

2ος τρόπος: Επειδή το Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ABΓ, ισχύει ότι $ΓΘ = \frac{2}{3} ΓΖ$ και $ΘΖ = \frac{1}{3} ΓΖ$,

δηλαδή $ΓΘ = 2ΘΖ$. όμως $ΓΘ = AH$, άρα $AH = 2ΖΘ$

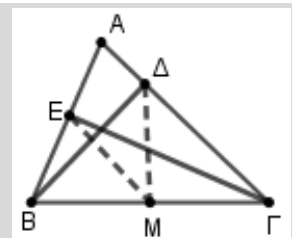
37085. Στο διπλανό σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ, τα ύψη του BΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η και το μέσο Μ της πλευράς BΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $MΔ = ME$

ii. Η ευθεία AH τέμνει κάθετα την BΓ και ότι $\hat{A}HΔ = \hat{Γ}$, όπου Γ η γωνία του τριγώνου ABΓ.

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH.

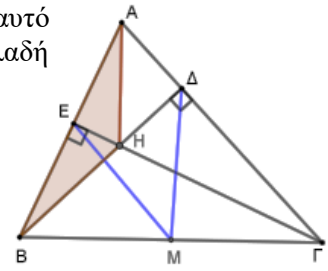


Λύση

α) i. Τα MΔ, ME είναι διάμεσοι στα ορθογώνια τρίγωνα BEΓ και BΔΓ που αντιστοιχούν στην

υποτείνουσα τους BΓ, οπότε: $MΔ = \frac{BΓ}{2}$ και $ME = \frac{BΓ}{2}$, άρα $MΔ = ME$.

ii. Επειδή τα ύψη ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Η, το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε και το ΑΗ είναι ύψος του, δηλαδή $AH \perp BG$. Επειδή $AH \perp BG$ και $HA \perp AG$ οι οξείες γωνίες ΑΗΔ, Γ έχουν πλευρές κάθετες οπότε είναι ίσες.

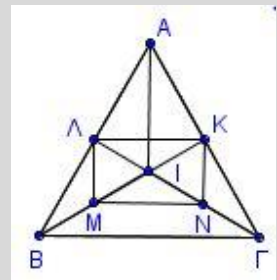


β) Στο τρίγωνο ABH το ύψος που αντιστοιχεί στη πλευρά AB είναι το HE και το ύψος που αντιστοιχεί στη πλευρά BH είναι το AD. Επειδή οι φορείς των EH, AD τέμνονται στο Γ, το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH.

37087. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι.

Αν τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των ΒΙ και ΓΙ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.
- β) Τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα.
- γ) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ.
- δ) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Λύση

α) Τα ΒΚ, ΓΛ είναι ύψη του ισόπλευρου τριγώνου, οπότε είναι και διχοτόμοι και

διάμεσοί του. Άρα $B_1 = \frac{B}{2} = 30^\circ$ και $\Gamma_1 = \frac{\Gamma}{2} = 30^\circ$,

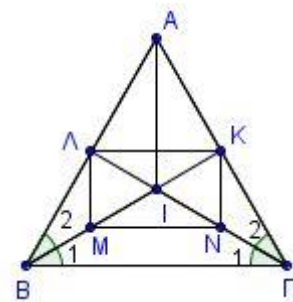
οπότε $B_1 = \Gamma_1$ και το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ έχουν:

1) $BI = \Gamma I$ αφού το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

2) $B_2 = \Gamma_2 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

Άρα τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα.



γ) Στο σημείο Ι τέμνονται τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε είναι ορθόκεντρο του τριγώνου και το ΑΙ είναι επίσης ύψος του τριγώνου. Επειδή όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, το ύψος ΑΙ είναι και διάμεσος, άρα το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ.

δ) Επειδή ΒΚ, ΓΛ διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ, το Ι είναι βαρύκεντρο του τριγώνου. Άρα $IK = \frac{1}{3}BK$,

$IL = \frac{1}{3}GL$, $IN = \frac{1}{2}GI = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}GL = \frac{1}{3}GL$ και $MI = \frac{1}{2}BI = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BK = \frac{1}{3}BK$. Επειδή $LI = MI = NI = KI$ οι

διαγώνιες του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή όμως τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα, τα τμήματα ΛΙ και ΚΙ είναι ίσα, οπότε και τα τμήματα ΝΛ και ΜΚ είναι ίσα.

Στο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ οι διαγώνιές του ΜΚ και ΝΛ είναι ίσες, οπότε είναι ορθογώνιο.

37104. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$

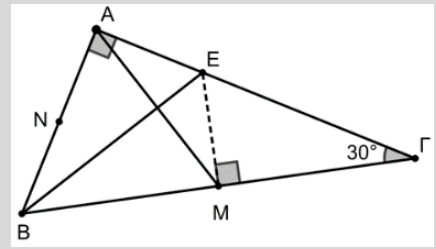
($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την AG στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

ii) $AE = \frac{GE}{2}$.

iii) η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM .



Λύση

α) i. Στο τρίγωνο BEG η EM είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι ισοσκελές και έχει $\hat{MBE} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$\hat{AB\Gamma} + \hat{\Gamma} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AB\Gamma} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{AB\Gamma} = 60^\circ$. Όμως $\hat{MBE} = 30^\circ$, οπότε $\hat{ABE} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, δηλαδή $\hat{MBE} = \hat{ABE}$, άρα η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE είναι $\hat{ABE} = 30^\circ$, άρα $AE = \frac{1}{2}BE$. Όμως το τρίγωνο BEG είναι

ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, άρα $BE = EG$, οπότε $AE = \frac{1}{2}GE$.

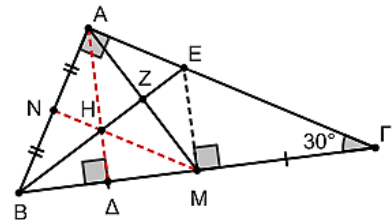
iii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, άρα $AB = \frac{1}{2}B\Gamma = BM$, οπότε το τρίγωνο ABM είναι

ισοσκελές με βάση την AM . Επειδή η BE είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ABM είναι ύψος και διάμεσός του, άρα η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM .

β) Στο τρίγωνο ABM τα AD , BZ είναι ύψη του που τέμνονται στο H , άρα το H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε το BH είναι ύψος του. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος στην

υποτείνουσά του, άρα $AM = \frac{1}{2}B\Gamma = MB$, επομένως το τρίγωνο

AMB είναι ισοσκελές με βάση την AB . Επειδή το BH είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου AMB , είναι και διάμεσός του, άρα η BH διέρχεται από το N , δηλαδή τα σημεία M , H και N είναι συνευθειακά.

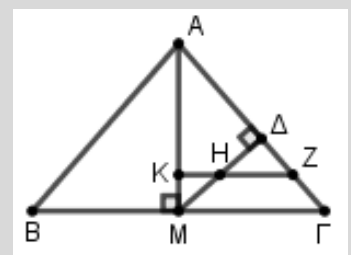


37116. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε τη $M\Delta$ κάθετη στην AG και θεωρούμε σημείο H το μέσο του $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και AG στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$

β) $MZ \parallel B\Delta$

γ) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$.



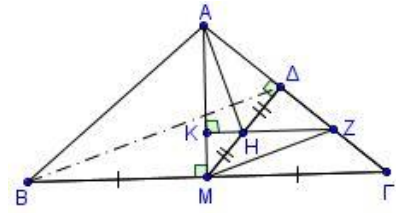
Λύση

α) Το AM είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου. Στο τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ το H είναι μέσο της $M\Delta$ και $HZ \parallel M\Gamma$, άρα το Z είναι μέσο της $\Delta\Gamma$ και

$$\text{ισχύει ότι } HZ = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$$

β) Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ τα M, Z είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $MZ \parallel B\Delta$.

γ) Είναι $KZ \parallel B\Gamma$ και $B\Gamma \perp AM$, άρα $KZ \perp AM$. Στο τρίγωνο AMZ τα $M\Delta, ZK$ είναι ύψη, άρα το σημείο τομής τους, δηλαδή το H , είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Επομένως το AH είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Δηλαδή $AH \perp MZ$ και επειδή $MZ \parallel B\Delta$ είναι και $AH \perp B\Delta$.



37137. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

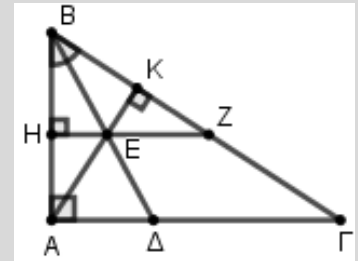
α) Να αποδείξετε ότι :

i) Τα τρίγωνα EHA και EKG είναι ίσα.

ii) Το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.

iii) Η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AZ .

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.



Λύση

α) i) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα EHA και EKG . Έχουν:

- $\hat{H}EA = \hat{K}EZ$ (κατακορυφήν)
- $HE = EK$ (E σημείο της διχοτόμου AD και EH, EK αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας $\hat{B}$)

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά ίση και την οξεία γωνία που περιέχεται μεταξύ αυτής της κάθετης και της υποτείνουσας ίση, τα τρίγωνα EHA και EKG είναι ίσα.

ii) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα BEH και BEK . Έχουν:

- $\hat{H}EB = \hat{K}EK$ ως συμπληρωματικές των $\hat{H}BE = \hat{E}BK$ ($B\Delta$ διχοτόμος)
- $HE = EK$

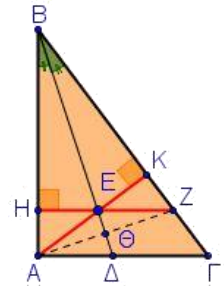
Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά ίση και την οξεία γωνία που περιέχεται μεταξύ αυτής της κάθετης και της υποτείνουσας ίση, τα τρίγωνα BEH και BEK είναι ίσα, οπότε είναι και $BH = BK$. Επομένως το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.

iii) Στο τρίγωνο ABZ το σημείο E είναι ορθόκεντρο (σημείο τομής των υψών AK, ZH) οπότε και το $A\Theta$ είναι ύψος αφού διέρχεται από το E . Άρα η AE είναι κάθετη στην AZ .

β) Στην περίπτωση αυτή το AK είναι ύψος άρα και διχοτόμος.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το E είναι σημείο τομής των διχοτόμων AK και $B\Delta$ άρα είναι έγκεντρο.

Η ΓE διέρχεται από το E άρα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.



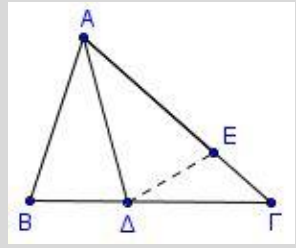
37163. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

β) η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του BE .

γ) αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB .



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ έχουν:

1) την πλευρά $A\Delta$ κοινή

2) $AE = AB$ και

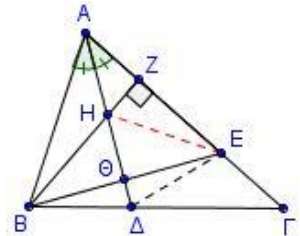
3) $\angle B\Delta A = \angle E\Delta A$ λόγω της διχοτόμησης

Λόγω του κριτηρίου ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα και $\Delta B = \Delta E$.

β) Επειδή $AB = AE$, $\Delta B = \Delta E$ τα A, Δ βρίσκονται στη μεσοκάθετο του BE .

Άρα η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του BE .

γ) Στο τρίγωνο ABE τα $A\Theta, BH$ είναι ύψη που τέμνονται στο H , άρα το σημείο αυτό είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε το EH είναι το τρίτο ύψος. Δηλαδή $EH \perp AB$.



Τραπεζίο

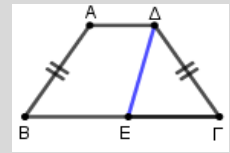
2^ο Θέμα

13497. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) με $B\Gamma > A\Delta$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $GE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η DE είναι διχοτόμος της $A\Delta\Gamma$.

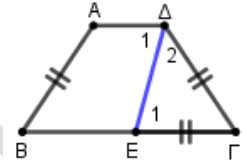
β) Αν $\hat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.



Λύση

α) Επειδή $\Gamma\Delta = GE$ το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την DE , άρα $\Delta_2 = E_1(1)$.

Είναι $\Delta_1 = E_1(2)$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από την DE . Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\Delta_1 = \Delta_2$, οπότε η DE είναι διχοτόμος της $A\Delta\Gamma$.



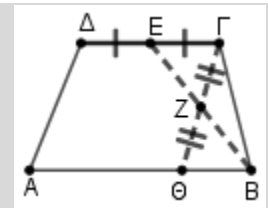
β) Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο ισχύει ότι $\Delta = A = 120^\circ$. Τότε $\Delta_2 = \frac{\Delta}{2} = 60^\circ$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ έχει μία γωνία του 60° , οπότε είναι ισόπλευρο.

13824. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα.

β) $E\Gamma = \Theta B$.

γ) Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Λύση

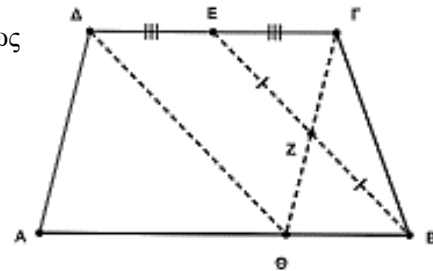
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΓEZ και ΘBZ τα οποία έχουν:

- $EZ = ZB$ (από υπόθεση)
- $\angle ZEG = \angle ZB\Theta$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓE και ΘB που τέμνονται από την BE)
- $\angle EZ\Gamma = \angle \Theta BZ$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΓEZ και ΘBZ έχουμε ότι $E\Gamma = \Theta B$ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle EZ\Gamma = \angle \Theta BZ$, πλευρές.

γ) $\Delta E \parallel B\Theta$ ως τμήματα των βάσεων $\Gamma\Delta$ και AB του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. Από το ερώτημα β) έχουμε $E\Gamma = B\Theta$, επίσης E μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ άρα $E\Gamma = \Delta E$ οπότε $B\Theta = \Delta E$, επομένως το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΔE και ΘB , παράλληλες και ίσες.

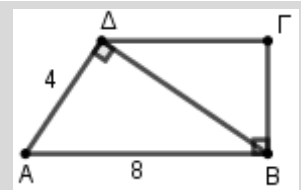


13828. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $B\Delta$ είναι κάθετη στην πλευρά $A\Delta$ και η πλευρά ΓB κάθετη στη βάση AB .

Αν $A\Delta = 4$ και $AB = 8$ τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}B$.

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος $B\Delta$ του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η υποτείνουσα AB είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς AD άρα η οξεία γωνία ΔBA ισούται με 30 μοίρες. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε

$$\Delta\hat{AB} + \hat{\Delta} + \Delta\hat{BA} = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{BA} = 60^\circ.$$

β) Οι βάσεις AB και $\Delta\Gamma$ του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ είναι κάθετες στην $B\Gamma$ άρα το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο στο Γ . Οι γωνίες $AB\Delta$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα $\Delta\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Delta\Gamma = 30^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ η κάθετη πλευρά $B\Gamma$ βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία 30° άρα ισούται με το μισό της υποτείνουσας $B\Delta$, δηλαδή

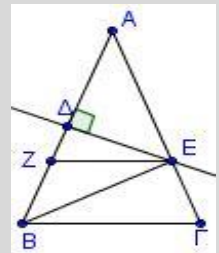
$$B\Gamma = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow B\Delta = 2B\Gamma$$

34385. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι $AE = BE$.

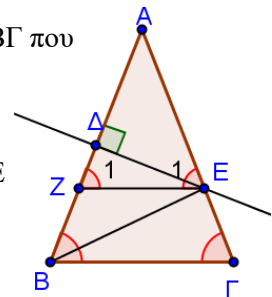
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Η ED είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο AEB , άρα είναι ισοσκελές με βάση την AB και έχει $AE = BE$.

β) Είναι $Z_1 = B$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ZE, B\Gamma$ που τέμνονται από την AB και $E_1 = \Gamma$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $ZE, B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Όμως $B = \Gamma$ γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, άρα και $Z_1 = E_1$, δηλαδή το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές με βάση την ZE και είναι $AZ = AE$. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $AZ = AE$, είναι και $AB - AZ = A\Gamma - AE \Leftrightarrow ZB = E\Gamma$ (1). Επειδή $EZ \parallel B\Gamma$ (2) και οι πλευρές $ZB, E\Gamma$ τέμνονται (3), από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

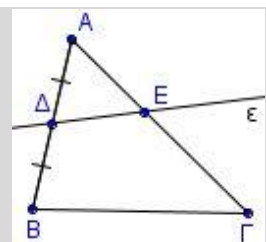


34392. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB .

Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ κι σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

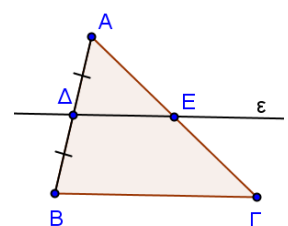
α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

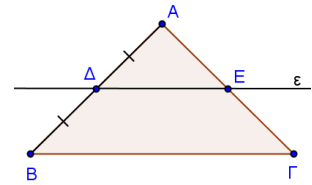


Λύση

α) Αν το $B\Delta E\Gamma$ είναι τραπέζιο, θα έχει δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες. Επειδή οι πλευρές $B\Delta$ και ΓE τέμνονται στο A , παράλληλες θα είναι οι $\Delta E, B\Gamma$. Επειδή το Δ είναι μέσο της AB και η ΔE είναι παράλληλη στη $B\Gamma$, το E θα είναι μέσο της $A\Gamma$.

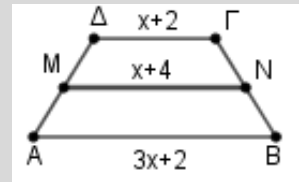


- β) Αν το τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε $B\Delta = \Gamma E$. Όμως $B\Delta = \frac{AB}{2}$ και $\Gamma E = \frac{A\Gamma}{2}$, άρα $AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



34409. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB > \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$ και MN η διάμεσός του.

- α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.



- β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

Λύση

- α) Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων του τραπέζιου, άρα:

$$MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{3x + 2 + x + 2}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot (x + 4) = 4x + 4 \Leftrightarrow 2x + 8 = 4x + 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

- β) Το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A} = \hat{B}$ (1) και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ (2).

Το άθροισμα των γωνιών του τραπέζιου είναι ίσο με 360° άρα

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ.$$

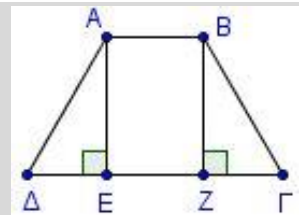
Επομένως $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ = \hat{\Delta}$

34488. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με

$\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ και τα κάθετα τμήματα AE , BZ στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta E = \Gamma Z$.
β) το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο.

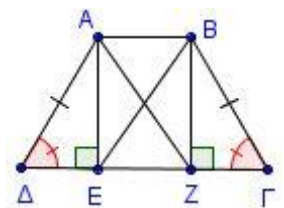


Λύση

- α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta E\Delta$ και $BZ\Gamma$ έχουν:

- 1) $\Delta\Delta = B\Gamma$ μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπέζιου και
 - 2) $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπέζιου.
- Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta E = \Gamma Z$.

- β) Επειδή $AE \perp \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$, θα είναι και $AE \perp AB$. Το τετράπλευρο $AEZB$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

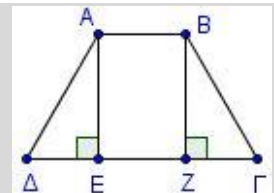


34491. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$).

Από τα σημεία A και B φέρνουμε τα κάθετα τμήματα AE και BZ αντίστοιχα στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

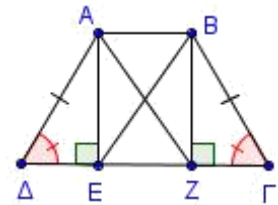
- α) $\Delta E = \Gamma Z$
β) $AZ = BE$



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AED$ και $\triangle BZG$ έχουν:

- 1) $AD = BG$ μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπέζιου και
- 2) $\angle D = \angle G$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπέζιου.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $DE = GZ$.



β) Επειδή $AE \perp GD$ και $AB \parallel GD$, θα είναι και $AE \perp AB$.

Το τετράπλευρο $AEBZ$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

Οι AZ , BE είναι διαγώνιες του ορθογωνίου και είναι ίσες.

34509. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ABGD$ με $AB \parallel GD$ και $AB < GD$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των DZ και GE .

Να αποδείξετε ότι:

α) $DZ = GE$.

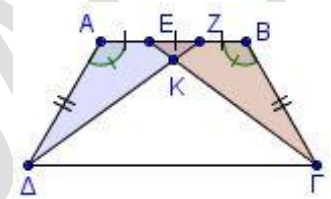
β) Τα τρίγωνα EKZ και $ΔΚΓ$ είναι ισοσκελή.

Λύση

α) Τα τρίγωνα $\triangle ADZ$ και $\triangle EBG$ έχουν:

- 1) $AZ = EB = \frac{2}{3} AB$
- 2) $AD = BG$, ίσες μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπέζιου και
- 3) $\angle A = \angle B$ βρίσκονται σε μια βάση του ισοσκελούς τραπέζιου

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $DZ = GE$.



β) Επειδή τα τρίγωνα $\triangle ADZ$ και $\triangle EBG$ είναι ίσα, έχουν και $\angle KEZ = \angle KZE$, οπότε το τρίγωνο EKZ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο EKZ είναι ισοσκελές με βάση την EZ , είναι $KZ = KE$. Όμως είναι και $DZ = GE$, άρα και $DZ - KZ = GE - KE \Leftrightarrow DK = KG$, οπότε το τρίγωνο $\triangle KDG$ είναι ισοσκελές.

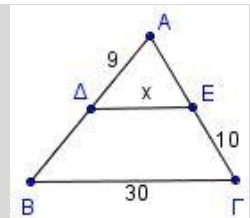
36092. Έστω τρίγωνο ABG με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, $AD = 9$, $EG = 10$ και $BG = 30$.

α) Να υπολογίσετε

i. το μήκος x του τμήματος DE .

ii. την περίμετρο του τριγώνου ABG .

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DEGB$ είναι τραπέζιο.



Λύση

α) Είναι $2\tau = AB + BG + AG = 2AD + 30 + 2EG = 18 + 30 + 20 = 68$

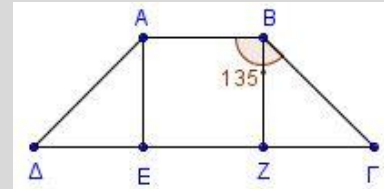
β) Επειδή τα σημεία Δ, E είναι μέσα των πλευρών AB, AG του τριγώνου ABG , είναι $DE \parallel BG$ και

$DE = \frac{BG}{2}$. Επειδή επιπλέον οι πλευρές DB, EG τέμνονται στο A , το τετράπλευρο $DEGB$ είναι τραπέζιο.

γ) $DE = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow x = \frac{30}{2} = 15$

36106. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

- α)** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.
β) Να αποδείξετε ότι $AE = ED = BZ = \Gamma Z$.

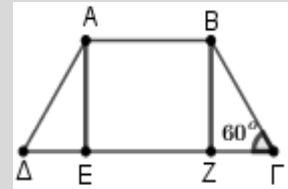


Λύση

- α)** Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές οι γωνίες κάθε βάσης του είναι ίσες, άρα $A = B = 135^\circ$. Οι γωνίες B και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$, άρα και $\Delta = \Gamma = 45^\circ$.
- β)** Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι $\Gamma = 45^\circ$ και από το άθροισμα των γωνιών του είναι και $ZB\Gamma = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $BZ = \Gamma Z$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AE\Delta$ είναι $\Delta = 45^\circ$ και από το άθροισμα των γωνιών του είναι και $\Delta AE = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $AE = ED$. Όμως το $ABZE$ είναι ορθογώνιο, οπότε $AE = BZ$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του, άρα $AE = ED = BZ = \Gamma Z$.

36112. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

- α)** Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ είναι ίσα.
γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.



Λύση

α) Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές οι γωνίες κάθε βάσης του είναι ίσες, άρα $\Delta = \Gamma = 60^\circ$. Οι γωνίες B και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$$B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow B + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 120^\circ, \text{ άρα και } A = B = 120^\circ.$$

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$ έχουν:

- 1) $AD = B\Gamma$ γιατί οι μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπέζιου είναι ίσες και
- 2) $\Delta = \Gamma = 60^\circ$

Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες ίσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα.

γ) Είναι $B = 120^\circ$ και $ABZ = 90^\circ$, άρα $ZB\Gamma = 30^\circ$, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Gamma$ ισχύει ότι

$$\Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2} = 2. \text{ Επειδή τα τρίγωνα } AE\Delta \text{ και } BZ\Gamma \text{ είναι ίσα, έχουν και } \Delta E = \Gamma Z = 2. \text{ Επειδή το τετράπλευρο}$$

$ABZE$ είναι ορθογώνιο, ισχύει ότι $EZ = AB = 6$, άρα

$$\Delta\Gamma = \Delta E + EZ + \Gamma Z = 2 + 6 + 2 = 10.$$

Η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ είναι: $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 6 + 4 + 10 + 4 = 24$

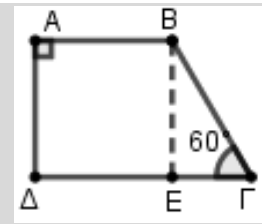
36113. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = B\Gamma = 4$,

$\hat{A} = 90^\circ$ και $\Gamma = 60^\circ$. Φέρνουμε το ύψος BE από την κορυφή B .

α) Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $2E\Gamma = B\Gamma$.

γ) Αν M, N τα μέσα των πλευρών $AD, B\Gamma$ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του τμήματος MN .



Λύση

α) Επειδή $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $AD \perp AB$, όμως $AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα και

$AD \perp \Gamma\Delta$, οπότε $\hat{\Delta} = 90^\circ$. Οι γωνίες B και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, οπότε είναι

παραπληρωματικές, δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow B + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 120^\circ$.

β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου BEG , έχουμε:

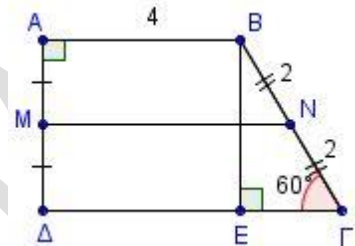
$E\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow E\Gamma + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow E\Gamma = 30^\circ$, τότε στο τρίγωνο

αυτό ισχύει ότι $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2E\Gamma = B\Gamma$.

γ) Είναι $E\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Το MN ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων

πλευρών του τραpezίου, οπότε η MN είναι διάμεσος του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ και ισχύει ότι:

$$MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{4 + \Delta E + E\Gamma}{2} = \frac{4 + 4 + 2}{2} = 5$$



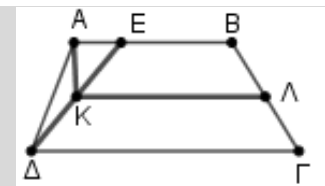
36166. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3$, $\Gamma\Delta = 4$.

Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE = 1$.

Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραpezίου $EB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

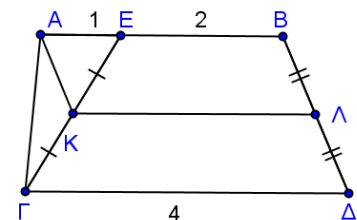


Λύση

α) Είναι $K\Lambda \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$ και

$$K\Lambda = \frac{EB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{AB - AE + \Gamma\Delta}{2} = \frac{3 - 1 + 4}{2} = 3$$

β) Είναι $K\Lambda \parallel AB$ και $K\Lambda = AB = 3$, δηλαδή στο τετράπλευρο $AB\Lambda K$ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

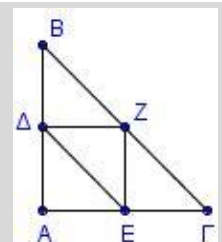


36337. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

θεωρούμε τα μέσα Δ, E και Z των πλευρών του $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Delta E Z$ είναι τετράγωνο.

β) Το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

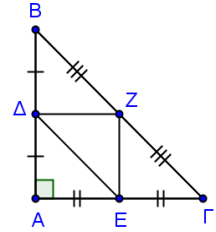
α) Επειδή τα Δ,Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι $\Delta Z \parallel \Lambda \Gamma \Leftrightarrow \Delta Z \parallel \Lambda \text{E}$ και

$$\Delta Z = \frac{\Lambda \Gamma}{2} = \Lambda \text{E} . \text{ Στο τετράπλευρο } \Lambda \text{E} \Delta \text{Z δύο απέναντι πλευρές του, οι } \Delta \text{Z και } \Lambda \text{E,}$$

είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή όμως $\Lambda = 90^\circ$, το $\Lambda \text{E} \Delta \text{Z}$ είναι ορθογώνιο.

$$\text{Είναι } \Lambda \Delta = \frac{\Lambda \text{B}}{2} = \frac{\Lambda \Gamma}{2} = \Lambda \text{E} , \text{ οπότε το } \Lambda \Delta \text{ZE είναι τετράγωνο.}$$



β) Επειδή τα σημεία Δ,Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΔΕ είναι παράλληλη στη ΒΓ (1).

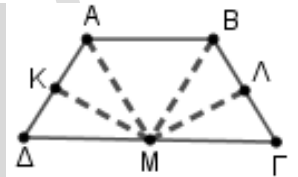
Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, έχει $\Lambda \text{B} = \Lambda \Gamma$, τότε όμως είναι και $\Delta \text{B} = \text{E}\Gamma$ (2) γιατί είναι μισά των ΑΒ, ΑΓ. Επειδή οι ΒΔ και ΕΓ τέμνονται στο Α (3), από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

36340. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\Lambda \text{B} \parallel \Delta \Gamma$ και $\Lambda \Delta = \text{B}\Gamma$), το μέσο Μ της πλευράς ΔΓ και τα μέσα Κ και Λ των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα.

β) Τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΔΚΜ και ΜΛΓ έχουν:

1) ΚΔ = ΛΓ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΔ, ΒΓ του ισοσκελούς τραπέζιου.

2) ΔΜ = ΜΓ γιατί είναι μισά της ΔΓ

3) $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπέζιου.

Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΚΜ = ΜΛ.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΒΜΓ έχουν:

1) ΑΔ = ΒΓ γιατί είναι οι μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπέζιου.

2) ΔΜ = ΜΓ

3) $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και ΑΜ = ΒΜ.

37010. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\Lambda \text{B} \parallel \Gamma \Delta$, $\Lambda \text{B} = 8$ και $\Delta \Gamma = 12$. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπέζιου,

α) να αποδείξετε ότι $\Delta \text{H} = \Theta \Gamma$.

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπέζιου.

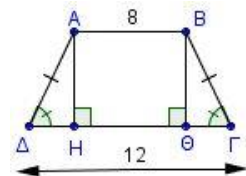
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΔ και ΒΘΓ έχουν:

1) ΑΔ = ΒΓ μη παράλληλες πλευρές του ισοσκελούς τραπέζιου και

2) $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ βρίσκονται στη βάση του τραπέζιου

Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $\Delta \text{H} = \Theta \Gamma$.



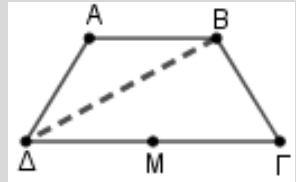
β) Αν δ η διάμεσος του τραπέζιου, τότε:
$$\delta = \frac{\Lambda \text{B} + \Gamma \Delta}{2} = \frac{8 + 12}{2} = 10$$

37011. Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $AB = AD = \frac{\Gamma\Delta}{2}$,

$\hat{A} = 60^\circ$ και M το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

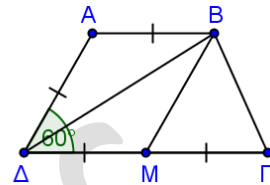
α) η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

β) η BM χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.



Λύση

α) Είναι $\angle M\Delta B = \angle A\Delta B$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$. Επειδή $AB = AD$ το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Delta$, άρα $\angle A\Delta B = \angle A\Delta B$ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\angle M\Delta B = \angle A\Delta B$, άρα η ΔB είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .



β) Είναι $\Delta M = \frac{\Delta\Gamma}{2} = AB$ και $\Delta M \parallel AB$, αφού $\Delta\Gamma \parallel AB$, άρα το τετράπλευρο $A\Delta MB$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Όμως $AB = AD$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο $A\Delta MB$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος. Επειδή το $A\Delta MB$ είναι ρόμβος, ισχύει ότι $BM = \Delta M$, όμως $\Delta M = M\Gamma$, άρα $BM = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Είναι $\angle BM\Gamma = \angle \Delta = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD, BM που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$. Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο $BM\Gamma$ έχει μια γωνία του ίση με 60° , είναι ισόπλευρο.

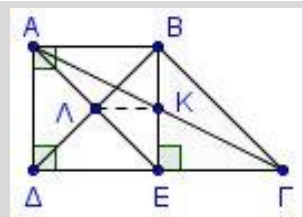
4ο Θέμα

1727. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το B φέρνουμε κάθετη στη $\Gamma\Delta$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο K και την $\Gamma\Delta$ στο E . Επίσης φέρνουμε την AE που τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο Λ . Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

β) $B\Delta = AE$

γ) $K\Lambda = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$



Λύση

α) Επειδή οι γωνίες B, Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ$, όμως $B = 3\Gamma$ άρα $3\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$.

β) Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο. Οι $AE, B\Delta$ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου, οπότε είναι ίσες.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $BE\Gamma$ έχουμε:

$\angle BE\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \angle BE\Gamma + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle BE\Gamma = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο $BE\Gamma$ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές. Άρα $BE = E\Gamma$. Όμως $AB = \Delta E = \frac{1}{2}\Delta\Gamma$, οπότε και $E\Gamma = \frac{1}{2}\Delta\Gamma = AB$. Στο τρίγωνο $AE\Gamma$ τα Λ, K

είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $K\Lambda = \frac{1}{2}E\Gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\Delta\Gamma = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$.

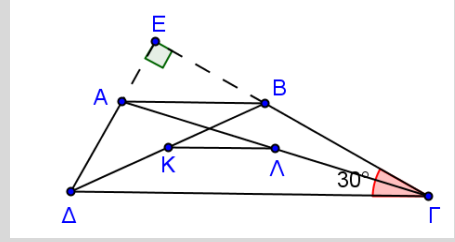
1736. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του.

Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = 2AE$

β) $K\Lambda = A\Delta$

γ) Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας.



Λύση

α) Είναι $\angle ABE = \angle \Gamma = 30^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο EAB είναι $\angle ABE = 30^\circ$, άρα

$$AE = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2AE.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι $\angle \Gamma = 30^\circ$, άρα $E\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2E\Delta$. Επειδή τα K, Λ είναι μέσα των

διαγωνίων του τραπεζίου, ισχύει ότι: $K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = \frac{2E\Delta - 2EA}{2} = \frac{2(\Delta E - EA)}{2} = A\Delta$

γ) Για να είναι το $AB\Lambda K$ παραλληλόγραμμο πρέπει οι πλευρές του $K\Lambda$ και AB να είναι ίσες και παράλληλες. Όμως $K\Lambda \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$ γιατί η $K\Lambda$ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου και

$$K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = A\Delta, \text{ οπότε πρέπει } A\Delta = AB \text{ ή } \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} = AB \Leftrightarrow \Gamma\Delta - AB = 2AB \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 3AB.$$

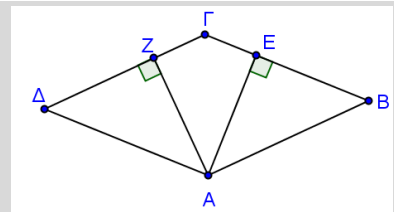
1742. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με $\hat{B} \neq 60^\circ$. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.

β) Η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του ZE .

γ) Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZMNE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AZ\Delta$ και AEB έχουν:

1) $AB = A\Delta$ γιατί είναι πλευρές του ρόμβου και

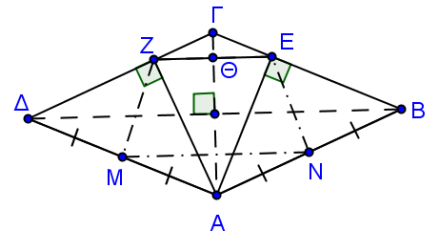
2) $\Delta = B$ γιατί είναι απέναντι γωνίες του ρόμβου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν $AZ = AE$ και το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

β) Επειδή $\Gamma\Delta = \Gamma B$ και $Z\Delta = EB$ ($\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}\hat{E}B$), είναι και

$\Gamma Z = \Gamma E$. Επειδή $AZ = AE$ και $\Gamma Z = \Gamma E$, τα σημεία A, Γ ισαπέχουν από τα Z, E , άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ZE . Δηλαδή η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του ZE .

γ) Επειδή τα M, N είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $A\Delta B$, ισχύει ότι $MN \parallel B\Delta$. Όμως $A\Gamma \perp B\Delta$ γιατί οι διαγώνιες του ρόμβου είναι κάθετες και $ZE \perp A\Gamma$, άρα $ZE \parallel B\Delta$, άρα και $ZE \parallel MN$. Αν $B = 60^\circ$, τότε στα ορθογώνια τρίγωνα AEB και ΔZA είναι $\angle EAB = \angle \Delta AZ = 30^\circ$.



Είναι $A + B = 180^\circ$ επειδή είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD, BG που τέμνονται από την AB , άρα $A = 120^\circ$, οπότε $EAZ = 120^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ και επειδή $AZ = AE$, το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AEB το EN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $EN = NB = NA = \frac{AB}{2}$. Το τρίγωνο AEN είναι ισοσκελές και έχει $AEN = EAN = 30^\circ$.

Τότε $ZEN = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Όμοια $ZM = MA = MD = \frac{AD}{2}$, $MZE = 90^\circ$ και επειδή $ZE \parallel MN$, θα είναι $ZM \parallel EN$.

Αρα όταν $B \neq 60^\circ$, τότε οι ZM και EN δεν είναι παράλληλες και το τετράπλευρο $ZMNE$ είναι τραπέζιο.

Επειδή $ZM = \frac{AD}{2} = \frac{AB}{2} = EN$, το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

1747. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

ii. $\Gamma\Delta = AD + BG$

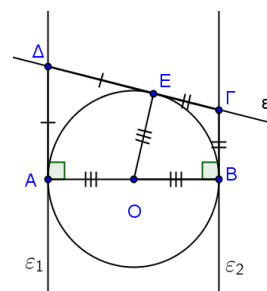
β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

Λύση

α) i. Είναι $\varepsilon_1 \perp AB$ και $\varepsilon_2 \perp AB$, άρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

Έστω ότι οι ευθείες $\Gamma\Delta, AB$ είναι παράλληλες. Τότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ θα έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και μία ορθή γωνία, οπότε θα είναι ορθογώνιο.

Τότε επειδή $OE \perp BG$ και $OE = OA = OB = R$, τα τετράπλευρα $AOE\Delta$ και $EOB\Gamma$ θα είναι τετράγωνα, οπότε τα τόξα AE και EB θα είναι ίσα, δηλαδή το E θα είναι μέσο του τόξου AB που δεν ισχύει. Άρα στη περίπτωση που το E δεν είναι μέσο του τόξου AB , οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται, οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.



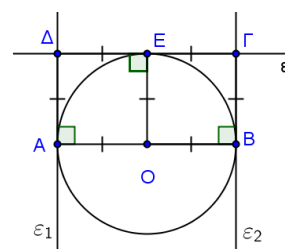
ii. Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν, είναι μεταξύ τους ίσα, ισχύει ότι $\Delta A = \Delta E$ και $\Gamma E = \Gamma B$. Είναι $\Gamma\Delta = \Gamma E + E\Delta = \Gamma B + A\Delta$

β) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο από προηγούμενως. Επειδή τα $AOE\Delta$ και $EOB\Gamma$ είναι ίσα τετράγωνα, ισχύει ότι:

$$OE = OA = A\Delta = \Delta E = E\Gamma = \Gamma B = OB = R.$$

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$AB + BG + \Gamma\Delta + A\Delta = 2R + R + 2R + R = 6R$$



1755. Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = AD$.

α) Να αποδείξετε ότι η BD είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

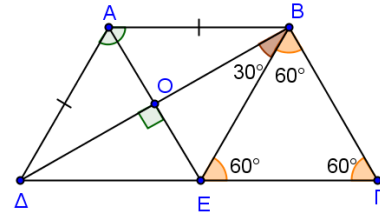
β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος.

γ) Αν επιπλέον είναι $\hat{B\Delta\Delta} = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$.

Λύση

α) Επειδή $AB = AD$, το τρίγωνο ABD είναι ισοσκελές και οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του BD είναι ίσες. Δηλαδή $\angle ADB = \angle ABD$.

Όμως $\angle ABD = \angle BDE$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB , GD που τέμνονται από την BD , άρα $\angle ADB = \angle BDE$, επομένως η BD διχοτομεί τη γωνία Δ .



β) Αρχικά πρέπει το $ABED$ να είναι παραλληλόγραμμο. Από το B φέρουμε παράλληλη στην AD . Το σημείο τομής της με την GD είναι το E , γιατί το τετράπλευρο $ABED$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές του, τις AB, AD , ίσες οπότε είναι ρόμβος.

γ) $\angle BOE = 90^\circ$ (Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα)

Είναι $\angle BAD = \angle ABG = 120^\circ$ γιατί βρίσκονται στη βάση AB του ισοσκελούς τραπεζίου. Οι γωνίες $\angle ABG$ και $\angle BGE$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB, GD που τέμνονται από τη BG , οπότε είναι παραπληρωματικές.

Είναι $\angle ABG + \angle BGE = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \angle G = 180^\circ \Leftrightarrow \angle G = 60^\circ$.

Επειδή $BG = BE = AD$ και $\angle G = 60^\circ$, το τρίγωνο BEG είναι ισόπλευρο, άρα $\angle EBG = \angle BEG = 60^\circ$. Είναι $\angle ABE = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ και επειδή η BE είναι διαγώνιος του ρόμβου, διχοτομεί τη γωνία $\angle ABE$. Άρα $\angle OBE = 30^\circ$ και τότε $\angle OBG = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OBE έχουμε: $\angle OEB + \angle OBE = 90^\circ \Leftrightarrow \angle OEB + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle OEB = 60^\circ$ και $\angle OEG = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

1757. Θεωρούμε τραπεζίο $ABGD$ τέτοιο, ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3} A\Delta$.

Επιπλέον φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABED$ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BEG είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η AG διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BK .

Λύση

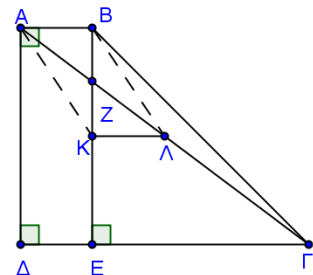
α) Το τετράπλευρο $ABED$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

β) Είναι $\Delta E = AB$ και $A\Delta = BE$ γιατί είναι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου $ABED$. Όμως $\Delta\Gamma = 4AB$, άρα $E\Gamma = 3AB$ και

$AB = \frac{1}{3} A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = 3AB = BE$, άρα $BE = E\Gamma$, οπότε το τρίγωνο BEG είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

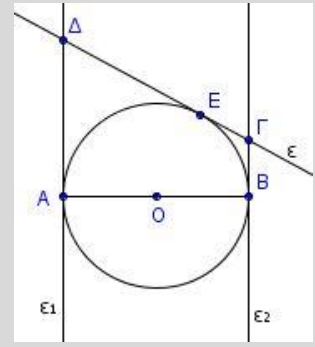
γ) Επειδή τα K, Λ είναι μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου $AEG\Delta$, ισχύει ότι $K\Lambda = \frac{E\Gamma - AB}{2} = \frac{3AB - AB}{2} = AB$.

Όμως είναι και $K\Lambda \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα το τετράπλευρο $AK\Lambda B$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο. Οι $A\Lambda, BK$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου και διχοτομούνται, άρα η AG τέμνει το τμήμα BK στο μέσον του.



1758. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$
 β) Το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.
 γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ανάλογα με τη θέση του σημείου E στο ημικύκλιο AB .



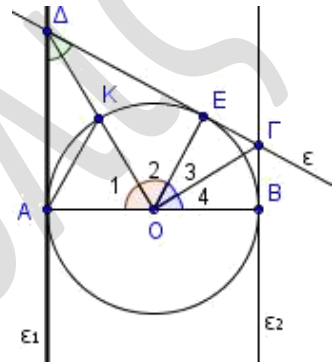
Λύση

α) Επειδή τα ΓE , ΓB είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Γ προς το κύκλο, είναι μεταξύ τους ίσα. Όμοια τα τμήματα $A\Delta$ και ΔE είναι ίσα. Άρα $\Gamma\Delta = \Gamma E + \Delta E = \Gamma B + A\Delta$

β) Επειδή η διακεντρική ευθεία ΔO διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων που καταλήγουν στα σημεία επαφής, η ΔO είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta O E$, άρα $\angle O_1 = \angle O_2 = \omega$ και η ΓO είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma O B$, άρα $\angle O_3 = \angle O_4 = \varphi$. Είναι

$$\angle O_1 + \angle O_2 + \angle O_3 + \angle O_4 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + \varphi = 90^\circ$$

Άρα $\angle \Gamma O \Delta = \omega + \varphi = 90^\circ$.



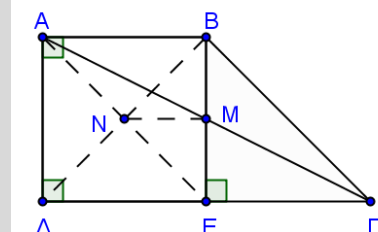
γ) Επειδή τα $A\Delta$, $B\Gamma$ είναι εφαπτόμενες του κύκλου είναι κάθετες στην AB , οπότε είναι μεταξύ του παράλληλες.

- Αν το σημείο E δεν είναι μέσο του ημικυκλίου AB τότε οι $\Gamma\Delta$ και AB δεν είναι παράλληλες οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

- Αν το E είναι μέσο του ημικυκλίου AB , τότε $\angle BOE = 90^\circ$ (επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο) και $EG \perp OE$, άρα $EG \parallel AB$. Οπότε $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο και αφού έχει μια ορθή γωνία, είναι ορθογώνιο.

1767. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο M . Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$
 β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
 γ) $AE \perp B\Delta$



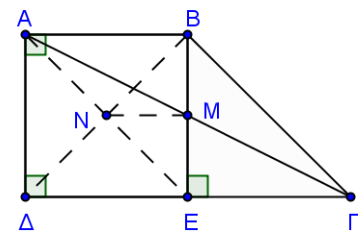
Λύση

α) Επειδή οι γωνίες B, Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ$, όμως $B = 3\Gamma$ άρα $3\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$.

β) Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο, άρα $AB = \Delta E$. Όμως $\Delta\Gamma = 2AB$, άρα $E\Gamma = AB$. Επειδή τα τμήματα AB και ΓE είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $BE\Gamma$ έχουμε:

$\angle E\Gamma B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \angle E\Gamma B + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \angle E\Gamma B = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο $BE\Gamma$ έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές. Άρα $BE = E\Gamma$. Όμως $AB = \Delta E = \frac{1}{2}\Delta\Gamma$, οπότε και $E\Gamma = \frac{1}{2}\Delta\Gamma = AB$.



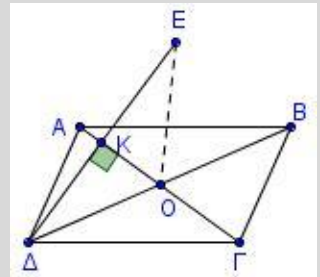
Επειδή $ΕΓ = BE = AE = AD = AB$, το τετράπλευρο $ABED$ είναι τετράγωνο. Τα AE, BD είναι διαγώνιοι του τετραγώνου, οπότε είναι κάθετα.

1770. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με O το κέντρο του. Από την κορυφή $Δ$ φέρουμε το τμήμα $ΔΚ$ κάθετο στην $ΑΓ$ και στην προέκτασή του προς το K θεωρούμε σημείο E , ώστε $KE = ΔK$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EO = \frac{BD}{2}$

β) $\angle E\hat{B} = 90^\circ$

γ) Το τετράπλευρο $AEBΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΔOE το OK είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα

$$EO = OD = \frac{BD}{2}.$$

β) Στο τρίγωνο ΔEB είναι $EO = \frac{BD}{2}$, δηλαδή μια διάμεσός του ισούται με το μισό της

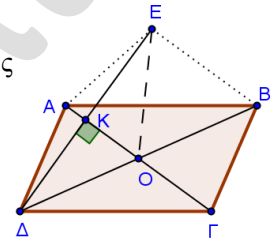
πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\angle E\hat{B} = 90^\circ$.

γ) Είναι $EB \perp \Delta E$ και $\Gamma A \perp \Delta E$, άρα $EB \parallel \Gamma A$ (1).

Στο τρίγωνο ΔDE το AK είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $AE = AD$. Όμως $AD = B\Gamma$, άρα $AE = B\Gamma$ (2).

Η AE τέμνει την AB , οπότε θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα και την $B\Gamma$ (3).

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1778. Δίνεται ορθή γωνία $\chi \hat{O} \gamma = 90^\circ$ και A, B σημεία των ημιευθειών $O\gamma, O\chi$ με $OA = OB$. Η ευθεία (ϵ) διέρχεται από το O και αφήνει τις ημιευθείες $O\chi, O\gamma$ στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο A στην (ϵ) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο B στην (ϵ) την τέμνει στο E . Να αποδείξετε ότι:

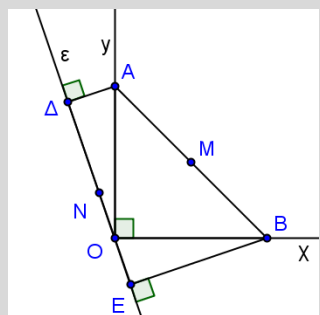
α) Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και OEB είναι ίσα.

β) $AD + BE = DE$

γ) $MN = \frac{DE}{2}$, όπου MN το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των

ΔE και AB .

δ) Το τρίγωνο ΔME είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και OEB έχουν:

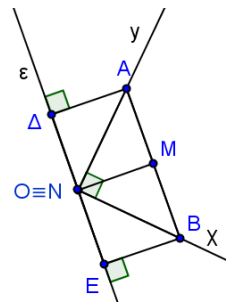
1) $OA = OB$ και 2) $\angle O\Delta\Delta = \angle OEB$ γιατί είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και OEB είναι ίσα, ισχύει ότι $AD = OE$ και $OD = BE$. Είναι $AD + BE = OE + OD = DE$.

γ) Είναι $AD \perp \epsilon$ και $BE \perp \epsilon$, άρα $AD \parallel BE$.

Αν $\epsilon \parallel AB$, τότε το τετράπλευρο $ADEB$ είναι ορθογώνιο και $AD = MN = BE$, οπότε

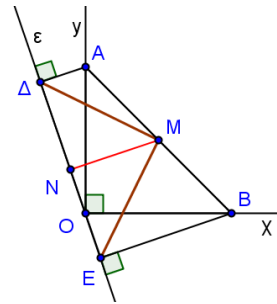
$$\frac{AD + BE}{2} = \frac{MN + MN}{2} = \frac{2MN}{2} = MN$$



Αν η ε δεν είναι παράλληλη στο AB , τότε το τμήμα MN είναι διάμεσος του τραpezίου $ADEB$ και ισχύει

$$\text{ότι: } MN = \frac{AD + BE}{2} = \frac{DE}{2}$$

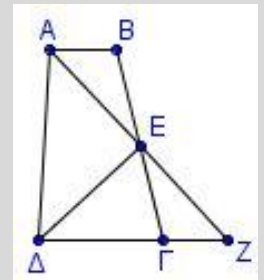
δ) Είναι $AN = NE = MN = \frac{DE}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο $\triangle ME$ μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα αυτή τη πλευρά, δηλαδή $\angle ME = 90^\circ$. Επειδή $MN \parallel AD$, είναι $MN \perp DE$, οπότε το τμήμα MN είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο $\triangle ME$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



1783. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AB + \Gamma\Delta = AD$.

Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $\triangle AZ$ είναι ισοσκελές.
- β) Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.
- γ) Η DE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραpezίου.

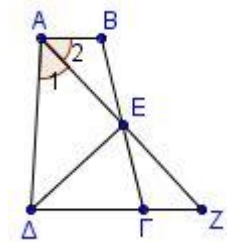


Λύση

α) Είναι $A_2 = Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την AZ και $A_2 = A_1$ γιατί η AZ είναι διχοτόμος της γωνίας A , άρα $A_1 = Z$, οπότε το τρίγωνο $\triangle AZ$ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο $\triangle AZ$ είναι ισοσκελές, ισχύει ότι $AD = AZ$ και $AZ = \Gamma Z + \Gamma\Delta$, άρα $AB = \Gamma Z$. Τα τρίγωνα ABE και ΓEZ έχουν:

- 1) $AB = \Gamma Z$
- 2) $A_2 = Z$ και
- 3) $B = \Gamma Z$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$. Με βάση το κριτήριο $\Gamma\Pi\Gamma$, τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε είναι και $BE = \Gamma E$, δηλαδή το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.



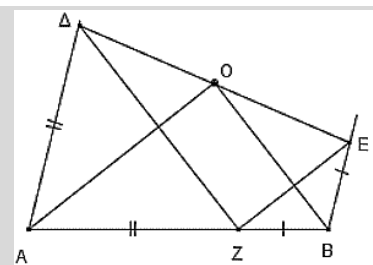
γ) Επειδή τα τρίγωνα ABE και ΓEZ είναι ίσα έχουν και $AE = EZ$. Στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AZ$, το DE είναι διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος του τριγώνου.

1784. Δίνεται τραπέζιο $ADEB$, με $AD \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = AD + BE$, και O το μέσον της DE .

Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = AD$ και $BZ = BE$.

Αν γωνία $\angle AZ = \varphi$,

- α) να εκφράσετε τη γωνία $AZ\Delta$ σε συνάρτηση με τη φ .
- β) να εκφράσετε τη γωνία EZB σε συνάρτηση με τη φ .
- γ) να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων AZ και ZE αντίστοιχα.



Λύση

α) Επειδή $AD = AB$ το τρίγωνο $\triangle AZ$ είναι ισοσκελές με βάση την AZ , οπότε $\angle AZ\Delta = \angle AZZ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\triangle AZZ$ έχουμε:

$$\angle AZZ + \angle AZ\Delta + \angle AZZ = 180^\circ \Leftrightarrow \varphi + 2\angle AZZ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle AZZ = 180^\circ - \varphi \Leftrightarrow \angle AZZ = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$$

β) Οι γωνίες ΔAZ και ZBE είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Delta$, BE που τέμνονται από την AB , οπότε $ZBE + \Delta AZ = 180^\circ \Leftrightarrow ZBE = 180^\circ - \varphi$.

Επειδή $BZ = BE$ το τρίγωνο BZE είναι ισοσκελές με βάση την ZE , οπότε $BZE = BEZ$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου BZE έχουμε:

$$ZBE + EZB + BEZ = 180^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \varphi + 2\widehat{EZB} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{EZB} = \frac{\varphi}{2}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } \Delta ZE = 180^\circ - \Delta ZA - EZB = \frac{180^\circ - \varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \frac{180^\circ - \cancel{\varphi} + \cancel{\varphi}}{2} = 90^\circ.$$

Η ZO είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔZE , οπότε

$$ZO = \frac{\Delta E}{2} = \Delta O = OE. \text{ Τα σημεία } O, A \text{ ισαπέχουν από τα } \Delta, Z \text{ άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του } \Delta Z. \text{ Τα}$$

σημεία O, B ισαπέχουν από τα Z, E , οπότε ανήκουν στη μεσοκάθετο του ZE . Άρα οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔZ και ZE αντίστοιχα.

1786. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και τη γωνία B αμβλεία. Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$ και έστω M, N τα μέσα των $AB, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος.

β) Το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

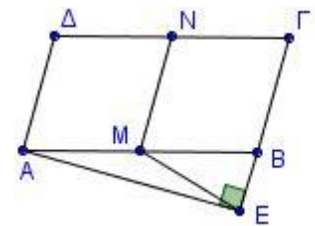
γ) Η EN είναι διχοτόμος της γωνίας $ME\Gamma$.

Λύση

α) Επειδή τα MB και $N\Gamma$ είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ του παραλληλογράμμου, είναι μεταξύ τους ίσα και παράλληλα, οπότε το $MB\Gamma N$ είναι παραλληλόγραμμο.

$$\text{Είναι } MB = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma, \text{ οπότε το παραλληλόγραμμο } MB\Gamma N \text{ έχει δύο}$$

διαδοχικές πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

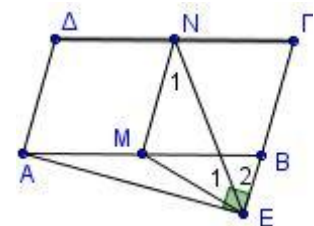


β) Αρχικά είναι $MN \parallel E\Gamma$ (1) αφού $MN \parallel B\Gamma$.

Η EM τέμνει την AB , οπότε θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα θα τέμνει και την ΓN (2). Στο ορθογώνιο τρίγωνο AEB η EM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

$$\text{υποτείνουσα, άρα } EM = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \Gamma N \text{ (3)}$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

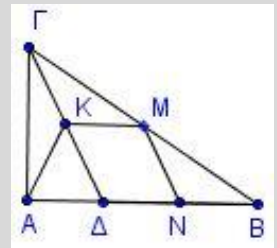


$$\gamma) \text{ Είναι } EM = \frac{AB}{2} = MB = MN, \text{ οπότε το τρίγωνο } MEN \text{ είναι}$$

ισοσκελές και έχει $E_1 = N_1$. Όμως $E_2 = N_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $MN, B\Gamma$ που τέμνονται από την NE , άρα $E_1 = E_2$, οπότε η EN είναι διχοτόμος της γωνίας $ME\Gamma$.

1789. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Έστω K, M, N τα μέσα των $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$, $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
 β) Το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
 γ) Η διάμεσος του τραπεζίου $AKMN$ είναι ίση με $AB/2$.



Λύση

α) Επειδή τα K, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $\Gamma\Delta B$, ισχύει ότι $KM = \parallel \frac{B\Delta}{2}$. Τα M, N είναι μέσα

δύο πλευρών στο τρίγωνο $\Gamma\Delta B$, άρα $MN = \parallel \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Επειδή $KM \parallel \Delta N$ και $MN \parallel K\Delta$, το τετράπλευρο $KMN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή $KM \parallel \Delta N$ είναι και $KM \parallel AN$ (1).

Η AK τέμνει την $K\Delta$ οπότε θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την MN (2).

Η AK είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ που αντιστοιχεί στην υποτεινούσα του, άρα

$$AK = \frac{A\Delta}{2} = K\Delta = MN \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Έστω δ η διάμεσος του τραπεζίου $AKMN$. Είναι $\delta = \frac{AN + KM}{2} \stackrel{KM = \frac{AB}{2} = NB}{=} \frac{AN + NB}{2} = \frac{AB}{2}$

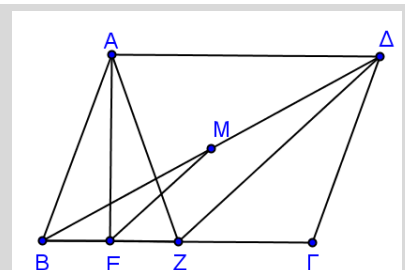
1790. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τη γωνία του B να είναι ίση με 70° και το ύψος του AE .

Έστω Z σημείο της $B\Gamma$ ώστε $BE = EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου $AZ\Gamma\Delta$.

γ) Αν M το μέσο του $B\Delta$, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ABZ το AE είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $AB = AZ$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, άρα $\Gamma\Delta = AZ$ (1).

Επειδή $A\Delta \parallel B\Gamma$ είναι και $A\Delta \parallel Z\Gamma$ (2).

Η ευθεία AZ τέμνει την AB , οπότε θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα και την $\Gamma\Delta$ (3).

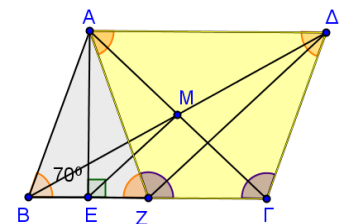
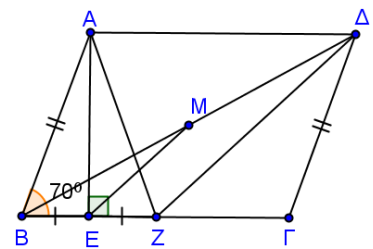
Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Είναι $A\Delta\Gamma = B = 70^\circ$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Επειδή οι γωνίες B, Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$, είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

$$B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 110^\circ.$$

Επειδή το $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε του βάση είναι ίσες, δηλαδή $AZ\Gamma = \Gamma = 110^\circ$ και $Z\Delta\Delta = \Delta = 70^\circ$



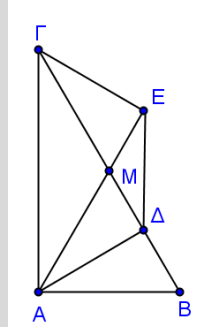
γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ το ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $EM = \frac{AG}{2}$.

1791. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο.

β) $ME = MD = \frac{BG}{4}$

γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ$. Η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ, άρα $AM = MB = MG = \frac{BG}{2}$

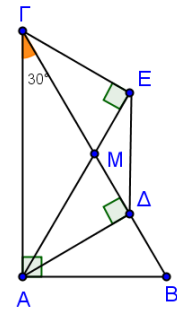
Επειδή $AM = MB$ και $B = 60^\circ$, το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο.

β) Το ΑΔ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα είναι και διάμεσος,

δηλαδή $MD = \frac{MB}{2} = \frac{\frac{BG}{2}}{2} = \frac{BG}{4}$. Είναι $\angle GME = \angle AMB = 60^\circ$ ως

κατακορυφήν, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΕ είναι $\angle MGE = 30^\circ$, άρα

$$ME = \frac{MG}{2} = \frac{BG}{4}.$$



γ) Είναι $\angle EMD = 180^\circ - \angle AMB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και $ME = MD = \frac{BG}{4}$, άρα το τρίγωνο ΜΔΕ είναι

ισοσκελές και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\angle MED + \angle MDE + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle MDE = 60^\circ \Leftrightarrow \angle MDE = 30^\circ.$$

Οι γωνίες ΜΔΕ και Γ είναι εντός εναλλάξ των ΑΓ, ΔΕ που τέμνονται από τη ΓΔ και επειδή είναι ίσες, οι ευθείες ΑΓ και ΔΕ είναι παράλληλες (1).

Είναι $\angle EDA + \angle EDA = 120^\circ + 120^\circ = 240^\circ > 180^\circ$, άρα οι ευθείες ΑΔ, ΓΕ δεν είναι παράλληλες (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΓ είναι τραπέζιο και επειδή $\angle EDA = \angle EDA = 120^\circ$ το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

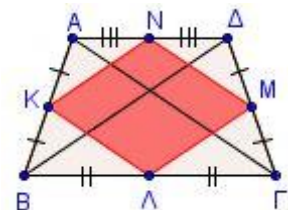
1797. α) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

Λύση

α) Τα Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $KL = \frac{AG}{2}$.

Τα Λ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΒΓΔ, άρα $LM = \frac{BD}{2}$.



Τα Μ, Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΓ, άρα $MN = \frac{AG}{2}$.

Τα Κ, Ν είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα $KN = \frac{BD}{2}$.

Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι διαγώνιες του ΑΓ, ΒΔ είναι ίσες οπότε $KL = LM = MN = KN$ και το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος αφού όλες του οι πλευρές είναι ίσες.

β) Αν το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος, τότε με βάση τα προηγούμενα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγώνιες. Αυτή η ιδιότητα όμως από μόνη της δεν καθιστά το τετράπλευρο ισοσκελές τραπέζιο.

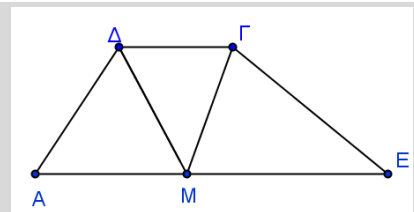
1815. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = AD + BG$.

Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπέζιου.



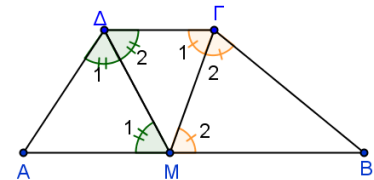
Λύση

α) Είναι $M_1 = \Delta_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΔΜ και $\Delta_1 = \Delta_2$

γιατί η ΔΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ, άρα $M_1 = \Delta_1$.

Το τρίγωνο ΑΔΜ έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές και ισχύει ότι: $AD = AM$.

β) Είναι $AB = AD + BG \stackrel{AD=AM}{=} AM + BG$, όμως $AB = AM + MB$, άρα $MB = BG$, οπότε το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές και έχει $M_2 = \Gamma_2$.



γ) Είναι $M_2 = \Gamma_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΓΜ και επειδή $M_2 = \Gamma_2$ είναι και $\Gamma_1 = \Gamma_2$, άρα η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ.

1821. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με

$BG = \Gamma\Delta = 2AB$ και Κ, Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ.

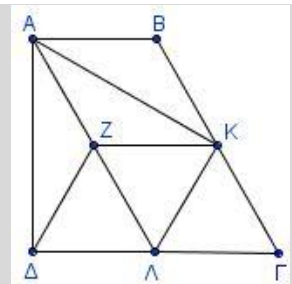
Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΛ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BG = 2\Delta Z$.

β) Το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος.

γ) $\hat{AKL} = 90^\circ$.



Λύση

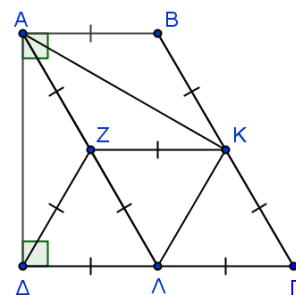
α) Είναι $\Gamma\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{2AB}{2} = AB$ και $\Gamma\Delta \parallel AB$, άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ

είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AL = BG = \Gamma\Delta = 2AB$.

Τα τετράπλευρα ΑΒΚΖ και ΖΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμα αφού οι απέναντι πλευρές τους είναι παράλληλες. Άρα $BK = AZ$ και $K\Gamma = Z\Delta$, γιατί είναι απέναντι πλευρές στα παραλληλόγραμμα. Όμως $BK = K\Gamma$, άρα και $AZ = Z\Delta$, δηλαδή το Ζ είναι μέσο του ΑΛ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ η ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην

υποτείνουσα, άρα $\Delta Z = \frac{AL}{2} \Leftrightarrow AL = 2\Delta Z \Leftrightarrow BG = 2\Delta Z$.



β) Είναι $ZK = AB = \Lambda\Gamma$, $K\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = AB$, $Z\Lambda = \frac{A\Lambda}{2} = AB$, οπότε το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

γ) Είναι $ZK = Z\Lambda = AZ = \frac{A\Lambda}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο $AK\Lambda$ μια διάμεσός του ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή, δηλαδή

1893. Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετη στην $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

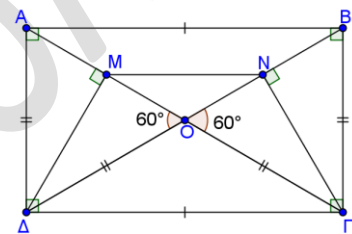
i. το σημείο M είναι μέσο του AO όπου O το κέντρο του ορθογωνίου.

ii. $AM = \frac{1}{4} A\Gamma$

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓN κάθετη στη $B\Delta$, να αποδείξετε ότι το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α) i. Οι $A\Gamma$, $B\Delta$ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου, άρα είναι ίσες και διχοτομούνται στο O , δηλαδή $AO = OD$ και το τρίγωνο $O\Delta A$ είναι ισοσκελές. Όμως $\angle AOD = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $O\Delta A$ είναι ισόπλευρο. Το ΔM είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε είναι και διάμεσος, δηλαδή το M είναι μέσο του OA .



ii. Είναι $AM = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} A\Gamma = \frac{1}{4} A\Gamma$.

β) Το τρίγωνο $O\Delta B$ είναι ισόπλευρο και το ΓN είναι ύψος του, οπότε είναι και διάμεσος του. Στο τρίγωνο OAB τα M, N είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $MN \parallel AB \Leftrightarrow MN \parallel \Gamma\Delta$ (1).

Τα ορθογώνια τρίγωνα $OM\Delta$ και $ON\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν:

- 1) $\angle MO\Delta = \angle NO\Gamma = 60^\circ$ σαν κατακορυφήν γωνίες
- 2) $OD = OG$ (μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου).

Οπότε $\Delta M = \Gamma N$ (2).

Έχουμε $\angle M\Delta\Gamma + \angle N\Delta\Gamma < \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, άρα οι ευθείες $\Delta M, \Delta N$ τέμνονται (3). Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

13519. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$. Στην AB θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = A\Delta$. Από το μέσο M της ΔE φέρουμε παράλληλη προς την $\Delta\Gamma$ που τέμνει την $B\Gamma$ στο K .

α) Να αποδείξετε $AM \perp \Delta E$.

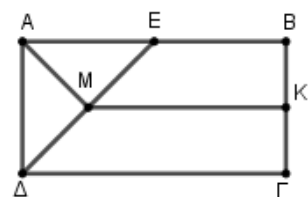
β) Να αποδείξετε ότι $2MK = 2AB - A\Delta$.

γ) Φέρνουμε την EK που τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z = AB - A\Delta$.

Λύση

α) Επειδή $AE = A\Delta$ το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. Η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος του, δηλαδή $AM \perp \Delta E$.

β) Αν η ΔE ήταν παράλληλη στην $B\Gamma$, θα είχαμε από το Δ δύο παράλληλες, τις ΔA και ΔE προς την $B\Gamma$, που είναι άτοπο. Επομένως, η ΔE δεν είναι παράλληλη προς την $B\Gamma$, οπότε το $E\Delta\Gamma$ είναι τραπέζιο.



Από το μέσο Μ της ΔΕ φέραμε $MK \parallel \Delta\Gamma$, άρα το Κ είναι το μέσο πλευράς ΒΓ. Η διάμεσος ΜΚ του τραπέζιου ΕΒΓΔ θα ισούται με το ημίθροισμα των βάσεων, δηλαδή

$$MK = \frac{EB + \Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow 2MK = EB + \Gamma\Delta \quad (1)$$

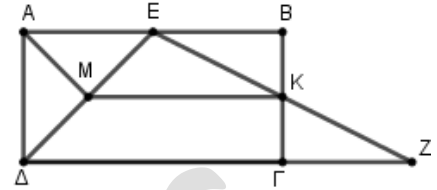
Όμως $\Gamma\Delta = AB$ (2), ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και $AD = AE$ (3), από υπόθεση. Επίσης, $EB = AB - AE$ (4).

Από (1), (2), (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $2MK = AB + AB - AE = 2AB - AD$ (5).

γ) Στο τρίγωνο ΔΕΖ το Μ είναι μέσο της ΔΕ και $MK \parallel \Delta Z$, άρα η ΜΚ διέρχεται από το μέσο Κ της ΕΖ. Επειδή τα Μ, Κ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΕΔΖ είναι

$$MK = \frac{\Delta Z}{2} \Leftrightarrow 2MK = \Delta Z \Leftrightarrow 2AB - AD = \Delta\Gamma + \Gamma Z \Leftrightarrow$$

$$2AB - AD = AB + \Gamma Z \Leftrightarrow 2AB - AB - AD = \Gamma Z \Leftrightarrow AB - AD = \Gamma Z$$



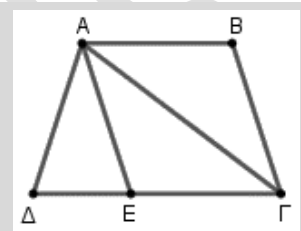
13539. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.



Λύση

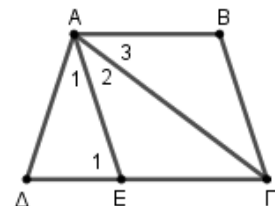
α) Επειδή οι ΑΕ, ΑΓ τριχοτομούν την $\hat{A}$, είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$. Οι

γωνίες Α και Δ του τραπέζιου είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ, οπότε:

$$\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 108^\circ + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 72^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{\Delta} + \hat{AED} = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 72^\circ + \hat{E}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E}_1 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$



β) i. Επειδή $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

ii. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, ισχύει ότι $\hat{BGE} = \hat{\Delta} = 72^\circ$.

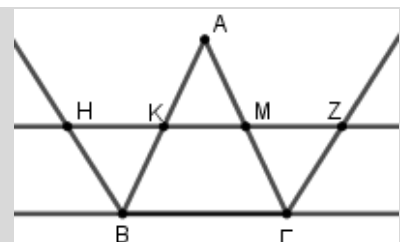
Είναι $\hat{BGE} = \hat{E}_1$ και οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΒΓ, ΑΕ που τέμνονται από την ΓΔ, άρα $BG \parallel AE$. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\hat{A}_2 = \hat{A}_3$, η διαγώνιος ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ διχοτομεί μια γωνία του, οπότε το ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.

13838. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$), με Κ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών Β και Γ στα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, συνεπώς

KM//BG. Το τετράπλευρο KMGΒ είναι τραπέζιο αφού έχει 2 πλευρές παράλληλες (KM, BG) και οι άλλες δύο πλευρές του (BK και ΓM) τέμνονται ως μέρη των πλευρών AB και AG, αντίστοιχα, του τριγώνου ABΓ. Από υπόθεση έχουμε ότι AB=AG και τα σημεία K, M είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, συνεπώς KB=MG (ως μισά των ίσων τμημάτων AB και AG), άρα το τετράπλευρο KMGΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο αφού οι μη παράλληλες πλευρές του KB και MG είναι ίσες μεταξύ τους.

β) Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία K, M είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα και ισχύει KM//BG, άρα και HZ//BG (αφού τα σημεία H και Z βρίσκονται στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία K, M). Επιπλέον οι BH και ΓZ τεμνόμενες από τη BG σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά γωνίες τους (ΓBx και BΓy) με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, αφού:

$$\Gamma Bx = HBt \text{ (ως κατακορυφήν) και } HBt = \frac{B_{εξ}}{2}$$

$$B\Gamma y = Z\Gamma p \text{ (ως κατακορυφήν) και } Z\Gamma p = \frac{\Gamma_{εξ}}{2} \text{ αλλά επειδή}$$

το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές οι ίσες γωνίες B και Γ είναι οξείες άρα οι εξωτερικές τους $B_{εξ}$ και $\Gamma_{εξ}$

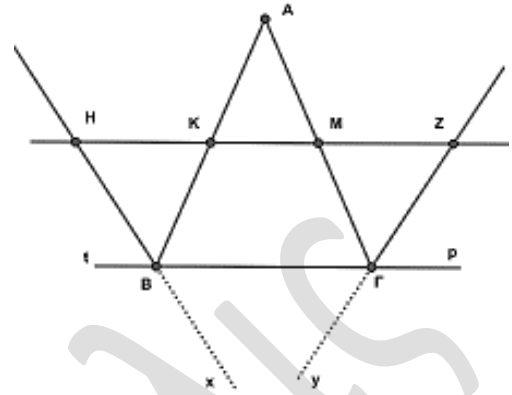
$$\text{είναι αμβλείες δηλαδή ισχύει: } B_{εξ} < 180^\circ \Leftrightarrow \frac{B_{εξ}}{2} < 90^\circ \text{ και } \Gamma_{εξ} < 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\Gamma_{εξ}}{2} < 90^\circ$$

$$\frac{B_{εξ}}{2} + \frac{\Gamma_{εξ}}{2} < 180^\circ \Leftrightarrow HBt + Z\Gamma p < 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma Bx + B\Gamma y < 180^\circ.$$

Οι BH και ΓZ τέμνονται συνεπώς το τετράπλευρο BΓZH είναι τραπέζιο με βάσεις BG και ZH. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ οι γωνίες B και Γ είναι προσκείμενες στη βάση BG συνεπώς είναι ίσες, δηλαδή

$$B = \Gamma \text{ άρα και } B_{εξ} = \Gamma_{εξ} \Leftrightarrow \frac{B_{εξ}}{2} = \frac{\Gamma_{εξ}}{2} \Leftrightarrow KBH = MGZ. \text{ Επίσης ισχύει } \Gamma BH = B\Gamma Z \text{ (ως άθροισμα ίσων}$$

γωνιών B + KBH και Γ + MGZ). Το τραπέζιο BΓZH είναι ισοσκελές, αφού έχει τις προσκείμενες στη βάση BG γωνίες του ΓBH και BΓZ ίσες.



14885. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα ΗΔ = AH και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα ME = AM. Να αποδείξετε ότι:

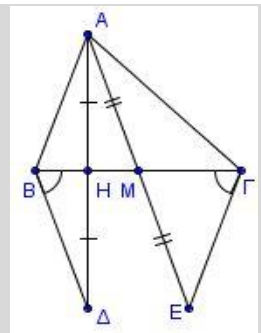
α) i. AB = ΓE

ii. AB = BΔ

β) $\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$

γ) i. Εξετάστε αν το τμήμα BΔ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓE.

ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου BΓEΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ABM και MΓE έχουν:

1) AM = ME

2) BM = MΓ (M μέσο του BΓ)

3) $\angle AMB = \angle M\Gamma E$ ως κατακορυφήν

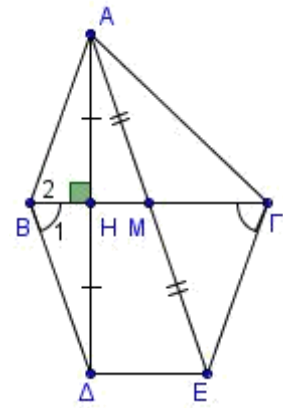
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ABM και MΓE είναι ίσα, οπότε έχουν και AB = ΓE.

ii. Στο τρίγωνο ABΔ το BH είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με AB = BΔ.

β) Το τμήμα BH είναι διχοτόμος του τριγώνου ABΔ (αφού είναι ύψος και διάμεσος του), άρα $B_1 = B_2$. Όμως $B_2 = B_1ΓΕ$ αφού τα τρίγωνα ABM και MΓΕ είναι ίσα, άρα $B_1 = B_1ΓΕ$.

γ) i. Τα H, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο AΔΕ, άρα $HM \parallel ΔΕ$, οπότε και $BΓ \parallel ΔΕ$ (3).

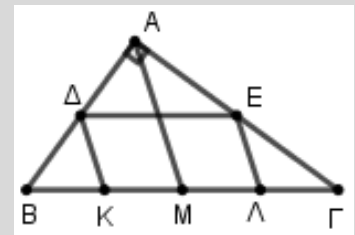
ii. Οι γωνίες B_2 και $B_1ΓΕ$ είναι εντός εναλλάξ των AB, ΓΕ που τέμνονται από την BΓ και αφού είναι ίσες, οι ευθείες AB και ΓΕ είναι παράλληλες. Επειδή από το (β) σκέλος είναι $BΔ = ΓΕ$ (5), από τις σχέσεις (3), (5) προκύπτει ότι το τετράπλευρο BΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



14888. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά BΓ θεωρούμε τα σημεία K, M, Λ ώστε $BK = KM = MΛ = ΛΓ$. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔΕΛK είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο KΔAM είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8} BΓ$.



Λύση

α) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, ισχύει ότι $ΔΕ \parallel BΓ \Leftrightarrow ΔΕ \parallel KΛ$ και $ΔΕ = \frac{BΓ}{2}$. Όμως $KΛ = KM + MΛ = \frac{BM}{2} + \frac{MΓ}{2} = \frac{BΓ}{2} = ΔΕ$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΔΕΛK έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Στο τρίγωνο BAM τα K, Δ είναι μέσα δύο πλευρών, οπότε $KΔ \parallel AM$ και $KΔ = \frac{AM}{2}$. Επειδή οι AΔ και KM τέμνονται στο B, το τετράπλευρο KΔAM είναι τραπέζιο. Η AM είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $AM = \frac{BΓ}{2}$. Αν δ η διάμεσος του τραpezίου KΔAM, ισχύει ότι:

$$\delta = \frac{KΔ + AM}{2} = \frac{\frac{AM}{2} + AM}{2} = \frac{\frac{3}{2} AM}{2} = \frac{3}{4} AM = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} BΓ = \frac{3}{8} BΓ$$

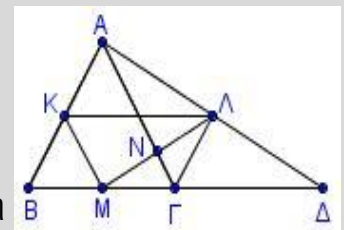
14882. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ. Στην προέκταση της BΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = BΓ$. Αν M, K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών BΓ, AB και AΔ αντίστοιχα, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAΔ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο KΛΓM είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.

ii. Το τρίγωνο KML είναι ορθογώνιο.



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60° , άρα $B = A_1 = A_1ΓB = 60^\circ$.

Επειδή $ΓΔ = BΓ = AΓ$, το τρίγωνο AΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την AΔ, άρα $A_2 = Δ$.

Η γωνία AΓB είναι εξωτερική στο τρίγωνο AΓΔ, άρα $A_1ΓB = A_2 + Δ \Leftrightarrow 60^\circ = 2Δ \Leftrightarrow Δ = 30^\circ = A_2$

Είναί $\angle B A \Delta = A_1 + A_2 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$

β) i. Επειδή τα σημεία Κ,Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, είναι $ΚΛ \parallel ΒΔ \Leftrightarrow ΚΛ \parallel ΜΓ$ (1) και

$$K\Lambda = \frac{B\Delta}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = 2M\Gamma.$$

Τα σημεία Λ, Γ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΔ, άρα

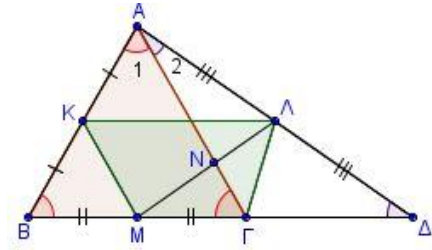
$$\Lambda\Gamma \parallel AB \text{ και } \Lambda\Gamma = \frac{AB}{2}$$

Επειδή η ΚΜ τέμνει την ΑΒ θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΓΛ (2). Τα σημεία

Κ,Μ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα $ΚΜ = \frac{ΑΓ}{2}$. Είναι

$$AB = A\Gamma \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Lambda = KM \quad (3).$$

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



ii. Είναι $\Gamma\Lambda = \text{KM} = \frac{\text{AB}}{2} = \text{KB} = \frac{\text{B}\Gamma}{2} = \text{BM} = \text{M}\Gamma$, άρα το τρίγωνο KMB είναι ισόπλευρο, οπότε

$\angle KMB = 60^\circ$. Οι γωνίες $\angle MGL$ και B είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB, GL που τέμνονται από την BG , οπότε είναι παραπληρωματικές.

Δηλαδή $M\Gamma\Lambda + B = 180^\circ \Leftrightarrow M\Gamma\Lambda + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow M\Gamma\Lambda = 120^\circ$.

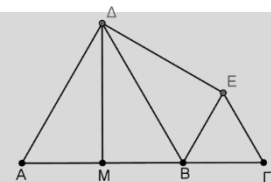
Επειδή $ΜΓ = ΓΛ$, το τρίγωνο $ΜΓΛ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΜΛ$, άρα $ΓΜΛ = ΓΛΜ$. Από το

άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΜΓΛ έχουμε: $\Gamma\text{Μ}\Lambda + \Gamma\Lambda\text{Μ} + \text{Μ}\Gamma\Lambda = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma\text{Μ}\Lambda + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2\Gamma\text{Μ}\Lambda = 60^\circ \Leftrightarrow \Gamma\text{Μ}\Lambda = 30^\circ$.

Είναι $\text{BMK} + \text{KM}\Lambda + \text{ΓM}\Lambda = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \text{KM}\Lambda + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \text{KM}\Lambda = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

34320. Έστω Α, Β και Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2BG$. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ.

Να αποδείξετε ότι:



α) το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο με βάσεις τα τμήματα ΑΔ και ΒΕ.

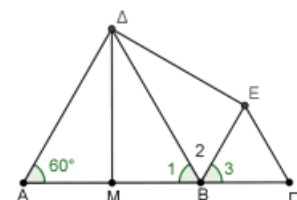
β) τα τρίγωνα ΔMB και ΔEB είναι ίσα.

$$\gamma) \Delta \hat{M}B + \Delta \hat{E}B = 180^\circ.$$

Λύση

α) Αφού τα τρίγωνα $\triangle ADB$ και $\triangle BE\Gamma$ είναι ισόπλευρα τότε $\hat{A} = \hat{B}_3 = 60^\circ$, οι οποίες είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των AD και BE που τέμνονται από την AG , οπότε $AD \parallel BE$. Επίσης οι DE και AB δεν είναι παράλληλες. Πράγματι έστω ότι $DE \parallel AB$ τότε το $ADEB$ παραλληλόγραμμο άρα $AD = BE$. Όμως είναι και $AB = AD$. Επίσης $BE = B\Gamma$ άρα $AB = B\Gamma$ πράγμα άτοπο αφού $AB = 2B\Gamma$.

Άρα το $\triangle ADEB$ είναι τραπέζιο.



β) Τα τρίγωνα ΔMB και ΔEB έχουν:

1) ΔB κοινή πλευρά

2) $BM = EB$ αφού M μέσο AB άρα $BM = \frac{AB}{2} = \frac{2B\Gamma}{2} = B\Gamma = BE$

3) $\hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 60^\circ$ αφού $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ$ και $\hat{B}_1 = \hat{B}_3 = 60^\circ$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα από Π-Γ-Π.

γ) Το τμήμα ΔΜ είναι διάμεσος στην πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΔ, αφού Μ μέσο από τα δεδομένα, άρα θα είναι και ύψος του τριγώνου, οπότε $\hat{\Delta MB} = 90^\circ$. Επειδή τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα θα είναι και $\hat{\Delta EB} = \hat{\Delta MB} = 90^\circ$, άρα $\hat{\Delta EB} + \hat{\Delta MB} = 180^\circ$

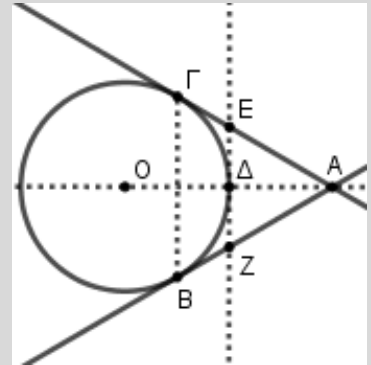
34324. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Από σημείο Α εξωτερικό του κύκλου θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου που εφάπτονται σε αυτόν στα σημεία Β, Γ και τέτοιες ώστε, η γωνία $\hat{B\hat{A}\Gamma}$ που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ να είναι 60° . Έστω ότι η ευθεία ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $OA = 2\rho$.

β) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

γ) $AZ = 2ZB$.

δ) το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

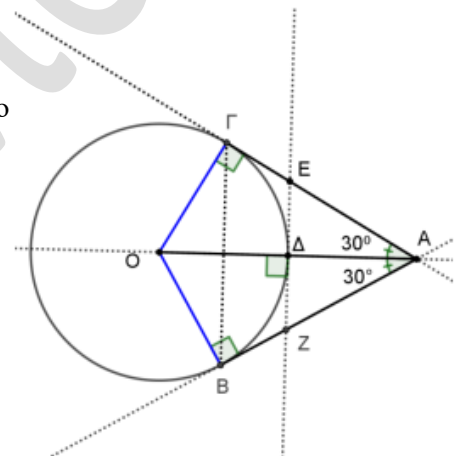
α) Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ οι οποίες θα είναι κάθετες στις εφαπτόμενες στα σημεία Β και Γ. Η διακεντρική ευθεία ΟΑ

διχοτομεί την γωνία $\hat{B\hat{A}\Gamma}$, δηλαδή $\hat{B\hat{A}O} = \hat{\Gamma\hat{A}O} = \frac{\hat{B\hat{A}\Gamma}}{2} = 30^\circ$. Στο

ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΑ η γωνία $\hat{B\hat{A}O} = 30^\circ$, άρα

$$OB = \frac{OA}{2} \Leftrightarrow OA = 2OB \Leftrightarrow OA = 2\rho.$$

β) Η ΖΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ, άρα θα είναι κάθετη στη ακτίνα ΟΔ που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής Δ, άρα είναι και κάθετη στην ΟΑ. Στο τρίγωνο ΑΖΕ το ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με την γωνία της κορυφής να είναι 60 μοίρες άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

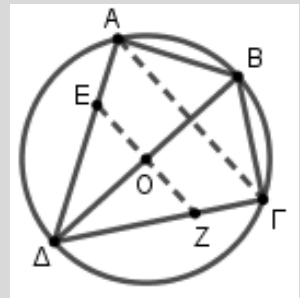


γ) Τα τμήματα ΖΒ και ΖΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το Ζ, οπότε $ZB = Z\Delta$ (1). Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΖΕ το ύψος του ΑΔ είναι και διάμεσος οπότε:

$$Z\Delta = \frac{EZ}{2} \Leftrightarrow ZB = \frac{AZ}{2} \Leftrightarrow AZ = 2ZB$$

δ) Η διακεντρική ευθεία ΑΟ είναι μεσοκάθετη της χορδής που έχει άκρα τα σημεία επαφής, δηλαδή $AO \perp B\Gamma$. Επίσης είναι και $AO \perp ZE$, αφού η διακεντρική ΑΟ είναι φορέας του ύψος ΑΔ στην πλευρά ΖΕ του ισοπλεύρου τριγώνου. Άρα $EZ \parallel B\Gamma$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία, και τα τμήματα ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι τραπέζιο. Τα τμήματα ΕΓ και ΕΔ είναι εφαπτόμενα του κύκλου που άγονται από το Ε, οπότε $E\Gamma = E\Delta$ και επειδή $Z\Delta = E\Delta$ από σχέση (1), προκύπτει ότι $ZB = E\Gamma$, οπότε το τραπέζιο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές.

34328. Δίνεται τετράπλευρο με κορυφές σημεία A, B, Γ και Δ κύκλου (O, ρ), διαγωνίες ΑΓ και ΒΔ, με τη ΒΔ να διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου, και με ίσες πλευρές τις AB και ΒΓ. Έστω ότι η κάθετη στη ΒΔ στο σημείο O τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, οι γωνίες του $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ορθές και η γωνία του $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας του $\hat{\Delta}$.



α) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ του ΑΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Delta}$ του ΑΒΓΔ.

ii. το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος.

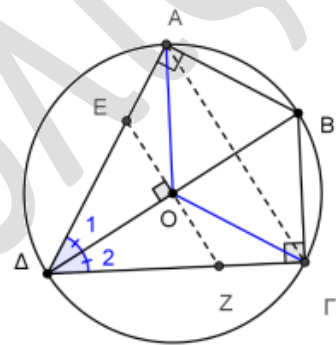
iii. το τετράπλευρο ΑΓΖΕ είναι τραπέζιο.

Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι γωνίες A και Γ του ΑΒΓΔ είναι ορθές και η γωνία του B είναι διπλάσια της γωνίας του Δ. Για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} &= 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 90^\circ + 2\hat{\Delta} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3\hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 60^\circ \text{ οπότε } \hat{B} = 120^\circ.\end{aligned}$$

β) i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$, την πλευρά ΒΔ κοινή και τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ ίσες. Συνεπώς είναι ίσα, ως ορθογώνια, άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ (1) ως απέναντι γωνίες των ίσων πλευρών ΑΒ και ΒΓ. Άρα η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Delta}$ του ΑΒΓΔ.



ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \frac{\hat{\Delta}}{2} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι

κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AB = \frac{DB}{2} = \rho$ (2), αφού η ΔΒ είναι

διάμετρος του κύκλου (O, ρ), γιατί από τα δεδομένα έχουμε ότι διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου.

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ είναι $BG = \frac{DB}{2} = \rho$ (3). Επίσης $OA = OG = \rho$ (4). Από τις σχέσεις (2),

(3) και (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

iii. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΟ οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΟ τέμνονται κάθετα, δηλαδή $AG \perp BO$ (5). Επίσης είναι $EZ \perp BO$ (6) από τα δεδομένα. Οπότε είναι $AG \parallel EZ$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία και επειδή οι φορείς των τμημάτων ΑΕ, ΓΖ τέμνονται στο σημείο Δ, το τετράπλευρο ΑΓΖΕ είναι τραπέζιο. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΖ είναι ισοσκελή, γιατί η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας τους $\hat{\Delta}$ αλλά και ύψος στις πλευρές ΑΓ και ΕΖ αντίστοιχα (σχέσεις (5), (6)) οπότε $AD = GD$ και $ED = ZD$. Είναι $AE = AD - ED = GD - ZD = ZG$, άρα το τραπέζιο ΑΓΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

34331. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($AB < AG$) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $KL \parallel BG$

β) i. $ML = KL$

ii. Το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Οι γωνίες $\hat{K\Delta\Lambda}$ και $\hat{K\Delta M}$ είναι ίσες.

Λύση

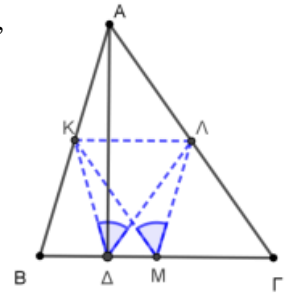
α) Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Θεωρούμε τα μέσα Κ, Λ, Μ των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα και φέρουμε το ύψος ΑΔ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Κ είναι μέσο του ΑΒ και το Λ είναι μέσο του ΑΓ. Άρα, ΚΛ//ΒΓ (1), επειδή το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Λ είναι μέσο του ΑΓ και το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Άρα,

$$ΛΜ = \frac{AB}{2} \quad (2), \text{ επειδή το } ΛΜ \text{ ενώνει τα μέσα των πλευρών } ΑΓ \text{ και } ΒΓ \text{ του}$$

τριγώνου ΑΒΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι $ΔΚ = \frac{AB}{2}$ (3), επειδή η ΚΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτεινούσά του ΑΒ. Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι $ΛΜ = ΚΔ$. (4)



ii. Τα σημεία Δ και Μ δεν ταυτίζονται γιατί αν το μέσο Μ της ΒΓ ταυτιζόταν με το ίχνος Δ του ύψους ΑΔ, τότε το ύψος ΑΔ θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ισοσκελές με $AB = AG$, πράγμα άτοπο γιατί από την υπόθεση είναι $AB < AG$. Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τετράπλευρο. Επειδή τα Λ, Μ ενώνουν μέσα των πλευρών ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, θα είναι $ΛΜ // AB$ και η ΔΚ δεν είναι παράλληλη στην ΑΒ (αφού την τέμνει στο Κ). Συνεπώς οι απέναντι πλευρές ΛΜ και ΚΔ του ΚΛΜΔ δεν είναι παράλληλες. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $ΚΛ // ΒΓ$, οπότε $ΚΛ // ΔΜ$. Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τραπέζιο, γιατί έχει μόνο δυο απέναντι πλευρές που είναι παράλληλες. Και επειδή από τη σχέση (4) είναι $ΛΜ = ΚΔ$, άρα το ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Τα τρίγωνα ΚΔΛ και ΛΜΔ έχουν, τις πλευρές ΚΔ και ΛΜ ίσες (από 4), τις πλευρές ΚΜ και ΔΛ ίσες ως διαγώνιοι του ισοσκελούς τραπέζιου ΚΛΜΔ και την πλευρά ΚΛ κοινή. Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες. Άρα και $Κ\hat{\Delta}Λ = Κ\hat{Μ}Λ$ ως οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους πλευρά ΚΛ.

34333. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

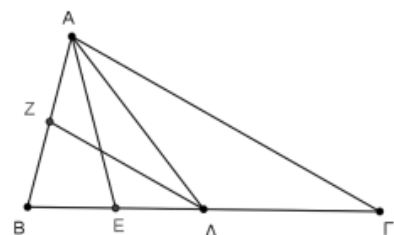
- α)** τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα,
- β)** η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ε\hat{Α}Γ$,
- γ)** το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και το Δ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ. Επομένως, το Ζ θα είναι μέσο της πλευράς ΑΒ. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ έχουν:

- 1) $AB = BD$, ως μισά του ΒΓ, αφού $ΒΓ = 2AB$ (υπόθεση) και $ΒΓ = 2BD$ (το Δ είναι μέσο του ΒΓ).
- 2) $BE = BZ$, ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΔ και ΑΒ αντίστοιχα.
- 3) $\hat{B}$ κοινή γωνία.

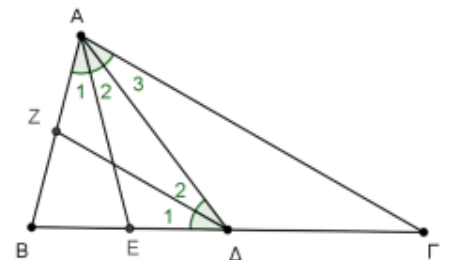
Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΖ είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).



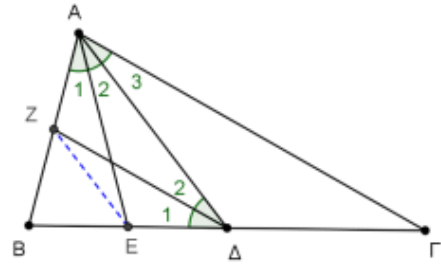
β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΕ και ΒΖΔ προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_1$ (1), ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΒΖ αντίστοιχα. Το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές με $AB = BD$, οπότε $Β\hat{A}Δ = Β\hat{Δ}Α$ (2), ως προσκείμενες στη βάση ΑΔ.

Αφαιρώντας τις ισότητες (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$Β\hat{A}Δ - \hat{A}_1 = Β\hat{Δ}Α - \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}_2$ (3). Επίσης, $\hat{A}_2 = \hat{A}_3$ (4), ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΖ και ΑΓ τεμνόμενων από την ΑΔ. Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $\hat{A}_2 = \hat{A}_3$, άρα η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ε\hat{Α}Γ$.



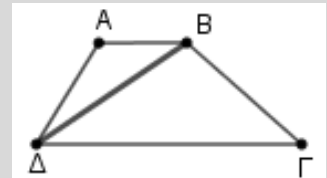
γ) Φέρνουμε το τμήμα ZE, το οποίο ενώνει τα μέσα E και Z των πλευρών BΔ και BA αντίστοιχα του τριγώνου BAE, οπότε θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά του AΔ. Στο τετράπλευρο AΔEZ οι πλευρές του AZ, ΔE δεν είναι παράλληλες καθώς οι προεκτάσεις τους προς τα σημεία Z, E αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο B. Άρα το τετράπλευρο AΔEZ είναι τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές AΔ, ZE. Είναι $B\hat{A}\Delta = B\hat{A}E$ από σχέση (2), άρα το τραπέζιο AΔEZ είναι ισοσκελές γιατί έχει τις γωνίες τις προσκείμενες στη βάση του AΔ ίσες.



36172. Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\Delta\hat{B}\Gamma = 110^\circ$ και $A\hat{\Delta}B = 25^\circ$, να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

β) τη γωνία $\hat{A}$.



Λύση

α) Το τρίγωνο BΔΓ είναι ισοσκελές με $B\Delta = B\Gamma$, άρα $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ΔΓ. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BΔΓ έχουμε:

$$B\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} + \Delta\hat{B}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$$

β) Είναι $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}B + B\hat{\Delta}\Gamma = 25^\circ + 35^\circ = 60^\circ$ και οι γωνίες $\hat{A}$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB και ΔΓ που τέμνονται από την AΔ οπότε είναι παραπληρωματικές.

$$\text{Άρα } \hat{A} = 180^\circ - A\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

37080. Σε τραπέζιο ABΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$.

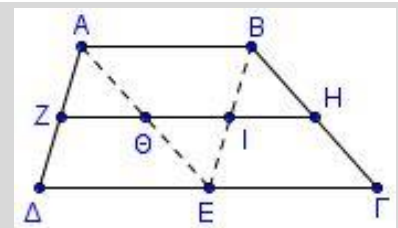
Επίσης Z, H, E είναι τα μέσα των AΔ, BΓ και ΔΓ αντίστοιχα.

Ακόμη η ZH τέμνει τις AE, BE στα σημεία Θ, Ι αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓE είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των AE, BE αντίστοιχα.

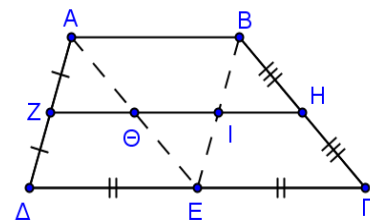
γ) Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2} AB$.



Λύση

α) Επειδή $\Gamma\Delta = 2AB$ και E μέσο του ΓΔ, είναι $AB = \Delta E = E\Gamma$. Επίσης $AB \parallel \Gamma E$ αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$, άρα το τετράπλευρο ABΓE έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή η ZH είναι διάμεσος του τραpezίου είναι παράλληλη στις βάσεις AB και ΓΔ. Στο τρίγωνο AΔE, το Z είναι μέσο της AΔ και $Z\Theta \parallel \Delta E$, άρα το Θ είναι μέσο του AE. Στο τρίγωνο BEΓ το H είναι μέσο της BΓ και $I\Gamma \parallel E\Gamma$, άρα το Ι είναι μέσο του BE.



γ) Επειδή η ZH είναι διάμεσος του τραpezίου, ισχύει ότι: $ZH = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{AB + 2AB}{2} = \frac{3}{2} AB$

37084. Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ,ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ,Ν μέσα των ΑΒ,ΓΔ αντίστοιχα.

α) Αν τα Α,Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας: 1) $ΑΔ < ΒΓ$ 2) $ΑΔ = ΒΓ$.

ii. να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

β) Αν η (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ,Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Επειδή $ΑΔ \perp \varepsilon$ και $ΒΓ \perp \varepsilon$, είναι $ΑΔ \parallel ΒΓ$.

1) Αν $ΑΔ < ΒΓ$, τότε οι ΑΒ, ΓΔ δεν είναι παράλληλες γιατί αν ήταν, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα ήταν ορθογώνιο και οι απέναντι πλευρές του ΑΔ, ΒΓ θα ήταν ίσες, που δεν ισχύει.

Άρα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

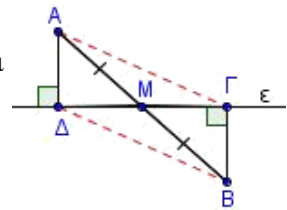
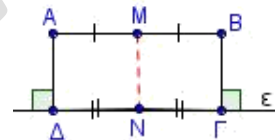
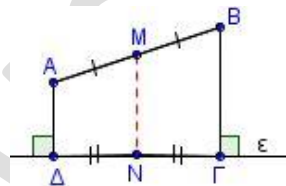
2) Αν $ΑΔ = ΒΓ$, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και επειδή $\Delta = 90^\circ$, είναι ορθογώνιο.

ii. Όταν το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο, τότε το ΜΝ είναι διάμεσός του και είναι:

$MN = \frac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$. Όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε και τα ΑΜΝΔ, ΜΝΓΒ θα

είναι ορθογώνια και τότε $MN = ΑΔ = ΒΓ$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ έχουν τις πλευρές ΑΜ και ΜΒ ίσες και τις γωνίες ΑΜΔ και ΒΜΓ ίσες ως κατακορυφήν. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και $ΑΔ = ΒΓ$. Τότε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ θα είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.



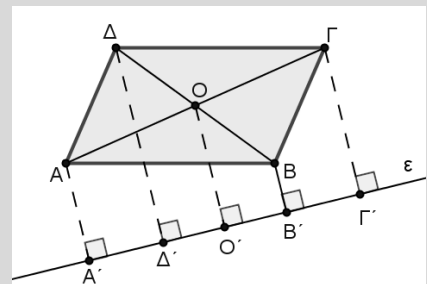
37086. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α', Β', Γ', Δ' των κορυφών του Α,Β,Γ,Δ αντίστοιχα σε μια ευθεία ε.

α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $ΑΑ' = 3$, $ΒΒ' = 2$, $ΓΓ' = 5$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.

ii. Να βρείτε την απόσταση ΔΔ'.

β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ'; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Είναι $ΑΑ' \perp \varepsilon$, $ΒΒ' \perp \varepsilon$, $ΓΓ' \perp \varepsilon$, $ΔΔ' \perp \varepsilon$ και $ΟΟ' \perp \varepsilon$, άρα τα τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ', ΟΟ' είναι παράλληλα.

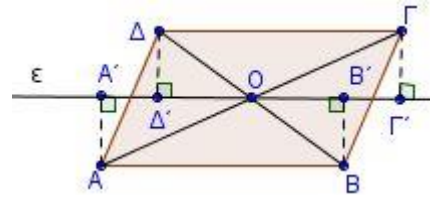
Αν η ε ήταν παράλληλη στην ΑΓ, τότε το ΑΑ'Γ'Γ' θα ήταν ορθογώνιο και οι απέναντι πλευρές του ΑΑ' και ΓΓ' θα ήταν ίσες, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η ε δεν είναι παράλληλη στην ΑΓ.

i. Στο τραπέζιο ΑΑ'Γ'Γ' το ΟΟ' είναι διάμεσος, άρα $ΟΟ' = \frac{ΑΑ' + ΓΓ'}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$.

ii. Στο τραπέζιο $BB'\Delta'\Delta$ το OO' είναι διάμεσος, άρα

$$OO' = \frac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2 + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta' = 6$$

β) Αν η ϵ είναι παράλληλη στις $\Gamma\Delta$ και AB και διέρχεται από το κέντρο O , τότε η ϵ θα είναι μεσοπαράλληλη των $AB, \Gamma\Delta$, τα τετράπλευρα $AA'B'B$ και $\Delta\Delta'T'T$ είναι ίσα ορθογώνια και οι αποστάσεις $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$ είναι ίσες.



37089. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA . Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα.
- Η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$.
- Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $BE\Delta$ έχουν:

- τη πλευρά $B\Delta$ κοινή και
- $B_1 = B_2$ γιατί η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της B

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε είναι $AB = BE$ και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ έχουν:

- $AB = BE$ και
- τη γωνία B κοινή

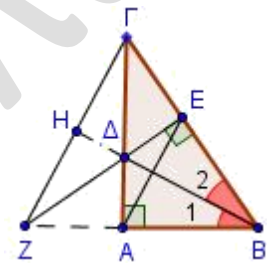
Άρα τα δύο τρίγωνα μια κάθετη τους πλευρά ίση και την οξεία γωνία που περιέχεται μεταξύ αυτής της κάθετης και της υποτείνουσας ίση, οπότε είναι ίσα.

γ) $BA = BE$ και $\Delta A = \Delta E$ (Δ σημείο της διχοτόμου $B\Delta$). Άρα η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AE . Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα είναι και $B\Gamma = BZ$, οπότε το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές. Το τμήμα BH είναι διχοτόμος στο τρίγωνο $B\Gamma Z$ που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι ύψος και διάμεσός του, δηλαδή η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του ΓZ .

δ) Επειδή $AE \perp B\Delta$ και $\Gamma Z \perp B\Delta$, είναι $AE \parallel \Gamma Z$ (1)

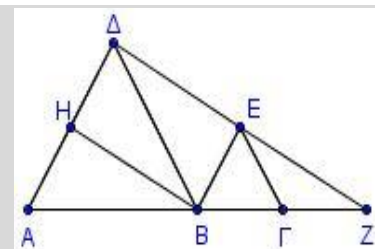
Είναι $B\Gamma = BZ$ και $BE = AB$ άρα και $B\Gamma - BE = BZ - AB \Leftrightarrow E\Gamma = AZ$ (2)

Επειδή οι ευθείες ΓE και AZ τέμνονται στο B , από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



37098. Σε μια ευθεία (ϵ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία ΔE τέμνει την (ϵ) στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο.
- Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές.
- Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρα, οι γωνίες τους είναι ίσες με 60° . Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το BH είναι ύψος, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος. Δηλαδή $B_1 = 30^\circ$.

Είναι $B_2 = 180^\circ - A\Delta B - B_3 = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, άρα $HBE = B_1 + B_2 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

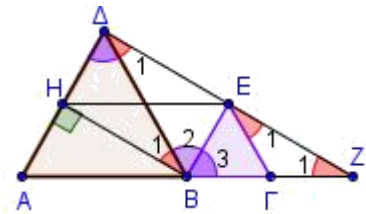
Τα τρίγωνα ΔΗΒ και ΔΕΒ έχουν:

- 1) την πλευρά ΔΒ κοινή
- 2) $\angle ADB = \angle B_2 = 60^\circ$ και
- 3) $\Delta H = \frac{AD}{2} = \frac{AB}{2} = BG = BE$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα

$$\angle DEB = \angle BHD = 90^\circ.$$

Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.



β) Επειδή το ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο, είναι $\angle HDE = 90^\circ \Leftrightarrow \angle ADB + \Delta_1 = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + \Delta_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 30^\circ$.

Επειδή $\angle B_1 = \angle EGB = 60^\circ$ και οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΓΕ, ΒΔ που τέμνονται από την ΒΓ, οι ευθείες ΕΓ και ΒΔ είναι παράλληλες. Είναι $\angle E_1 = \Delta_1 = 30^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΔ, ΕΓ που τέμνονται από την ΔΕ. Η γωνία ΕΓΖ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΒΓ, άρα $\angle EZ = \angle BEG + \angle B_3 = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ΕΓΖ, έχουμε $Z + \angle E_1 + \angle EZ = 180^\circ \Leftrightarrow Z + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow Z = 30^\circ$.

Επειδή $Z = \angle E_1$ το τρίγωνο ΕΓΖ είναι ισοσκελές.

γ) Επειδή $\Delta_1 = Z = 30^\circ$, το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισοσκελές και το ΒΕ είναι διχοτόμος του, άρα είναι και διάμεσος. Δηλαδή το Ε είναι μέσο του ΔΖ.

Τα Η, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΔΑΖ, άρα $HE \parallel AZ \Leftrightarrow HE \parallel AG$ (1)

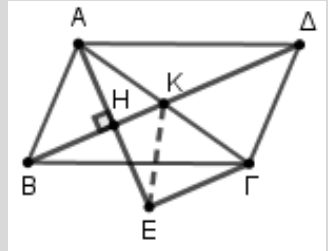
Η ΕΓ τέμνει την ΒΕ άρα θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΑΗ (2). Είναι

$$EG = BG = \frac{AB}{2} = \frac{AD}{2} = AH \quad (3)$$

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37099. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκτασή της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AH = HE$. Να αποδείξετε ότι:

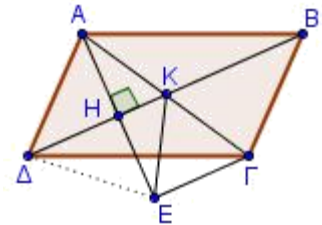
- α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές.
- β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο.
- γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΚΕ το ΚΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή $EK = AK = \frac{AG}{2}$, στο τρίγωνο ΑΕΓ η διάμεσός του ΕΚ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\angle AEG = 90^\circ$.



γ) Είναι $HK \perp AE$ και $EG \perp AE$, άρα $HK \parallel EG \Leftrightarrow BD \parallel EG$ (1).

Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΔΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $\Delta E = AD$. Όμως $AD = BG$, άρα $\Delta E = BG$ (2).

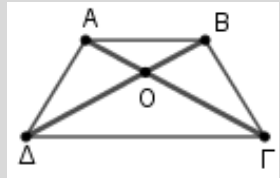
Η ΔΕ τέμνει την ΑΔ, άρα θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την ΒΓ (3). Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37103. Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $ΑΔ = ΒΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$ και $ΑΒ < ΓΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή.

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta}ΑΒ = \hat{ΑΒΓ}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΓΔ έχουν:

1) $ΑΔ = ΒΓ$

2) τη πλευρά ΔΓ κοινή και

3) $ΑΓ = ΒΔ$, οπότε με βάση το κριτήριο ΠΠΠ είναι ίσα και έχουν $\hat{ΟΔΓ} = \hat{ΟΓΔ}$

Επειδή $\hat{ΟΔΓ} = \hat{ΟΓΔ}$ το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές και $ΟΔ = ΟΓ$. Επειδή $ΑΓ = ΒΔ$ και $ΟΓ = ΟΔ$ είναι και $ΑΓ - ΟΓ = ΒΔ - ΟΔ \Leftrightarrow ΟΑ = ΟΒ$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΑΒ έχουν:

1) τη πλευρά ΑΒ κοινή

2) $ΑΔ = ΒΓ$ και

3) $ΑΓ = ΒΔ$, οπότε με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν $\hat{\Delta}ΑΒ = \hat{ΑΒΓ}$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

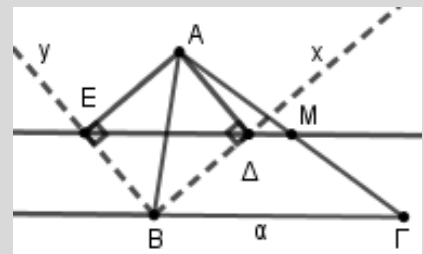
$$\hat{\Delta}ΑΒ + \hat{ΑΒΓ} + \hat{ΑΔΓ} + \hat{ΒΓΔ} = 360^\circ \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}ΑΒ + 2\hat{ΑΔΓ} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}ΑΒ + \hat{ΑΔΓ} = 180^\circ.$$

Οι γωνίες $\hat{\Delta}ΑΒ$ και $\hat{ΑΔΓ}$ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ, επειδή είναι παραπληρωματικές, οι ευθείες ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλες (1). Αν οι ΑΔ, ΒΓ ήταν και αυτές παράλληλες τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα ήταν παραλληλόγραμμο και θα είχε $ΑΒ = ΓΔ$ που είναι άτοπο. Άρα οι ΑΒ, ΓΔ τέμνονται (2). Επειδή $ΑΔ = ΒΓ$, από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37107. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο.

β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.



γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha = ΒΓ$.

Λύση

α) Επειδή οι Βx και Βy είναι διχοτόμοι των γωνιών Β και $\hat{Β}_{εξ}$, είναι $\hat{ΓΒΔ} = \hat{\Delta}ΒΑ = \omega$ και

$$\hat{ΑΒΕ} = \hat{ΕΒΖ} = \varphi. \text{ Είναι } \hat{ΓΒΔ} + \hat{\Delta}ΒΑ + \hat{ΑΒΕ} + \hat{ΕΒΖ} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\omega + \omega + \varphi + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^\circ \Leftrightarrow$$

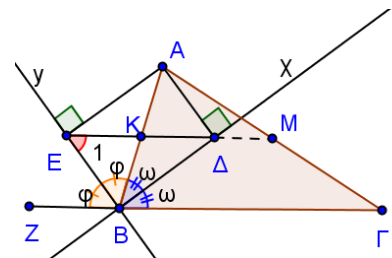
$$\omega + \varphi = 90^\circ, \text{ άρα } \hat{ΕΒΔ} = \omega + \varphi = 90^\circ.$$

Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ έχει τρεις ορθές και είναι ορθογώνιο.

β) Οι ΑΒ, ΔΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου και είναι ίσες, άρα και $\hat{ΚΕΒ} = \hat{ΚΒΕ}$ ως μισά των διαγωνίων. Το τρίγωνο ΚΕΒ είναι ισοσκελές με

βάση τη ΒΕ, άρα $\hat{ΚΕΒ} = \hat{ΚΒΕ} = \varphi$, άρα και $\hat{ΚΕΒ} = \hat{ΕΒΖ} = \varphi$.

Οι γωνίες όμως $\hat{ΚΕΒ}$ και $\hat{ΕΒΖ}$ είναι εντός εναλλάξ των ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΒ, άρα οι ΔΕ, ΒΓ είναι παράλληλες. Οι ΑΒ, ΔΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου οπότε διχοτομούνται στο Κ. Στο



τρίγωνο ABΓ το Κ είναι μέσο της AB και η ΔΕ είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα η ΔΕ διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.

γ) Επειδή τα Κ, Μ είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ABΓ, είναι $KM \parallel B\Gamma$ (1) και $KM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Επειδή οι ΒΚ, ΓΜ τέμνονται στο Α, από την (1) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο. Αν

$$\delta \text{ η διάμεσος του τραpezίου, τότε: } \delta = \frac{KM + B\Gamma}{2} = \frac{\frac{\alpha}{2} + \alpha}{2} = \frac{\frac{3\alpha}{2}}{2} = \frac{3\alpha}{4}.$$

37114. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $AB < AD$ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

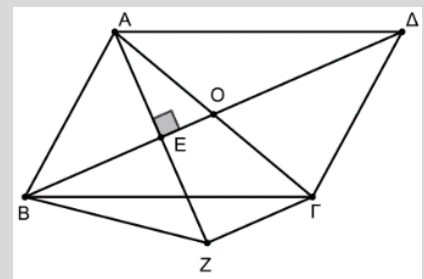
Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ.

Αν το Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.

β) $Z\Gamma = 2OE$.

γ) Το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Το ΔΕ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΖ, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Το ΟΕ ενώνει τα μέσα Ο και Ε των πλευρών ΑΓ και ΑΖ αντίστοιχα, στο τρίγωνο ΑΖΓ άρα

$$OE = \frac{Z\Gamma}{2} \Leftrightarrow Z\Gamma = 2OE.$$

γ) Επειδή το ΟΕ ενώνει τα μέσα Ο και Ε των πλευρών ΑΓ και ΑΖ αντίστοιχα στο τρίγωνο ΑΖΓ θα ισχύει ότι $OE \parallel Z\Gamma$, άρα και $BD \parallel Z\Gamma$. Η ΒΖ τέμνει την ΑΒ άρα τέμνει και την παράλληλη της ΓΔ, οπότε οι πλευρές ΒΖ και ΓΔ δεν είναι παράλληλες. Άρα το ΒΔΖΓ είναι τραπέζιο. Στο τρίγωνο ΑΒΖ το ΒΕ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Άρα $BZ = AB$ αλλά και $AB = GD$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, οπότε $BZ = GD$. Άρα το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37115. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα $\Delta Z = AD$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda \parallel \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2} \Delta B$.

Λύση

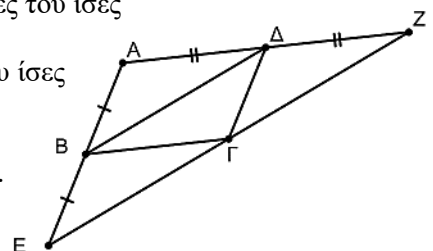
α) i. Επειδή $BE \parallel \Delta\Gamma$ το τετράπλευρο ΒΔΓΕ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $\Delta Z \parallel B\Gamma$ το τετράπλευρο ΒΔΖΓ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Επειδή το ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι $\Gamma Z \parallel B\Delta$ (1).

Επειδή το ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι $\Gamma E \parallel B\Delta$ (2).

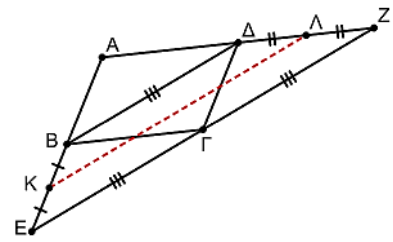
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\Gamma Z \parallel \Gamma E$, άρα τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.



β) Τα B, Δ είναι μέσα των AE, AZ αντίστοιχα, οπότε $BΔ // EZ$.
Επειδή επιπλέον οι BE, ΔZ τέμνονται, το τετράπλευρο BEZΔ είναι τραπέζιο.

Η ΚΛ είναι διάμεσος του τραπέζιου, άρα $ΚΛ // ΔΒ$ και

$$ΚΛ = \frac{ΔΒ + EZ}{2} = \frac{ΔΒ + ΕΓ + ΓΖ}{2} = \frac{ΔΒ + ΔΒ + ΔΒ}{2} = \frac{3}{2} ΔΒ.$$

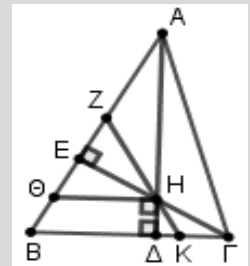


37118. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = 2ZE$

β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο.

γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

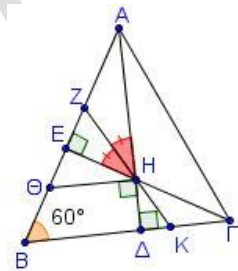
$$ΒΑΔ + Β = 90^\circ \Leftrightarrow ΒΑΔ + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow ΒΑΔ = 30^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ΑΕΗ έχουμε:

$$ΕΗΑ + ΕΑΗ = 90^\circ \Leftrightarrow ΕΗΑ + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow ΕΗΑ = 60^\circ.$$

Επειδή η ΖΗ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΗΕ, είναι $ΕΗΖ = 30^\circ$, οπότε στο

$$\text{ορθογώνιο τρίγωνο ΕΗΖ ισχύει ότι } EZ = \frac{ZH}{2} \Leftrightarrow ZH = 2EZ$$



β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ΑΘΗ έχουμε:

$$ΒΑΔ + ΑΘΗ = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + ΑΘΗ = 90^\circ \Leftrightarrow ΑΘΗ = 60^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου Ε έχουμε:

$$ΑΘΗ + ΕΗΘ = 90^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + ΕΗΘ = 90^\circ \Leftrightarrow ΕΗΘ = 30^\circ$$

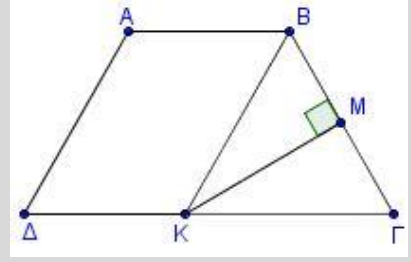
Επειδή $ΕΗΘ = ΕΗΖ = 30^\circ$, η ΗΕ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΘΗΖ και επειδή είναι και ύψος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Όμως $ΑΘΗ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΘΗΖ είναι ισόπλευρο.

γ) Είναι $ΘΗ \perp ΑΔ$ και $ΒΚ \perp ΑΔ$, οπότε $ΘΗ \parallel ΒΚ$ (1).

$\Delta ΗΚ = ΑΗΕ = 30^\circ$ ως κατακορυφήν, οπότε από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ΗΔΚ είναι: $\Delta ΗΚ + ΗΚΔ = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + ΗΚΔ = 90^\circ \Leftrightarrow ΗΚΔ = 60^\circ$.

Επειδή οι ΗΚ, ΒΘ τέμνονται στο Ζ, το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι τραπέζιο. Επειδή $ΗΚΔ = Β = 60^\circ$, οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση ΒΚ του τραπέζιου είναι ίσες, οπότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

37128. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B , η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς τη $B\Gamma$ το τέμνει στο M .



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.

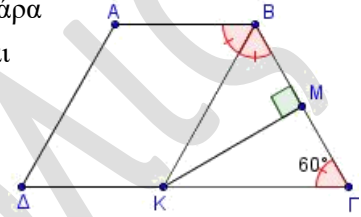
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

Λύση

α) Επειδή οι γωνίες B και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από τη $B\Gamma$, είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $B + \Gamma = 180^\circ$. Όμως $B = 2\Gamma$, άρα $2\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 3\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 60^\circ$ και $B = 120^\circ$. Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε του βάση είναι ίσες, άρα $A = B = 120^\circ$ και $\Delta = \Gamma = 60^\circ$.



β)i. Επειδή η BK είναι διχοτόμος της γωνίας B , είναι

$$\angle ABK = \angle KB\Gamma = 60^\circ$$

Στο τρίγωνο $BK\Gamma$ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60° , οπότε και η τρίτη γωνία του είναι 60° και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Τότε $K\Gamma = B\Gamma = AB = A\Delta$ και επειδή $B\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, είναι και $\Delta K = B\Gamma = AB$, οπότε το τετράπλευρο $ABK\Delta$ έχει τις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

ii. Το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και το KM είναι ύψος του, άρα θα είναι και διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή το M είναι μέσο του $B\Gamma$.

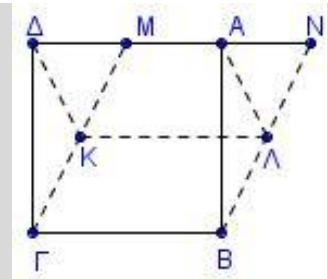
37129. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓM και BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Είναι $MN = MA + AN = \frac{A\Delta}{2} + \frac{A\Delta}{2} = A\Delta = B\Gamma$ και $MN \parallel B\Gamma$, αφού $A\Delta \parallel B\Gamma$, άρα το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τμήματα $M\Gamma$ και NB είναι ίσα και παράλληλα γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $MNB\Gamma$, άρα και τα MK και $N\Lambda$ είναι ίσα και παράλληλα, γιατί $MK = \frac{M\Gamma}{2}$ και $N\Lambda = \frac{NB}{2}$.

Το τετράπλευρο $MKN\Lambda$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Είναι $MN \parallel K\Lambda$ και $MN = K\Lambda$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, όμως $MN = A\Delta$, άρα τα τμήματα $A\Delta$ και $K\Lambda$ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το $A\Lambda$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου NAB , άρα

$$AL = \frac{BN}{2} = \frac{MG}{2} = MK \quad (1)$$

Είναι $MA \parallel KL$ (2) αφού $MN \parallel KL$. Η MK τέμνει τη $ΔK$ άρα θα τέμνει και κάθε παράλληλή της, άρα θα τέμνει και την AL (3). Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $AMKL$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

37130. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $AB > BΓ$ και $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στην προέκταση της $BΓ$ (προς το $Γ$) τέτοιο ώστε $ΓZ = BΓ$. Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $ΕΓ = ΓB$, να αποδείξετε ότι:

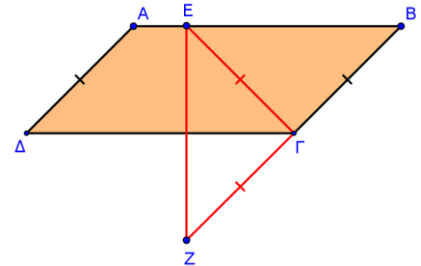
- α) Η γωνία BEZ είναι ορθή.
- β) Το τετράπλευρο $AEΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ) Το τετράπλευρο $ΑΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

α) Αφού $ΓZ = BΓ$ το $Γ$ μέσο της BZ . $ΕΓ = BΓ = \frac{BZ}{2}$ (διάμεσος ίση με το μισό απέναντι πλευράς), οπότε το τρίγωνο ZEB είναι ορθογώνιο.

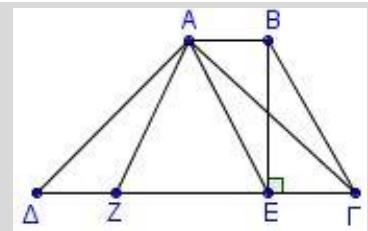
β) $AE \parallel ΔΓ$ και η $ΕΓ$ τέμνει την $BΓ$ άρα θα τέμνει και την παράλληλη της $ΑΔ$. Οπότε το $AEΓΔ$ είναι τραπέζιο. Αλλά $ΑΔ = BΓ$ (απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και $BΓ = ΓΕ$, άρα $ΑΔ = ΓΕ$, οπότε το $AEΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) $ΑΔ \parallel ΓZ$ άρα το $ΑΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.



37134. Δίνεται τραπέζιο $ABΓΔ$ με $AB \parallel ΓΔ$, $ΔΓ = 4AB$ και $BΓ = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Z της $ΓΔ$, ώστε $ΔZ = AB$. Αν η γωνία $Γ$ είναι 60° και BE το ύψος του τραπέζιου, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ABΓΕ$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Το τρίγωνο $ΖΑΕ$ είναι ισόπλευρο.
- γ) Τα τρίγωνα $ΔΑΖ$ και $ΓΑΕ$ είναι ίσα.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BEΓ$ από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε: $ΕΒΓ + Γ = 90^\circ \Leftrightarrow ΕΒΓ = 30^\circ$ άρα $ΕΓ = \frac{BΓ}{2} = AB$.

Επειδή τα τμήματα AB και $ΕΓ$ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο $AEΓB$ είναι παραλληλόγραμμο.

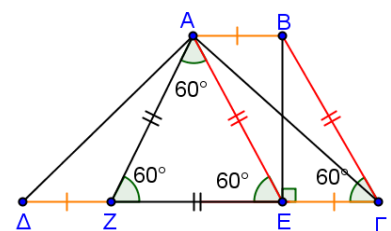
β) Είναι $ZE = ΔΓ - ΔZ - ΕΓ = 4AB - AB - AB = 2AB$.

Όμως $BΓ = 2AB$ και $BΓ = AE$, άρα $ZE = AE$, οπότε το τρίγωνο $ΖΑΕ$

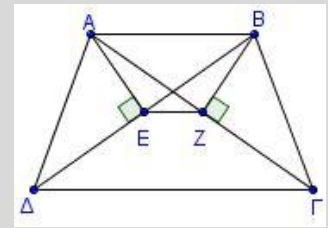
είναι ισοσκελές. Είναι $ΑΕΖ = Γ = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AE, BΓ$ που τέμνονται από την $ΓΔ$, οπότε το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, ως ισοσκελές με μία γωνία του ίση με 60° .

γ) Τα τρίγωνα $ΔΑΖ$ και $ΓΑΕ$ έχουν:

- 1) $ΔZ = ΓΕ$
- 2) $AZ = AE$ γιατί το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο και
- 3) $ΑΖΔ = ΑΕΓ = 120^\circ$, οπότε με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

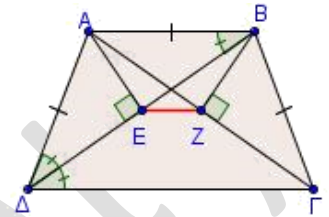


- 37135.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγωνίες $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.
 - $AE = BZ$.
 - Το τετράπλευρο $AENZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
 - Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .



Λύση

α) Επειδή $AD = B\Gamma = AB$, τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $AB\Gamma$ είναι ισοσκελή με βάσεις $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Τα AE , BZ είναι ύψη που αντιστοιχούν στις βάσεις των ισοσκελών τριγώνων $A\Delta B$ και $AB\Gamma$, οπότε είναι και διάμεσοί τους, δηλαδή τα σημεία E , Z είναι τα μέσα των $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και ABZ έχουν:

- την πλευρά AB κοινή και
- $AZ = AE$ γιατί είναι μισά των ίσων διαγωνίων $A\Gamma$, $B\Delta$ του ισοσκελούς τραπεζίου

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες και είναι ίσα. Οπότε έχουν και $AE = BZ$ (1).

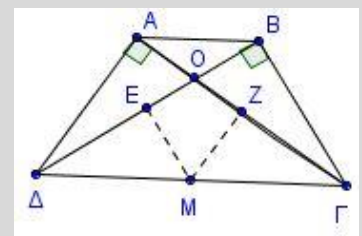
γ) Τα σημεία E και Z είναι μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου, άρα $EZ \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$ (2).

Είναι $\angle AEZ + \angle BZE = 90^\circ + \angle BEZ + 90^\circ + \angle AZE > 180^\circ$, άρα οι AE και BZ τέμνονται προς το μέρος των E και Z (3).

Από τις σχέσεις (1),(2),(3), προκύπτει ότι το τετράπλευρο $AENZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Επειδή το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Delta$, ισχύει ότι: $\angle A\Delta B = \angle A\Delta\Gamma$. Όμως $\angle A\Delta\Gamma = \angle B\Delta\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα $\angle A\Delta B = \angle B\Delta\Gamma$, δηλαδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

- 37139.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στη $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα M , E και Z των $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



- $ME = MZ$.
- Η MZ είναι κάθετη στην $A\Gamma$.
- Τα τρίγωνα $M\Delta E$ και $M\Gamma Z$ είναι ίσα.
- Η OM είναι μεσοκάθετος του EZ .

Λύση

α) Τα M , E είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$, οπότε $EM = \frac{B\Gamma}{2}$ (1). Τα Z , M είναι μέσα δύο

πλευρών στο τρίγωνο $\Gamma A\Delta$, άρα $MZ = \frac{A\Delta}{2}$ και $MZ \parallel A\Delta$ (2).

Επειδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο ισχύει ότι $B\Gamma = A\Delta$ οπότε από τις (1),(2) προκύπτει ότι $ME = MZ$.

β) Επειδή $MZ \parallel A\Delta$ και $A\Delta \perp A\Gamma$ είναι και $MZ \perp A\Gamma$.

- γ)** Τα τρίγωνα $M\Delta E$ και $M\Gamma Z$ έχουν:
- $ME = MZ$

2) $ΜΔ = ΜΓ$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΓΔ και

3) $ΔΕ = \frac{ΔΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = ΖΓ$ γιατί οι ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του ισοσκελούς τραπέζιου.

Από το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΠΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα.

δ) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα έχουν και $ΟΔΓ = ΟΓΔ$. Τότε όμως το τρίγωνο ΟΔΓ είναι ισοσκελές και $ΟΔ = ΟΓ$. Επειδή όμως είναι $ΔΕ = ΖΓ$, θα είναι και $ΟΕ = ΟΖ$. Αλλά $ΜΕ = ΜΖ$, δηλαδή η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

37161. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) και ΑΔ διάμεσος.

Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Ένας μαθητής στο α) i. ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

<< Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση του ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $\triangle ΑΒΚ$ και $\triangle ΑΓΚ$ έχουν

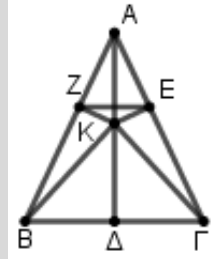
1. $ΒΚ = ΚΓ$

2. $\hat{Β}ΑΚ = \hat{Γ}ΑΚ$ επειδή ΑΚ διχοτόμος της γωνίας Α

3. $\hat{ΑΒΚ} = \hat{ΑΓΚ}$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.>>

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία - Πλευρά - Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ.



Λύση

α) Η ΑΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε είναι ύψος και διάμεσος του. Επειδή το Κ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Α ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, άρα $ΖΚ = ΚΕ$, οπότε το τρίγωνο ΖΚΕ είναι ισοσκελές. Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ ισαπέχει από τα Β, Γ, δηλαδή $ΚΒ = ΚΓ$, οπότε το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΖΚ και ΑΕΚ έχουν την πλευρά ΑΚ κοινή και $ΚΖ = ΚΕ$, δηλαδή έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, οπότε είναι ίσα. Άρα $ΑΖ = ΑΕ$ και το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές και έχει $\hat{ΑΖΕ} = \hat{ΑΕΖ}$. Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ, έχουμε:

$$\hat{ΑΖΕ} + \hat{ΑΕΖ} + \hat{Α} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{ΑΖΕ} = 180^\circ - \hat{Α} \Leftrightarrow \hat{ΑΖΕ} = \frac{180^\circ - \hat{Α}}{2}$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

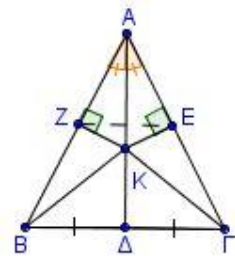
$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Β} = 180^\circ - \hat{Α} \Leftrightarrow \hat{Β} = \frac{180^\circ - \hat{Α}}{2}.$$

Είναι $\hat{ΑΖΕ} = \hat{Β}$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΖΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, οι ευθείες ΖΕ και ΒΓ είναι παράλληλες (2). Επειδή οι ΒΖ, ΓΕ τέμνονται στο Α, από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΒΖΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες, δηλαδή

$\hat{ΑΚΒ} = \hat{ΑΚΓ}$. Τώρα τα τρίγωνα $\triangle ΑΒΚ$ και $\triangle ΑΓΚ$ έχουν

1. $ΒΚ = ΚΓ$



2. $AKB = AK\Gamma$

3. $ABK = A\Gamma K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων και εφαρμόζεται πλέον το κριτήριο ΓΠΓ.

37162. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ, E και Z είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) οι γωνίες $H\Delta Z$ και HEZ είναι ίσες.

γ) οι γωνίες $E\Delta Z$ και EHZ είναι ίσες.

Λύση

α) Επειδή τα Δ, E είναι μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, ισχύει ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ άρα και $\Delta E \parallel HZ$ (1).

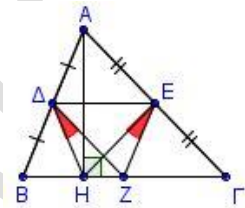
Επειδή τα E, Z είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι: $EZ \parallel AB$ και

$EZ = \frac{AB}{2}$ (2). Στο ορθογώνιο τρίγωνο AHB η $H\Delta$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί

στην υποτείνουσα, άρα $H\Delta = \frac{AB}{2}$ (3).

Από τις σχέσεις (2),(3) προκύπτει ότι $EZ = H\Delta$ (4).

Η HB τέμνει την AB , οπότε θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτή, άρα και την EZ (5). Από τις (1), (4),(5) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.



β) Τα τρίγωνα $H\Delta Z$ και HEZ έχουν:

1) $EZ = H\Delta$

2) τη πλευρά HZ κοινή και

3) $\Delta HZ = EZH$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπέζιου

Βάση του κριτηρίου ΠΠΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα και $H\Delta Z = HEZ$

γ) Είναι $\Delta EH = EHZ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta E, HZ$ που τέμνονται από την EH . Επίσης

$E\Delta H = \Delta EZ$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τραπέζιου και $H\Delta Z = HEZ$ άρα και

$$E\Delta H - H\Delta Z = \Delta EZ - HEZ \Leftrightarrow E\Delta Z = \Delta EH = EHZ.$$

3^ο Θέμα

12418. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > \Gamma\Delta$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta E$ με βάση $A\Delta$. Αν M είναι το μέσο της βάσης $\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Η διάμεσος EM του τριγώνου $E\Delta\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας AEB .

Λύση

α) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma E$ έχουν:

- $EA = EB$ γιατί το τρίγωνο EAB είναι ισοσκελές
- $A\Delta = B\Gamma$ γιατί το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές
- $\angle EAD = \angle EBG$ γιατί είναι αθροίσματα ίσων γωνιών ($A_1 = B_1$ και $A_2 = B_2$)

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα άρα έχουν $\angle AED = \angle BEG$ (1) και $ED = EG$. Επειδή το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές η διάμεσος EM που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και διχοτόμος του, δηλαδή $\angle DEM = \angle MEG$ (2).

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει:

$\angle AED + \angle DEM = \angle BEG + \angle MEG \Leftrightarrow \angle AEM = \angle MEB$ άρα η διάμεσος EM του τριγώνου $E\Delta\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας AEB .

