

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

« Αν μία κατακόρυφη ευθεία τέμνει μία καμπύλη f σε δύο σημεία, τότε η f δεν είναι συνάρτηση ».

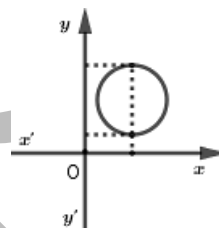
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α με την βοήθεια παραδείγματος αν είναι αληθής αντιπαράδειγματος αν είναι ψευδής.

Απάντηση

α) Αληθής

β) Μια διαδικασία f είναι συνάρτηση όταν κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Αν κατασκευάσουμε έναν κύκλο και φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα x' που διέρχεται από το κέντρο του, διαπιστώνουμε ότι η ευθεία αυτή τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία, οπότε υπάρχουν δύο σημεία με την ίδια τετμημένη και διαφορετική τεταγμένη, δηλαδή σε ένα x αντιστοιχίζονται δύο y .

**2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x) \cdot g(x) = 0$ αν και μόνο αν $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = x + |x|$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x - |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(x)g(x) = (x + |x|)(x - |x|) = x^2 - |x|^2 = x^2 - x^2 = 0$ χωρίς όμως κάποια από τις συναρτήσεις f, g να είναι ίση με το 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι $f^2(x) = g^2(x)$ αν και μόνο αν $f(x) = \pm g(x)$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ -2, & x > 1 \end{cases}$ και $g(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε οι f, g δεν είναι ίσες ούτε αντίθετες για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως $f^2(x) = g^2(x) = 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση: Αντί για $f^2(x) = g^2(x)$, αν ισχύει $|f(x)| = |g(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το αντιπαράδειγμα είναι ίδιο.

4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε $f \circ g = g \circ f$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Είναι φανερό ότι $f \circ g \neq g \circ f$.

5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq D_f$, τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα και στο σύνολο $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

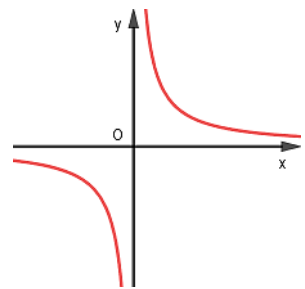
Απάντηση

α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα

διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, όμως δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$

αφού για $x_1 < 0 < x_2$ είναι $f(x_1) < 0 < f(x_2)$.



6. Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq A$ ισχύει ότι:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) < f(x_2)$ είναι $x_1 < x_2$.

Όμως αν θωρήσουμε $x_1 < x_2 < 1$ είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο, αυτό θα ισχύει σε μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού της».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ παρουσιάζει μέγιστο, το $y = 1$, σε καθένα από τα σημεία $2k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$ και ελάχιστο, το $y = -1$, σε καθένα από τα σημεία $2k\pi - \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, αφού $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Αληθής

β) Οι συναρτήσεις $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ δεν έχουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

9. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε είναι και γνησίως μονότονη.»

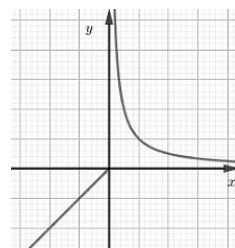
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.



10. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε οι συναρτήσεις $f^{-1} \circ f$ και $f \circ f^{-1}$ είναι ίσες».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Είναι $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$ και $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in f(A)$.

Επειδή τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f^{-1} \circ f$ και $f \circ f^{-1}$ δεν είναι πάντα ίσα, είναι $f^{-1} \circ f \neq f \circ f^{-1}$.

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι

1-1 με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη

συνάρτηση f^{-1} της f . Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

– έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$

– έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και

– αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0, +\infty)$ στο μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $a^x = y$. Επειδή όμως

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

θα είναι $f^{-1}(y) = \log_a y$. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$. Συνεπώς

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad a^{\log_a x} = x, \quad x \in (0, +\infty)$$

11. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν δύο συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι 1-1 ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Οι f, g είναι 1-1, όμως το άθροισμά τους είναι $(f + g)(x) = x + 1 - x = 1$ που δεν είναι 1-1 συνάρτηση.

Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

12. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα

οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Αληθής.

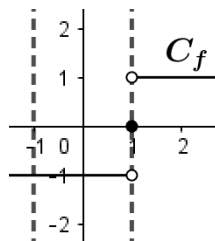
β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$. Για να βρούμε το

όριο της στο $x_0 = 0$ περιορίζομαστε στο υποσύνολο

$(-1, 0) \cup (0, 1)$ του πεδίου ορισμού της

στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή $f(x) = -\frac{x-1}{x-1} = -1$. Το

όριο της είναι ίσο με -1 και δεν εξαρτάται από τα άκρα -1, 1.

**13. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

« Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε

$f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x$, $g(x) = \eta\mu x$, $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ όμως οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

14. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > 0$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \neq 0$. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, όμως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

15. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ σε μια περιοχή του x_0 τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = -x^2$, $x \neq 0$ και $g(x) = x^2$, $x \neq 0$.

Είναι $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \neq 0$, όμως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

16. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{2}{x}, & x < 0 \end{cases}$. Είναι $A_f = \mathbb{R} = A_g$ και $A_{f+g} = \mathbb{R}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

Έχουμε $(f+g)(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f+g)(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} (f+g)(x) = -\infty$ άρα δεν υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$.

17. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \text{ δηλαδή δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2, \text{ δηλαδή}$$

δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. Όμως $f(x) + g(x) = x + 2, x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 2$.

18. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$ τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 5, & x \leq 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 7, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5$, δηλαδή δεν

υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 7$ δηλαδή δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, όμως

$$f(x)g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = 0$$

19. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$. Είναι

$$A_f = \mathbb{R} = A_g \text{ και } A_{f+g} = \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Έχουμε $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f \cdot g)(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \cdot g)(x) = -2$ άρα δεν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)).$$

20. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} -1, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ -1, & x \geq x_0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν στο $x_0 \in \mathbb{R}$, όμως $\left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -1, & x < x_0 \\ -1, & x \geq x_0 \end{cases}$, δηλαδή $\left(\frac{f}{g} \right)(x) = -1$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = -1$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

21. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm 1$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ -1, & x \geq x_0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ όμως

$|f(x)| = 1, x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$.

22. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Αληθής

β) Από τις ιδιότητες απολύτων ισχύει ότι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x)|) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

23. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \kappa \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lambda \neq \kappa$ τότε

το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω $g(x) = x$, $f(x) = x + 1$ και $h(x) = x + 2$.Για κάθε $x \in (-2, 1) \cup (1, 2)$ είναι $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, δηλαδή το όριο της f στο $x = 1$ υπάρχει παρά το ότι δεν ισχύει το κριτήριο παρεμβολής.

24. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0 \in \mathbb{R}$ και $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 τότε και

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \ell \text{ »}.$$

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ και $g(x) \neq 0$ κοντά στο 0.Επειδή $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(g(x)) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$, όμως το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

25. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Αληθής

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Leftrightarrow -\sqrt{f^2(x)} \leq f(x) \leq \sqrt{f^2(x)}$.Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{0} = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (-\sqrt{f^2(x)}) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

26. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Υπάρχει το όριο στο μηδέν της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N}$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, ενώ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

27. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = -\frac{1}{x^4}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^4} = -\infty$$

28. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε είναι συνεχής στα $x = \alpha$ και $x = \beta$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

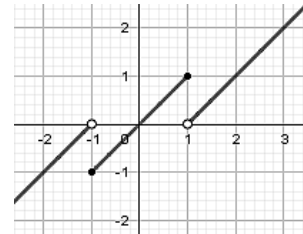
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, όμως δεν είναι συνεχής στα $x = -1$ και $x = 1$.



29. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

K 2019

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Η πρόταση ισχύει μόνο αν η f είναι συνεχής στο x_0 .

30. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ τότε $f(\alpha)f(\beta) < 0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

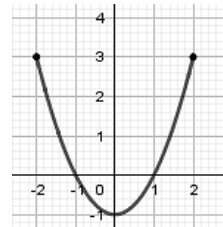
Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x^2 - 1, x \in [-2, 2]$. Η f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$,

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες τις $-1, 1$ στο $(-2, 2)$ όμως

$$f(-2) = 3, f(2) = 3 \text{ και } f(-2)f(2) > 0$$



31. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ και $f(\alpha)f(\beta) < 0$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

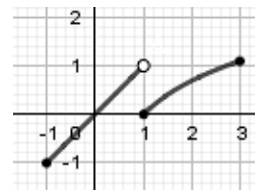
α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 1 \\ \ln x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Για $x \in [-1, 1)$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ενώ για $x \in [1, 3]$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, δηλαδή η $f(x) = 0$

έχει δύο ρίζες και $f(-1) = -1, f(3) = \ln 3$ δηλαδή $f(-1)f(3) < 0$,

όμως η f δεν είναι συνεχής στο $[-1, 3]$ αφού δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$



32. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής συνάρτηση, έχει σύνολο τιμών μονοσύνολο και όχι διάστημα.

33. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

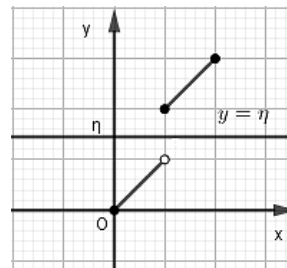
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

$$\beta) \text{ Έστω } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x+1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}.$$

Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, επειδή η f δεν είναι συνεχής, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



34. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο A και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο A ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $A = \mathbb{R}^*$ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, όμως $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.

Διαφορικός Λογισμός

35. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

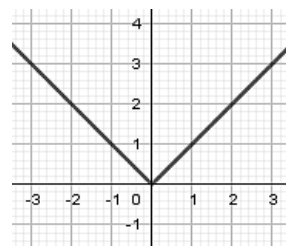
Απάντηση

α) Ψευδής.

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό,

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$



36. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Αληθής.

β) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο x_0 τότε βάση του θεωρήματος θα ήταν και συνεχής στο σημείο αυτό που δεν ισχύει.

37. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία για τα οποία ισχύει $g(x) \geq 0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $g(x) = x$ και $f(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x}, x \geq 0$, τότε έχουμε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με τύπο $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ όμως δεν είναι

παραγωγίσιμη στο 0 αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

38. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν δύο συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$, τότε και η $f + g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = -|x|, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = |x|$. Οι f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Είναι $(f + g)(x) = -|x| + |x| = 0$ και $(f + g)'(x) = 0$.

39. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ ενώ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = |x|$ και $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(0) = 0$, Όμως

$f(g(x)) = |x^2| = x^2$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

40. Αν η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ενώ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η συνάρτηση $f \circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x^2$ και $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(0) = 0$, Όμως

$f(g(x)) = |x|^2 = x^2$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

41. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$ τότε $f(\alpha) = f(\beta)$ ».

- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Στη συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 2]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $[-1, 2]$, είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$ με $f'(x) = 2x$, είναι $f'(0) = 0$ όμως $f(-1) = 1$, $f(2) = 4$ δηλαδή $f(-1) \neq f(2)$.

42. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$ ».

- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Αληθής

β) Αν ήταν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε λόγω του θεωρήματος Rolle θα υπήρχε $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο.

ή

Στη συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in [-1, 1]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με $f'(x) = 1 \neq 0$ και $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$.

43. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = f(\beta)$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο $f'(x_0) = 0$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ».

- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

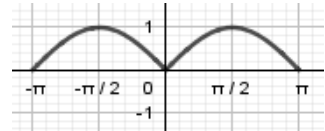
α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = |\eta\mu x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Η f είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ και $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, όμως η f

δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ οπότε και στο $(-\pi, \pi)$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\eta\mu x}{x} = -1$$



44. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{D}_f$, υπάρχει

$x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

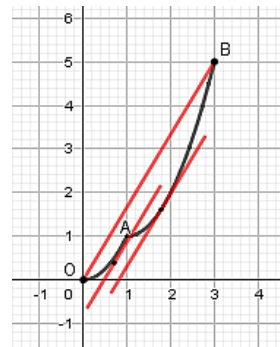
β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ αφού δεν είναι

παραγωγίσιμη στο $x = 1$ όμως οι εφαπτομένες της στα $x_1 = \frac{5}{6}$ και $x_2 = \frac{11}{6}$

είναι παράλληλες στην OA επειδή

$$f'\left(\frac{5}{6}\right) = \lambda_{OA} = \frac{5-0}{3-0} = \frac{5}{3} \text{ και } f'\left(\frac{11}{6}\right) = \lambda_{OA} = \frac{5}{3}.$$



45. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο A που αποτελείται από ένωση διαστημάτων, είναι παραγωγίσιμη στο A και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του A , τότε η f είναι σταθερή στο A ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Κ 2019

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$ για κάθε

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

46. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσες με τη πρώτη τους παράγωγο ».

- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

- α) Αληθής β) $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x, c \in \mathbb{R}$.

47. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ ».

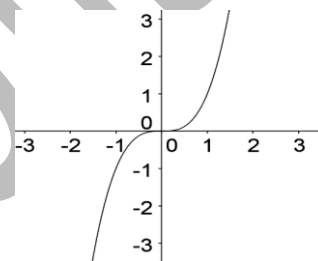
- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

- α) Ψευδής

- β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

Είναι $f'(x) = 3x^2$, και $f'(0) = 0$, Δηλαδή, βλέποντας το σχήμα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, χωρίς να είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



48. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$ ».

- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

- α) Ψευδής

- β) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ αφού $f(x) \geq 0 = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό και δεν ορίζεται το $f'(0)$.

49. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 ».

- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

- α) Ψευδής

- β) Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ έχει $f'(0) = 0$ όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

50. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

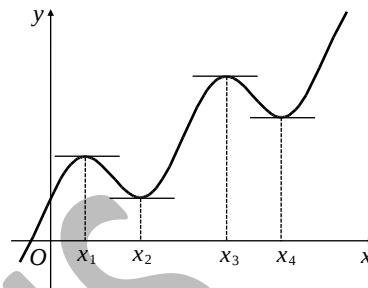
« Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης αποτελεί και ολικό μέγιστο της συνάρτησης ».

- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

- β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία έχει τοπικά μέγιστα στα x_1, x_3 , όμως δεν παρουσιάζει ολικά μέγιστη τιμή.



51. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

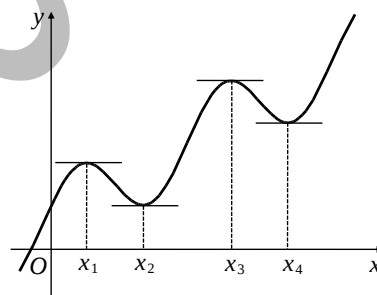
« Ένα τοπικό μέγιστο δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο ».

- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

- β) Έστω η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Παρατηρούμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_4 και το τοπικό μέγιστο είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο.



52. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και υπάρχει ρίζα ρ της εξίσωσης $g''(x) = 0$, τότε το σημείο $A(\rho, f(\rho))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ».

- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

- β) Η συνάρτηση $g(x) = x^4$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x) = 12x^2$. Η εξίσωση $g''(x) = 0$ έχει ρίζα το 0, όμως το σημείο $(0, g(0))$ δεν είναι σημείο καμπής αφού η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

53. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

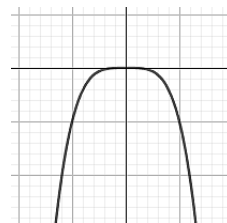
« Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε $f''(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ ».

- α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

- β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = -x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f''(x) = -12x^2$ και η f είναι κοίλη, όμως δεν είναι αρνητική στο 0 αφού $f''(0) = 0$.



Όμοια « Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε $f''(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ ».

α) Ψευδής

β) $f(x) = x^4$

54. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Αληθής

β) Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ και $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$. Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $-\frac{\beta}{3\alpha}$

οπότε έχει σημείο καμπής το $\left(-\frac{\beta}{3\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)\right)$.

Ολοκληρωτικός Λογισμός

55. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in [-1, 1]$. Είναι $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, όμως

η σχέση $f(x) = 0$ ισχύει μόνο για $x = 0$ και όχι για κάθε $x \in [-1, 1]$.

56. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει δύο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Αληθής

β) Αν η f δεν έπαιρνε τουλάχιστον δύο ετερόσημες τιμές, τότε θα ήταν $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$ για κάθε

$x \in [\alpha, \beta]$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, θα ήταν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$ που είναι άτοπο.

57. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις f, g στο $[\alpha, \beta]$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(x) \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = g(x) \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx ».$$

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Αληθής

β) Ισχύει όταν f, g σταθερές συναρτήσεις.

58. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$, τότε είναι και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^3 xdx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^3 = 4 > 0, \text{ όμως } f(x) \leq 0 \text{ στο } [-1, 0] \text{ και } f(x) \geq 0 \text{ στο } [0, 3].$$

59. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$, τότε είναι και $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x, x \in [0, 2]$.

$$\text{Είναι } \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}, \int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2, \text{ δηλαδή}$$

$$\int_0^2 f(x)dx > \int_0^2 g(x)dx, \text{ όμως } f(x) - g(x) = x^2 - x = x(x-1), \text{ οπότε για κάθε}$$

$$x \in (0, 1) \text{ είναι } f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x) \text{ και}$$

60. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

$$\ll \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx \gg.$$

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Απάντηση

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$, $x \in [1, 3]$.

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx \Leftrightarrow \int_1^3 x^2 \cdot x dx = \int_1^3 x^2 dx \cdot \int_1^3 x dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 \Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{26}{3} \cdot 4 \Leftrightarrow 20 = \frac{104}{3} \text{ άτοπο.}$$