

3ο Κεφάλαιο: Τρίγωνα

3.1. Στοιχεία και είδη τριγώνων

1. Ποια είναι τα κύρια στοιχεία τριγώνου;

Απάντηση

Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται κύρια στοιχεία του τριγώνου.

2. Πως διακρίνονται τα τρίγωνα με βάση τις πλευρές τους και τι γνωρίζετε γι' αυτά;

Απάντηση

Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων: το σκαληνό, το ισοσκελές και το ισόπλευρο. Έτσι, ένα τρίγωνο λέγεται:

- σκαληνό, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες,
- ισοσκελές, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες.

- Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ η πλευρά $B\Gamma$ λέγεται βάση του και το A κορυφή του,
- ισόπλευρο, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

3. Πως διακρίνονται τα τρίγωνα με βάση τις γωνίες τους και τι γνωρίζετε σε κάθε περίπτωση;

Απάντηση

Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται

- οξυγώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες,
- ορθογώνιο, όταν έχει μια γωνία ορθή. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται υποτείνουσα και οι άλλες δύο λέγονται κάθετες πλευρές του τριγώνου,
- αμβλυγώνιο, όταν έχει μια γωνία αμβλεία.

4. Ποια είναι τα δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου;

Απάντηση

Οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη ενός τριγώνου λέγονται δευτερεύοντα στοιχεία του.

5. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου, της διχοτόμου και του ύψους τριγώνου.

Απάντηση

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.

Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.

Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

6. Ποιες πλευρές σε δύο ίσα τρίγωνα λέγονται αντίστοιχες ή ομόλογες;

Απάντηση

Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται αντίστοιχες ή ομόλογες.

3.2. 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

7. Να διατυπώσετε το 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ)

Απάντηση

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$.

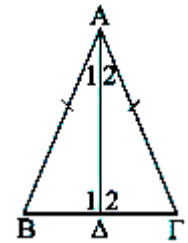
Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ έχουν $AB = AG$, $A\Delta$ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως

είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι $B\Delta = \Delta\Gamma$, οπότε η $A\Delta$ είναι διάμεσος

και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$ προκύπτει ότι

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 90^\circ$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου.

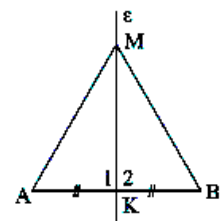
**9. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος, ισαπέχει από τα άκρα του.****Απόδειξη**

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος AB και M ένα σημείο της. Τα τρίγωνα MKA

και MKB έχουν $KA=KB$, MK κοινή και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90^\circ$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα,

οπότε $MA=MB$.

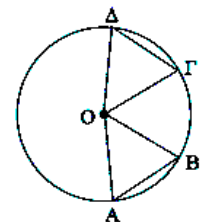
Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

**10. Να αποδείξετε ότι αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.****Απόδειξη**

Έστω AB και $\Gamma\Delta$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (O, ρ) . Τότε είναι $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$.

Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν $OA = O\Gamma (= \rho)$, $OB = O\Delta (= \rho)$ και $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$.

Επομένως είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$.

**Βασικές ασκήσεις**

1. Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα $BK = \Gamma\Lambda = AM$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο. (Εμπέδωσης 2)
2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του $BA, \Gamma A$ θεωρούμε ίσα τμήματα $A\Delta, AE$ αντίστοιχα. Αν M το μέσο της βάσης $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Αποδεικτικές 2)
3. Δίνεται κύκλος κέντρου O και χορδή του AB . Προεκτείνουμε την AB και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\hat{O}\hat{\Gamma}\hat{A} = \hat{O}\hat{\Delta}\hat{B}$. (Αποδεικτικές 3)
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των AB και AG . Να αποδείξετε ότι:
 - α) Το τρίγωνο BMG είναι ισοσκελές με $MB = MG$.
 - β) $MK = M\Lambda$
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:
 - α) $B_{εξ} = \Gamma_{εξ}$
 - β) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG E$ είναι ίσα.
 γ) Η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$. (τράπεζα 5053)

6. Δίνεται οξεία γωνία $\hat{xOy}$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και την Oy στα Λ, B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- $AL = BK$
 - Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL, BK .
 - Η OP διχοτομεί τη γωνία $\hat{xOy}$.

(τράπεζα 3696)

3.3. 2ο – 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

11. Να διατυπώσετε το 2ο (ΓΠΓ) και το 3ο (ΠΠΠ) κριτήριο ισότητας τριγώνων.

Απάντηση

2ο: Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3ο: Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

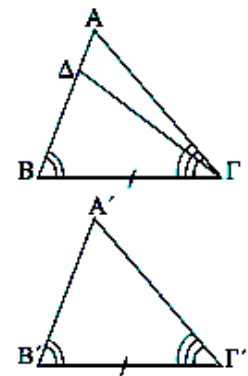
12. Να αποδείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.
Θα αποδείξουμε ότι έχουν και $AB = A'B'$. Έστω ότι $AB \neq A'B'$, π.χ. $AB > A'B'$.
Τότε υπάρχει σημείο Δ στην AB , ώστε να είναι $B\Delta = B'A'$. Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $B\Delta = B'A'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}'$.

Αλλά $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}$ που είναι άτοπο, γιατί το Δ είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $A\Gamma B$ και επομένως $B\hat{\Gamma}\Delta < \hat{\Gamma}$. Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $AB \neq A'B'$, άρα $AB = A'B'$. Τα τρίγωνα, λοιπόν, $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $AB = A'B'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων



13. Να αποδείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη

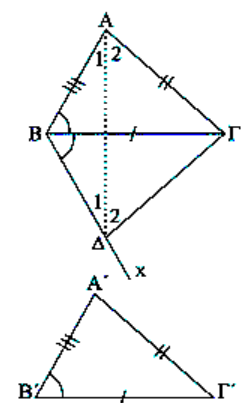
Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\Gamma A = \Gamma'A'$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα είναι οξυγώνια.
Θεωρούμε την ημιευθεία Bx , ώστε $\hat{B}\hat{x} = \hat{B}'$ και σημείο της Δ , ώστε $B\Delta = A'B'$.
Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, γιατί έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $B\Delta = A'B'$ και $\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{B}'$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \Gamma'A'$ και $\hat{\Delta} = \hat{A}'$.
Επειδή $B\Delta = A'B'$ και $A'B' = AB$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

Επίσης, αφού $\Gamma\Delta = A\Gamma'$ και $A\Gamma' = A\Gamma$, προκύπτει ότι

$$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2 \quad (2).$$

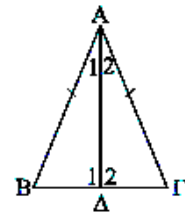
Επειδή τα τρίγωνα είναι οξυγώνια το τμήμα $A\Delta$ βρίσκεται στο εσωτερικό των γωνιών A και Δ , οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{\Delta} = \hat{A}'$, έχουμε $\hat{A} = \hat{A}'$, που είναι το ζητούμενο.



14. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

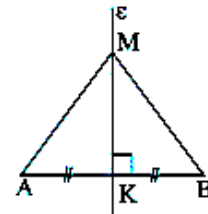
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και AD η διάμεσός του. Τα τρίγωνα ABD και AGD έχουν $AB=AG$, AD κοινή και $BD=GD$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1=\hat{A}_2$, και $\hat{A}_1=\hat{A}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η AD είναι διχοτόμος και ύψος.



15. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος, ανήκει στη μεσοκάθετο του.

Απόδειξη

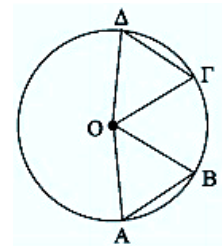
Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB , M ένα σημείο, ώστε $MA=MB$ και K το μέσο του AB . Τότε το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές και η MK διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η MK θα είναι και ύψος δηλαδή η MK είναι μεσοκάθετος του AB .



16. Να αποδείξετε ότι αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τόξα AB και $ΓΔ$ ενός κύκλου (O, ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με $AB=ΓΔ$. Τότε τα τρίγωνα OAB και $OΓΔ$ έχουν:
 $OA=OΓ (= \rho)$, $OB=OD (= \rho)$ και $AB=ΓΔ$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα.
 Επομένως, $\hat{AOB}=\hat{GOΔ}$, οπότε $AB=ΓΔ$.



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Βασικές ασκήσεις

- Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα MD . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\GammaΔ$ είναι ίσα. (Εμπέδωσης 3)
- Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. (Αποδεικτικές 1)
- Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Η μεσοκάθετος της πλευράς AG τέμνει την προέκταση της GB στο Δ . Προεκτείνουμε τη DA κατά τμήμα $AE=AB$. Να αποδείξετε ότι:
 α) το τρίγωνο ΔAG είναι ισοσκελές,
 β) το τρίγωνο $\Gamma Δ E$ είναι επίσης ισοσκελές.
- Δίνεται τετράπλευρο $AB\GammaΔ$ με $BA=B\Gamma$ και $\Delta A=\Delta \Gamma$. Οι διαγώνιοι AG , $BΔ$ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:
 α) Η $BΔ$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετράπλευρου $AB\GammaΔ$.
 β) Η $BΔ$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AG . (Τράπεζα 5144)

3.6. Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

17. Ποια είναι τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων;

Απάντηση

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

18. Να αποδείξετε ότι αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα

Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$,

$B\Gamma = B'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$. Θα αποδείξουμε ότι είναι και $AB = A'B'$.

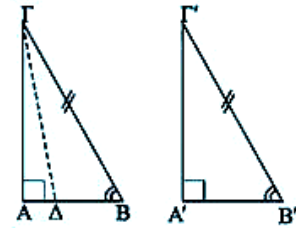
Έστω ότι $AB \neq A'B'$, π.χ. $AB > A'B'$. Τότε στην πλευρά BA υπάρχει σημείο Δ , ώστε $B\Delta = A'B'$.

Τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\Delta B = A'B'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$,

επομένως είναι ίσα, οπότε θα είναι $\hat{\Delta} = \hat{A}' = 90^\circ$, δηλαδή $\Gamma\Delta \perp AB$. Έτσι

έχουμε $\Gamma\Delta \perp AB$ και $\Gamma\Delta \perp AB$ που είναι άτοπο (μοναδικότητα καθέτου). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $AB \neq A'B'$. Άρα $AB = A'B'$, οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα, γιατί έχουν

$B\Gamma = B'\Gamma'$, $BA = B'A'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (ΠΓΠ).



19. Να αποδείξετε ότι αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

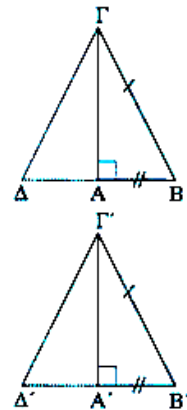
Έστω δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ (σχ.27) με $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ και $AB = A'B'$.

Θα αποδείξουμε ότι και $\hat{B} = \hat{B}'$. Στις προεκτάσεις των BA και $B'A'$ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Δ' , ώστε να είναι $A\Delta = AB$ και $A'\Delta' = A'B'$.

Τότε η ΓA είναι μεσοκάθετος του ΔB και η $\Gamma'A'$ μεσοκάθετος του $\Delta'B'$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $\Gamma\Delta = \Gamma B$ και $\Gamma'\Delta' = \Gamma'B'$. Από τις τελευταίες ισότητες και προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$. Έτσι τα τρίγωνα $\Gamma\Delta B$ και $\Gamma'\Delta'B'$ έχουν $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$,

$B\Gamma = B'\Gamma'$ και $\Delta B = \Delta'B'$ (ως διπλάσια των ίσων τμημάτων AB και $A'B'$), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$. Τότε και τα αρχικά τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).



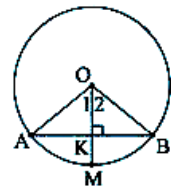
20. Να αποδείξετε ότι η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του, διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O, ρ) , μια χορδή του AB και την κάθετη OK της AB , που τέμνει τον κύκλο στο σημείο M . Επειδή το τμήμα OK είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο OAB ($OA = OB = \rho$), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το K είναι μέσο του AB και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $AM = MB$.

Ασκηόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων



21. Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω οι ίσες χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου (O, ρ) και OK , OL τα αποστήματά τους αντίστοιχα. Τα τρίγωνα KOA και $LO\Gamma$, έχουν $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$

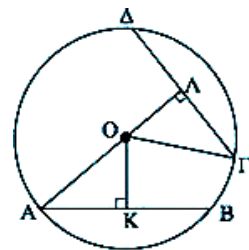
$OA = O\Gamma (= \rho)$ και $AK = \Gamma L$ (αφού $AB = \Gamma\Delta$).

Επομένως είναι ίσα, οπότε $OK = OL$.

Αντίστροφα.

Έστω ότι τα αποστήματα OK και OL είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα KOA και $LO\Gamma$ έχουν $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$, $OA = O\Gamma$ και $OK = OL$, επομένως είναι ίσα, οπότε

$$AK = \Gamma L \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta.$$



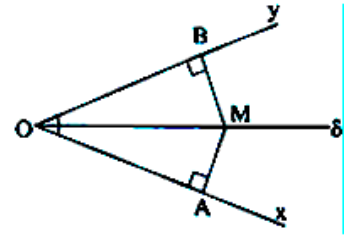
22. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές, είναι σημείο της διχοτόμου.

Απόδειξη

Έστω μια γωνία $\chi\hat{O}y$ και M ένα σημείο της διχοτόμου της $O\delta$. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα AOM και BOM είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $\hat{M\hat{O}A} = \hat{M\hat{O}B}$, επομένως $MA = MB$.

Αντίστροφα

Έστω M ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι $MA = MB$. Τότε τα τρίγωνα AOM και BOM είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $MA = MB$ και επομένως $\hat{M\hat{O}A} = \hat{M\hat{O}B}$, οπότε το M είναι σημείο της διχοτόμου $O\delta$.



Βασικές ασκήσεις

11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:
 - α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB είναι ίσα.
 - β) $AD = AE$.
 (τράπεζα 2846)
12. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:
 - α) από τη βάση του
 - β) από τις ίσες πλευρές του.
 (εμπέδωσης 2)
13. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
 - α) το M ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου,
 - β) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του M από τις ίσες πλευρές του.
 (αποδεικτικές 1)
14. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι $\alpha = \alpha'$, $\nu_\alpha = \nu_{\alpha'}$ και $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (αποδεικτικές 2)
15. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο οξυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι $\alpha = \alpha'$, $\nu_\beta = \nu_{\beta'}$ και $\nu_\gamma = \nu_{\gamma'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (αποδεικτικές 3)
16. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές. (αποδεικτικές 4)
17. Δίνεται κύκλος (O, R) , οι ίσες χορδές του $AB, \Gamma\Delta$ και τα αποστήματά τους OK και OL αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των BA και $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο M , να αποδείξετε ότι:
 - α) τα τρίγωνα MOK και MOL είναι ίσα,
 - β) $MA = M\Gamma$ και $MB = M\Delta$
 (αποδεικτικές 5)
18. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα MD . Να αποδείξετε ότι:
 - α) Τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.
 - β) Τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

Ασκησόπολις
 ο πιο πλούσιος κόσμος
 θεμάτων και ασκήσεων

(τράπεζα 3421)
19. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Έστω Δ, H τα μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .
 - α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και EZH .
 - β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.
 (τράπεζα 4974)

3.7. Κύκλος – Μεσοκάθετος - διχοτόμος**23. Τι είναι ο γεωμετρικός τόπος;****Απάντηση**

Γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.

24. Τι ονομάζεται κύκλος;**Απάντηση**

Κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.

25. Τι ονομάζεται μεσοκάθετος τμήματος;**Απάντηση**

Μεσοκάθετος τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

26. Τι ονομάζεται διχοτόμος γωνίας;**Απάντηση**

Διχοτόμος γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

3.8-3.9. Κεντρική συμμετρία – Αξονική συμμετρία**27. Πότε δύο σχήματα Σ και Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο O ; Πως ονομάζεται το O ;****Απάντηση**

Δύο σχήματα Σ , Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο O , αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το O και αντίστροφα. Το σημείο O λέγεται κέντρο συμμετρίας του σχήματος.

28. Πότε ένα σημείο λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος;**Απάντηση**

Ένα σημείο O λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο A του σχήματος το συμμετρικό του A' , ως προς το O , είναι επίσης σημείο του σχήματος.

29. Πότε ένα σχήμα παρουσιάζει κεντρική συμμετρία;**Απάντηση**

Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει κεντρική συμμετρία.

30. Το ευθύγραμμο τμήμα, η ευθεία και ο κύκλος έχουν κέντρο συμμετρίας; Αν ναι τότε ποιο;**Απάντηση**

- Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του.
- Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας οποιοδήποτε σημείο της.
- Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

31. Πότε δύο σχήματα Σ και Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ευθεία ϵ ; Πως λέγεται η ευθεία ϵ στη περίπτωση αυτή;**Απάντηση**

Δύο σχήματα Σ , Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε , αν και μόνον αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα. Η ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας του σχήματος.

32. Πότε μια ευθεία λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος;

Απάντηση

Μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο A του σχήματος το συμμετρικό του A' , ως προς την ε , είναι επίσης σημείο του σχήματος.

33. Πότε ένα σχήμα παρουσιάζει αξονική συμμετρία;

Απάντηση

Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει αξονική συμμετρία.

34. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας ενός ευθύγραμμου τμήματος και μιας ευθείας $x'x$;

Απάντηση

Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετό του και τον φορέα του ε .

35. Πόσους άξονες συμμετρίας έχει ένας κύκλος και ποιους;

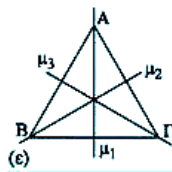
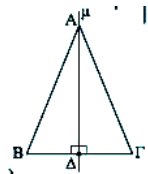
Απάντηση

Ο κύκλος έχει άξονα συμμετρίας το φορέα κάθε διαμέτρου του.

36. Ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας σε ένα ισοσκελές και σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο;

Απάντηση

Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) έχει άξονα συμμετρίας το φορέα μ του ύψους AD .



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του.

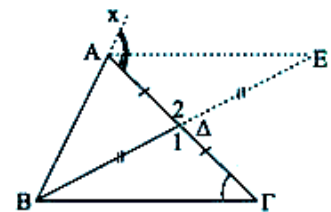
3.10. Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

37. Να αποδείξετε ότι κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε τη διάμεσο BD και στην προέκτασή της, προς το D , θεωρούμε σημείο E , ώστε $DE = BD$. Επειδή το E βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ έχουμε $\Gamma\hat{A}E < \Gamma\hat{A}x = \hat{A}_{εξ}$. Όμως τα τρίγωνα

$B\Delta\Gamma$ και $E\Delta A$ είναι ίσα γιατί έχουν: $BD = DE$, $AD = \Delta\Gamma$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E$. Από την τελευταία ισότητα και την $\Gamma\hat{A}E < \Gamma\hat{A}x$ προκύπτει ότι $\hat{A}_{εξ} > \hat{\Gamma}$. Ομοια αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}_{εξ} > \hat{B}$.



38. Πόσες ορθές ή αμβλείες μπορεί να έχει ένα τρίγωνο;

Απάντηση

Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

39. Τι γνωρίζετε για το άθροισμα δύο γωνιών τριγώνου;

Απάντηση

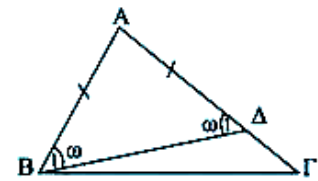
Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .

3.11. Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

40. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta > \gamma$. Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της $A\Gamma$, ώστε $A\Delta = AB$. Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Delta$ και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$. Επειδή η $B\Delta$ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας B , είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$ ενώ η $\hat{\Delta}_1$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου $B\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$. Έτσι έχουμε $\hat{B} > \omega$ και $\omega > \hat{\Gamma}$, επομένως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.



Αντίστροφα. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$, γιατί αν ήταν $\beta = \gamma$ ή $\beta < \gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο.

3.12. Τριγωνική ανισότητα

41. Να αποδείξετε ότι κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

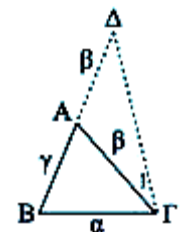
Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\alpha < \beta + \gamma$. Γι' αυτό προεκτείνουμε την πλευρά BA , προς το A , κατά τμήμα $A\Delta = A\Gamma$. Τότε το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και η GA εσωτερική ημιευθεία της $B\Gamma\Delta$, οπότε έχουμε αντίστοιχα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_1 < \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta$.

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $\hat{\Delta} < \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta$, από την οποία σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι $B\Gamma < B\Delta$ ή $\alpha < \beta + \gamma$.

Όμοια προκύπτει ότι $\beta < \gamma + \alpha$ και $\gamma < \alpha + \beta$.

Από τις ανισότητες αυτές, αντίστοιχα προκύπτει ότι $\alpha > \beta - \gamma$, αν $\beta \geq \gamma$ ή $\alpha > \gamma - \beta$, αν $\gamma \geq \beta$, δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο. Επομένως: $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$, $\beta \geq \gamma$.



Βασικές ασκήσεις

20. Υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = \frac{\gamma}{3}$ και $\beta = \frac{3\gamma}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Κατανόησης 3)

21. Αν M σημείο της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι: $AM < AB$ (Εμπέδωσης 5)

22. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ .

Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$

β) $A\Delta < \Delta B$

(τράπεζα 2837)

23. Θεωρούμε δύο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ϵ , τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην ϵ . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ϵ .

α) Αν η BA' τέμνει την ευθεία ϵ στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία ϵ διχοτομεί τη γωνία AOA' .

- ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε.
 β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι:
 i. $KA = KA'$ ii. $KA + KB > AO + OB$

(τράπεζα 3726)

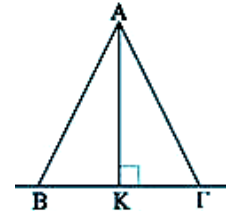
3.13. Κάθετες και πλάγιες

42. Να αποδείξετε ότι αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της κάθετου και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ και ΑΓ δύο ίσα πλάγια τμήματα και ΑΚ το κάθετο τμήμα.
 Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το ΑΚ ύψος του, επομένως θα είναι και διάμεσος, δηλαδή $KB = KG$.

Αντίστροφα. Έστω ότι $KB = KG$. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές δηλαδή $AB = AG$.



43. Από σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια τμήματα. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.
 β) Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ίχνών τους από το ίχνος της κάθετης είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

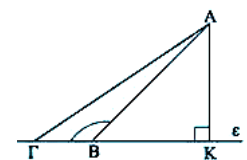
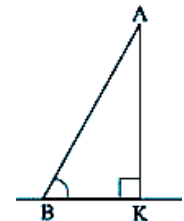
Απόδειξη

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ, η γωνία Κ είναι η μεγαλύτερη ως ορθή. Επομένως η πλευρά ΑΒ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και, άρα, $AB > AK$.

β) Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Θεωρούμε την κάθετο ΑΚ στην ε και δύο πλάγια τμήματα ΑΒ, ΑΓ, όπου Β, Γ σημεία της ε.
 Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο ίχνη Β, Γ των πλάγιων τμημάτων ανήκουν στην ίδια ημιευθεία που ορίζει το σημείο Κ.

Ας υποθέσουμε ότι $KG > KB$. Θα αποδείξουμε ότι $AG > AB$. Αφού το Β είναι μεταξύ των Κ, Γ, η $\hat{A}\hat{B}\hat{G}$ είναι εξωτερική του ορθογώνιου τριγώνου ΚΑΒ, επομένως $\hat{A}\hat{B}\hat{G} > \hat{K} = 90^\circ$, δηλαδή η ΑΒΓ είναι αμβλεία. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΓ βρίσκεται απέναντι από την $\hat{A}\hat{B}\hat{G}$, συνεπώς είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $AG > AB$.

Αντίστροφα. Ας υποθέσουμε ότι $AG > AB$. Αν ήταν $KG = KB$, τότε θα είχαμε $AG = AB$, που είναι άτοπο. Αν $KG < KB$ τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θα είχαμε $AG < AB$ που είναι επίσης άτοπο. Επομένως $KG > KB$.



Ασκησούπολις
 ο πιο πλούσιος κόσμος
 θεμάτων και ασκήσεων

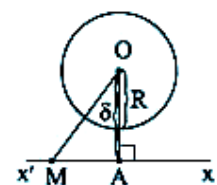
3.14. Σχετική θέση ευθείας και κύκλου

44. α) Πότε μια ευθεία είναι εξωτερική ενός κύκλου (Ο, R); Ποια συνθήκη συνδέει την απόσταση δ του κέντρου του κύκλου από την ευθεία;
 β) Πότε μια ευθεία είναι εφαπτομένη ενός κύκλου; Ποια συνθήκη συνδέει την απόσταση δ του κέντρου του κύκλου από την ευθεία;
 γ) Πότε μια ευθεία τέμνει έναν κύκλο (Ο, R); Ποια συνθήκη συνδέει την απόσταση δ του κέντρου του κύκλου από την ευθεία;

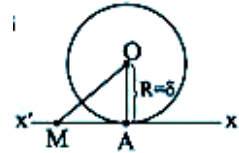
Απάντηση

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο, R) μια ευθεία x'x και την απόσταση $\delta = OA$ του κέντρου Ο από την x'x.

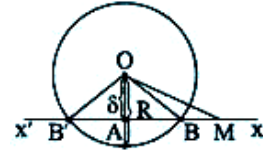
Αν $\delta > R$, τότε η x'x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εξωτερική ευθεία του κύκλου.



Αν $\delta = R$, τότε η $x'x$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Το σημείο Α λέγεται σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο.



Αν $\delta < R$, τότε η $x'x$ έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία $x'x$, λέγεται τέμνουσα του κύκλου και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία τομής της με τον κύκλο.

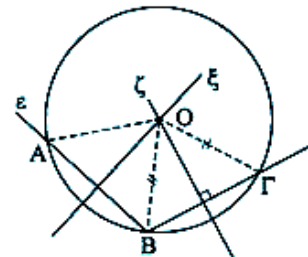


45. Τι σχέση έχει η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη;
Απάντηση

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

46. Να αποδείξετε ότι μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.
Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι μια ευθεία ε και ένας κύκλος (O, ρ) έχουν τρία κοινά σημεία, τα Α, Β, Γ.
Επειδή $OA = OB (= \rho)$ και $OB = OG (= \rho)$, οι μεσοκάθετοι ξ, ζ των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, διέρχονται από το Ο.
Έτσι από το σημείο Ο έχουμε δύο διαφορετικές κάθετες στην ε τις ξ, ζ , που είναι άτοπο.

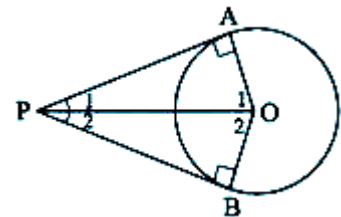


3.15. Εφαπτόμενα τμήματα

47. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ (σχ.60) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, ΟΡ κοινή και $OA = OB (= \rho)$, άρα είναι ίσα, οπότε $PA = PB$.



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

48. Τι σχέση έχει η διακεντρική ευθεία που άγεται από σημείο Ρ εκτός κύκλου (O, R) με το τμήμα που έχει άκρα τα σημεία επαφής των εφαπτομένων του κύκλου που άγονται από το Ρ; Ποιες γωνίες διχοτομεί η ΟΡ;

Απάντηση

Η διακεντρική ευθεία:

- (i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
- (ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

Βασικές ασκήσεις

24. Δίνεται κύκλος (O, ρ) , μια διάμετρος του AB και οι εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του κύκλου στα A και B . Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Γ, Δ , να αποδείξετε ότι $\angle \Gamma O \Delta = 90^\circ$. (Εμπέδωσης 2)
25. Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μίας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο. (Αποδεικτικές 1)
26. Από σημείο M εξωτερικό του κύκλου (O, R) φέρουμε τις εφαπτόμενες MA, MB του κύκλου. Προεκτείνουμε το OB κατά ίσο τμήμα $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}\hat{M}\hat{\Gamma}$ είναι τριπλάσια της $\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma}$. (Αποδεικτικές 2)
27. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου κέντρου O , φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος OP να αποδείξετε ότι $\hat{M}\hat{A}\hat{P} = \hat{M}\hat{B}\hat{P}$. (Αποδεικτικές 3)
28. Έστω ότι κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $P\Gamma E$ στα σημεία A, Δ και B .
- α) Να αποδείξετε ότι:
- i. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$
 - ii. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$
- β) Αν $A\Gamma = BE$, να αποδείξετε ότι
- i. Το τρίγωνο $P\Gamma E$ είναι ισοσκελές.
 - ii. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.
- (τράπεζα 3728)

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

3.16. Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

49. Ποιο τμήμα ονομάζεται διάκεντρος δύο κύκλων;

Απάντηση

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται διάκεντρος των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ .

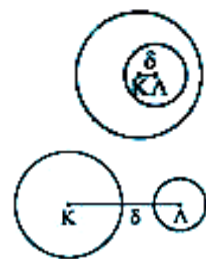
50. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται ώστε δύο κύκλοι να μην έχουν κανένα κοινό σημείο;

Απάντηση

Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με $R > \rho$.

Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta < R - \rho$.

Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$.



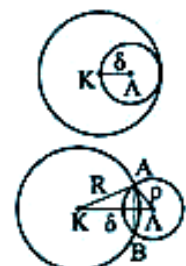
51. Πότε δύο κύκλοι λέγονται εφαπτόμενοι; Με πόσους τρόπους μπορούν να εφάπτονται δύο κύκλοι; Ποια συνθήκη συνδέει τη διάκεντρο δ με τις ακτίνες των κύκλων σε κάθε περίπτωση;

Απάντηση

Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με $R > \rho$.

Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$.

Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$. Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται σημείο επαφής και είναι σημείο της διακέντρου.



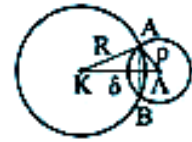
52. Πότε δύο κύκλοι τέμνονται; Ποια συνθήκη συνδέει τη διάκεντρο δ με τις ακτίνες των δύο κύκλων; Ποια είναι η κοινή χορδή των δύο κύκλων;

Απάντηση

Θεωρούμε δύο κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με $R > \rho$.

Οι κύκλοι τέμνονται, δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία, αν και μόνο αν $R - \rho$.

Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται κοινή χορδή των δύο κύκλων.



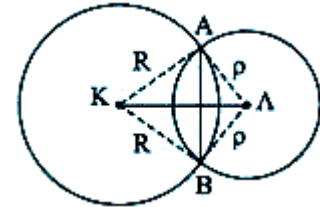
53. Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

Απόδειξη

Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) και A, B τα σημεία τομής τους.

Επειδή $KA = KB = R$, το σημείο K είναι σημείο της μεσοκαθέτου του

AB . Όμοια από την $LA = LB = \rho$ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB . Άρα, η $K\Lambda$ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής AB του κύκλου.



54. Αν δύο ίσοι κύκλοι τέμνονται τότε τι σχέση έχει η διάκεντρος με τη κοινή χορδή τους;

Απάντηση

Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ίσοι, δηλαδή έχουν $R = \rho$, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

Βασικές ασκήσεις

29. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και μια ακτίνα του OA . Γράφουμε κύκλο με διάμετρο OA . Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων; (Εμπέδωσης 2)

30. Δίνεται κύκλος (O, ρ) και εξωτερικό σημείο του P , ώστε $OP < 2\rho$. Γράφουμε κύκλο $(O, 2\rho)$. Να αποδείξετε ότι:

α) ο κύκλος $(O, 2\rho)$ τέμνει τον κύκλο (P, PO) σε δύο σημεία Γ και Δ .

β) τα τμήματα $O\Gamma$ και $O\Delta$ τέμνουν τον κύκλο (O, ρ) στα σημεία A και B .

γ) τα PA και PB εφάπτονται στον (O, ρ) .

(Αποδεικτικές 1)

Γενικές ασκήσεις 3ου κεφαλαίου

31. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB=AG$) και $BD=GE$. Αν K, Λ είναι οι προβολές των B, Γ στις AD και AE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.

β) τα B, Γ ισαπέχουν από τις AD και AE αντίστοιχα.

γ) $AK = AL$.



32. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και έστω Δ, E σημεία της πλευράς $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $BD=DE=EG$. Αν M και N τα μέσα των AB και AG αντίστοιχα και K το σημείο τομής των ευθειών MD και NE , να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές

β) $MD = NE$

γ) $MDA = NEA$

δ) το τρίγωνο MNK είναι ισοσκελές

ε) το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές.

33. Έστω AM η διάμεσος και AD το ύψος τριγώνου $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε τις AD, AM κατά ίσα τμήματα DE και MZ αντίστοιχα. Αν K είναι το σημείο τομής των BZ, GE , να αποδείξετε ότι:

α) $AGB = BGE$

β) $BZ = GE$

γ) $BK = KG$ και $KE = KZ$

δ) το τρίγωνο MEZ είναι ισοσκελές.

34. Στις προεκτάσεις των πλευρών $BA, \Gamma A$ σκαληνού τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα τέτοια, ώστε $A\Delta = \Gamma A$ και $AE = BA$. Αν οι $B\Gamma, DE$ τέμνονται στο M , να αποδείξετε ότι:

α) $AED = AB\Gamma$

β) το τρίγωνο MEB είναι ισοσκελές

γ) $AME = AMB$

δ) η ευθεία MA είναι μεσοκάθετος των τμημάτων BE και $\Gamma\Delta$.

4ο Κεφάλαιο: Παράλληλες ευθείες

4.1. Εισαγωγή

55. Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών;

Απάντηση

Επομένως, οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 , οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:

i) ταυτίζονται, ii) τέμνονται, iii) δεν τέμνονται

56. Πότε δύο ευθείες λέγονται παράλληλες;

Απάντηση

Δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

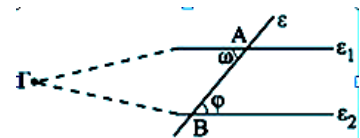
4.2. Τέμνουσες δύο ευθειών – Ευκλείδειο αίτημα

57. Να αποδείξετε ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

Απόδειξη

Έστω ότι $\omega = \varphi$. Αν οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 τέμνονται σε σημείο Γ , η εξωτερική γωνία φ του τριγώνου $AB\Gamma$ θα είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία ω , που είναι άτοπο.

Άρα $\epsilon_1 // \epsilon_2$.



58. Να αποδείξετε ότι δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Απόδειξη

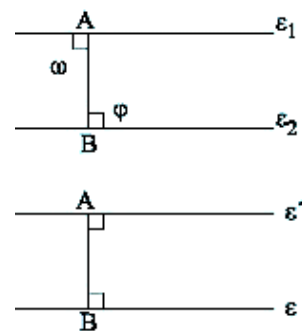
Πράγματι οι γωνίες ω και φ είναι ορθές, οπότε $\omega = \varphi$.

Άρα $\epsilon_1 // \epsilon_2$.

Θα εξετάσουμε τώρα αν από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε παράλληλες ευθείες προς αυτή και πόσες. Έστω λοιπόν, ευθεία ϵ και σημείο A εκτός αυτής.

Φέρουμε την $AB \perp \epsilon$ και ονομάζουμε ϵ' την ευθεία που είναι κάθετη στην AB στο σημείο A . Τότε $\epsilon' // \epsilon$ (αφού και οι δύο είναι κάθετες στην AB).

Έτσι λοιπόν υπάρχει ευθεία ϵ' που διέρχεται από ένα σημείο A που δεν ανήκει στην ϵ και είναι παράλληλη προς την ευθεία ϵ .



59. Ποιο είναι το αίτημα παραλληλίας;

Απάντηση

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

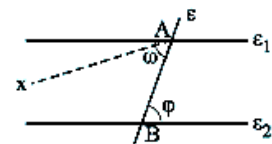
Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

60. Να αποδείξετε ότι αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Απόδειξη

Έστω ότι $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και ϵ μια τέμνουσα. Θα αποδείξουμε π.χ. ότι $\omega = \varphi$.

Αν οι γωνίες ω και φ δεν είναι ίσες, φέρουμε την Ax ώστε οι γωνίες $\angle xAB$



και φ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και να είναι ίσες. Τότε $Ax \parallel \varepsilon_2$ γιατί τεμνόμενες από την AB σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Κατά συνέπεια υπάρχουν δύο παράλληλες από το A προς την ε_2 , που είναι άτοπο. Άρα $\omega = \varphi$.

61. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία, τότε τι ισχύει για τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες και τι για τις εντός και επί τα αυτά μέρη;

Απάντηση

Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

62. Να αποδείξετε ότι αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

Απόδειξη

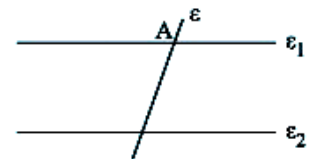
Αν οι ε_1 και ε_2 τέμνονταν σε σημείο A , θα είχαμε από το A δύο παράλληλες προς την ε , που είναι άτοπο. Άρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



63. Να αποδείξετε ότι αν μια ευθεία τέμνει μία από δύο παράλληλες ευθείες τότε θα τέμνει και την άλλη.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η ε τέμνει την ε_1 στο A . Αν η ε δεν έτεμνε την ε_2 , θα ήταν $\varepsilon \parallel \varepsilon_2$ και έτσι θα είχαμε από το A δύο παράλληλες προς την ε_2 , πράγμα αδύνατο. Άρα η ε τέμνει την ε_2 .



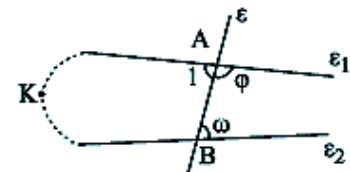
64. Να αποδείξετε ότι αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Απόδειξη

Έστω ότι η ε τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα A και B αντίστοιχα και ότι $\varphi + \omega \neq 2\text{L}$. Τότε οι ε_1 και ε_2 δεν είναι παράλληλες, αφού $\varphi + \omega \neq 2\text{L}$.

Έστω ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο K , προς το μέρος της τέμνουσας, που δεν περιέχει τις γωνίες ω και φ .

Τότε, όμως, η εξωτερική γωνία ω του τριγώνου AKB είναι μεγαλύτερη από τη γωνία A_1 δηλαδή $\omega > \hat{A}_1 = 2\text{L} - \varphi$ ή $\omega + \varphi > 2\text{L}$, που είναι άτοπο. Άρα οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες ω και φ .



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

65. Ποια σχέση έχει το μέτρο δύο γωνιών με πλευρές παράλληλες;

Απάντηση

Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δυο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

66. Ποια σχέση έχουν οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών; Ποια σχέση έχουν οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών;

Απάντηση

Οι διχοτόμοι δυο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.
Οι διχοτόμοι δυο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.

4.5. Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

67. Ποιος κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος σε ένα τρίγωνο; Πως ονομάζεται το κέντρο του;

Απάντηση

Ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές ενός τριγώνου λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του. Το κέντρο του λέγεται περίκεντρο.

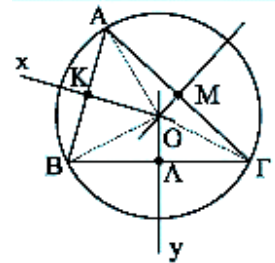
68. Να αποδείξετε ότι οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και K, Λ, M τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και AG αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι Kx και Λy των $AB, B\Gamma$ θα τέμνονται σε σημείο O , αφού τέμνονται οι κάθετες ευθείες τους AB και $B\Gamma$.

Το O ισαπέχει από τις κορυφές A και B αφού ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς AB , δηλαδή $OA=OB$. Επίσης $OB=OG$, αφού το O ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς $B\Gamma$.

Επομένως ισχύει ότι $OA=OG$, οπότε το O θα ανήκει και στη μεσοκάθετο της AG . Άρα, ο κύκλος (O, OA) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.



69. Ποιος κύκλος λέγεται εγγεγραμμένος σε ένα τρίγωνο; Πως ονομάζεται το κέντρο του;

Απάντηση

Ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του λέγεται εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου. Το κέντρο του λέγεται έγκεντρο.

70. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

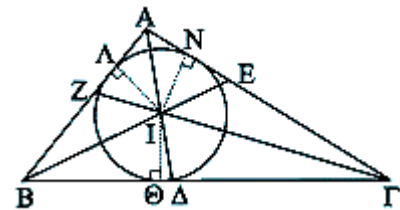
Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διχοτόμοι BE και $Ζ\Delta$ των γωνιών του B και Γ αντίστοιχα. Οι BE και $Ζ\Delta$ τέμνονται σε σημείο I αφού

$$\widehat{EB\Gamma} + \widehat{Z\Gamma B} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{\Gamma}}{2} < \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 2\angle.$$

Το I ως σημείο της διχοτόμου της θ ισαπέχει από τις πλευρές της BA και $B\Gamma$, δηλαδή $IA = I\theta$. Ανάλογα το I θα ισαπέχει από τις πλευρές της Γ , δηλαδή $I\theta = IN$. Επομένως το I ισαπέχει από τις AB και AG και θα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας A .

Τελικά, το I είναι το σημείο τομής και των τριών διχοτόμων του τριγώνου. Με κέντρο το I και ακτίνα την κοινή απόσταση του I από τις πλευρές του $AB\Gamma$, γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



71. Ποιος κύκλος λέγεται παρεγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου; Πως ονομάζεται το κέντρο του και πως βρίσκεται;

Απάντηση

Οι τρεις διχοτόμοι ενός τριγώνου τέμνονται σε σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Ο κύκλος αυτός λέγεται παρεγγεγραμμένος και το κέντρο του παράκεντρο του τριγώνου.

Βασικές ασκήσεις

35. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση $B\Gamma$, που τέμνει τις AB και AG στα Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Εμπέδωσης 1)

36. Δίνεται γωνία $\angle xOy$ και σημείο A της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το A προς την Ox τέμνει την Oy στο B , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές. (Εμπέδωσης 2)
37. Στις προεκτάσεις των πλευρών $BA, \Gamma A$ τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι: $DE \parallel B\Gamma$. (Εμπέδωσης 5)
38. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρουμε ημιευθεία $Gx \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $GA = AB$. Να αποδείξετε ότι:
 α) $\angle A\Gamma = \angle G\Delta A$
 β) Η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle M\hat{A}\Gamma$. (Αποδεικτικές 1)
39. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τις διαμέσους BD και GE . Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους BD και GE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
 α) $BZ = GH$ β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα. γ) $ZK = H\Theta$. (τράπεζα 3721)
40. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του AD . Από τη κορυφή B φέρουμε $BE \parallel AD$ που τέμνει την προέκταση της GA στο E . Να αποδείξετε ότι $EG = AB + A\Gamma$. (Αποδεικτικές 2)
41. Από το έγκεντρο I , τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε ευθεία παράλληλη της $B\Gamma$ που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία D και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $DE = BD + GE$. (Αποδεικτικές 4)
42. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Από το M φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο AD της γωνίας A , που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
 i) Το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές.
 ii) $BE + GZ =$ σταθερό.
 iii) Αν M μέσο της $B\Gamma$ τότε:
 α) $BE = GZ = \frac{A\Gamma + AB}{2}$ β) $AE = AZ = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ (Σύνθετα 4)

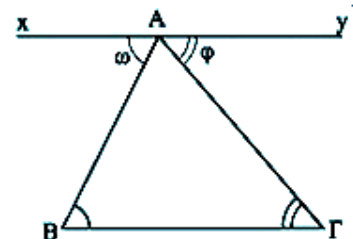
Ασκηόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

4.6. Άθροισμα γωνιών τριγώνου

43. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Απόδειξη

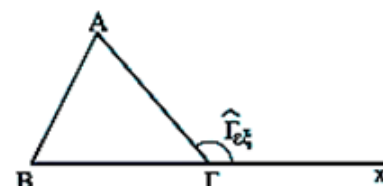
Από μια κορυφή, π.χ. την A , φέρουμε ευθεία $xy \parallel B\Gamma$. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και $B\Gamma$ με τέμνουσες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
 Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\angle$ (3).
 Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\angle$



44. Να αποδείξετε ότι κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

Απόδειξη

Έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\angle$ και $\hat{\Gamma}_{εξ} + \hat{\Gamma} = 2\angle$ οπότε
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{εξ} + \hat{\Gamma}$ ή $\hat{\Gamma}_{εξ} = \hat{A} + \hat{B}$



45. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τι σχέση έχουν οι τρίτες γωνίες τους;

Απάντηση

Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

46. Να αποδείξετε ότι δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

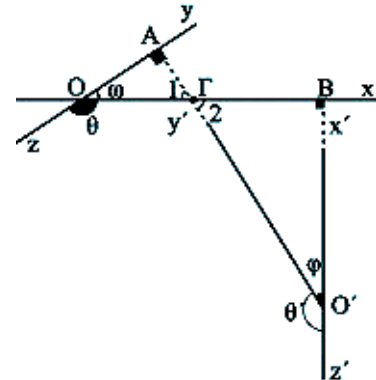
Απόδειξη

Έστω οι γωνίες $\angle xOy = \omega$ και $\angle x'O'y' = \varphi$ με $Ox \perp O'x'$ και $Oy \perp O'y'$.

Τα τρίγωνα OAG και $O'B\Gamma$ έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 1\text{L}$ και

$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (κατακορυφήν).

Άρα θα έχουν και τις άλλες γωνίες ίσες, οπότε $\omega = \varphi$.



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

47. Αν δύο αμβλείες γωνίες έχουν τις πλευρές τους κάθετες, τότε τι ισχύει για το μέτρο τους; Αν η μία οξεία γωνία και μία αμβλεία έχουν πλευρές κάθετες τότε τι ισχύει για το μέτρο τους;

Απάντηση

Δυο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

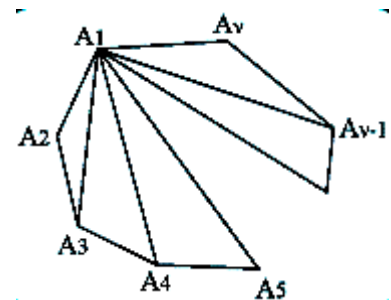
Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

48. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2n - 4$ ορθές.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε κυρτό πολύγωνο $A_1A_2 \dots A_n$ με n πλευρές και ας φέρουμε από μια κορυφή του, π.χ. την A_1 όλες τις διαγωνίους που διέρχονται από αυτή. Έτσι το πολύγωνο διαιρείται σε $n-2$ τρίγωνα, γιατί σε καθεμία από τις πλευρές του, εκτός των A_1A_2 και A_1A_n που διέρχονται από την κορυφή A_1 , αντιστοιχεί ένα τρίγωνο. Επειδή το άθροισμα των γωνιών των $n-2$ τριγώνων είναι $2(n-2) = (2n-4)$ ορθές και ισούται με το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου, προκύπτει ότι:

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2n-4$ ορθές.



49. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές.

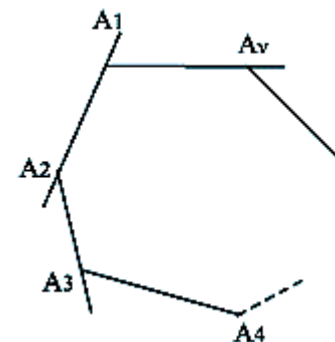
Απόδειξη

$$\text{Είναι } \begin{cases} \hat{A}_{1\epsilon\xi} + \hat{A}_1 = 2\text{L} \\ \hat{A}_{2\epsilon\xi} + \hat{A}_2 = 2\text{L} \\ \dots\dots\dots \dots\dots = \dots\dots\dots \\ \hat{A}_{n\epsilon\xi} + \hat{A}_n = 2\text{L} \end{cases} \text{ προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:}$$

$$(\hat{A}_{1\epsilon\xi} + \hat{A}_{2\epsilon\xi} + \dots + \hat{A}_{n\epsilon\xi}) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_n) = 2n\text{L} \Leftrightarrow$$

$$(\hat{A}_{1\epsilon\xi} + \hat{A}_{2\epsilon\xi} + \dots + \hat{A}_{n\epsilon\xi}) + (2n-4)\text{L} = 2n\text{L} \Leftrightarrow$$

$$(\hat{A}_{1\epsilon\xi} + \hat{A}_{2\epsilon\xi} + \dots + \hat{A}_{n\epsilon\xi}) = 4\text{L}$$



Βασικές ασκήσεις

50. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών B και Γ . Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.
β) Οι γωνίες $A\Gamma I$ και AIB είναι ίσες.
γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. (τράπεζα 2860)
51. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $B = \Delta A\Gamma$ και $\Gamma = \Delta A B$. (Εμπέδωσης 4)
52. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B_{\varepsilon} = 90^\circ + \frac{A}{2}$. Να αποδείξετε ότι $AB = A\Gamma$. (Αποδεικτικές 1)
53. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B > \Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι
α) $A\Delta\Gamma - A\Delta B = B - \Gamma$
β) $A\Delta B = 90^\circ - \frac{B - \Gamma}{2}$ και $A\Delta\Gamma = 90^\circ + \frac{B - \Gamma}{2}$ (Αποδεικτικές 2)
- Ασκησόπολις**
 ο πιο πλούσιος κόσμος
 θεμάτων και ασκήσεων
54. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B > \Gamma$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διχοτόμο του $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
 $\Delta A E = \frac{B - \Gamma}{2}$. (Αποδεικτικές 3)
55. Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης $B\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε τη $\Delta E \perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $A = 2E\Delta\Gamma$. (Αποδεικτικές 5)
56. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του $B\Gamma$ τέμνονται σε σημείο E . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές. (Αποδεικτικές 6)
57. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του $B\Delta$. Φέρουμε $\Delta H \perp AB$, που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι:
i) $B\Delta = \Delta E$, **ii)** $B\Gamma > \Gamma E$. (Σύνθετα 4)
58. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\Delta E$.
γ) Αν η γωνία B είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία Γ , να υπολογίσετε τη γωνία $E\Delta\Gamma$. (τράπεζα 6584)
59. Δίνεται κύκλος κέντρου O και από ένα σημείο P εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β) Αν $\angle APB = 40^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία AOB . (τράπεζα 5567)

5ο Κεφάλαιο: Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

5.2. Παραλληλόγραμμα

50. Ποιο τετράπλευρο λέγεται παραλληλόγραμμο;

Απάντηση

Το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται παραλληλόγραμμο.

51. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του και οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

Απόδειξη

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$. Έχουμε:

$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).

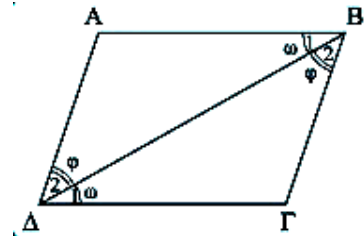
$B\Delta$ κοινή πλευρά.

$\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).

Άρα τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$.

Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.

Ασκησίοποιλις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων



52. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη

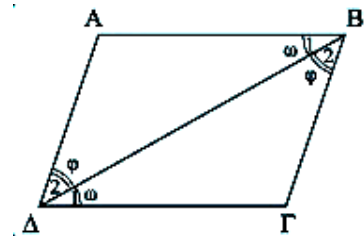
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$. Έχουμε:

$AB = \Gamma\Delta$

$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).

Άρα, τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$.



53. Τι ονομάζεται ύψος του παραλληλογράμμου;

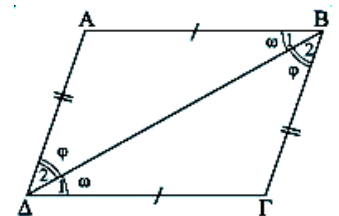
Απάντηση

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται ύψος του παραλληλογράμμου.

54. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη

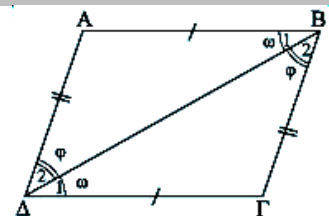
Έστω $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$. Αν φέρουμε τη διαγώνιο $B\Delta$, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ που είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$ και $B\Delta$ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = \varphi$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



55. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη

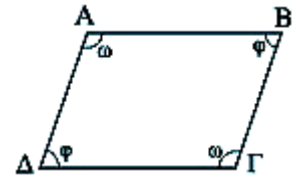
Έστω $AB \parallel \Gamma\Delta$. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \omega$ και η $B\Delta$ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



56. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη

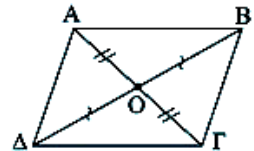
Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4\angle$ γράφεται
 $2\omega + 2\varphi = 4\angle$ ή $\varphi + \omega = 2\angle$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$, οπότε
 $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} + \hat{B} = 2\angle$, οπότε $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το $AB\Gamma\Delta$ είναι
 παραλληλόγραμμο.



57. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη

Έστω $AO = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$. Τα τρίγωνα AOB και $GO\Delta$, καθώς και τα τρίγωνα
 $AO\Delta$ και $BO\Gamma$ είναι ίσα. Επομένως, θα είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το
 $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.



Βασικές ασκήσεις

60. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι
 $\Delta E = B\Gamma$. (Εμπέδωσης 1)

61. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $\hat{A}$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την $A\Gamma$ στο
 E . Αν η παράλληλη από το E προς τη $B\Gamma$ τέμνει την AB στο Z , να αποδείξετε ότι $AE = BZ$.
 (Εμπέδωσης 4)

62. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M της βάσης $B\Gamma$. Φέρουμε $ME \parallel AB$ (E
 σημείο του $A\Gamma$) και $MD \parallel A\Gamma$ (Δ σημείο του AB). Να αποδείξετε ότι: $MD + ME = AB$.
 (Αποδεικτικές 1)

63. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη $\Delta\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$ και τη ΔA κατά τμήμα
 $AZ = \Delta A$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Z, B και E είναι συνευθειακά. (Αποδεικτικές 2)

64. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ κατά τμήμα
 $\Delta E = A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο H . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.
- β) το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο.
- γ) η AH είναι διάμεσος του τριγώνου BAE .

Ασκησόπολις
 ο πιο πλούσιος κόσμος
 θεμάτων και ασκήσεων

(τράπεζα 2822)

65. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των διαμέσων $B\Delta$ και ΓE παίρνουμε τα σημεία H και Z
 αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\Delta H = B\Delta$ και $Z E = E\Gamma$. Να αποδείξετε ότι

- α) $AH = AZ$
- β) τα σημεία Z, A και H είναι συνευθειακά. (Αποδεικτικές 4)

66. Προεκτείνουμε την πλευρά AB παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ κατά τμήμα $BE = B\Gamma$ και επί της
 ημιευθείας ΔA θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma E = 90^\circ$. (Σύνθετα 2)

67. Προεκτείνουμε την πλευρά AB παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ κατά τμήμα $BE = B\Gamma$ και την $A\Delta$ κατά
 τμήμα $\Delta Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά. (Σύνθετα 3)

68. Στις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια, ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις
 των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:

- α) $HBZ = E\Delta\Theta$
- β) $BZH = \Delta E\Theta$
- γ) $BH = \Theta\Delta$ (τράπεζα 5108)

Μεθοδική επανάληψη Γεωμετρίας

69. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία $K, Λ$ των AD και AB αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω M το μέσο του $KΛ$ και η προέκταση του AM (προς το M) τέμνει τη $ΔΓ$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) $AD = ΔE$ β) $BΓ + ΓE = AB$ γ) $B = 2 \cdot A \wedge K$ (τράπεζα 3812)

70. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ θεωρούμε σημεία $E, Z, Η, Θ$ στις πλευρές $AB, BΓ, ΓΔ, ΔA$ αντίστοιχα, με $AE = ΓΗ$ και $BZ = ΔΘ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ΑΕΓΗ$ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο $ΕΖΗΘ$ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Τα τμήματα $ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ$ και $ΖΘ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (τράπεζα 4651)

5.3. Ορθογώνιο

58. Ποιο τετράπλευρο λέγεται ορθογώνιο;

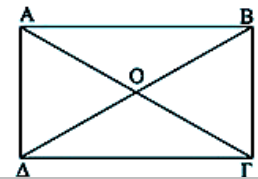
Απάντηση

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

59. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω $ABΓΔ$ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ είναι ίσες. Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{Δ} = 90^\circ$, AD κοινή, $AB = ΔΓ$), οπότε $ΑΓ = ΒΔ$.



60. Ποια είναι τα κριτήρια ώστε ένα τετράπλευρο να είναι ορθογώνιο;

Απάντηση

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο όταν:

- (i) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
(ii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
(iii) Έχει τρεις γωνίες ορθές.
(iv) Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

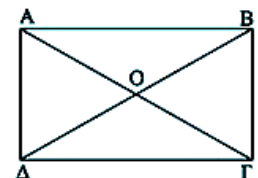
Ασκησίοπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

61. Να αποδείξετε ότι κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιες είναι ίσες, είναι ορθογώνιο.

Απόδειξη

Έστω $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμο με $ΑΓ = ΒΔ$. Τότε τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα ($AB = ΔΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$, AD κοινή), οπότε $\hat{A} = \hat{Δ}$.

Αλλά $\hat{A} + \hat{Δ} = 2\angle$, οπότε $\hat{A} = \hat{Δ} = 1\angle$. Επομένως, το $ABΓΔ$ είναι ορθογώνιο.



5.4. Ρόμβος

62. Ποιο τετράπλευρο λέγεται ρόμβος;

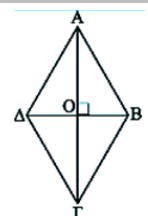
Απάντηση

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

63. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

Απόδειξη

Έστω $ABΓΔ$ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του AO είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας A . Επομένως $ΑΓ \perp ΒΔ$ και η $ΑΓ$ διχοτομεί την A . Όμοια η $ΑΓ$ διχοτομεί τη $Γ$ και η $ΒΔ$ τις B και $Δ$.



64. Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος;

Απάντηση

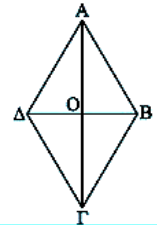
Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δυο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- (iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

65. Να αποδείξετε ότι κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα είναι ρόμβος.

Απόδειξη

Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $A\Gamma \perp B\Delta$. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η AO είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η AO είναι και ύψος, επειδή $A\Gamma \perp B\Delta$. Άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $AB = \Delta\Delta$. Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

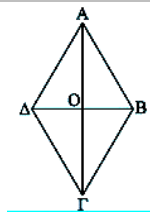


66. Να αποδείξετε ότι κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία του, είναι ρόμβος.

Απόδειξη

Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο και $A\Gamma$ διχοτόμος της A .

Τότε πάλι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές (αφού AO διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.



5.5. Τετράγωνο

67. Ποιο τετράπλευρο λέγεται τετράγωνο;

Απάντηση

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

68. Ποιες είναι οι ιδιότητες του τετραγώνου;

Απάντηση

Σε κάθε τετράγωνο:

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- (ii) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- (iii) Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

69. Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα παραλληλόγραμμο τετράγωνο;

Απάντηση

Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- (iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
- (vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

Βασικές ασκήσεις

71. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ φέρουμε $AE \perp ΔΓ$ και $ΓΖ \perp AB$. Να αποδείξετε ότι το $AΖΓΕ$ είναι ορθογώνιο. (Εμπέδωσης 1)
72. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με κέντρο O και $ΒΔ = 2ΑΓ$. Αν E, Z είναι τα μέσα των OB και OD αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΑΕΓΖ$ είναι ορθογώνιο. (Εμπέδωσης 2)
73. Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δεν συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο. (Εμπέδωσης 4)
74. Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε δύο διαμέτρους AB και $ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:
- Οι χορδές $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του κύκλου είναι ίσες.
 - Το τετράπλευρο $ΑΓΒΔ$ είναι ορθογώνιο.
75. Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$. Στις πλευρές $AB, ΒΓ, ΓΔ$ και $ΔΑ$ παίρνουμε σημεία $K, Λ, Μ$ και N αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AK = BL = ΓΜ = ΔN$. Να αποδείξετε ότι το $KΛΜΝ$ είναι τετράγωνο. (Εμπέδωσης 6)
76. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ABΓ$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $ΒΓΔΕ$.
- Να υπολογίσετε τις γωνίες: i. ABE ii. BEA
 - Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΕΔ$ είναι ισοσκελές. (τράπεζα 5584)
77. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με $AB < ΑΓ$ και το ύψος του $ΑΔ$. Προεκτείνουμε το $ΑΔ$ (προς το $Δ$) κατά τμήμα $ΔΕ = ΑΔ$. Έστω K το συμμετρικό του B ως προς το $Δ$.
Να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές.
 - Το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος. (τράπεζα 3422)
78. Στις πλευρές AB και $ΒΓ$ τετραγώνου $ABΓΔ$ παίρνουμε σημεία E και Z αντίστοιχα, ώστε $AE = BZ$.
Να αποδείξετε ότι: α) $AZ = ΔΕ$ β) $AZ \perp ΔΕ$
(Αποδεικτικές 2)
79. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ABΓ$. Φέρουμε από την κορυφή A ευθεία $(ε)$ παράλληλη στη $ΒΓ$. Η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την $(ε)$ στο $Δ$ και την $ΒΓ$ στο E .
- Να αποδείξετε ότι $ΔΑ = ΔB$ και $EA = EB$.
 - Αν M το μέσο του AB , να συγκρίνετε τα τρίγωνα $ΑΜΔ$ και $ΕΜΒ$.
 - Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΔΒΕ$ είναι ρόμβος. (τράπεζα 5554)
80. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με $A = 90^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσό του AM την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του M , κατά τμήμα $ΜΔ = AM$. Θεωρούμε ευθεία $ΔK$ κάθετη στη $ΒΓ$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας B στο E . Να αποδείξετε ότι:
- Το τετράπλευρο $ABΔΓ$ είναι ορθογώνιο.
 - $ΚΕΒ = 90^\circ - \frac{B}{2}$ γ) $ΔΕ = ΒΔ$. (τράπεζα 4643)
81. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $B = 45^\circ$. Από το μέσο M της $ΓΔ$ φέρουμε κάθετο πάνω στη $ΓΔ$ και έστω E και Z τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις $ΑΔ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το $ΔΕΓΖ$ είναι τετράγωνο. (Σύνθετα 1)

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

5.6. Εφαρμογές στα τρίγωνα

70. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Απόδειξη

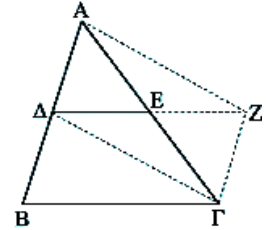
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ, E των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Θα

αποδείξουμε ότι $\Delta E \parallel \frac{B\Gamma}{2}$.

Προεκτείνουμε τη ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα $A\Delta \parallel \Gamma Z$, οπότε $\Delta B \parallel \Gamma Z$, αφού $A\Delta = \Delta B$. Έτσι το τετράπλευρο $\Delta Z\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

(i) $\Delta Z \parallel B\Gamma$ άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$ και

(ii) $\Delta Z \parallel B\Gamma$ ή $2\Delta E = B\Gamma$ ή $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.

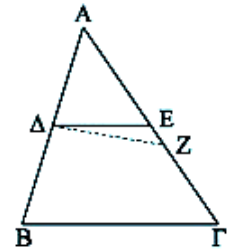


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

71. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της AB την παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Θα αποδείξουμε ότι το E είναι το μέσο της $A\Gamma$. Έστω ότι το E δεν είναι μέσο της $A\Gamma$. Αν Z είναι το μέσο της $A\Gamma$, το τμήμα ΔZ ενώνει τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα $\Delta Z \parallel B\Gamma$. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη $B\Gamma$, που είναι άτοπο. Άρα το E είναι μέσο της $A\Gamma$.

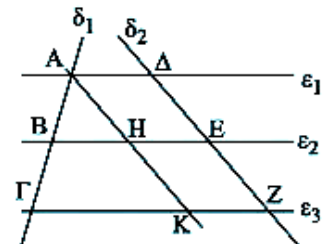


72. Να αποδείξετε ότι αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ οι οποίες τέμνουν την δ_1 στα σημεία A, B, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma$. Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ στα σημεία Δ, E, Z αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι $\Delta E = EZ$.

Φέρουμε $AK \parallel \Delta Z$. Τότε τα τετράπλευρα $A\Delta E H$ και $E Z K H$ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε $AH = \Delta E$ (1) και $HK = EZ$ (2). Στο τρίγωνο $AK\Gamma$ το B είναι το μέσο της $A\Gamma$ και $BH \parallel \Gamma K$. Άρα το H είναι μέσο της AK , δηλαδή $AH = HK$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Delta E = EZ$.



73. Τι ονομάζεται μεσοπαράλληλος δύο ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 ;

Απάντηση

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι μία ευθεία ϵ παράλληλη προς τις ϵ_1 και ϵ_2 , η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δυο παράλληλες.

Η ευθεία ϵ λέγεται μεσοπαράλληλος των ϵ_1 και ϵ_2 .

5.7. Βαρύκεντρο τριγώνου

74. Ποιο σημείο ονομάζεται βαρύκεντρο τριγώνου και ποια είναι η χαρακτηριστική του ιδιότητα;

Απάντηση

Το σημείο στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι ενός τριγώνου λέγεται βαρύκεντρό του.

75. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα 2/3 του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $\hat{B}_1 + \hat{G}_1 < \hat{B} + \hat{G} < 2\angle$, οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή $ΒΔ = ΔΓ$ και ότι

$$ΑΘ = \frac{2}{3} ΑΔ .$$

Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε

$$ΕΘ = \frac{1}{2} ΓΚ \quad (1).$$

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε $ΖΘ = \frac{1}{2} ΒΚ \quad (2).$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $ΒΕ \parallel ΓΚ$ και $ΓΖ \parallel ΒΚ$, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε $ΒΔ = ΔΓ$.

Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη $ΘΔ = ΔΚ = \frac{ΘΚ}{2}$, άρα $ΘΔ = \frac{ΑΘ}{2}$ ή $ΑΘ = 2ΘΔ$.

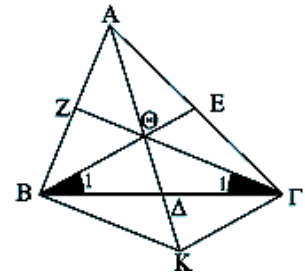
Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι $ΕΘ = \frac{ΓΚ}{2} = \frac{ΒΘ}{2}$ ή $ΒΘ = 2ΘΕ$.

Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε $ΓΘ = 2ΘΖ$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου.

Επίσης έχουμε ότι $ΑΔ = ΑΘ + ΘΔ = 2ΘΔ + ΘΔ = 3ΘΔ$.

Άρα $ΘΔ = \frac{1}{3} ΑΔ$, οπότε $ΑΘ = \frac{2}{3} ΑΔ$.

Όμοια προκύπτει ότι $ΒΘ = \frac{2}{3} ΒΕ$ και $ΓΘ = \frac{2}{3} ΓΖ$



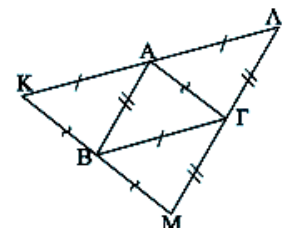
Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

5.8. Το ορθόκεντρο τριγώνου

76. Να αποδείξετε ότι οι παράλληλες που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη

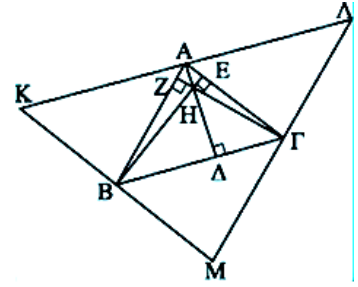
Από τις κορυφές Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο ΚΛΜ. Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων ΚΑΓΒ, ΛΑΒΓ και ΜΒΑΓ έχουμε: $ΚΑ = ΒΓ = ΑΛ$, $ΛΓ = ΑΒ = ΓΜ$ και $ΚΒ = ΑΓ = ΒΜ$. Επομένως τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ.



77. Να αποδείξετε ότι οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του AD , BE και $ΓΖ$. Από τις κορυφές του A , B , Γ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές. Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο $K\Lambda M$ τα σημεία A , B , Γ είναι τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες AD , BE και ΓZ είναι κάθετες στις $K\Lambda$, KM και $M\Lambda$ αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες AD , BE και ΓZ είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου $K\Lambda M$, οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο H .



78. Ποιο σημείο ονομάζεται ορθόκεντρο τριγώνου;

Απάντηση

Το σημείο από το οποίο διέρχονται και τα τρία ύψη ενός τριγώνου λέγεται ορθόκεντρό του.

5.9. Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

79. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και τη διάμεσό του AM .

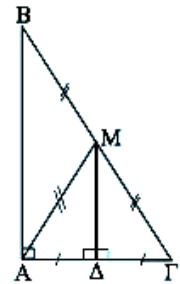
Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Φέρουμε τη διάμεσο $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$. Το $M\Delta$ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $M\Delta \parallel AB$. Αλλά $AB \perp A\Gamma$, επομένως και $M\Delta \perp A\Gamma$.

Άρα, το $M\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο $AM\Gamma$, οπότε $AM = M\Gamma$, δηλαδή

$$AM = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Ασκησολογία
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων



80. Να αποδείξετε ότι αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη

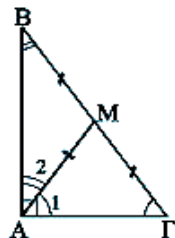
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τη διάμεσό του AM .

Αν $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ θα αποδείξουμε ότι η γωνία A είναι ορθή.

Επειδή έχουμε $AM = M\Gamma$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) και $AM = MB$, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$.

Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\angle$, οπότε $2\hat{A} = 2\angle$ ή $\hat{A} = 1\angle$.

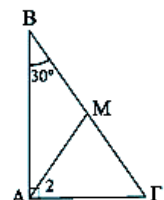


81. Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσο AM και είναι Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Επομένως $A\Gamma = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.



Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AG = \frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 30^\circ$.

Απόδειξη

Φέρουμε τη διάμεσο AM , οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = MG = AG$ (αφού $AG = \frac{B\Gamma}{2}$). Άρα το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως $\hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Βασικές ασκήσεις

82. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Αν E, Z και H είναι τα μέσα των BD , AD και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔEZH είναι παραλληλόγραμμο. (Εμπέδωσης 2)
83. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη του BD και ΓE . Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $MD = ME$. (Εμπέδωσης 3)
84. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $B = 30^\circ$. Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και AG , να αποδείξετε ότι $EZ = AG$. (Εμπέδωσης 4)
85. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_B = \mu_\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$. (Εμπέδωσης 5)
86. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και AG αντίστοιχα.
α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$.
β) Στη περίπτωση που το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.
87. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $\Delta E\Delta = BZ\Gamma$
γ) Οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο AG του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
88. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) και το ύψος του AD .
α) Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και AG , να αποδείξετε ότι $\angle EZA = A = 90^\circ$.
β) Αν M είναι το μέσο της EZ , να αποδείξετε ότι $DM = \frac{B\Gamma}{4}$. (Αποδεικτικές 1)
89. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $B = 2\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AB , η οποία τέμνει την πλευρά AG στο Δ .
α) i. Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.
ii. τις γωνίες του τριγώνου $AM\Gamma$.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $M\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AG . (τράπεζα 5096)
90. Αν E, Z τα μέσα των πλευρών $AB, \Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο AG . (Αποδεικτικές 4)
91. Αν E, Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, \Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔE και AZ τριχοτομούν τη διαγώνιο BD . (Αποδεικτικές 5)

Ασκησούπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Μεθοδική επανάληψη Γεωμετρίας

92. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω Δ το μέσο της διαμέσου AM . Αν η $B\Delta$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E , να αποδείξετε ότι $AE = \frac{E\Gamma}{2}$. (Αποδεικτικές 6)
93. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έστω E, Z τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν H, K είναι οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EH \perp KZ$. (Αποδεικτικές 9)
94. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Αν E είναι η προβολή του B στη διχοτόμο $A\Delta$, να αποδείξετε ότι:
- α) $EM \parallel A\Gamma$ β) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ γ) $\Delta EM = \frac{A}{2}$ (Σύνθετα 5)
95. Αν K και Λ είναι οι προβολές της κορυφής A τριγώνου $AB\Gamma$ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της B αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
- α) Το $AKB\Lambda$ είναι ορθογώνιο
β) Η ευθεία $K\Lambda$ διέρχεται από το μέσο της $A\Gamma$. (Σύνθετα 7)
96. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $\Gamma = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος $A\Delta$ της γωνίας A .
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $AMB, HAB, A\Delta B$.
β) Να αποδείξετε ότι $M\Delta\Delta = \Delta A\Delta H = 20^\circ$. (τράπεζα 5562)

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

5.10. Τραπεζίο

82. Ποιο τετράπλευρο λέγεται τραπέζιο;

Απάντηση

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

83. Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου;

Απάντηση

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται διάμεσος του τραπεζίου.

84. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους.

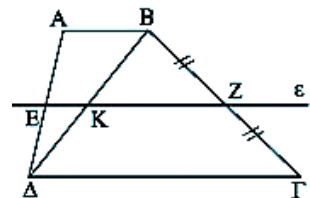
Απόδειξη

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), τη διαγώνιο του $B\Delta$ και E το μέσο της $A\Delta$. Από το E φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνει τις $B\Delta$ και $B\Gamma$ στα K και Z αντίστοιχα. Τότε:

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το E είναι μέσο της $A\Delta$ και $EK \parallel AB$, οπότε το K είναι το μέσο της $B\Delta$ και $EK = \frac{AB}{2}$ (1).

Επίσης στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ το K είναι μέσο της $B\Delta$ και $KZ \parallel \Gamma\Delta$, οπότε το Z είναι το μέσο της $B\Gamma$ και $KZ = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (2). Επομένως η EZ είναι διάμεσος του τραπεζίου και $EZ \parallel AB, \Gamma\Delta$ (από κατασκευή).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $EK + KZ = \frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} \Rightarrow EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.



85. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος EZ τραπεζίου ABΓΔ διέρχεται από τα μέσα K και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

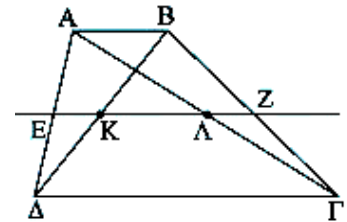
Απόδειξη

Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΚ//ΑΒ, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ και $EK = \frac{AB}{2}$ (1).

Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ, στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ και $EL = \frac{GD}{2}$ (2).

Επομένως, η διάμεσος EZ του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$EL - EK = \frac{GD}{2} - \frac{AB}{2} \Rightarrow K\Lambda = \frac{GD - AB}{2} \text{ (με } GD > AB)$$



86. Ποιο τραπέζιο λέγεται ισοσκελές;

Απάντηση

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες

87. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου;

Απάντηση

- α) οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- β) οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

88. Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- α) οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- β) οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

Απόδειξη

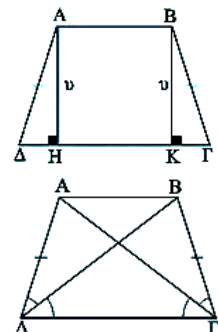
α) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ).

Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα

($\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{A} = \hat{B}$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $\hat{A\Gamma\Delta} = \hat{B\Gamma\Delta}$), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



89. Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές;

Απάντηση

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
- (ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Βασικές ασκήσεις

97. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ και το ύψος του $ΑΕ$. Αν $Κ,Λ$ είναι τα μέσα των $ΑΔ,ΒΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΚΛΓΕ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Εμπέδωσης 4)
98. Σε τραπέζιο $ABΓΔ$ ($AB \parallel ΓΔ$) η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει τη διάμεσο EZ στο H . Να αποδείξετε ότι $BΗΓ = 90^\circ$. (Αποδεικτικές 1)
99. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $ABΓΔ$ ($AB \parallel ΓΔ$) με $ΓΔ > AB$ και $B = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του $ΑΕ$ και BZ .
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.
β) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΕΔ = BZ = ΓΖ$. (τράπεζα 5167)
100. Σε τραπέζιο $ABΓΔ$ η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του $ΑΔ$ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν M είναι το μέσο της $BΓ$, να αποδείξετε ότι $ΑΜΔ = 90^\circ$. (Αποδεικτικές 4)
101. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ και το ύψος του $ΑΗ$. Αν $Δ,Ε, Z$ είναι τα μέσα των $AB, ΑΓ$ και $BΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΔΕΖΗ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Αποδεικτικές 6)
102. Αν σε τραπέζιο η μια βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα. (Αποδεικτικές 7)
103. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($A = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $BΔ$. Από το $Δ$ φέρουμε $ΔΕ \perp BΓ$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $EΔ$ τέμνει την προέκταση της BA . Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα $ABΓ$ και BEZ είναι ίσα.
γ) Η ευθεία $BΔ$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $ZΓ$.
δ) Το τετράπλευρο $ΑΕΓΖ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (τράπεζα 3693)

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Γενικές ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

104. Έστω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^\circ$).

Προεκτείνουμε την ΕΖ κατά τμήμα $ZH = EZ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο ΒΕΗΓ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ορθογώνιο.
- γ) $ΑΔ = ΗΖ$.

105. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) με $ΒΓ = 2ΑΒ$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν Βx

εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Β και η κάθετη από το Α προς την Βx τέμνει την ΒΓ στο Δ, τότε:

- α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
- β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισόπλευρο.
- γ) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ισοσκελή.
- δ) να αποδείξετε ότι $ΑΜ \parallel Βx$.

106. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) με $\Gamma = 30^\circ$ και η διάμεσος ΑΜ. Η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Δ. Προεκτείνουμε την ΓΑ κατά $ΑΕ = ΑΔ$ και έστω Ζ το κοινό σημείο των ΒΕ, ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της ΑΒΓ
- β) Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.
- γ) $ΕΒ = 2ΜΔ$
- δ) $ΕΖ = ΑΕ$
- ε) $ΒΖ = ΑΓ$.

107. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) και το ύψος του ΑΗ. Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του

Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ$
- ii. Το τρίγωνο ΕΗΔ είναι ορθογώνιο.
- iii. Τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΗΔ είναι ίσα; Αν ναι, να το αποδείξετε. Αν όχι, κάτω από ποιες αρχικές προϋποθέσεις θα μπορούσε να είναι ίσα;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

108. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) και ΑΜ το ύψος του στη πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα $ΜΝ = ΑΜ$. Στη προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος.
- β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.
- γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ.

109. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και δύο κάθετες ακτίνες του ΟΒ και ΟΓ. Έστω Α το μέσον του τόξου ΒΓ.

Από το Α φέρουμε κάθετες στις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ που τις τέμνουν στα Δ και Ε αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των ΑΔ και ΑΕ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) $ΑΖ = ΑΗ$
- β) Το ΑΔΟΕ είναι ορθογώνιο.
- γ) Τα σημεία Ζ και Η είναι αντιδιαμετρικά.
- δ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

6ο Κεφάλαιο: Εγγεγραμμένα σχήματα

Εγγεγραμμένη γωνία

6.1. Εισαγωγικά - Ορισμοί

90. Ποια γωνία λέγεται επίκεντρη και ποια εγγεγραμμένη;

Απάντηση

Αν η κορυφή της είναι το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, τότε η γωνία λέγεται επίκεντρη.

Αν η κορυφή της γωνίας είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουσες του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου.

91. Ποια γωνία λέγεται γωνία χορδής και εφαπτομένης;

Απάντηση

Αν η κορυφή της γωνίας είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται γωνία χορδής και εφαπτομένης.

Ασκησίοπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

6.2. Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

92. Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Απόδειξη

Έστω κύκλος (O,R) και ένα τόξο του AB. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο. Τότε θα αποδείξουμε ότι $\widehat{AOB} = 2\widehat{AGB}$.

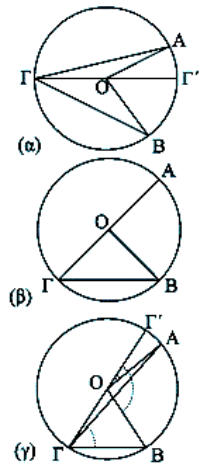
(i) Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας AGB (σχ α). Έστω Γ' το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ. Το τρίγωνο AOG είναι ισοσκελές, επομένως $\widehat{OAG} = \widehat{OGA}$.

Η $\widehat{G'OA}$ είναι εξωτερική του τριγώνου AOG, επομένως $\widehat{G'OA} = 2\widehat{OGA}$ και όμοια έχουμε ότι $\widehat{G'OB} = 2\widehat{OGB}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι $\widehat{AOB} = 2\widehat{AGB}$.

(ii) Ας εξετάσουμε κατόπιν την περίπτωση όπου το O ανήκει σε μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας AGB (σχ β). Η επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου GOB, οπότε $\widehat{AOB} = 2\widehat{AGB}$.

(iii) Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις (σχ γ).



93. Αν μια εγγεγραμμένη γωνία βαίνει σε ημικύκλιο, τότε τι είδους γωνία είναι;

Απάντηση

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

6.3. Γωνία χορδής και εφαπτομένης

94. Να αποδείξετε ότι η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής, ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

Απόδειξη

Μεθοδική επανάληψη Γεωμετρίας

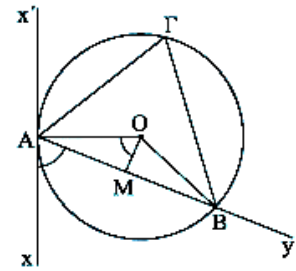
Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης $\hat{x}\hat{A}y$ είναι οξεία και $\hat{A}\hat{\Gamma}B$ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής AB.

Γνωρίζουμε $\hat{A}\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{A}\hat{O}B}{2}$.

Φέρουμε το απόστημα OM, οπότε $\hat{A}\hat{O}M = \hat{M}\hat{O}B = \frac{\hat{A}\hat{O}B}{2} = \hat{A}\hat{\Gamma}B$.

Αλλά $\hat{x}\hat{A}y = \hat{A}\hat{O}M$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές. Επομένως $\hat{x}\hat{A}y = \hat{A}\hat{\Gamma}B$.

Αν η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι αμβλεία, η απόδειξη είναι ανάλογη.



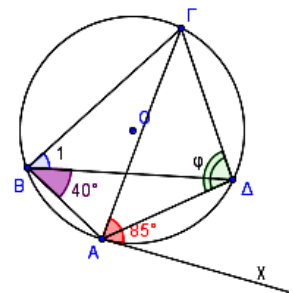
Βασικές ασκήσεις

110. Στο διπλανό σχήμα η Ax είναι εφαπτομένη του κύκλου (O,ρ) σε σημείο του A και επιπλέον $\angle A\hat{x} = 85^\circ$ και $\angle B\hat{A} = 40^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $B_1 = 45^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία φ .

(τράπεζα 2819)



111. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή AB κύκλου (K) είναι παράλληλη στη χορδή AB και αντίστροφα.

(Αποδεικτικές 1)

112. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το B. (Αποδεικτικές 2)

113. Δύο κάθετες χορδές AB, ΓΔ κύκλου (K) τέμνονται σημείο P. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος PM του τριγώνου PBΓ είναι κάθετη στην ΑΔ. (Αποδεικτικές 3)

114. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο A και δύο ευθείες ε, ε' που διέρχονται από το A τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία B, B' και τον άλλο στα Γ και Γ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BB' \parallel \Gamma\Gamma'$. (Σύνθετα 1)

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

6.5. Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

95. Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο; Ποιος κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος τετραπλεύρου;

Απάντηση

Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου.

96. Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο ABΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) έχει τις εξής ιδιότητες:

α) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

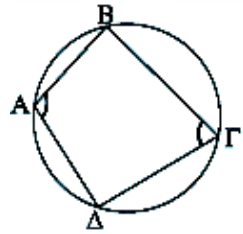
β) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Απόδειξη

(i) Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο $B\Gamma\Delta$, ενώ η $\hat{\Gamma}$ στο $BA\Delta$, με $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{B}\hat{A}\Delta = 4\angle$.

Επομένως $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\angle$.

(ii) Δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ (π.χ. οι A, B) είναι και κορυφές δύο ίσων εγγεγραμμένων γωνιών ($\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma}$), που βαίνουν στο ίδιο τόξο που ορίζει η απέναντι πλευρά $\Gamma\Delta$.



6.6. Το εγγράψιμο τετράπλευρο

97. Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο;

Απάντηση

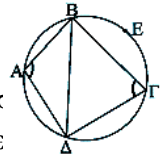
Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

98. Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

- (i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- (ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
- (iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

Απόδειξη

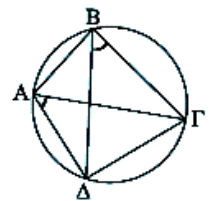
(i) Έστω $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\angle$. Φέρουμε τον κύκλο που ορίζουν τα σημεία A, B, Δ και τη χορδή του $B\Delta$. Τα σημεία A, Γ βρίσκονται εκατέρωθεν της $B\Delta$, οπότε κάθε εγγεγραμμένη γωνία ϵ τόξο $BA\Delta$ ισούται με τη $\hat{\Gamma}$, ενώ κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο $BE\Delta$ ισούται με παραπληρωματική της, δηλαδή την $\hat{A}$. Επομένως το Γ είναι σημείο του $BE\Delta$ και ομοκυκλικό με τα A, B, Δ .



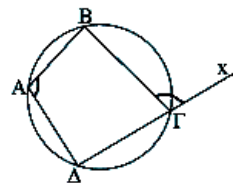
(ii) Έστω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = \phi$.

Τότε τα A, B ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία το τμήμα $\Gamma\Delta$ φαίνεται υπό ορισμένη γωνία ϕ . Ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι δύο συμμετρικά τόξα ως προς το $\Gamma\Delta$. Τα A, B όμως βρίσκονται στο ίδιο μέρος της $\Gamma\Delta$, συνεπώς ανήκουν στο ίδιο τόξο, επομένως τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων



(iii) Έστω ότι $\chi\hat{\Gamma}B = \hat{A}$, τότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\angle$, επομένως το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, λόγω του κριτηρίου (i).



99. Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται περιγράψιμο σε κύκλο;

Απάντηση

Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο, λέγεται περιγεγραμμένο στον κύκλο αυτό, ενώ ο κύκλος λέγεται εγγεγραμμένος στο τετράπλευρο αυτό.

100. Ποιες είναι οι ιδιότητες ενός τετράπλευρου περιγράψιμου σε κύκλο;

Απάντηση

- (i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.
- (ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

115. Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο. (Εμπέδωσης 3)

116. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ' και τον άλλο στα Δ και Δ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$. (Αποδεικτικές 1)

117. Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ. (Αποδεικτικές 3)

118. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο. (Αποδεικτικές 3)

119. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 2E\Delta$. β) $BE\Delta = \frac{A}{2}$.

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο. δ) $ABE = A\Delta E$.

Ασκησόπολις