2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΚΥΜΑΤΑ

Κύμα ονομάζεται ο μηχανισμός διάδοσης μιας διαταραχής σ' ένα μέσο με πεπερασμένη ταχύτητα, όπου διαδίδεται ενέργεια και ορμή αλλά όχι ύλη.

Είδη κυμάτων

Ηλεκτρομαγνητικά
Διαδίδεται ηλεκτρομαγνητική ενέργεια.
Διαδίδονται και στο κενό.

Μηχανικά
Διαδίδεται μηχανική ενέργεια.
Δεν διαδίδονται στο κενό, παρά μόνο σε ελαστικά μέσα.

Με κριτήριο τις διαστάσεις του ελαστικού μέσου
i) Γραμμικά
ii) Επιφάνειας
iii) Χώρου

Με κριτήριο το μηχανισμό διάδοσης
i) Εγκάρσια
ii) Διαμήκη

Με κριτήριο τη μετακίνηση ή όχι της φάσης
i) Τρέχοντα
ii) Στάσιμα

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

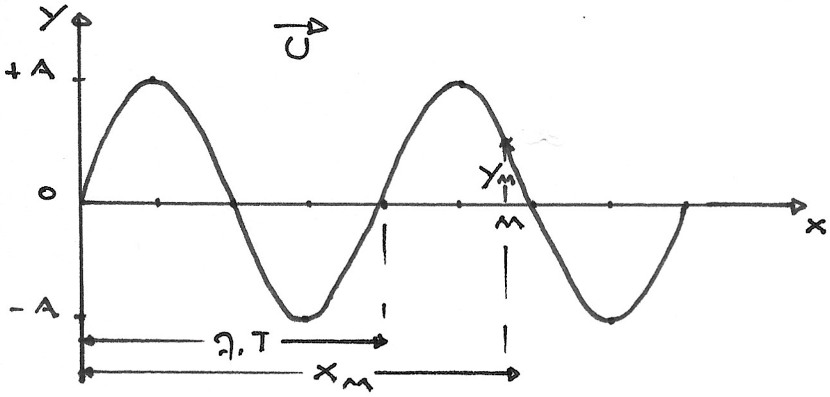
Το κύμα κατά την διάδοσή του εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση: $\upsilon = \frac{x}{t} \xrightarrow[t=T]{x=\lambda} \upsilon = \frac{\lambda}{T} \xrightarrow{\frac{1}{T}=f} \boxed{\upsilon = \lambda f}$

Μήκος κύματος λ (1m) ονομάζεται η απόσταση στην οποία διαδίδεται το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου.
Λίγο αργότερα θα δούμε ότι:
Μήκος κύματος λ ονομάζεται η απόσταση δύο σημείων του ελαστικού μέσου που παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσης $\Delta\varphi = 2\pi$ (rad).

Περίοδος T (1s) του κύματος ονομάζεται ο χρόνος μέσα στον οποίο η διαταραχή επαναλαμβάνεται.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ - ΤΡΕΧΟΝΤΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ

<u>Εξίσωση ενός αρμονικού κύματος</u> ονομάζουμε την εξίσωση που μας δίνει την απομάκρυνση y_M ενός σωματιδίου M του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο t και την απόσταση x_M του σωματιδίου από την αρχή μέτρησης των αποστάσεων.



Εάν η πηγή O εκτελεί Γ.Α.Τ. το κύμα λέγεται αρμονικό και θα ισχύει για την πηγή: $y = A\,\eta\mu\,\omega t$.

Έστω ένα τυχαίο σημείο M το οποίο απέχει από την πηγή O απόσταση x_M.

Το σημείο M θ' αρχίσει να ταλαντώνεται μετά χρόνο $t_M = \frac{x_M}{\upsilon}$ σε σχέση με την πηγή O. O χρόνος t_M είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το κύμα από την πηγή O στο M. Άρα το κύμα στο M - δηλαδή η εξίσωση ταλάντωσης του σημείου M - περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y_M = A\,\eta\mu\,\omega(t - t_M) = A\,\eta\mu\,\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_M}{\upsilon}\right) = A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\upsilon T}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y_M = A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)} \rightarrow$$ <u>Εξίσωση κύματος ή εξίσωση τρέχοντος κύματος.</u>

Αν το κύμα διαδίδεται προς την αντίθετη φορά - προς τα αριστερά - η εξίσωση κύματος θα ήταν: $y_M = A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x_M}{\lambda}\right)$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

i) Η εξίσωση κύματος παρουσιάζει χρονική και τοπική περιοδικότητα.

ii) Η φάση του σημείου M είναι $\phi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$, εξαρτάται από το χρόνο t και την απόσταση x_M και λέγεται φάση του κύματος.

iii) Η πηγή O και το σημείο M παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\Delta\phi$, ή διαφορετικά το σημείο M καθυστερεί της πηγής O κατά:

$$\Delta\phi = \phi_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma} - \phi_M = \omega t - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) = \omega t - 2\pi\frac{t}{T} + \frac{2\pi x_M}{\lambda} \rightarrow$$

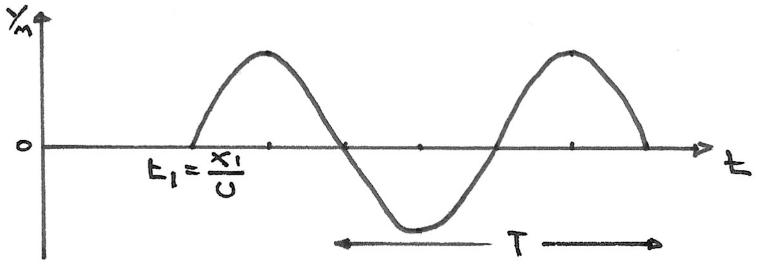
$$\boxed{\Delta\phi = \frac{2\pi x_M}{\lambda}}$$

Ανάλογα για δύο σημεία που απέχουν Δx μεταξύ τους θα έχουμε: $\Delta\phi = \frac{2\pi\cdot\Delta x}{\lambda}$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

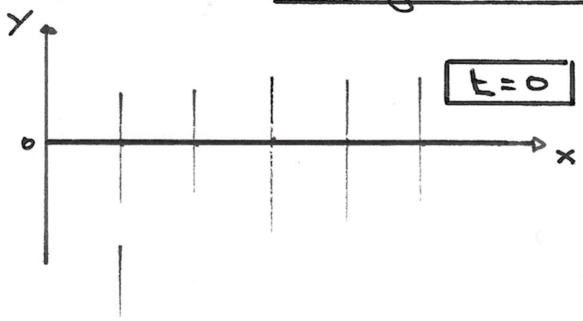
Από τη μορφή της εξίσωσης του αρμονικού κύματος $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ προκύπτει ότι η απομάκρυνση y εξαρτάται από δύο μεταβλητές: το χρόνο t και την απόσταση x. Άρα η γραφική παράσταση θα γίνει αν θεωρήσουμε τη μία από τις δύο μεταβλητές σταθερή.

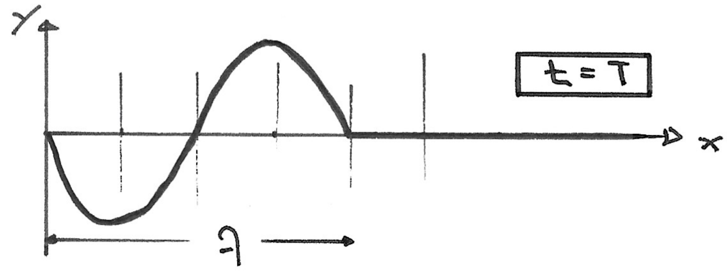
(Α) Ταλάντωση ενός σημείου του μέσου:

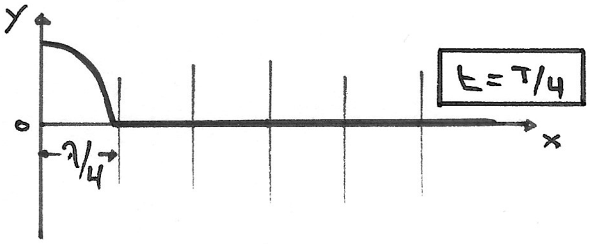


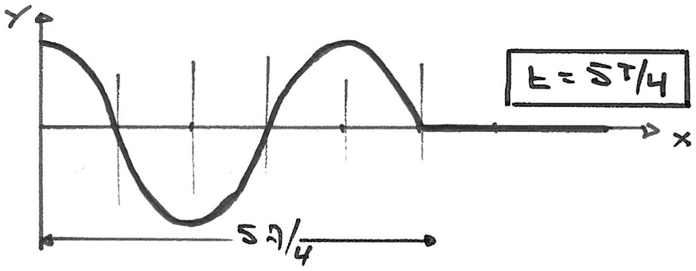
Για ένα δεδομένο σημείο του άξονα Οx, δηλαδή για $x = x_1$ η εξίσωση του αρμονικού κύματος γράφεται:
$y = A\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_1}{\lambda}\right) \to y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t - σταθ.\right)$, δηλαδή η απομάκρυνση του θεωρούμενου σημείου Μ είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου.

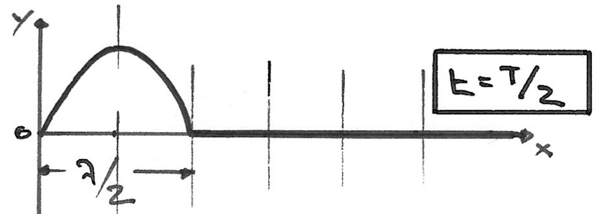
(Β) Στιγμιότυπο του κύματος:

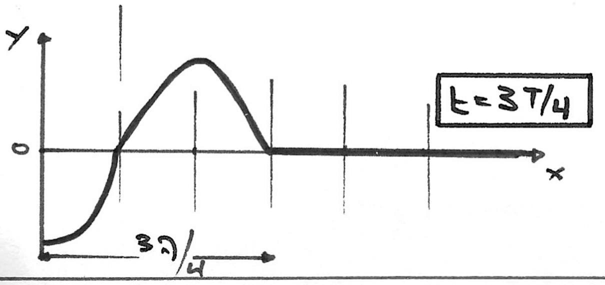












Για δεδομένη χρονική στιγμή $t = t_1$ η εξίσωση του αρμονικού κύματος γίνεται: $y = A\eta\mu\left(2\pi\frac{t_1}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \to$
$y = A\eta\mu\left(σταθ - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$, δηλαδή η απομάκρυνση στα διάφορα σημεία του άξονα Οx είναι ημιτονοειδής συνάρτηση της απόστασης x.

<u>Η γραφική παράσταση $y = f(x)$ λέγεται στιγμιότυπο του κύματος.</u>

Από τα στιγμιότυπα της προηγούμενης σελίδας προκύπτει ότι, στη διάρκεια μιας περιόδου T του κύματος, αυτό διατρέχει απόσταση ίση με το μήκος κύματος λ και κάθε σωματίδιο του ελαστικού μέσου εκτελεί μια πλήρη ταλάντωση.

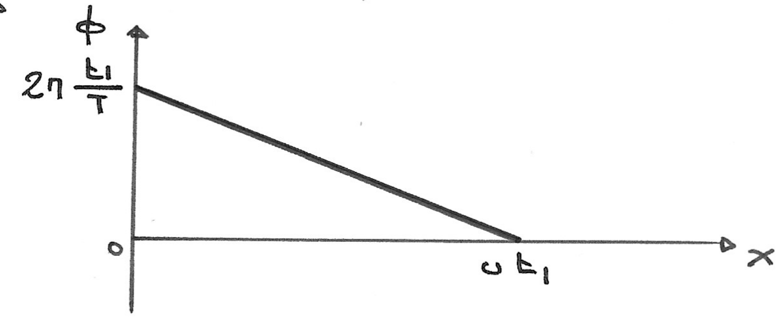
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΦΑΣΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

$$\boxed{\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)}$$

Η φάση ϕ εξαρτάται από τον χρόνο t (αυξάνεται με το χρόνο) και από την απόσταση x του σημείου από την πηγή των κυμάτων (ελαττώνεται όσο αυξάνεται το x).

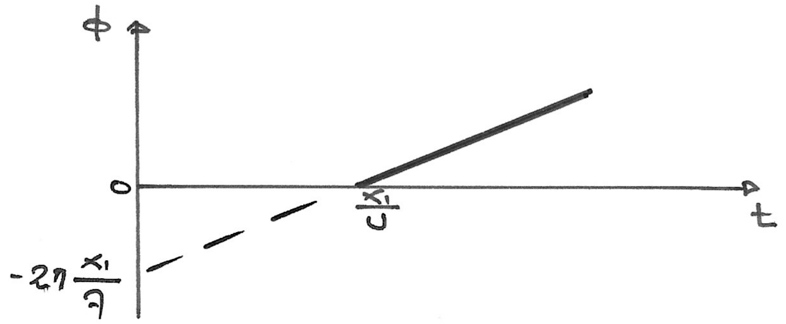
(i) $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \xrightarrow{t = t_1 = ct} \phi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \longrightarrow$

$$\phi = ct - 2\pi\frac{x}{\lambda}.$$



(ii) $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \xrightarrow{x = x_1 = ct} \phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \longrightarrow$

$$\phi = 2\pi\frac{t}{T} - ct.$$

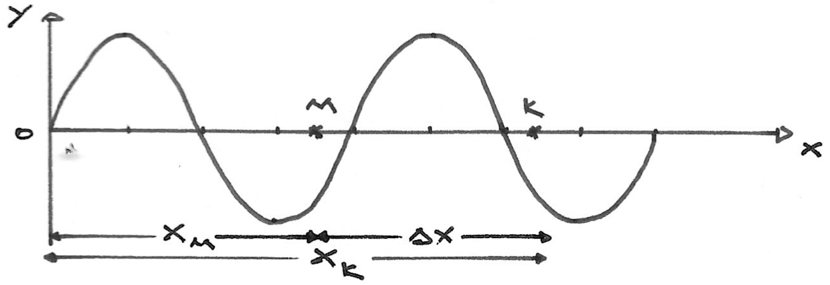


- Κατά τη φορά διάδοσης του κύματος η φάση του ελαττώνεται.

- Αν για ένα σημείο του ελαστικού μέσου η φάση του κύματος είναι αρνητική, συμπεραίνουμε ότι το κύμα δεν έφτασε ακόμη στο σημείο αυτό.

- Για να βρούμε τη χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει σ' ένα σημείο του ελαστικού μέσου, μηδενίζουμε τη φάση του κύματος για το σημείο αυτό.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ



Στην πηγή O:

$y = A\eta\mu\omega t \rightarrow$

(M) $\rightarrow y_M = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$

(K) $\rightarrow y_K = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$

Τα σημεία M, K παρουσιάζουν διαφορά φάσης:

$$\Delta\phi = \phi_M - \phi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) =$$

$$= 2\pi\cancel{\frac{t}{T}} - 2\pi\frac{x_M}{\lambda} - 2\pi\cancel{\frac{t}{T}} + 2\pi\frac{x_K}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}(x_K - x_M) \rightarrow \boxed{\Delta\phi = \frac{2\pi\cdot\Delta x}{\lambda}}$$

Μερικές περιπτώσεις:

(i) Αν $\Delta x = k\cdot\lambda$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ δηλαδή τα δύο σημεία απέχουν μεταξύ τους απόσταση που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, τότε $\Delta\phi = \frac{2\pi\cdot k\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \rightarrow$

$\Delta\phi = 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

Τότε λέμε ότι τα σημεία M, K βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, δηλαδή κάθε χρονική στιγμή έχουν ίδια απομάκρυνση και ίδια ταχύτητα.

(ii) Αν $\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ δηλαδή τα δύο σημεία απέχουν μεταξύ τους απόσταση που είναι περιττό πολλαπλάσιο ημιμήκους κύματος, τότε $\Delta\phi = \frac{2\pi(2k+1)\cancel{\lambda}/\cancel{2}}{\cancel{\lambda}} \rightarrow$

$\Delta\phi = (2k+1)\pi$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

Τότε λέμε ότι τα σημεία M, K βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, δηλαδή κάθε χρονική στιγμή έχουν αντίθετες απομακρύνσεις και αντίθετες ταχύτητες.

Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο ενός κύματος τη χρονική στιγμή t_1:

i) Βρίσκουμε την εξίσωση του κύματος τη χρονική στιγμή t_1: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

ii) Βρίσκουμε τη θέση x_1 στην οποία φτάνει το κύμα τη χρονική στιγμή t_1: $x_1 = \upsilon t_1$

iii) Βρίσκουμε τον αριθμό των μηκών κύματος λ που αντιστοιχούν στην απόσταση x_1:

$$N = \frac{x_1}{\lambda}$$

iv) Βρίσκουμε την απομάκρυνση y_1 και την κατεύθυνση της ταχύτητας ταλάντωσης της αρχής O $(x=0)$ τη χρονική στιγμή t_1, δηλαδή από ποιο σημείο του άξονα ξεκινά η ημιτονοειδής καμπύλη.

Το σημείο στο οποίο "τελειώνει" το στιγμιότυπο έχει πάντα $y=0$, γιατί είναι το σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα τη στιγμή t_1, το οποίο αρχίζει τότε την ταλάντωσή του.

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΚΥΜΑΤΑ

1

Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο έχει τη διεύθυνση του άξονα x΄x. Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του ελαστικού μέσου στο θετικό ημιάξονα, περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = 0{,}25\eta\mu(4\pi t + 2\pi x) \quad \text{(τα } x \text{ και } y \text{ είναι σε } m\text{, το } t \text{ σε } s\text{)}$$

α. Να προσδιορίσετε την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.

β. Να βρείτε τη συχνότητα και το μήκος κύματος του κύματος.

γ. Να βρείτε το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας των διαφόρων σημείων του μέσου.

δ. Να γράψετε την εξίσωση ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος του ιδίου πλάτους και διπλάσιας συχνότητας, το οποίο διαδίδεται αντίθετα με την ίδια ταχύτητα στο ίδιο ελαστικό μέσο.

[Απ.: α) Προς την αρνητική κατεύθυνση, β) $f = 2\,Hz$, $\lambda = 1\,m$, γ) $\upsilon_{max} = \pi\ m/s$, δ) $y = 0{,}25\eta\mu 2\pi(4t - 2x)$, (τα x και y είναι σε m και το t σε s)]

2

Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα $\upsilon = 40\,m/s$, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x΄x, ο οποίος ταυτίζεται με το γραμμικό μέσο. Κάποια χρονική στιγμή t οι φάσεις των ταλαντώσεων δύο σημείων Α και Β του μέσου είναι $\varphi_A = 15\pi\,rad$ και $\varphi_B = 45\pi\,rad$, αντίστοιχα. Το σημείο Β βρίσκεται σε απόσταση $d = 5\,m$ από τη θέση $x = 0$ όπου βρίσκεται η πηγή Ο του κύματος και είναι το τρίτο κατά σειρά σημείο του ελαστικού μέσου που έχει μόνιμα αντίθετη απομάκρυνση και αντίθετη ταχύτητα από την πηγή Ο.

α. Να εξετάσετε, αν το κύμα διαδίδεται από το σημείο Α προς το σημείο Β ή αντίστροφα.

β. Να υπολογίσετε τη συχνότητα του κύματος.

γ. Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων Α και Β.

δ. Όταν το σημείο Β διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο κατά τη θετική φορά, ποια είναι η απομάκρυνση και η φορά κίνησης του σημείου Α;

[Απ.: α) Από το Β προς το Α, β) $f = 20\,Hz$, γ) $\Delta x = 30\,m$, δ) Στη θέση ισορροπίας, κινούμενο κατά τη θετική φορά]

3

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα x΄x, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους $A = 3\,cm$ και συχνότητας $f = 20\,Hz$. Το κύμα διαδίδεται στον αρνητικό ημιάξονα προς τη θετική κατεύθυνση και τη χρονική στιγμή $t = 0$ φτάνει στην αρχή Ο του άξονα x΄x. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon = 4\,m/s$.

α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης ενός σημείου Β του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = -45\,cm$ του άξονα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων του σημείου Β και ενός σημείου Γ του μέσου, το οποίο βρίσκεται στη θέση $x = +45\,cm$ του άξονα.

γ. Ποια είναι η απομάκρυνση του σημείου Β, όταν το σημείο Γ βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική απομάκρυνσή του.

[Απ.: α) $y = 3\eta\mu\left(40\pi t + \dfrac{9\pi}{2}\right)$, (το y είναι σε cm και το t σε s), β) $\Delta\varphi = 9\pi$, γ) $y = +3\,cm$]

4

Κατά μήκος ενός ελαστικού νήματος μεγάλου μήκους, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα $\upsilon = 4m/s$, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Ένα σημείο Μ του νήματος, το οποίο βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα, σε απόσταση $x_M = 2m$ από την αρχή Ο του άξονα, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y_M = 0{,}1ημ8πt$ (τα y_M και t είναι στο *S.I.*).

α. Να υπολογίσετε το μήκος του κύματος του κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση της πηγής του κύματος, η οποία βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα.

γ. Να βρείτε τη διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_\Gamma$ μεταξύ των ταλαντώσεων δύο σημείων $B\,(x_B = -0{,}5m)$ και $\Gamma\,(x_\Gamma = +2{,}5m)$ του νήματος, την ίδια χρονική στιγμή.

δ. Ποιο είναι το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης του σημείου Γ;

Δίνεται: $\pi^2 \cong 10$.

[Απ.: α) $\lambda = 1m$, β) $y = 0{,}1ημ(8πt + 4π)$, (τα y και t είναι στο S.I.), γ) $\Delta\varphi = 6\pi$, δ) $\alpha_{max} = 64 m/s^2$]

5

Σημείο Ο ενός οριζόντιου γραμμικού ελαστικού μέσου εκτελεί ταυτόχρονα δύο κατακόρυφες ταλαντώσεις, οι οποίες γίνονται γύρω από το σημείο Ο και περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$y_1 = 10ημ2πt$ και $y_2 = 10\sqrt{3}συν2πt$ (τα y_1 και y_2 είναι σε cm και το t σε s)

α. Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σημείου Ο παράγει αρμονικό κύμα.

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$, ο οποίος ταυτίζεται με το ελαστικό μέσο και έχει ως αρχή το σημείο Ο. Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $\upsilon = 2m/s$.

γ. i) Δύο σημεία Β και Γ του μέσου βρίσκονται σε αποστάσεις $x_B = 3m$ και $x_\Gamma = 8m$, αντίστοιχα, από το σημείο Ο. Αν κάποια χρονική στιγμή t η φάση της ταλάντωσης του σημείου Β είναι $\varphi_B = \frac{14\pi}{3}$, ποια είναι η φάση φ_Γ της ταλάντωσης του σημείου Γ την ίδια χρονική στιγμή;

ii) Ποια είναι η φυσική σημασία της τιμής της φάσης φ_Γ της ταλάντωσης του σημείου Γ;

[Απ.: α) $y = 20ημ\left(2πt + \frac{\pi}{3}\right)$, (το y είναι σε cm και το t σε s), β) $y = 20ημ\left[2π\left(t - \frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right]$, (το x είναι σε m, το y είναι σε cm και το t σε s), γ) i) $\varphi_\Gamma = -\frac{\pi}{3}$, ii) Το κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο Γ]

6

Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$. Μια πηγή παραγωγής ημιτονοειδών κυμάτων, η οποία βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα $x'x$, αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = 10ημωt$ (το y είναι σε cm και το t σε s). Το παραγόμενο κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Πάνω στον άξονα βρίσκονται δύο σημεία A και B του ελαστικού μέσου, τα οποία απέχουν από την αρχή Ο αποστάσεις $x_A = 20\,cm$ και $x_B = 30\,cm$, αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}2s$ το κύμα φτάνει στο σημείο A και η φάση της ταλάντωσης της πηγής είναι $\varphi = 8\pi\, rad$.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης της πηγής.

β. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του κύματος.

γ. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

δ. Να προσδιορίσετε τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος AB, τα οποία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης με την πηγή του κύματος.

[Απ.: α) $f = 20Hz$, β) $\lambda = 5cm$, γ) $y = 10ημ2π\left(20t - \frac{x}{5}\right)$ (τα x και y είναι σε cm και το t σε s), δ) $x = 20cm$, $x = 25cm$, $x = 30cm$]

(7)

Κατά μήκος ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με πλάτος $A=10cm$, μήκος κύματος $\lambda=20cm$ και ταχύτητα $\upsilon=2m/s$. Το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση και τη χρονική στιγμή $t=0$ φτάνει στο σημείο Ο, αρχή του άξονα $x'x$. Για το σημείο Ο δίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενου κατά την αρνητική φορά.

α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Ο σε συνάρτηση με το χρόνο.

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ. Να σχεδιάσετε τη μορφή του ελαστικού μέσου, δεξιά του σημείου Ο, τη χρονική στιγμή $t=T$, όπου T η περίοδος του κύματος.

[Απ.: α) $y=0,1\eta\mu(20\pi t+\pi)$, (τα y και t είναι στο S.I.),

β) $y=0,1\eta\mu[2\pi(10t-5x)+\pi]$, (τα x, y και t είναι στο S.I.)]

---

(8)

Ημιτονοειδές κύμα διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα $x'x$ σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα. Η εξίσωση του κύματος είναι:

$y=0,2\eta\mu(0,5\pi x-20\pi t)$, (τα x και y είναι σε m και το t σε s)

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης της πηγής του κύματος.

γ. Να σχεδιάσετε τη μεταβολή της φάσης φ του κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση x από την πηγή του κύματος κατά τη χρονική στιγμή $t=0,3s$.

[Απ.: α) $\upsilon=40m/s$, β) $y=0,2\eta\mu(20\pi t+\pi)$, (τα y και t είναι στο S.I.),

γ) $\varphi=7\pi-\frac{\pi x}{2}$, (το x είναι σε m και το φ σε rad)]

---

(9)

Ένα ημιτονοειδές κύμα συχνότητας $f=50Hz$ και πλάτους $A=0,2m$ διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon=36m/s$ κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο έχει τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής, η οποία βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα είναι $y=A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$. Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β του μέσου.

α. Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα σημεία A και B, αν την ίδια χρονική στιγμή οι φάσεις της ταλάντωσης των σημείων αυτών διαφέρουν κατά $\Delta\varphi=60^o$;

β. Πόση είναι η μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης του σημείου A μέσα σε χρόνο $\Delta t=10^{-2}s$.

γ. Πόση είναι η μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης μιας στοιχειώδους μάζας $\Delta m=2\cdot10^{-3}kg$ του μέσου, η οποία βρίσκεται στο σημείο A;

Δίνεται: $\pi^2\cong10$.

[Απ.: α) $\Delta x=12cm$, β) $\Delta\varphi_A=180^o$, γ) $U_{(max)}=4J$]

10

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το οποίο εκτείνεται στη διεύθυνση $x'x$, διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα $\upsilon = 2\,m/s$. Θεωρούμε ως αρχή του άξονα ένα σημείο Ο του ελαστικού μέσου, το οποίο αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t = 0$, με εξίσωση:

$$y = 0{,}1\eta\mu\pi t \quad \text{(τα } y \text{ και } t \text{ είναι στο S.I.)}$$

α. Να βρείτε τη συχνότητα και το μήκος κύματος του κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ. Να παραστήσετε γραφικά σε βαθμολογημένους άξονες τη φάση φ της ταλάντωσης για τα διάφορα σημεία του ημιάξονα Ox, σε συνάρτηση με τη συντεταγμένη x, τη χρονική στιγμή $t = 5s$.

δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 5s$.

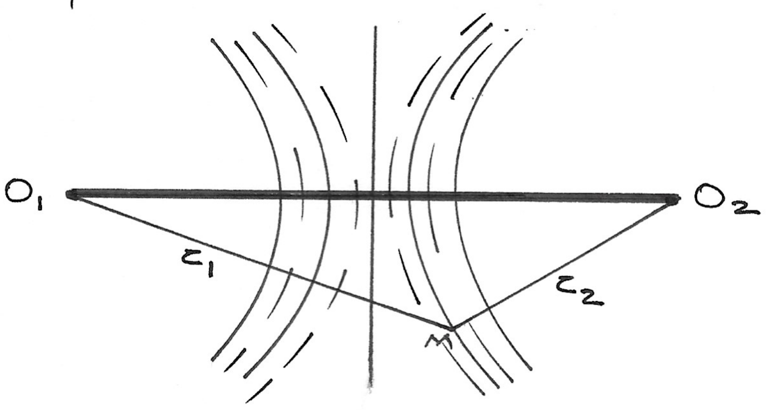
[Απ.: α) $f = 0{,}5Hz$, $\lambda = 4m$, β) $y = 0{,}1\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right)$, (τα x, y και t είναι στο S.I.), γ) $\varphi = 5\pi - \frac{\pi x}{2}$ (το x είναι σε m και το φ σε rad)]

ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ή ΥΠΕΡΘΕΣΗ ή ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

Όταν δύο ή περισσότερα κύματα διαδίδονται ταυτόχρονα στο ίδιο ελαστικό μέσο λέμε ότι <u>συμβάλλουν.</u>
Έχει διαπιστωθεί ότι : <u>όταν σε ένα ελαστικό μέσο διαδίδονται ταυτόχρονα δύο ή περισσότερα κύματα, η απομάκρυνση ενός σωματιδίου του μέσου είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλεται στα επιμέρους κύματα.</u> (<u>Αρχή επαλληλίας ή υπέρθεσης των κυμάτων</u>).

<u>Συμβολή κυμάτων</u> ονομάζεται το αποτέλεσμα της ταυτόχρονης διάδοσης δύο ή περισσοτέρων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου.

Ας μελετήσουμε το φαινόμενο της συμβολής:



$$\left.\begin{aligned} \text{Πηγή } O_1 &: \; y_1 = A\,\eta\mu\,\omega t \longrightarrow y_{M.1} = A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right) \\ \text{Πηγή } O_2 &: \; y_2 = A\,\eta\mu\,\omega t \longrightarrow y_{M.2} = A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$y_M = y_{M.1}+y_{M.2} = A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right) + A\,\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right) = A\left[\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)+\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}\right)\right]$$

$$\longrightarrow \boxed{y = 2A\,\sigma\upsilon\nu\,2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\cdot\eta\mu\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right)}$$ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΜΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

όπου $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\,2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right|$ το πλάτος της συνισταμένης αρμονικής ταλάντωσης

και $\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right)$ η φάση της.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ Α΄

(i) **Σημεία μέγιστου πλάτους: $A' = max \to A' = 2A \to$**

$$2A\left|συν 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}\right| = 2A \to \left|συν 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}\right| = 1 \to συν 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ} = \pm 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} \to συν 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ} = +1 = συν 0° \to 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ} = 2κπ \pm 0 \\ \to συν 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ} = -1 = συν π \to 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ} = 2κπ \pm π \end{array}\right\} \to 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ} = Nπ \to$$

$$\to \boxed{\begin{array}{c}|r_1 - r_2| = Nλ \\ N = 0, 1, 2, \ldots\end{array}}$$

δηλαδή τα σημεία της επιφάνειας του μέσου των οποίων οι αποστάσεις r_1 και r_2 από τις δύο πηγές διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος $λ$, ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος $A'_{max} = 2A$, δηλαδή έχουμε <u>ενίσχυση</u>.

Τα παραπάνω σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος βρίσκονται πάνω σε καμπύλες γραμμές που λέγονται <u>υπερβολές ή κροσσοί συμβολής</u>.

Στην περίπτωση όπου $r_1 - r_2 = 0$, η γραμμή δεν είναι υπερβολή, αλλά η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος O_1O_2.

(ii) **Σημεία ελάχιστου πλάτους: $A' = min \to A' = 0 \to$**

$$2A\left|συν 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}\right| = 0 \to \left|συν 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}\right| = 0 = συν\frac{π}{2} \to$$

$$\left\{\begin{array}{l} \to 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ} = 2κπ + \frac{π}{2} \\ \to 2π\frac{r_1 - r_2}{2λ} = 2κπ - \frac{π}{2} \end{array}\right\} \to \cancel{2π}\frac{r_1 - r_2}{2λ} = (2N+1)\frac{\cancel{π}}{2} \to$$

$$\boxed{|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{λ}{2}, \quad N = 0, 1, 2, \ldots}$$

δηλαδή τα σημεία της επιφάνειας του μέσου των οποίων οι αποστάσεις r_1 και r_2 από τις δύο πηγές διαφέρουν κατά περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος $λ/2$, μένουν συνεχώς ακίνητα, δηλαδή έχουμε <u>απόσβεση</u>.

Και εδώ τα σημεία που παραμένουν ακίνητα βρίσκονται πάνω σε <u>υπερβολές</u> που λέγονται <u>κροσσοί συμβολής</u>.

Τα σημεία της επιφάνειας του ελαστικού μέσου για τα οποία δεν ισχύει ούτε η σχέση $|r_1 - r_2| = Nλ$ ούτε η σχέση $|r_1 - r_2| = (2N+1)\frac{λ}{2}$ ταλαντώνονται με ενδιάμεσο πλάτος, $0 < A' < 2A$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

① **Σύγχρονες πηγές** ονομάζονται οι πηγές που προκαλούν κύματα ίδιου πλάτους A, ίδιας περιόδου T, ίδιου μήκους κύματος λ και ίδιας φάσης φ.

② **Σύμφωνες πηγές** ονομάζονται οι πηγές που προκαλούν κύματα ίδιου πλάτους A, ίδιας περιόδου T, ίδιου μήκους κύματος λ και σταθερής διαφοράς φάσης $\Delta\varphi = ct$.

③ Αν t_1 και t_2 είναι οι χρόνοι που χρειάζονται για να φτάσουν τα κύματα από τις πηγές O_1 και O_2 στο σημείο M αντίστοιχα, τότε:

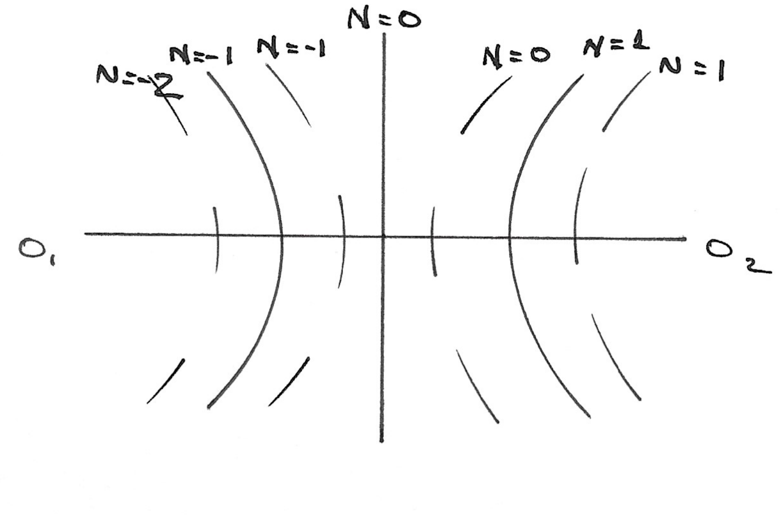
i. Για $0 < t < t_1$ το M είναι ακίνητο $y_M = 0$ $(t_1 < t_2)$

ii. Για $t_1 \leq t < t_2$ το M ταλαντώνεται λόγω του κύματος από την πηγή O_1: $y_M = y_{M,1} = A\,\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$.

iii. Για $t \geq t_2$ το M ταλαντώνεται λόγω και των δύο κυμάτων: $y_M = 2A\,\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ

Για τη λύση αυτών των προβλημάτων θα ξεκινήσουμε γράφοντας την εξίσωση που περιγράφει την ταλάντωση της πηγής ή των πηγών των κυμάτων.
Στη συνέχεια με τη βοήθεια της εξίσωσης τρέχοντος-αρμονικού κύματος μεταφέρουμε τα κύματα στα σημεία που πρέπει να μελετήσουμε.
Έτσι το πρόβλημα ανάγεται σε σύνθεση ταλαντώσεων και διερεύνηση αποτελεσμάτων.



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ - ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

11

Δύο μεγάφωνα M_1 και M_2, που τροφοδοτούνται από την ίδια γεννήτρια συχνοτήτων και αποτελούν δύο σύγχρονες πηγές ηχητικών κυμάτων, τοποθετούνται σε έναν τοίχο στο ίδιο ύψος, σε απόσταση $d = 9m$ το ένα από το άλλο. Ένας ανιχνευτής ήχου τοποθετείται ακριβώς μπροστά από το μεγάφωνο M_2 σε απόσταση $r_2 = 40m$ από τον τοίχο. Καθώς η συχνότητα της γεννήτριας μεταβάλλεται βαθμιαία από την τιμή $f_1 = 200Hz$ στην τιμή $f_2 = 3000Hz$, ο ανιχνευτής καταγράφει μια σειρά μεγίστων και ελαχίστων του ήχου. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $\upsilon = 340\ m/s$. Να υπολογίσετε:

α. Τη συχνότητα της γεννήτριας, όταν ο ανιχνευτής καταγράφει το πρώτο ελάχιστο του ήχου.

β. Τον αριθμό των μεγίστων του ήχου που μπορεί να καταγράψει ο ανιχνευτής.

γ. Τη συχνότητα της γεννήτριας, όταν ο ανιχνευτής καταγράφει το τελευταίο μέγιστο του ήχου.

[Απ.: α) f = 510 Hz , β) Οκτώ μέγιστα του ήχου, γ) f = 2720 Hz]

12

Δύο πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα του ίδιου πλάτους $A = 0,5\,cm$, της ίδιας περιόδου $T = 0,2\,s$ και της ίδιας φάσης. Ένα μικρό κομμάτι φελλού βρίσκεται σε κάποιο σημείο Μ της επιφάνειας του υγρού, το οποίο απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις $r_1 = 28\,cm$ και $r_2 = 44\,cm$, αντίστοιχα. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων είναι $\upsilon = 0,4\,m/s$.

α. Ποια είναι η διαφορά φάσης των δύο κυμάτων στο σημείο Μ, την ίδια χρονική στιγμή;

β. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης του φελλού;

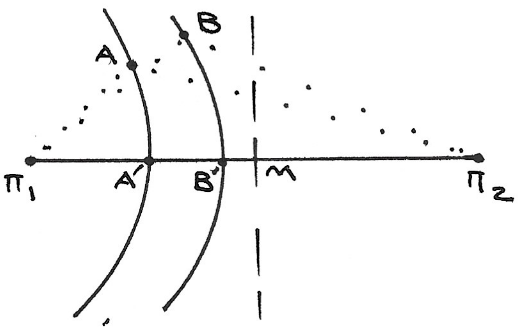
γ. Ποια είναι η απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή $t = 2,25\,s$;

δ. Κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ βρίσκεται ένα δεύτερο μικρό κομμάτι φελλού. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του φελλού από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$, ώστε να παραμένει διαρκώς ακίνητο;

[Απ.: α) $\Delta\varphi = 4\pi$, β) $A' = 1\,cm$, γ) $y_M = -1\,cm$, δ) $x = 2\,cm$]

13

Οι πηγές Π1, Π2 είναι σύμφωνες και εκπέμπουν κύματα με $\lambda = 2μ$. Αν $ΑΠ_1 = 11μ$, $ΑΠ_2 = 20μ$, $ΒΠ_1 = 15μ$ και $ΒΠ_2 = 18μ$:



i) Στα σημεία Α, Β έχουμε ενίσχυση ή απόσβεση; [απόσβεση]

ii) Πόσες υπερβολές αποσβεστικής συμβολής σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Α και Β; [2 υπερβολές]

iii) Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα σημεία Α΄ και Β΄; [Α΄Β΄ = 3μ

(14)

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων O_1 και O_2 παράγουν αρμονικά κύματα πλάτους 2cm, συχνότητας 5Hz και ταχύτητας 40cm/s. Σημείο Μ απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις 40cm και 56 cm αντίστοιχα.

i) Παραστήστε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο το πλάτος ταλάντωσης του Μ.

i) Παραστήστε γραφικά τη συνάρτηση $y_M = f(t)$

ii) Βρείτε την απομάκρυνση του Μ τις χρονικές στιγμές $t_1' = 0,5s$, $t_2' = 1,25s$, $t_3' = 2,225s$.

iv) Ποια χρονική στιγμή αρχίζει η συμβολή των κυμάτων σε σημείο Ν που απέχει αποστάσεις 20cm και 32cm αντίστοιχα; Ποιο είναι το πλάτος ταλάντωσης του Ν λόγω συμβολής; (iii) 0, 2cm, $2\sqrt{2}$cm
iv) 0,8s , 0)

(15)

. Στα σημεία O_1 και O_2 της επιφάνειας νερού παράγονται δύο κύματα περιόδου T=2s, πλάτους A=2cm και διαφορά φάσης 0°. Ένα σημείο Μ της επιφάνειας του νερού απέχει από τα σημεία O_1 και O_2 αποστάσεις 6cm και 8cm αντίστοιχα. Η ταχύτητα των κυμάτων είναι 8cm/s.

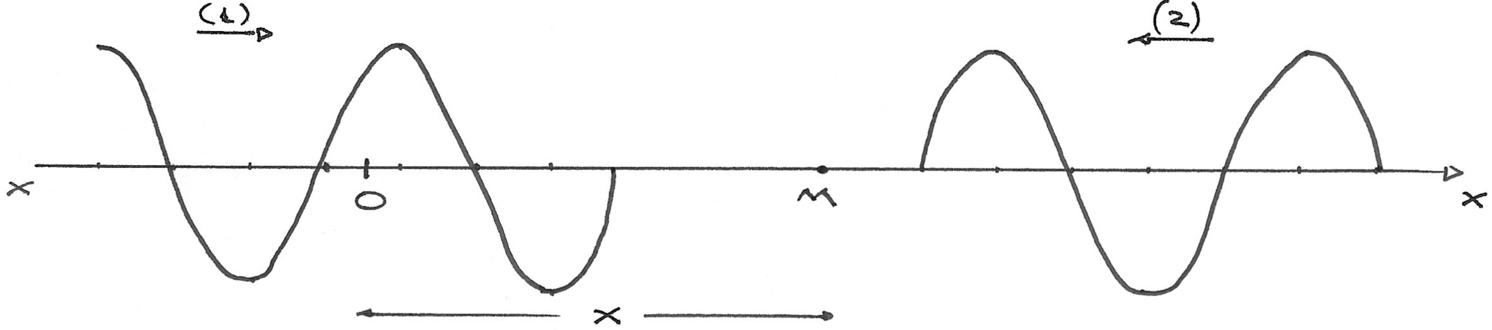
i) Πόση είναι η απομάκρυνση του Μ τη χρονική στιγμή t=2s;

ii) Πότε το Μ περνά από τη Θ.Ι. του για πρώτη φορά;

($y_M = -\sqrt{2}$ cm , $t = 15/8$ s)

ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Στάσιμο κύμα ονομάζεται το αποτέλεσμα της συμβολής δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους, που διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο με την ίδια ταχύτητα και προς αντίθετες κατευθύνσεις.



Επιλέγουμε ένα σημείο O του άξονα x'x στο οποίο οι απομακρύνσεις που προκαλούνται από τα δύο κύματα έχουν την ίδια εξίσωση $y_1 = y_2 = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$.
Το σημείο O θεωρείται σαν αρχή μέτρησης των αποστάσεων $x=0$.
Σαν αρχή των χρόνων $t=0$ θεωρούμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η φάση στο σημείο O είναι μηδέν, δηλ. $y = y_1 + y_2 = 0$ και $u > 0$.
Ας μελετήσουμε τη συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων:

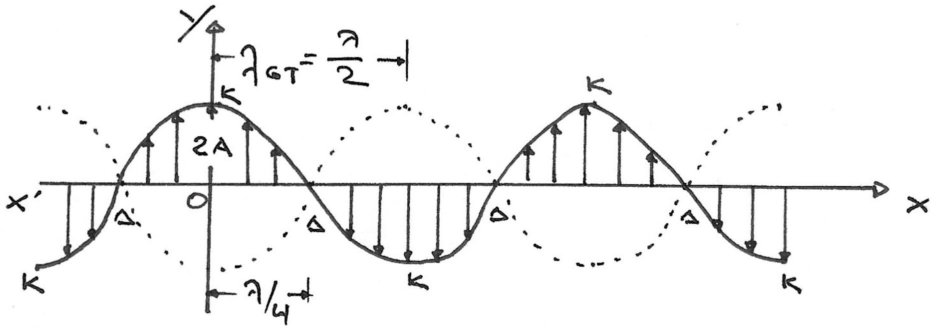
Στο σημείο O: $y_1 = A\eta\mu 2\pi\frac{t}{T} \xrightarrow{(M)} y_{M.1} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Στο σημείο O: $y_2 = A\eta\mu 2\pi\frac{t}{T} \xrightarrow{(M)} y_{M.2} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$

$\rightarrow y_M = y_{M.1} + y_{M.2} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \rightarrow \ldots$

$\ldots\ldots \rightarrow \boxed{y_M = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{T}t}$ Εξίσωση στάσιμου κύματος.

Η παραπάνω εξίσωση δεν αποτελεί εξίσωση κύματος, αλλά περιγράφει μια απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$ και συχνότητα ίση με τη συχνότητα των κυμάτων που συμβάλλουν.
Προφανώς το πλάτος A' της ταλάντωσης δεν είναι ίδιο για όλα τα σημεία, αλλά εξαρτάται από τη θέση του σημείου.



<u>ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΟΥ ΣΤΑΣΙΜΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ</u>

(i) Το πλάτος $A' = \text{μαx.} \rightarrow 2A\left|\text{συν}2π\frac{x}{λ}\right| = \text{μαx} \rightarrow \text{συν}2π\frac{x}{λ} = \text{μαx} = \pm 1$
$\rightarrow 2π\frac{x}{λ} = κπ \rightarrow \boxed{x = κ\frac{λ}{2}, \quad κ = 0, 1, 2, \ldots}$

Άρα τα σημεία του άξονα x΄x που απέχουν από το <u>σημείο-κοιλία Ο</u> που λαμβάνεται ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων $(x=0)$, αποστάσεις: $\boxed{x = 0, \quad x = 1\frac{λ}{2}, \quad x = 2\frac{λ}{2}, \ldots, x = κ\frac{λ}{2}}$ εκτελούν ταλάντωση με μέγιστο πλάτος $A' = 2A$.
Τα σημεία αυτά ονομάζονται <u>κοιλίες του στάσιμου κύματος.</u>
<u>Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών του στάσιμου κύματος είναι ίση με $\frac{λ}{2} = λ_{στ.}$</u>, <u>όπου $λ_{στ.}$ το μήκος κύματος του στάσιμου κύματος.</u>

(ii) Το πλάτος $A' = \text{μιν} \rightarrow 2A\left|\text{συν}2π\frac{x}{λ}\right| = 0 \rightarrow \text{συν}2π\frac{x}{λ} = 0 = \text{συν}\frac{π}{2} \rightarrow$
$2π\frac{x}{λ} = 2κπ \pm \frac{π}{2} \rightarrow \boxed{x = (2κ+1)\frac{λ}{4}, \quad κ = 0, 1, 2, \ldots}$

Άρα τα σημεία του άξονα x΄x που απέχουν από το <u>σημείο-κοιλία Ο</u> που λαμβάνεται ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων $(x=0)$, αποστάσεις: $\boxed{x = \frac{λ}{4}, \quad x = 3\frac{λ}{4}, \quad x = 5\frac{λ}{4}, \ldots, x = (2κ+1)\frac{λ}{4}}$
παραμένουν συνεχώς
ακίνητα. Τα σημεία αυτά είναι <u>οι δεσμοί του στάσιμου κύματος.</u>
<u>Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών του στάσιμου κύματος είναι ίση με</u> $\frac{λ}{2} = λ_{στ.}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ</u>

Και εδώ ισχύουν όσα είπαμε για τα προβλήματα στη συμβολή των κυμάτων.
Δηλαδή γράφουμε την εξίσωση των δύο κυμάτων, τα μεταφέρουμε στο σημείο Μ, τα συνθέτουμε και τελικά διερευνούμε τα αποτελέσματα.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΡΕΧΟΝΤΟΣ ΚΑΙ ΣΤΑΣΙΜΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

	ΤΡΕΧΟΝ: $y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$	ΣΤΑΣΙΜΟ: $y=2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\,\eta\mu 2\pi\frac{t}{T}$
ΠΛΑΤΟΣ	Είναι το ίδιο για όλα τα σωματίδια.	Μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη θέση των σωματιδίων από την τιμή $A'=0$ στους δεσμούς μέχρι την τιμή $A'=2A$ στις κοιλίες.
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	Όλα τα σωματίδια εκτελούν Α.Α.Τ. με την ίδια συχνότητα.	Όλα τα σωματίδια εκτελούν Α.Α.Τ. με την ίδια συχνότητα, εκτός των δεσμών που παραμένουν ακίνητα.
ΦΑΣΗ	Για δύο σημεία με $0<\Delta x\leq\lambda \rightarrow 0<\Delta\phi\leq 2\pi$ όλα τα σωματίδια έχουν διαφορετική φάση.	Όλα τα σωματίδια μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν την ίδια φάση. Τα σωματίδια που βρίσκονται σε απόσταση $\lambda/2$ εκατέρωθεν ενός δεσμού έχουν διαφορά φάσης π rad. Όσα σημεία έχουν ίδια φορά κίνησης έχουν ίδια φάση.
Θ.Ι.	Τα υλικά σημεία του μέσου περνούν από τη Θ.Ι. τους διαφορετικές στιγμές.	Τα υλικά σημεία του μέσου περνούν ταυτόχρονα από τη Θ.Ι. τους.
ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ	Είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.	Είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ή κοιλιών. Ισχύει ότι: $\lambda_{\sigma\tau.}=\frac{\lambda}{2}$
ΕΝΕΡΓΕΙΑ	Μεταφέρεται ενέργεια κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.	Δεν υπάρχει μεταφορά ενέργειας αφού αυτή εγκλωβίζεται στα όρια του ελαστικού μέσου.
ΚΥΜΑΤΟΜΟΡΦΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ	Προχωρεί με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Το τρέχον κύμα έχει ορισμένη διεύθυνση διάδοσης.	Δεν προχωρεί. Το ελαστικό μέσο γίνεται ευθύγραμμο δύο φορές σε κάθε περίοδο. Το στάσιμο κύμα δεν έχει διεύθυνση διάδοσης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

16 Κατά μήκος ενός σχοινιού διαδίδονται ταυτόχρονα δύο κύματα, τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$y_1 = 5\eta\mu 2\pi\left(10t - \frac{x}{20}\right) \quad \text{και} \quad y_2 = 5\eta\mu 2\pi\left(10t + \frac{x}{20}\right),$$

(τα x και y σε cm και το t σε s)

α. Να γράψετε την εξίσωση του στασίμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή των δύο κυμάτων.

β. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου Α του σχοινιού που βρίσκεται στη θέση $x = \frac{40}{3}cm$;

γ. Σε πόση απόσταση από το σημείο Α βρίσκεται η πλησιέστερη κοιλία και σε πόση ο πλησιέστερος δεσμός του στασίμου κύματος;

[Απ.: α) $y = 10\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{10}\eta\mu 20\pi t$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s), β) $A' = 5cm$, γ) $\Delta x_\kappa = -\frac{10}{3}cm$, $\Delta x_\delta = \frac{5}{3}cm$]

17 Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα, που έχουν το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα, διαδίδονται ταυτόχρονα κατά μήκος του ιδίου ελαστικού μέσου, προς αντίθετες κατευθύνσεις. Τα δύο κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα. Η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση είναι:

$$y_1 = 4\eta\mu\pi\left(2t - \frac{x}{20}\right), \quad \text{(τα } x \text{ και } y_1 \text{ είναι σε } cm \text{ και το } t \text{ είναι σε } s\text{)}$$

Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων $(x = 0)$ μια κοιλία του στασίμου κύματος και ως αρχή των χρόνων $(t = 0)$ τη χρονική στιγμή που στη θέση $x = 0$ η φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi = 0°$.

α. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση.

β. Να γράψετε την εξίσωση του στασίμου κύματος.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της πλησιέστερης προς τη θέση $x = 0$ κοιλίας του στασίμου κύματος.

δ. Πόσοι δεσμοί του στασίμου κύματος υπάρχουν μεταξύ των θέσεων $x = 0$ και $x = 80cm$;

ε. Βρείτε τη διαφορά φάσης δύο σημείων Β, Γ με $x_B = 5cm$, $x_\Gamma = 15cm$ και των σημείων Γ, Δ με $x_\Delta = 22,5cm$

[Απ.: α) $y_2 = 4\eta\mu\pi\left(2t + \frac{x}{20}\right)$, (τα x και y_2 είναι σε cm και το t σε s), β) $y = 8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{20}\eta\mu 2\pi t$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s), γ) $y = -8\eta\mu 2\pi t$, (το y είναι σε cm και το t σε s), δ) $\kappa = 4$]

ε) π, 0.

18 Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα, που έχουν το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα, διαδίδονται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου προς αντίθετες κατευθύνσεις. Τα δύο κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα. Η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση είναι:

$$y_1 = 2\eta\mu\pi\left(10t - \frac{x}{12}\right), \quad (\text{τα } x \text{ και } y_1 \text{ είναι σε } cm \text{ και το } t \text{ σε } s)$$

α. Να γράψετε την εξίσωση του στασίμου κύματος.

β. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων του μέσου που βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού του στασίμου κύματος και τα οποία ταλαντώνονται με πλάτος $A = 2cm$;

γ. Ποια είναι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των δύο σημείων του ερωτήματος (β);

[Απ.: α) $y = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{12}\eta\mu(10\pi t)$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s), β) $d = 4cm$, γ) $\Delta\varphi = \pi$ rad]

19 Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, το οποίο διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου από τα αριστερά προς τα δεξιά, ανακλάται στο ελεύθερο άκρο του μέσου χωρίς μεταβολή φάσης. Η εξίσωση του ανακλώμενου κύματος είναι:

$$y_2 = 6\eta\mu\pi\left(8t + \frac{x}{20}\right), \quad (\text{τα } x \text{ και } y_2 \text{ είναι σε } cm \text{ και το } t \text{ σε } s)$$

α. Να γράψετε τις εξισώσεις του προσπίπτοντος κύματος και του κύματος που προκύπτει από τη συμβολή του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος.

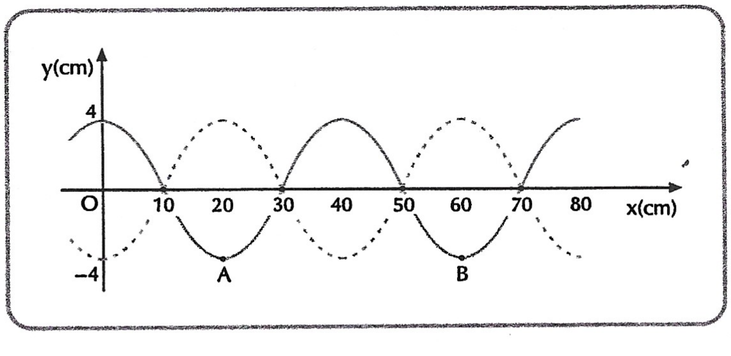
β. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης ενός σημείου M του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = +15cm$.

γ. Να προσδιορίσετε τις θέσεις των δύο πλησιέστερων προς το M σημείων του μέσου, τα οποία έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης με αυτό.

Ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων $(x = 0)$ να θεωρήσετε ένα σημείο O του μέσου, το οποίο δέχεται από κάθε κύμα την ίδια απομάκρυνση, και ως αρχή των χρόνων $(t = 0)$ η χρονική στιγμή που η φάση στο σημείο O είναι ίση με μηδέν.

[Απ.: α) $y_1 = 6\eta\mu\pi\left(8t - \frac{x}{20}\right)$, (τα x και y_1 είναι σε cm και το t σε s), $y = 12\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{20}\eta\mu(8\pi t)$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s), β) $A = 6\sqrt{2}\,cm$, γ) $x = 5cm$; $x = 25cm$]

20 Στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος δίνεται το στιγμιότυπο ενός στασίμου κύματος που δημιουργείται κατά μήκος ενός σχοινιού σε μια χρονική στιγμή που τα σημεία του σχοινιού βρίσκονται στη μέγιστη απομάκρυνσή τους. Η συχνότητα των κυμάτων που συμβάλλουν και δημιουργούν το στάσιμο κύμα είναι $f = 20Hz$.



α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των δυο κυμάτων.

β. Να γράψετε την εξίσωση του στασίμου κύματος.

γ. Να βρείτε τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων των σημείων A και B.

δ. Ποιο είναι το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας των σημείων του ελαστικού μέσου;

[*Απ.: α)* $\upsilon = 8\,m/s$, *β)* $y = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{20}\eta\mu(40\pi t)$,

(τα x και y είναι σε cm και το t σε s), γ) $\Delta\varphi = 0$, *δ)* $\upsilon_{0(max)} = 1{,}6\pi\, m/s$]

21 Κατά μήκος ενός σχοινιού μεγάλου μήκους και προς αντίθετες κατευθύνσεις διαδίδονται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα, τα οποία έχουν πλάτος $A = 2cm$, συχνότητα $f = 5Hz$ και ταχύτητα διάδοσης $\upsilon = 2{,}5m/s$. Υποθέτουμε ότι μια από τις κοιλίες του στασίμου κύματος που δημιουργείται πάνω στο σχοινί βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση στη θέση αυτή είναι $y = 0$ και η φορά της κίνησης θετική.

α. Να γράψετε την εξίσωση του στασίμου κύματος.

β. Για την τρίτη κατά σειρά κοιλία του στασίμου κύματος προς τα δεξιά της θέσης $x = 0$, να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο:

(i) Το πλάτος της ταλάντωσης.

(ii) Την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας.

γ. Να προσδιορίσετε τη γενική σχέση που δίνει τις θέσεις των σημείων του σχοινιού που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

[*Απ.: α)* $y = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{25}\eta\mu(10\pi t)$, *(τα x και y είναι σε cm και το t σε s),*

β) i) $A = 4cm$, *ii)* $y = -4\eta\mu(10\pi t)$, *(το y είναι σε cm και το t σε s),*

γ) $x = \kappa\frac{\lambda}{2}$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$]

22 Ένα γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσον εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$. Δύο σημεία A και B του μέσου απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 20cm$ και αρχίζουν να ταλαντώνονται κατακόρυφα με την ίδια συχνότητα $f = 5Hz$, το ίδιο πλάτος $A = 4cm$ και την ίδια φάση. Το μήκος κύματος των δύο κυμάτων που παράγονται είναι $\lambda = 4cm$.

α. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή των δύο κυμάτων.

β. Να βρείτε τις θέσεις και τον αριθμό των δεσμών και των κοιλιών που σχηματίζονται.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης y σε συνάρτηση με το χρόνο t για τη δεύτερη προς τα δεξιά κοιλία του στασίμου κύματος μετά το σημείο O.

Θεωρούμε ως αρχή του άξονα $x'x$ το μέσο O της απόστασης AB, με το A αριστερά και το B δεξιά, και ως αρχή του χρόνου τη χρονική στιγμή κατά την οποία τα κύματα συναντώνται στο σημείο O.

[*Απ.: α)* $y = 8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}\eta\mu 10\pi t$, *(τα x και y είναι σε cm και το t σε s),*

β) $N_\delta = 10$ *δεσμοί,* $N_\kappa = 11$ *κοιλίες,*

γ) $y = 8\eta\mu 10\pi t$ *(το y είναι σε cm και το t σε s)*]

23

Ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους $A=4cm$ διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση, κατά μήκος ενός σχοινιού, το οποίο εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$. Διαπιστώνεται ότι δύο σημεία του σχοινιού, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\Delta x = 30cm$, παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi_1 = \frac{3\pi}{2} rad$. Επίσης, διαπιστώνεται ότι μέσα σε χρόνο $\Delta t = 2s$ η φάση της ταλάντωσης ενός σημείου του σχοινιού αυξάνεται κατά $\Delta\varphi_2 = 8\pi\ rad$.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα και το μήκος του κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ. Να γράψετε την εξίσωση ενός δεύτερου πανομοιότυπου κύματος, το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του σχοινιού προς την αρνητική κατεύθυνση και, συμβάλλοντας με το πρώτο, δημιουργεί στάσιμο κύμα.

δ. Στο στάσιμο κύμα να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο:

i) για το σημείο του σχοινιού που βρίσκεται στη θέση $x=0$ και

ii) για το σημείο του σχοινιού που βρίσκεται στη θέση της πρώτης κοιλίας προς τα αριστερά της θέσης $x=0$.

[*Απ.: α)* $f = 2Hz$, $\lambda = 40cm$,

β) $y = 4\eta\mu 2\pi\left(2t - \frac{x}{40}\right)$, *(τα x και y είναι σε cm και το t σε s),*

γ) $y_2 = 4\eta\mu 2\pi\left(2t + \frac{x}{40}\right)$, *(τα x και y είναι σε cm και το t σε s),*

δ) i) $y = 8\eta\mu 4\pi t$ *(το y είναι σε cm και το t σε s),*

ii) $y = 8\eta\mu(4\pi t + \pi)$, *(το x είναι σε cm και το t σε s)*]

24

Κατά μήκος μιας χορδής δημιουργείται στάσιμο κύμα, το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{10}\eta\mu(25\pi t), \quad \text{(τα x και y είναι σε cm και το t σε s)}$$

Υποθέτουμε ότι η αρχή μέτρησης των αποστάσεων $(x=0)$ είναι μια κοιλία Ο του στασίμου κύματος και η αρχή των χρόνων $(t=0)$ είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία η φάση στο σημείο Ο είναι μηδέν.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων που συμβάλλουν και δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

β. Να βρείτε τον αριθμό κ των κοιλιών του στασίμου κύματος, οι οποίες περιλαμβάνονται μεταξύ δύο σημείων Σ και Σ΄ της χορδής που είναι δεσμοί του στασίμου κύματος και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\ell = 50cm$.

γ. Με κατάλληλη μεταβολή της συχνότητας των δύο κυμάτων, δημιουργείται κατά μήκος της χορδής ένα νέο στάσιμο κύμα. Αν τα σημεία Σ και Σ΄ της χορδής είναι δεσμοί και του νέου στασίμου κύματος και ο αριθμός των κοιλιών, οι οποίες περιλαμβάνονται μεταξύ τους, είναι $\kappa-1$, να γράψετε την εξίσωση του νέου στασίμου κύματος.

[*Απ.: α)* $\upsilon = 2,5m/s$, *β)* $\kappa = 5$ *κοιλίες,*

γ) $y = 4\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{25}\eta\mu(20\pi t)$, *(τα x και y είναι σε cm και το t σε s)*]

(25) Δύο αρμονικά κύματα, τα οποία διαδίδονται κατά μήκος της ίδιας χορδής μεγάλου μήκους, περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$y_1 = 15\eta\mu\pi\left(40t - \frac{x}{20}\right) \quad \text{και} \quad y_2 = 15\eta\mu\pi\left(40t + \frac{x}{20}\right),$$

(τα x, y_1 και y_2 είναι σε cm και το t σε s)

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα, το μήκος κύματος και την ταχύτητα των δύο κυμάτων.

β. Να προσδιορίσετε τις θέσεις των τριών πρώτων δεσμών που βρίσκονται στο θετικό ημιάξονα, πλησιέστερα προς τη θέση $x=0$.

γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του ενός σημείου της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x=0{,}85m$.

δ. Σε πόση ελάχιστη απόσταση από τον 1ο δεσμό του στασίμου κύματος και προς τα δεξιά του δεσμού αυτού, ένα σημείο της χορδής εκτελεί ταλάντωση με πλάτος ίσο με το πλάτος καθενός από τα δύο κύματα, τα οποία συμβάλλουν και δημιουργούν το στάσιμο κύμα;

[Απ.: α) $f=20Hz$, $\lambda=40cm$, $\upsilon=8m/s$,

β) $x_1=10cm$, $x_2=30cm$, $x_3=50cm$, γ) $A=15\sqrt{2}\,cm$, δ) $\Delta x=\frac{10}{3}cm$]

(26) Τα άκρα μιας τεντωμένης χορδής μήκους $\ell=0{,}8m$ είναι ακλόνητα στερεωμένα. Όταν ένα σημείο της χορδής τίθεται σε ταλάντωση, κατά μήκος της χορδής δημιουργείται στάσιμο κύμα με τέσσερις κοιλίες που ταλαντώνονται με πλάτος $A=4cm$. Η ταχύτητα διάδοσης των δύο κυμάτων που συμβάλλουν και δημιουργούν το στάσιμο κύμα είναι $\upsilon=5m/s$.

α. Να βρείτε το μήκος κύματος των δύο κυμάτων.

β. Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης δύο διαδοχικών κοιλιών K_1 και K_2 του στασίμου κύματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Ως αρχή των χρόνων $(t=0)$ να θεωρήσετε τη χρονική στιγμή που η κοιλία K_1 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και κινείται κατά τη θετική φορά.

[Απ.: α) $\lambda=0{,}4m$, β) $y_1=4\eta\mu25\pi t$ και $y_2=-4\eta\mu25\pi t$,

(τα y_1 και y_2 είναι σε cm και το t σε s)]

(27) Μια χορδή ενός μουσικού οργάνου έχει μήκος $\ell=80cm$. Όταν τίθεται σε ταλάντωση, κατά μήκος της χορδής δημιουργείται στάσιμο κύμα με τέσσερις κοιλίες, οι οποίες ταλαντώνονται με πλάτος $A'=2cm$. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα είναι $\upsilon=1600m/s$.

α. Να αποδείξετε ότι ο ήχος που παράγει η κιθάρα είναι ακουστός.

β. Θεωρούμε ως αρχή Ο του άξονα $(x=0)$ τη θέση της κοιλίας που βρίσκεται πλησιέστερα προς το αριστερό άκρο της χορδής. Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για τα σημεία Ο, Α και Β της χορδής που βρίσκονται στις θέσεις $x=0$, $x_A=10cm$ και $x_B=20cm$, αντίστοιχα. Ως αρχή των χρόνων $(t=0)$ να θεωρήσετε τη χρονική στιγμή που το σημείο Ο βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνσή του.

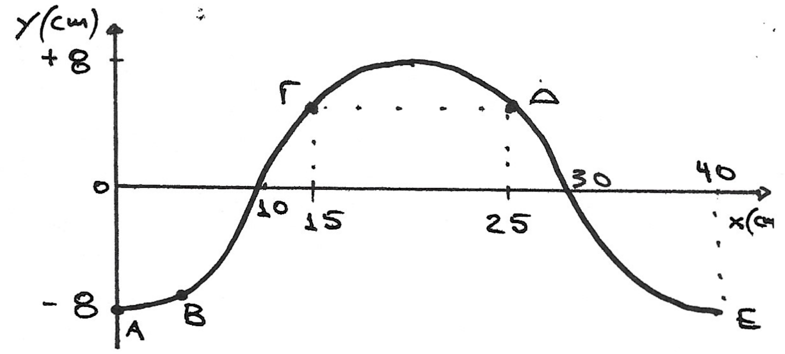
γ. Να παραστήσετε γραφικά τις σχέσεις του ερωτήματος β) σε κοινό διάγραμμα απομάκρυνσης (y) – χρόνου (t).

Δίνεται ότι τα όρια των ακουστών για τον άνθρωπο ήχων είναι από $20Hz$ μέχρι $20.000Hz$.

[Απ.: α) $f=4000Hz$, β) $y=2\eta\mu\left(8000\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$, $y_A=0$,

$y_B=2\eta\mu\left(8000\pi t+\frac{3\pi}{2}\right)$, (τα x και y είναι σε cm και το t σε s)]

(28) Στο σχήμα παριστάνεται το στιγμιότυπο ενός στάσιμου κύματος όπου όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου έχουν μηδενική ταχύτητα. Αν $T=4s$:



i) Να σχεδιαστούν τα στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος μετά από 1s και μετά από 2s

ii) Να γραφούν οι εξισώσεις των κυμάτων που συμβάλλουν για να δώσουν το στάσιμο κύμα και η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

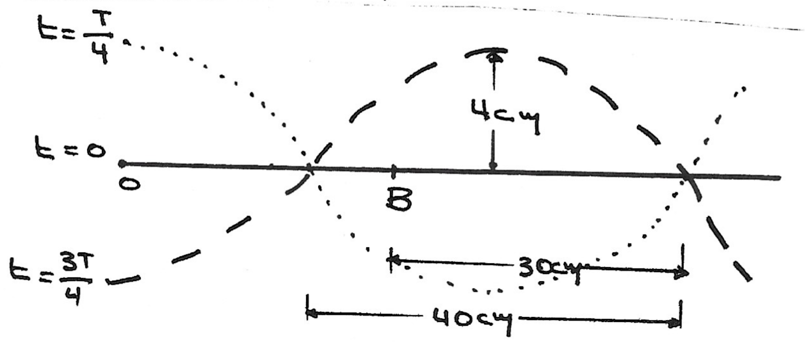
iii) Ποια από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε βρίσκονται σε συμφωνία φάσης;

iv) Υπολογίστε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Δ.

[$y_{1,2}=0{,}04\,\eta\mu 2\pi(\frac{t}{4}\pm 2{,}5x)$, $y=0{,}08\,\sigma\upsilon\nu 5\pi x\,\eta\mu\frac{\pi t}{2}$, Α, Β, Ε – Γ, Δ, $A'_\Delta=4\sqrt{2}$ cm.

(29) Δύο αρμονικά κύματα πλάτους Α και συχνότητας $f=100Hz$ το καθένα, διαδίδονται σε ελαστικό μέσο με ταχύτητα $\upsilon=1{,}2 m/s$ και με αντίθετες φορές, οπότε δημιουργείται στάσιμο κύμα. Αν ένα σημείο Ν του ελαστικού μέσου ταλαντώνεται με πλάτος $A'_N=A$, βρείτε την απόσταση του Ν από τον πλησιέστερο δεσμό. [$\pm 0{,}1$ cm].

(30) Στο σχήμα φαίνονται τα στιγμιότυπα ενός στάσιμου κύματος που προκύπτει από δύο αρμονικά κύματα $f=10Hz$ το καθένα. Να βρεθούν:



i) Η ταχύτητα διάδοσης των δύο αρχικών κυμάτων.

ii) Οι εξισώσεις των δύο αρχικών κυμάτων και η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

iii) Η ταχύτητα του σημείου Β τη χρονική στιγμή $t_1=1/80$ s.

[$\upsilon=8m/s$, $y=2\,\eta\mu 2\pi(10t\pm\frac{x}{80})$, $y=4\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{10}\,\eta\mu 20\pi t$, -40π cm/s]

(31) Δύο σημεία Μ, Ν ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d=40cm$, αρχίζουν να ταλαντώνονται κατακόρυφα με πλάτος $A=5cm$, συχνότητα $f=5Hz$ και $\phi_0=0$. Αν $\upsilon=20cm/s$ και θεωρήσουμε το μέσο Ο του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ σαν σημείο με $x_0=0$ και $t_0=0$:

i) Γράψτε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από τη σύμβολή των δύο κυμάτων.

ii) Βρείτε τις θέσεις και τον αριθμό των δεσμών και των κοιλιών που σχηματίζονται μεταξύ των Μ και Ν, εξαιρουμένων των Μ και Ν.

[$y=0{,}1\sigma\upsilon\nu 50\pi x\cdot \eta\mu 10\pi t$ (S.I.), 20 δεσμοί $x_\Delta=\frac{2k+1}{100}$ $-10{,}5<k<9{,}5$,
19 κοιλίες $x_K=\frac{k}{50}$ $-10<k<10$]

iii) Γράψτε την εξίσωση της απομάκρυνσης y σε συνάρτηση με το χρόνο για τη δεύτερη προς τα δεξιά κοιλία μετά το Ο.

(32) Στα άκρα Α, Β μιας χορδής μήκους $AB=10cm$ υπάρχουν δύο σύγχρονες πηγές περιόδου $T=2s$. Αν η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι $\upsilon=2{,}5cm/s$, βρείτε τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

(2,5cm , 5cm , 7,5cm)

(33)
Δύο σύμφωνες πηγές $Π_1$ και $Π_2$ απέχουν απόσταση $d = 20 cm$ και παράγουν κύματα με $A = 5 cm$, $f = 10 Hz$ και $λ = 10 cm$.
i) Πόσα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $Π_1Π_2$ μένουν συνεχώς ακίνητα και πόσα ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος;
ii) Ένα σημείο Λ απέχει από την πηγή $Π_1$ απόσταση $8{,}75 cm$ και βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$. Τι απομάκρυνση και τι ταχύτητα έχει τη χρονική στιγμή $t = 37/60\ s$;
[4 , 3 , $\frac{5}{2}\sqrt{6}\ cm$]

(34)
Πάνω σε μία χορδή διαδίδονται αντίθετα δύο κύματα πλάτους A, συχνότητας f και μήκους κύματος λ.
Βρείτε τα σημεία μεταξύ δύο δεσμών που έχουν πλάτος ταλάντωσης A όσο και τα αρχικά κύματα.
$(λ/12 , 5λ/12)$.
Υπόδειξη: $συν(α+β) = συνα συνβ - ημα ημβ$.

(35) Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ βρίσκονται στην ελεύθερη επιφάνεια νερού και προκαλούν όμοια κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα $υ = 0{,}5 m/s$. Ένα σημείο Κ της επιφάνειας του νερού βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Π_2$ και απέχει από τις $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις r_1 και r_2 με $r_1 > r_2$. Το σημείο Κ είναι το πλησιέστερο προς το μέσο Μ του $Π_1Π_2$ σημείο που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος. Η απομάκρυνση του σημείου Κ λόγω της συμβολής των κυμάτων δίνεται από την εξίσωση: $y_K = 0{,}2 ημ\frac{5π}{3}(t-2)$ (S.I.).
i) Βρείτε Τ, λ, Α των αρχικών κυμάτων.
ii) Την απόσταση $Π_1Π_2$. (2,6 m)
iii) Τις αποστάσεις r_1, r_2. (1,6 m , 1 m)
iv) Τον αριθμό των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$ τα οποία λόγω συμβολής έχουν πλάτος ταλάντωσης ίσο με το πλάτος της ταλάντωσης

του σημείου Κ. (9 σημεία)
(Πανελλαδικές 2004)

36 Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται προς τ' αριστερά του άξονα x με ταχύτητα $υ=20\,m/s$. Το υλικό σημείο Ο ($x=0$) του ελαστικού μέσου εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση $y=0{,}05\eta\mu 10\pi t$ (S.I.).

i) Βρείτε τα λ και $y=f(x,t)$.

ii) Βρείτε τις φάσεις των υλικών σημείων Κ ($x_K=+2m$) και Λ ($x_\Lambda=-2m$) και τις απομακρύνσεις των σημείων αυτών από τη Θ.Ι. τους τη χρονική στιγμή $t_1=2s$.

iii) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις, $\phi_K=f(t)$, $\phi_\Lambda=f(t)$.

iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της φάσης των σημείων του άξονα x, μεταξύ Κ και Λ, τη χρονική στιγμή t_2 που το υλικό σημείο Λ περνά από την ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του για 3η φορά.

[i) → $\lambda=4m$, $y=0{,}05\eta\mu 2\pi\left(5t+\frac{x}{4}\right)$

ii) $\phi_K=21\pi\ rad$, $\phi_\Lambda=19\pi\ rad$

$y_K=0$, $y_\Lambda=0$]