

Παράγωγοι

" Όσοι δεν γνωρίζουν μαθηματικά είναι δύσκολο να νιώσουν την ουσία και την ομορφιά, τη βαθύτερη ομορφιά της φύσης " *Richard Feynman*

Παράγωγος στο x_0

ΓΔ/01. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - \eta\mu 2x & , x \leq 0 \\ x^2 + \eta\mu x & , x > 0 \end{cases}$

A) Να μελετήσετε τη συνέχεια της f στο $x_0 = 0$

B) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΓΔ/02. A) Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 2 & , x \leq 1 \\ x^2 + x & , x > 1 \end{cases}$ να βρείτε τις τιμές των

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

B) Όμοια για την $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 1 & , x \geq 0 \\ 2x + \beta & , x < 0 \end{cases}$ στο $x_0 = 0$. Επίσης βρείτε

την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

ΓΔ/03. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & , x \in (-\infty, 1] \\ \sqrt{x^2 + 3} & , x \in (1, +\infty) \end{cases}$ βρείτε

τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι παραγωγίσιμη η f στο $x_0 = 1$.

ΓΔ/04. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + 2\beta\sqrt{x+3} + 6 & , x < 1 \\ x^2 + (\alpha + \beta)x - 1 & , x \geq 1 \end{cases}$, να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ώστε να ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

ΓΔ/05. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $6x - x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 - 6x + 19$, βρείτε την παράγωγο της f στο $x_0 = 3$.

ΓΔ/06. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\eta\mu x - 2x^3 \leq f(x) \leq \eta\mu x + 2x^2$, βρείτε την παράγωγο της f στο $x_0 = 0$. Επίσης βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

ΓΔ/07. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\eta\mu x \leq f(x) \leq x^2 + x$, βρείτε την παράγωγο της f στο $x_0 = 0$. Επίσης βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$.

ΓΔ/08. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει:

$|f(x) - x^2| \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ναδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΓΔ/09. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $x^2 + 3x \leq f(x) \leq 2x^2 - x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την $f'(2)$.

ΓΔ/10. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f(x) - x^3| \leq x^3$, βρείτε την παράγωγο της f στο $x_0 = 0$.

ΓΔ/11. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & , \quad x < 0 \\ \eta\mu x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$, βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να

ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$ και βρείτε την εξίσωσή της.

Παράγωγος και όρια

ΓΔ/12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $6\eta\mu x \cdot \eta\mu 3x \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 3x + 9\eta\mu^2 x$:

A) Βρείτε το $f(0)$.

B) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και βρείτε την $f'(0)$.

Γ) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$.

ΓΔ/13. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \frac{7}{8}$, να βρείτε:

A) Το $f(1)$ και B) Το $f'(1)$ αφού αποδείξετε ότι η f είναι παρ-μη στο 1.

ΓΔ/14. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{x - 2} = -1$, να βρείτε:

A) Το $f(2)$ και B) Το $f'(2)$ αφού αποδείξετε ότι η f είναι παρ-μη στο 2.

Γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) - \sqrt{4x+12}}{x^2 - 1}$ (να θέσετε $u = 2x$)

ΓΔ/15. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 3 και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(3, f(3))$ είναι η $(\varepsilon): y = x - 12$ να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - xf(3)}{x - 3} = 3 - f(3). \quad (\text{Προσθαφαιρέστε το } 3f(3))$$

ΓΔ/16. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 0$ και ικανοποιεί τη σχέση $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu 2x} = 5$. Να δειχθεί ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$ και να βρεθεί το $f'(0)$.

ΓΔ/17. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2 - 7x}{x^2 - 2x} = 2. \quad \text{Α) Βρείτε το } f(0).$$

Β) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και βρείτε το $f'(0)$.

Γ) Υπολογίστε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}.$

ΓΔ/18. Δίνεται η συνεχής και άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία

$$\text{ισχύει: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{x+1}}{x-3} = \frac{7}{4}. \quad \text{Α) Βρείτε το } f(3).$$

Β) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 και βρείτε το $f'(3)$.

Γ) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο -3 και βρείτε το $f'(-3)$.

ΓΔ/19. Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3x}{x-2} = 5$,

να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να υπολογίσετε το

$$\text{όριο: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 3\sqrt{5x+6}}{x-2}.$$

Συνέχεια και παράγωγος

ΓΔ/20. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει

$$|xf(x)| \leq |x - \eta\mu x| \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ να αποδείξετε ότι η}$$

συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $g'(0) = 0$.

ΓΔ/21. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, αποδείξτε ότι η

συνάρτηση $g(x) = (\sqrt{x^2 + 3} - 2)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1.

ΓΔ/22. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$, να δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = (\sqrt{x^2 + 5} - 3)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

ΓΔ/23. Να εξεταστεί αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ η

$$\text{συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x \geq 1 \\ x+2 & , \quad x < 1 \end{cases}. \text{ Είναι η } f \text{ συνεχής στο } x_0 = 1 ;$$

Ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,3)$;

ΓΔ/24. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $3x^2 - 5x^4 \leq xf(x) \leq 3x^2 + 5x^4$. Υπολογίστε τα $f(0)$, $f'(0)$ και την εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(0, f(0))$.

ΓΔ/25. Αν $p(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο σημείο $x_0 = 3$ και $f(x) = p(x)|x - 3|$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ αν και μόνο αν $p(3) = 0$.

Παράγωγος από συναρτησιακή σχέση
(με χρήση του εναλλακτικού ορισμού).

ΓΔ/26. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f^3(x) + 2f(x) = x^2 - 1$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και βρείτε το $f'(1)$.

ΓΔ/27. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy - 2$, και η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 3$: Α) Βρείτε το $f(0)$ και Β) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και μάλιστα ισχύει: $f'(x_0) = 4x_0 + 3$.
(χρησιμοποιήστε τον εναλλακτικό ορισμό για την παράγωγο).

ΓΔ/28. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) = f(x) + 2f(y) + 3xy$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

ΓΔ/29. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$, και η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 4$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και μάλιστα ότι ισχύει: $f'(x_0) = 4x_0 + 4$.

ΓΔ/30. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ισχύει $f^3(x) - 2xf^2(x) + x^2f(x) = x^2 \ln 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδειχθεί ότι $f'(0) = 2$.

ΓΔ/31. Για την συνάρτηση f ισχύει: $f(2+h) = 1 + 2h + 3h^2$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(2)$ και το $f'(2)$.

ΓΔ/32. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο 1 και τέτοια ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = 2. \quad \text{Α) Βρείτε το } f(1). \quad \text{Β) Βρείτε το } f'(1)$$

ΓΔ/33. Για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει: $f(1+h) = 3 - 3h + 3h^2 - h^3$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την κλίση της f στο $x_0 = 1$ και την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

ΓΔ/34. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 .

A) Να δείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -f'(x)$.

B) Να δείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 2f'(x)$.

Γ) Να δείξετε ότι: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hx) - f(x)}{h} = xf'(x)$.

Παράγωγος συνάρτηση

ΓΔ/35. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = x^5$ B) $f(x) = \sqrt{x^3}$ Γ) $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$ Δ) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

E) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ΣΤ) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ Ζ) $f(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$

ΓΔ/36. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ B) $f(x) = 5x^2 - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$

Γ) $f(x) = 4x^3 - \eta\mu x + \ln x$ Δ) $f(x) = e^x - \ln x + \sigma\upsilon\nu x$

E) $f(x) = 2\eta\mu x + 3\sqrt{x} + \ln 2$ ΣΤ) $f(t) = 2^t + \sigma\upsilon\nu t + \ln t$

Ζ) Βρείτε τη 2^η παράγωγο των συναρτήσεων των Α), Γ) και Δ).

ΓΔ/37. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ B) $f(x) = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

Γ) $f(x) = x^2 \ln x$ Δ) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$

E) $f(x) = x^2 e^{x-1}$ ΣΤ) $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$

ΓΔ/38. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

A) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ B) $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x}$ Γ) $f(x) = \frac{1 + \eta\mu x}{1 - \eta\mu x}$ Δ) $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x}}$

E) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ ΣΤ) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ Ζ) $f(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x}}$ Η) $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$

ΓΔ/39. Α) Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f(x) = e^{x^2+1}$ β) $f(x) = \eta\mu 3x$ γ) $f(x) = \eta\mu e^x$ δ) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
 ε) $f(x) = \sqrt{e^x+1}$ στ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$ ζ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x^3$
 η) $f(x) = \ln 4x$ θ) $f(x) = \ln \eta\mu x$ ι) $f(x) = (\eta\mu(x+1))^3$

Β) Βρείτε τη 2^η παράγωγο των συναρτήσεων: α) $f(x) = x^2 \ln x + x - 1$

β) $f(x) = e^x \eta\mu x$ γ) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ και δ) $f(x) = x^2 e^{2x} + x - 2$

Γ) Βρείτε την 3^η παράγωγο των: $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$ και $g(x) = x e^x$

ΓΔ/40. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f(x) = (x+1)^5$ β) $f(x) = \epsilon\phi x^2$ γ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$
 δ) $f(x) = \ln \sqrt{x}$ ε) $f(x) = e^{2x-1}$ στ) $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$
 ζ) $f(x) = \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$ η) $f(x) = e^{\eta\mu x-1}$ θ) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x})$

ΓΔ/41. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 \eta\mu^2 x$ β) $f(x) = \sqrt{1 - \eta\mu 2x}$ γ) $f(x) = \ln^2 x^3$
 δ) $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$ ε) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sigma\upsilon\nu x}$ στ) $f(x) = \ln^2(\eta\mu x)$
 ζ) $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x^2+1})$ η) $f(x) = \eta\mu \sqrt{\ln^2 3x+1}$.

ΓΔ/42. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση παραγωγίστε τις συναρτήσεις:

Α) $g(x) = f(e^x + 1)$ Β) $g(x) = f(x^2 \eta\mu x)$ Γ) $g(x) = x f(x^2 + x)$

ΓΔ/43. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων: Α) $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$

Β) $f(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ Γ) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ Δ) $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$ Ε) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$

Μέθοδος: Αν θέλουμε να παραγωγίσουμε μια εκθετική συνάρτηση με μεταβλητή βάση και μεταβλητό εκθέτη τότε κάνουμε το μετασχηματισμό:

$$\left([f(x)]^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x) \cdot \ln f(x)}\right)'.$$

Π.χ. $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1).$

Επίσης: $(x^{\eta\mu x})' = (e^{\eta\mu x \cdot \ln x})' = e^{\eta\mu x \cdot \ln x} (\eta\mu x \cdot \ln x)' = x^{\eta\mu x} \left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \eta\mu x \cdot \frac{1}{x} \right)$

ΓΔ/44. Αν $x \in (0, +\infty)$ παραγωγίστε τις συναρτήσεις:

A) $f(x) = x^{2x}$ B) $f(x) = x^{\sin x}$ Γ) $f(x) = (\eta \mu x)^x$
 Δ) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ Ε) $f(x) = (\sqrt{x})^x$ ΣΤ) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ Ζ) $f(x) = x^{\ln x}$

ΓΔ/45. Βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων όπου ορίζονται.

A) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 0 \\ x^3 + x, & x > 0 \end{cases}$ B) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3\eta \mu x, & x \leq 0 \\ x^2 - 3x, & x > 0 \end{cases}$

ΓΔ/46. Βρείτε την παράγωγο της

A) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$ B) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x - 8, & x \leq 1 \\ 4x^3 - 3, & x > 1 \end{cases}$

ΓΔ/47. Αν $f(x) = x^2 \ln x$ υπολογίστε τις $f'(x)$, $f''(x)$ και $f'''(x)$.

ΓΔ/48. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$, f' συνεχής

στο $[-2, 2]$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \sqrt{x+9}}{x} = 0$, δείξτε ότι υπάρχει το $f''(0)$ και να το βρείτε.

Μορφές ασκήσεων στις εφαπτόμενες

ΓΔ/49. Βρείτε εφ' όσον ορίζεται, την εφαπτομένη της γραφικής

παράστασης $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x \leq 0 \\ \lambda x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$ στο κοινό της σημείο με τον yy' .

ΓΔ/50. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 + x + 2$ στο σημείο $A(0, f(0))$.

ΓΔ/51. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = 2x^2 + x \ln x$ στο σημείο $A(1, f(1))$.

ΓΔ/52. Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 - 4x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\delta): 2x + y + 3 = 0$.

ΓΔ/53. Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 - x + 2$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\alpha): 11x - y + 3 = 0$.

ΓΔ/54. Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\eta): y = x - 2$.

ΓΔ/55. Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{1}{x}$ που είναι παράλληλη στην ευθεία: $(\delta): y = -\frac{1}{4}x + 1$.

ΓΔ/56. Αν $f(x) = 2x + \frac{1 + \ln x}{x}$ βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$.

ΓΔ/57. Βρες τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε στα σημεία $A(1, f(1))$ και $B(2, f(2))$ η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ έχει εφαπτόμενες παράλληλες στον άξονα $x'x$.

ΓΔ/58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$, με $x \in \mathbb{R}^*$. Βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 5)$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο A είναι ίσος με 4.

ΓΔ/59. Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 - x + 1$ που είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x + 2y + 1 = 0$.

ΓΔ/60. Α) Αν $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι κάθετη στην $(\alpha): 2x + y + 7 = 0$.

Β) Αν $f(x) = 2x + \ln x + 1$ βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι κάθετη στην $(\eta): 3x + y + 7 = 0$.

ΓΔ/61. Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = 3x - \frac{\ln x}{x}$ που είναι κάθετη στην ευθεία $(\delta): x + 3y + 1 = 0$.

ΓΔ/62. Ποια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\pi/4$;

ΓΔ/63. Βρείτε την εφαπτομένη της $f(x) = x^2 + x + 1$ που σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $3\pi/4$.

ΓΔ/64. Ποια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 - 4x + 1$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° ;

ΓΔ/65. Α) Βρείτε την εφαπτομένη της $f(x) = x + e^x + 1$ που σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία θ με $\varepsilon\theta = 2$.

B) Βρες το $\alpha \in \mathbb{R}$ αν η εφαπτομένη της $f(x) = x^2 + \alpha x$ στο $M(1, f(1))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\pi/4$.

ΓΔ/66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , ώστε να :

- α) Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° .
- β) Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): 3x - y + 1 = 0$.
- γ) Είναι κάθετη στην διχοτόμο της γωνίας $\widehat{xOy}$.
- δ) Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΓΔ/67. Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 - 3x$ που διέρχεται από το σημείο $M(2, -3)$.

ΓΔ/68. Βρες την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x + e^x$ που διέρχεται από το σημείο $M(3, 3)$.

ΓΔ/69. Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = -x^2 + x + 1$ που διέρχεται από το σημείο $A(-1, -1)$.

ΓΔ/70. Αν $f(x) = 2\ln x + 1$ βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $A(0, 1)$.

ΓΔ/71. Α) Αν $f(x) = x^2 - x$ βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $A(1, -4)$.

B) Αν $f(x) = \frac{2}{x} + x + 1$ βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $A(1, 4)$.

ΓΔ/72. Αν $f(x) = \frac{4x + \alpha}{x + 1}$ και η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): 4x + y - 2021 = 0$:

A) Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$.

B) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της C_f που να διέρχονται από το $A(2, -1)$.

ΓΔ/73. Αν f συνεχής και ισχύει: $f^3(x) + 4f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

B) Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες της σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες που ανήκουν στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Γ) Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία $A(4, f(4))$ και $B(-4, f(-4))$ είναι παράλληλες.

ΓΔ/74. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+6x}$. Να βρείτε:

- α) Το πεδίο ορισμού της
- β) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της με τετμημένη 4
- γ) το σημείο στο οποίο η παραπάνω εφαπτομένη τέμνει τον άξονα y
- δ) τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $(\alpha): y = x + 12$.

ΓΔ/75. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^4$, στα οποία οι εφαπτόμενες της C_f να είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ΓΔ/76. Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & , x \leq 0 \\ 2\sin x - 1 & , x > 0 \end{cases}$.

- A) Να βρεθεί το $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
- B) Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
- Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
- Δ) Βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην $(\eta): 2x + y - 1 = 0$ στα σημεία της C_f με τετμημένη στο $(0, \pi)$.

E) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{\eta \mu x}$.

ΓΔ/77. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

- A) Η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με σταθερό εμβαδόν.
- B) Η παραπάνω εφαπτομένη δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f .

ΓΔ/78. Δείξτε ότι δεν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x \eta \mu x & , x \leq 0 \\ x^2 + \sqrt{x} & , x > 0 \end{cases}$ στο σημείο $O(0,0)$.

ΓΔ/79. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = \begin{cases} \pi - \pi x & , x \geq 1 \\ \eta \mu \pi x & , x < 1 \end{cases}$ στο σημείο της $A(1, f(1))$.

ΓΔ/80. Αν $f(x) = \frac{x^2}{4}$ και $(\varepsilon): y = \lambda x + 1$ ναδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η C_f και η (ε) τέμνονται σε δύο σημεία. Κατόπιν δείξτε ότι οι εφαπτόμενες σε καθένα από τα ζεύγη των κοινών σημείων τέμνονται κάθετα.

ΓΔ/81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 1 & , x < 0 \\ e^x & , x \geq 0 \end{cases}$. Να βρεθούν:

A) η κλίση της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

B) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A.

ΓΔ/82. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f^2(x) + 8x = 2x^3 + (x^2 + 4)f(x)$, να αποδείξετε ότι η ευθεία: $(\varepsilon): y = 4x - 1$ εφάπτεται στη C_f και να βρείτε το σημείο επαφής.

ΓΔ/83. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f(x+y) = \frac{1}{2} f(x)f(y) + x^2 + x + \alpha \text{ και η ευθεία } (\varepsilon): y = 2x + 1 \text{ είναι}$$

εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$:

A) Βρείτε το $f(0)$.

B) Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$

Γ) Βρείτε τον τύπο της f . (Θέτω $y=0$)

Δ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο $A(-1, -7)$.

Ευθεία εφαπτομένη σε γράφημα

Μέθοδος: Για να είναι η ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ εφαπτομένη της C_f πρέπει να υπάρχει $x_0 \in D_f$ ώστε: $f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$ και $f'(x_0) = \alpha$.

Η πρώτη σχέση μας εξασφαλίζει ότι η ε και η C_f έχουν κοινό σημείο.

Η δεύτερη σχέση μας εξασφαλίζει ότι η ε και η εφαπτομένη της C_f στο κοινό σημείο ταυτίζονται αφού έχουν την ίδια κλίση.

ΓΔ/84. A) Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = -x - 1$ να είναι εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης: $f(x) = x^2 + x + k$.

B) Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + k$ να είναι εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης: $f(x) = x^2 + x - 2$.

Γ) Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + k$ να είναι εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης: $f(x) = x^2 - 2x - k$.

ΓΔ/85. Αν $f(x) = \alpha e^x + x^2 + \beta$:

A) Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 2$ να εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

B) Βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$.

Γ) Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην $(\eta): x - 2y + 2021 = 0$.

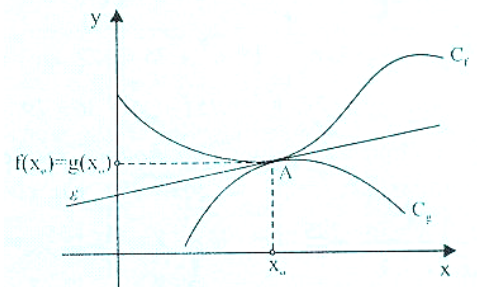
ΓΔ/86. A) Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + k$ να είναι εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης: $f(x) = x^2 + x - 2$.

B) Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$ να είναι εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης: $f(x) = x \ln x + k$.

Γ) Βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 1$ να είναι εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης: $f(x) = x^3 - x + k$.

Κοινές εφαπτόμενες

Μέθοδος: Για να έχουν οι C_f και C_g κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(x_0, y_0)$ πρέπει: $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$. Η πρώτη σχέση εξασφαλίζει ότι το A είναι κοινό σημείο των C_f , C_g και η δεύτερη σχέση



εξασφαλίζει ότι οι εφαπτόμενες των δύο καμπυλών στο A ταυτίζονται, αφού έχουν κοινό σημείο και τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

ΓΔ/87. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3x^2 + \alpha x - 4}{x}$ και $g(x) = \frac{\beta}{x-1}$ να διέρχονται από το ίδιο σημείο με θετική τετμημένη στο οποίο να δέχονται κοινή εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης 4.

ΓΔ/88. Έστω $A(1, \gamma)$ το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων: $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 2$.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο A και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

ΓΔ/89. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x \ln x$ και $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$ να

έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο που βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: x=1$.

ΓΔ/90. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$ και $g(x) = x^2 - \alpha x - \beta$ να έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο που βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: x = -2$.

ΓΔ/91. Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = -2x^2 + \beta x - 1$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(1, y_0)$.

Μέθοδος: Για να βρω την κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g θεωρώ την εφαπτομένη της C_f στο $A(x_1, f(x_1))$:

$$\varepsilon: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon: y = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)x_1 \text{ και την}$$

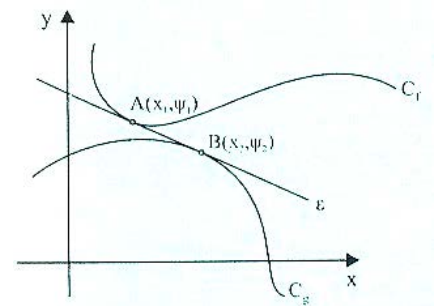
εφαπτομένη της C_g στο $B(x_2, g(x_2))$:

$$\varepsilon': y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon': y = g'(x_2)x + g(x_2) - g'(x_2)x_2 \text{ και απαιτώ}$$

να ταυτίζονται, δηλαδή: $f'(x_1) = g'(x_2)$ και

$$f'(x_1) - f'(x_1)x_1 = g'(x_2) - g'(x_2)x_2.$$



ΓΔ/92. Έστω $f(x) = 2x^2 + \alpha x$, $g(x) = x^2 + \beta$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .

A) Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

B) Βρείτε την άλλη κοινή εφαπτομένη.

ΓΔ/93. A) Βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = -x^2 - 5$. (όχι σε κοινό σημείο)

B) Όμοια για τις $f(x) = x^2 - x - 2$ και $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

ΓΔ/94. Αν $f(x) = \alpha x^2 - x + 2$ και $g(x) = x^2 - (\alpha + 1)x + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και οι εφαπτόμενές τους στα $A(-1, f(-1))$ και $B(-1, g(-1))$ είναι παράλληλες: Βρείτε το α και τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g .

ΓΔ/95. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις και ισχύει:

$f(x) = (x + 5)g(x)$ και $g(-4) = 0$ αποδείξτε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.
(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $f(-4) = g(-4)$)

ΓΔ/96. Αν $f(x) = \alpha x + \frac{x-1}{x}$ και $g(x) = 2x^2 + (4\alpha + \beta)x + \alpha$, βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,1)$ να εφάπτεται της C_g .

ΓΔ/97. Αν f παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει η σχέση: $x^3 + f^3(x) = xf(x)$ να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 1 - x$ είναι εφαπτομένη της C_f .

(Υπόδειξη: Πρέπει να υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ ώστε $f(x_0) = 1 - x_0$ και $f'(x_0) = -1$)

ΓΔ/98. Έστω f, g συναρτήσεις με $f(x) = g\left(-\frac{1}{x^2}\right)$. Αν η ευθεία

$(\eta): y = 2x$ εφάπτεται της C_g στο $x_0 = -1$ να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_1 = 1$.

ΓΔ/99. Αν $f(x) = x^2 - \ln x + 2$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\rho, f(\rho))$ με $\rho \in (1, 2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

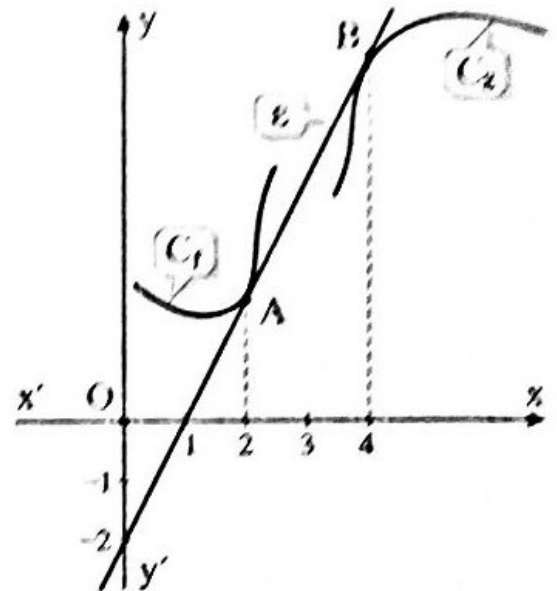
ΓΔ/100. Στο επόμενο σχήμα φαίνονται τμήματα των γραφικών παραστάσεων δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η ευθεία (ε) εφάπτεται της C_f στο A και της C_g στο B .

A) Βρείτε τα σημεία A και B .

B) Βρείτε τα $f'(2)$ και $g'(4)$

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x) = (f \circ f)(x)$ στο σημείο της $\Gamma(2, \varphi(2))$.

Δ) Βρείτε την εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης $h(x) = f(x) \cdot g(x^2)$ στο σημείο της $\Delta(2, h(2))$.



ΓΔ/101. Αν $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\rho, f(\rho))$ με $\rho \in (1, 2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x + 2y - 1 = 0$

ΓΔ/102. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες και η ευθεία $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $O(0, f(0))$:

A) Βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu 3x}{\eta\mu x}$.

B) Αν $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $|g(x) - 2f(x) - x| \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_g στο $A(0, g(0))$ και βρείτε την εξίσωσή της.

ΓΔ/103. Αν g παραγωγίσιμη συνάρτηση και $g(0) = e - 1$ να βρεθεί η εφαπτόμενη της συνάρτησης $f(x) = (1 + g(x))^x$ στο σημείο της $A(0, f(0))$.

ΓΔ/104. Αν f συνεχής στο $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - 3x + 2}{x - \alpha} = 0$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : y = 3x - 2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $M(\alpha, f(\alpha))$.

ΓΔ/105. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = e^{-x} + 1$.

Αν η C_f τέμνει την ευθεία $y = 1$ στο σημείο A και η C_g τον άξονα $y'y$ στο B , να δείξετε ότι η ευθεία AB είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g στα σημεία A, B αντίστοιχα.

Παραγωγή και αντίστροφη συνάρτηση.

ΓΔ/106. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

A) Δείξτε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

B) Αν θεωρήσουμε την f^{-1} είναι παραγωγίσιμη βρείτε το $(f^{-1})'(1)$.

(Παραγωγίστε την σχέση $f(f^{-1}(x)) = x$)

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $M(1, f^{-1}(1))$.

ΓΔ/107. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

A) Δείξτε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

B) Δείξτε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΓΔ/108. Αν $f(x) = \alpha x^3 + 6x - 3$ και η εφαπτομένη της στο $A(2, f(2))$ είναι παράλληλη στην $(\delta) : 30x - y - 2010 = 0$:

A) Βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$.

B) Αποδείξτε ότι η f είναι «1-1»

Γ) Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $B(5, f^{-1}(5))$.

Ρυθμός μεταβολής

ΓΔ/109. Η θέση ενός κινητού που κινείται στον άξονα $x'x$, συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$, δίνεται από τη σχέση

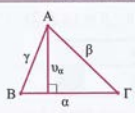
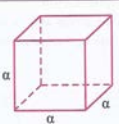
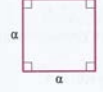
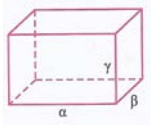
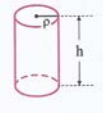
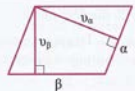
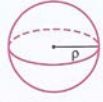
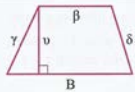
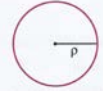
$$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4.$$

Α) Ποιες χρονικές στιγμές βρίσκεται στην αρχή των αξόνων;

Β) Βρείτε την ταχύτητά του για $t = 2$

Γ) Βρείτε τις θέσεις του κινητού στις οποίες ηρεμεί

Δ) Βρείτε την επιτάχυνσή του για $t = 3$.

Εμβαδόν και περίμετρος βασικών επίπεδων σχημάτων		Όγκος και εμβαδόν επιφανείας βασικών στερεών	
	Τρίγωνο $\Pi = a + b + c$ $E = \frac{au_a}{2}$		Κύβος $V = a^3$ $E = 6a^2$
	Τετράγωνο $\Pi = 4a$ $E = a^2$		Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $V = ab\gamma$ $E = 2(ab + b\gamma + \gamma a)$
	Ορθογώνιο $\Pi = 2(x + y)$ $E = xy$		Κύλινδρος $V = \pi r^2 h$ $E_{\text{πλευράς}} = 2\pi r h$ $E_{\text{ολ.}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$
	Παραλληλόγραμμο $\Pi = 2(a + b)$ $E = au_a = bu_b$		Σφαίρα $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $E = 4\pi r^2$
	Τραπεζίδιο $\Pi = a + b + c + d$ $E = \frac{(a + b)u}{2}$		Κώνος $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $E_{\text{πλευράς}} = \pi r l$ $E_{\text{ολ.}} = \pi r^2 + \pi r l$
	Κύκλος $\Pi = 2\pi r$ $E = \pi r^2$		

ΓΔ/110. Το μήκος ενός ορθογωνίου αυξάνεται με ρυθμό $5\text{cm}/s$ ενώ το πλάτος του ελαττώνεται με ρυθμό $3\text{cm}/s$.

Να βρεθούν: Α) ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου, και

Β) Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν το μήκος είναι 2cm και το πλάτος 1cm .

ΓΔ/111. Παγοκολώνα έχει σχήμα κύβου. Τη χρονική στιγμή που οι ακμές του κύβου είναι 10cm η κολώνα αρχίζει να λιώνει. Οι ακμές της μειώνονται ανάλογα με σταθερό ρυθμό $0,03\text{cm}/\text{sec}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού και του όγκου του κύβου.

ΓΔ/112. Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνει με ρυθμό $10\text{cm}^3/\text{sec}$. Να βρεθεί η ακτίνα της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η επιφάνεια της αυξάνει με ρυθμό $2\text{cm}^2/\text{sec}$.

ΓΔ/113. Αν $O(0,0)$, $A(2x,0)$ και $B(0,e^x)$, $x > 0$ και το x αυξάνει με ρυθμό $2\text{cm}/s$ βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τριγώνου OAB όταν $x = 1$.

ΓΔ/114. Δύο σημεία A και B κινούνται στους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα, με ταχύτητες $v_A = 10\text{m}/\text{sec}$ και $v_B = 5\text{m}/\text{sec}$. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασής τους κατά τη χρονική στιγμή που το A απέχει από την αρχή των αξόνων 4m ενώ το B απέχει από το O , 3m .

ΓΔ/115. Ένα ποδήλατο βρίσκεται 4km δυτικά από ένα σταυροδρόμι και κινείται προς αυτό με ταχύτητα 9km/h . Την ίδια στιγμή ένα άλλο ποδήλατο βρίσκεται 3km βόρεια από το σταυροδρόμι και απομακρύνεται από αυτό με ταχύτητα 10km/h . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των ποδηλάτων αυτή τη χρονική στιγμή.

ΓΔ/116. Μια κλεψύδρα αδειάζει την άμμο σχηματίζοντας κώνο του οποίου η ακτίνα ισούται πάντα με το ύψος του. Η άμμος αδειάζει με ρυθμό $300\text{cm}^3/\text{sec}$. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του κώνου της άμμου όταν το ύψος του είναι 30cm .

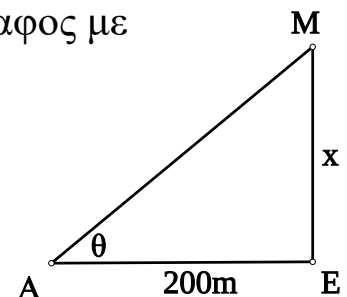
ΓΔ/117. Κύλινδρος έχει σταθερό όγκο 100cm^3 και η ακτίνα του ελαττώνεται με ρυθμό $2\text{cm}/\text{sec}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ύψους του όταν η ακτίνα του είναι $R = 20\text{cm}$.

ΓΔ/118. Σ' έναν κατακόρυφο τοίχο βρίσκεται στερεωμένη, πλάγια, μια ανεμόσκαλα μήκους 5m . Το κάτω μέρος της σκάλας αρχίζει να γλιστρά με ρυθμό $1\text{m}/\text{s}$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το κάτω μέρος της σκάλας απέχει από τον τοίχο 3m , να βρείτε:

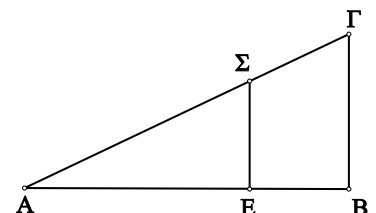
- A) Το ύψος που βρίσκεται το πάνω μέρος της σκάλας
- B) Το ρυθμό που πέφτει το πάνω μέρος της σκάλας.
- Γ) Το ρυθμό που μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν η σκάλα, ο τοίχος και το έδαφος, και
- Δ) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η σκάλα με τον τοίχο.

ΓΔ/119. Ένας γερανός έλκει οριζόντια ένα βαρύ αντικείμενο που βρίσκεται στο έδαφος, με ένα συρματόσχοινο. Η τροχαλία του γερανού βρίσκεται σε ύψος 3m από το έδαφος. Αν το συρματόσχοινο διέρχεται από την τροχαλία με ρυθμό $20\text{m}/\text{min}$, να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο το σώμα πλησιάζει το γερανό τη στιγμή που απέχει από αυτόν 4m .

ΓΔ/120. Ένα μπαλόνι M που ανεβαίνει από το έδαφος με ταχύτητα $40\text{m}/\text{min}$, γίνεται αντιληπτό από έναν παρατηρητή A σε απόσταση 200m από το σημείο απογείωσης E . Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ καθώς και το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $AM = d$, όταν το μπαλόνι έχει ύψος $x = 200\text{m}$



ΓΔ/121. Σώμα Σ ανέρχεται στο διπλανό κεκλιμένο επίπεδο με ταχύτητα $2\text{m}/\text{s}$. Αν $AB = 10\sqrt{3}\text{m}$ και $B\Gamma = 10\text{m}$ βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους ΣE .



ΓΔ/122. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους της σκιάς ενός ανθρώπου ύψους $1.70m$ ο οποίος απομακρύνεται με ταχύτητα $0,4 m/s$ από μια κολόνα, της οποίας η λάμπα φωτίζει από ύψος $5,10m$ το έδαφος.

ΓΔ/123. Σε μια κωνική δεξαμενή χύνεται νερό με ρυθμό $2\pi m^3/s$. Αν το ύψος της δεξαμενής είναι $10m$ και το πάνω μέρος της είναι κύκλος ακτίνας $5m$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής με τον οποίο ανέρχεται η στάθμη του νερού όταν το βάθος του είναι $2m$.

ΓΔ/124. Σημείο $M(x, y)$ κινείται στην καμπύλη με εξίσωση $3x^2 - y^2 = 12$ έτσι που η τεταγμένη του να αυξάνεται με ρυθμό $6cm/s$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του x όταν $x = 4cm$.

ΓΔ/125. Σημείο M ξεκινώντας από το σημείο $O(0,0)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \eta\mu x$ με $x \in [0, \pi]$. Όταν το M διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ η ταχύτητα απομάκρυνσής του από τον άξονα $y'y$ είναι 2 μον/sec. Βρείτε την ταχύτητα απομάκρυνσης του M από τον άξονα $x'x$ τη στιγμή που διέρχεται από το A .

ΓΔ/126. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στην καμπύλη $y = x^2$.

A) Αν τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του είναι $2 cm$ ο ρυθμός μεταβολής της είναι $1 cm/sec$ βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

Αν $O(0,0)$ και A η προβολή του M στον $x'x$: Τη χρονική στιγμή t_0 :

B) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMA .

Γ) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta(t) = \widehat{MOA}$.

ΓΔ/127. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στην καμπύλη $y = \sqrt{x}$.

A) Αν τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του είναι $4 cm$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι $\frac{1}{2} cm/sec$ βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

Αν $O(0,0)$ και A η προβολή του M στον $x'x$: Τη χρονική στιγμή t_0 :

B) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMA .

Γ) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta(t) = \widehat{MOA}$.

ΓΔ/128. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στην καμπύλη $y = \frac{4}{x}$, $x > 0$.

A) Τη χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι αντίθετος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του βρείτε τις συντεταγμένες του M .

Αν $O(0,0)$ και A η προβολή του M στον $x'x$ και τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x'(t_0) = 2 \text{ cm / s}$:

B) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMA .

Γ) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta(t) = \widehat{MOA}$.

ΓΔ/129. Έστω $f(x) = \frac{x^2}{4}$.

A) Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(6, f(6))$.

B) Ένα σώμα κινείται στη C_f . Τη χρονική στιγμή t_0 που βρίσκεται στο A η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 4 μον/sec. Αυτή τη χρονική στιγμή βρείτε:

A) Το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

B) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο A με τον άξονα $x'x$.

ΓΔ/130. Κινητό σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$ και A το σημείο της καμπύλης όπου η κλίση της είναι 1. Καθώς το M διέρχεται από το A η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 3 μον/sec. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $d = OM$ με $O(0,0)$, τη χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το A .

ΓΔ/131. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x-1)^2$. Η τετμημένη του είναι θετική και απομακρύνεται από το $O(0,0)$ με ρυθμό 2 μον/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο M με τον άξονα $x'x$ όταν αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $x - y + 1 = 0$ καθώς και η τετμημένη του M τη στιγμή εκείνη.

ΓΔ/132. Κινητό σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \ln x$ και $A\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$ σημείο της καμπύλης. Καθώς το M διέρχεται από το A η

τετμημένη του x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec. Αυτή τη χρονική στιγμή βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\hat{\theta}$ που σχηματίζει το OM με τον άξονα $x'x$.

ΓΔ/133. Σημείο Μ κινείται στην καμπύλη $y = x^2$, στο 1^ο τεταρτημόριο. Η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 2cm/s. Τη χρονική στιγμή που είναι $OM = \sqrt{90}$, με $O(0,0)$ να βρείτε:

- A) Το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης.
 B) Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου με τις δύο πλευρές του στους άξονες και διαγώνιο OM.
 Γ) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta(t)$ που σχηματίζει το OM με τον x .

Θ.Μ.Τ. και Θ. Rolle.

Σχόλιο: Το Θεώρημα Rolle είναι υπαρκτικό. Διαπιστώνει απλά την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα, αλλά δεν μπορεί να προσδιορίσει τον ακριβή αριθμό των ριζών αλλά ούτε και να τις εντοπίσει. Το ίδιο ισχύει και για το Θ.Μ.Τ..

Διαπιστώνει την ύπαρξη ενός σημείου ξ στο διάστημα (α, β) με την

ιδιότητα: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ αλλά δεν μπορεί να αποφανθεί αν είναι

μοναδικό ούτε μπορεί να το βρει.

Τα αντίστροφα των θεωρημάτων Rolle και Θ.Μ.Τ. δεν ισχύουν γενικά.

ΓΔ/134.A) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 3$.

Δείξτε ότι για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[-2,4]$, εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[-2,4]$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

B) Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[1,3]$, για την οποία ισχύει $f(3) = 12$ και $f(1) = 4$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): 4x - y + 1 = 0$.

ΓΔ/135.A) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Δείξτε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα $[0,4]$ βρείτε το $\xi \in (0,4)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία.

B) Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle για

τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + 1, & x < 0 \\ 2x^2 + \beta x + \gamma, & x \geq 0 \end{cases}$ στο διάστημα $[-1,1]$.

Γ) Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 1 \\ \gamma x^2 + 20x - 9, & x \geq 1 \end{cases}$ στο $[0, 2]$.

ΓΔ/136. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha - \beta)x^3 + (2\alpha + \beta)x^2 - 3\alpha x$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0, 1)$ ώστε στο σημείο $A(\rho, f(\rho))$, η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΓΔ/137. Δίνεται η συνάρτηση g με $f(x) = x^2 + e^x - 1$. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $A(\rho, f(\rho))$ να είναι παράλληλη με την ευθεία (η) που διέρχεται από τα σημεία $M(1, 1)$ και $N(2, e+1)$. Βρείτε επίσης την εξίσωση της (ε).

Μέθοδος: Για να αποδείξω ότι η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) :

- i) Εφαρμόζω Θ. Bolzano για την f στο $[\alpha, \beta]$ ή
- ii) Εφαρμόζω Θ. Rolle για μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ ή
- iii) Βρίσκω το σύνολο τιμών της f στο $[\alpha, \beta]$ και αποδεικνύω ότι το μηδέν περιλαμβάνεται σε αυτό ή
- iv) Με δοκιμές βρίσκω μια προφανή ρίζα της f στο $[\alpha, \beta]$.

Μέθοδος: Για να αποδείξω ότι η συνάρτηση f έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα (α, β) :

Αποδεικνύω με έναν από τους προηγούμενους τρόπους ότι η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) και στη συνέχεια αποδεικνύω ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta]$ ή δέχομαι ότι έχει δύο διαφορετικές ρίζες $x_1 < x_2$ στο $[\alpha, \beta]$ και εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$ καταλήγω σε άτοπο.

Μέθοδος: Για να αποδείξω ότι η συνάρτηση f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (α, β) :

Προσδιορίζω ένα σημείο γ με $\alpha < \gamma < \beta$ με δοκιμές ή χρησιμοποιώντας Θ.Μ.Τ. και στη συνέχεια εργάζομαι στο κάθε διάστημα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, \beta]$ όπως παραπάνω..

Μέθοδος: Για να αποδείξω ότι η συνάρτηση f έχει το πολύ δύο ρίζες στο διάστημα (α, β) :

Δέχομαι ότι έχει τρεις διαφορετικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ βρίσκω ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες x_1, x_2 της f' με $x_1 \in [\rho_1, \rho_2]$ και $x_2 \in [\rho_2, \rho_3]$. Αν αυτό δεν είναι άτοπο, εφαρμόζοντας πάλι Θ. Rolle για την f' στο $[x_1, x_2]$ διαπιστώνω ότι η f'' έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) που αποδεικνύεται άτοπο.

ΓΔ/138. Δείξτε ότι η εξίσωση $8x^3 - 12x^2 - 6x + 5 = 0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΓΔ/139. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^5 - 5x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

ΓΔ/140. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = x + 1$ έχει μόνο μία πραγματική ρίζα.

ΓΔ/141. Δείξτε ότι η εξίσωση $4x^5 + 3x^3 + x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

ΓΔ/142. Να λυθεί η εξίσωση: $xe^x - e^x + 1 = 0$. (Αναζητήστε προφανή λύση)

ΓΔ/143. Λύστε την εξίσωση $\ln x = x - 1$.

ΓΔ/144. Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x \sin x + \cos x$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες $x_1 \in (-\pi, 0)$ και $x_2 \in (0, \pi)$.

Β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{4} - x - 2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία στο διάστημα $(-2, 0)$ και μία στο $(0, 3)$.

ΓΔ/145. Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $x^4 + x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

ΓΔ/146. Δείξτε ότι η $f(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x - 6$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

ΓΔ/147. Α) Δείξτε ότι η $f(x) = x^4 + x^2 - 8x - 3$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

Β) Δείξτε ότι η εξίσωση $2e^x - x^2 = \alpha x + \beta$ έχει το πολύ τρεις ρίζες.

ΓΔ/148. Δείξτε ότι η $f(x) = x^3 + 3x - 12$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

ΓΔ/149. Δείξτε ότι η $f(x) = x^5 + 3x - 3$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

ΓΔ/150. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$. (Σύνολο τιμών και Θ. Rolle)

ΓΔ/151. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2(x-1)^2$, $g(x) = \frac{x+6}{x+3} + \frac{x}{4}$ ορισμένες στο $(0,1)$. Ναδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ ώστε οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο σημείο με τετμημένη ξ να είναι παράλληλες.

Αντιπαράγωγιση.

Πρόταση: Αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες τότε έχουν και ίσες παραγώγους. Έτσι έχουμε το δικαίωμα να παραγωγίζουμε μια ισότητα συναρτήσεων. Δηλαδή αν $f(x) = g(x)$ τότε $f'(x) = g'(x)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αυτό που ισχύει είναι ότι αν δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια παράγωγο τότε διαφέρουν κατά σταθερό αριθμό. Δηλαδή αν $f'(x) = g'(x)$ τότε $f(x) = g(x) + c$.

ΓΔ/152. Βρείτε τις συναρτήσεις f αν:

A) $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ και $f(1) = 7$

B) $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ και $f(1) = 3$

Γ) $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} + 2x + 1$ και $f(1) = e$

Δ) $f'(x) = \sin 2x + \eta \mu 3x$ και $f(0) = 1$

E) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ και $f(0) = 0$

ΣΤ) $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$ με $x > 0$ και $f(1) = 2$

Z) $f'(x) = 4x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \eta \mu x$ με $x > 0$ και $f(0) = 2$

H) $f'(x) = 4x^3 + \eta \mu x - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ με $x > -1$ και $f(0) = 1$.

Θ) $f'(x) = \frac{1}{x} + e^x - 2x$ με $x > 0$ και $f(1) = e - 1$.

I) $f'(x) = 3\eta \mu^2 x \cdot \sigma \upsilon \nu x$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

ΙΑ) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x - \sigma \upsilon \nu x$ και $f(0) = 0$.

ΙΒ) $f'(x) = 2x\eta \mu x + x^2\sigma \upsilon \nu x$ και $f(0) = 1$.

$$\text{ΙΓ)} f'(x) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \text{ και } f(1) = -1$$

$$\text{ΙΔ)} f'(x) = \frac{x e^x - e^x}{x^2} \text{ και } f(1) = e + 2.$$

$$\text{ΙΕ)} f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ και } f(1) = 1.$$

$$\text{ΙΣΤ)} f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} \text{ και } f(0) = 1.$$

ΓΔ/153. Στις παρακάτω περιπτώσεις βρείτε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A και για την οποία, για κάθε $x \in A$, ισχύει:

$$\text{Α)} f(x) + x f'(x) = 6x^5 + 4x^3 + 2x \text{ και } f(1) = 3$$

$$\text{Β)} (x+1) f'(x) + f(x) = 3x^2 - 6x + 1 \text{ και } f(1) = 2$$

$$\text{Γ)} x f'(x) + f(x) = 2e^{2x} \text{ και } f(1) = e^2 + 1$$

$$\text{Δ)} x^2 f'(x) + 2x f(x) = \ln x + 1 \text{ και } f(1) = 0.$$

$$\text{Ε)} x f'(x) - f(x) = x^2 e^x \text{ και } f(1) = e$$

$$\text{ΣΤ)} f(x) f'(x) = e^{2x} \text{ και } f(0) = 1$$

$$\text{Ζ)} x e^x f'(x) + e^x f(x) = \sin x - \eta \mu x \text{ και } f(\pi) = 0.$$

$$\text{Η)} x f'(x) - f(x) = x^2 \eta \mu x + x^3 \sigma \upsilon \nu x \text{ και } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\text{Θ)} x f'(x) - 2 f(x) = x^2 \text{ και } f(1) = 0.$$

Ι) Βρείτε την παράγωγο $(x e^x - e^x)'$ και τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $x f'(x) + 2 f(x) = e^x$ και $f(1) = 0$.

ΓΔ/154. Α) Να βρείτε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $x f'(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 6$

Β) Όμοια για την $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ αν

$$g(x) + x g'(x) = 6x^5 + 4x^3 + 2x$$

ΓΔ/155. Α) Αν $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 1 \\ 2x - 3, & x \geq 1 \end{cases}$ και $f(2) = \frac{2}{3}$ βρείτε την f .

Α) Αν $f'(x) = \begin{cases} 4x^3 + 2x + 1, & x < 0 \\ 3\sigma \upsilon \nu x - 2x - 3, & x \geq 0 \end{cases}$ και $f(-1) = 2$ βρείτε την f .

Μέθοδος: Έστω f συνάρτηση που ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$. Αν θέλω να αποδείξω ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = k$ με $k \in \mathbb{R}$, υποψιάζομαι Θ.Μ.Τ. για την f , ή Θ. Rolle για την $g(x) = f(x) - kx$.

ΓΔ/156. Αποδείξτε ότι η $f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 8x + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. (Υπόδ.: με Θ. Rolle)

ΓΔ/157. Δείξτε ότι η εξίσωση $4x^3 + 3(\alpha - 1)x^2 + 2\beta x = \alpha + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΓΔ/158. Αν $2\alpha + 5\beta + 10\gamma = 0$, δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha x^4 + \beta x + \gamma = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

ΓΔ/159. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν δύο σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^6 + 2x^4 + x^2 - 4$ στα οποία να έχουμε παράλληλες εφαπτόμενες.

ΓΔ/160. Αν f συνεχής στο $[0, \pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και ισχύει: $f(0) - f(\pi) = \pi^2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$ ώστε $f'(x_0) + 2x_0 = \sin x_0$.

ΓΔ/161. Αν f παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ και $f(2) - f(1) = 3 - \ln 2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ ώστε: $f'(\xi) = 2\xi - \frac{1}{\xi}$.

ΓΔ/162. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0, 1]$ και ισχύει: $f(0) = f(1) + e$ αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f'(x_0) + x_0 e^{x_0} + e^{x_0} = 0$.

ΓΔ/163. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(1) - f(2) = \frac{e^2}{2} - e$, δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 f'(x) + x e^x - e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

ΓΔ/164. Αν f παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ και $f(1) = 4f(2) - \frac{e^2}{2} + e$ να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^4 f'(x) + 2x^3 f(x) = x e^x - e^x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

ΓΔ/165. Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ ώστε: $f'(\xi) \eta \mu \xi + f(\xi) \sigma \upsilon \nu \xi = 0$.

ΓΔ/166. Αν f παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ και $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ώστε: $(1 - 2\xi) f'(\xi) = 2f(\xi)$.

ΓΔ/167. Αν f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και $f(0) = 2f(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε: $f'(\xi) = -\frac{2\xi}{\xi^2 + 1} f(\xi)$.

ΓΔ/168. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ να δειχθεί ότι η εξίσωση $f'(x) = \chi_{\pi/2} - \sin x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΓΔ/169. Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\alpha - \xi} + \frac{1}{\beta - \xi}$.

ΓΔ/170. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και $f(1) = 2f(2)$ δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f'(x_0) = -\frac{f(x_0)}{x_0}$.

ΓΔ/171. Αν f συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{xOy}$ τέμνει τη C_f στα σημεία A, B με τετμημένες 1, 2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ ώστε: $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$.

ΓΔ/172. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, $f(0) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f'(x_0)[2f(x_0) + 1] = 2$.

Μέθοδος: Αν έχουμε μια εξίσωση της μορφής: $f'(x) + g(x) \cdot f(x) = 0$ και θέλουμε να της δώσουμε τη μορφή: $(\dots)' = 0$, τότε πολλαπλασιάζουμε με το $e^{G(x)}$ όπου G μια παράγουσα της g και έχω:

$$f'(x)e^{G(x)} + e^{G(x)}g(x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{G(x)} + e^{G(x)}G'(x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{G(x)} + (e^{G(x)})' f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{G(x)}]' = 0.$$

$$\text{Π.χ. } f'(x) + \sin x \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{\eta_{\mu x}} + e^{\eta_{\mu x}} \sin x \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot e^{\eta_{\mu x}} + (e^{\eta_{\mu x}})' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\eta_{\mu x}}]' = 0.$$

ΓΔ/173. Αν f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε:

$$\text{Α) } f'(\xi) + 2f(\xi) = 0 \quad \text{Β) } f'(\xi) + \frac{1}{2\sqrt{\xi}} f(\xi) = 0 \quad \text{Γ) } f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0$$

$$\text{Δ) } f'(\xi) = \eta_{\mu x} f(\xi) \quad \text{Ε) } f'(\xi) + g'(\xi) \cdot f(\xi) = 0.$$

Παρατήρηση: Το γινόμενο $f(x) \cdot f''(x)$ εμφανίζεται αν παραγωγίσουμε μια από τις $f(x) \cdot f'(x)$ ή $\frac{f(x)}{f'(x)}$ ή $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\text{Π.χ.: } (f(x) \cdot f'(x))' = f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) = [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x).$$

ΓΔ/174. Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f'(\beta) = f(\beta) \cdot f'(\alpha)$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $f(\xi) \cdot f''(\xi) > 0$. (Θ.Rolle για την $F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$)

ΓΔ/175. Α) Δείξτε ότι μεταξύ δύο ριζών της παραγωγίσιμης συνάρτησης f βρίσκεται μία τουλάχιστον ρίζα της f' .

Β) Βρείτε πόσες ρίζες έχει η παράγωγος της $f(x) = x(x+1)(x-2)(x+3)$ και σε ποια διαστήματα ανήκουν.

ΓΔ/176. Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. (Με εις άτοπο απαγωγή)

ΓΔ/177. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τις εξής ιδιότητες

α) Είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β)

β) Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $g(x) \neq 0$ και για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ $g'(x) \neq 0$

γ) $f(\beta)g(\alpha) - f(\alpha)g(\beta) = 0$ Δείξτε ότι :

Α) για τη συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το Θ.Rolle στο $[\alpha, \beta]$

Β) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ (Πανελλήνιες '91)

ΓΔ/178. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Έστω ακόμα η $g(x) = e^{f(x)}(x - \alpha)(x - \beta)$. Ναδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{\alpha + \beta - 2\xi}{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)}$.

ΓΔ/179. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$ όπου μ παράμετρος που διατρέχει το $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο $(1, 2)$. (Πανελλήνιες '93)

ΓΔ/180. Αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στον κύκλο $C: (x - 2)^2 + y^2 = 1$ δείξτε ότι η εξίσωση $3(\alpha - 2)^2 x^2 + 2\beta^2 x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΓΔ/181. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ και τέτοια ώστε να ισχύουν: $f(1) = f(0) + \frac{1}{2}$ και

$$f'(0) > 0. \text{ Δείξτε ότι : A) Αν } g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} \text{ τότε υπάρχει ένα}$$

τουλάχιστον σημείο της C_g στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον $x'x$.

B) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = 2x_0$.

(Υπόδειξη: με Θ. Bolzano στο $[0, x_1]$ όπου x_1 το σημείο που βρήκατε στο ερώτημα Α).

ΓΔ/182. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν: $f(\alpha) = f(\beta)$ και $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ να αποδειχθεί ότι η f'' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες και η f''' έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

ΓΔ/183. Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, και $f(\beta) = f(\alpha) + f'(\alpha)(\beta - \alpha)$, δείξτε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) . (Θ.Μ.Τ. για την f και Θ. Rolle για την f' στο $[\alpha, \xi]$)

ΓΔ/184. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$ και ισχύει: $f(3) = f(1) + 2f'(1)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο που $f''(x_0) = 0$. (Υπόδειξη: Θ.Μ.Τ. και Rolle)

ΓΔ/185. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$ και $f(1), f(2), f(3)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο που $f''(x_0) = 0$. (2 Θ.Μ.Τ. και Rolle)

ΓΔ/186. Έστω $\alpha > 0$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha, \alpha]$ συνάρτηση φ . Αν $2\varphi(0) = \varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο που $\varphi''(\xi) = 0$.

ΓΔ/187. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha), f(\frac{\alpha+\beta}{2}), f(\beta)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου, αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο που $f''(x_0) = 0$.

ΓΔ/188. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχουν τρία σημεία της C_f συνευθειακά, να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες και ένα τουλάχιστον ξ ώστε να ισχύει $f''(\xi) = 0$.

ΓΔ/189. Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2$ και $f(0) = 0$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\pi, \pi)$ ώστε:
 $f''(\xi) = 2 - \eta\mu\xi$. (δύο Θ.Rolle για την $G(x) = f(x) - \eta\mu x - x^2$ στα $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$)

ΓΔ/190. Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$, με $3f(1) = f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (1, 3)$, τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\rho, f(\rho))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΓΔ/191. Αν f παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$, $f(1) = 2$ και $f(2) = 4$.

Δείξτε ότι:

A) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ ώστε: $f(\xi) = 2(3 - \xi)$. (Θ. Bolzano)

B) Υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (1, 2)$ ώστε: $f'(\rho_1) \cdot f'(\rho_2) = 4$. (Θ.Μ.Τ. στα $[1, \xi], [\xi, 2]$)

ΓΔ/192. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(10) = 9 + f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 10)$ ώστε $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 3$.

(Το διάστημα έχει πλάτος $\delta = 10 - 1 = 9$ και έχουμε άθροισμα συντελεστών $1 + 2 = 3$, οπότε χωρίζω το $[1, 10]$ σε 3 ίσα τμήματα πλάτους $9:3 = 3$ και παίρνω ένα διάστημα $[1, 4]$ με πλάτος: $\delta_1 = 1 \cdot 3 = 3$ και ένα δεύτερο $[4, 10]$ με πλάτος $\delta_2 = 2 \cdot 3 = 6$ και μετά Θ.Μ.Τ. σε αυτά)

ΓΔ/193. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(16) = 4 + f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (2, 16)$ ώστε $3f'(\rho_1) + 4f'(\rho_2) = 2$.

ΓΔ/194. Α Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ με $f(1) = f(5)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (1,5)$ ώστε $3f'(\rho_1) + f'(\rho_2) = 0$.

ΓΔ/195. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(15) = 8 + f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (3,15)$ διαφορετικά ανά δύο ώστε $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) = 4$.

(Το διάστημα έχει πλάτος $\delta = 15 - 3 = 12$ και έχουμε άθροισμα συντελεστών $1 + 2 + 3 = 6$, οπότε χωρίζω το $[3,15]$ σε 6 ίσα τμήματα πλάτους $12 : 6 = 2$ και παίρνω ένα διάστημα $[3,5]$ με πλάτος:

$\delta_1 = 1 \cdot 2 = 2$ ένα δεύτερο $[5,9]$ με πλάτος $\delta_2 = 2 \cdot 2 = 4$ και ένα τρίτο $[9,15]$ με πλάτος $\delta_3 = 3 \cdot 2 = 6$ και μετά Θ.Μ.Τ.σε αυτά)

ΓΔ/196. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $2f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

ΓΔ/197. Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$, και ισχύει:

$f(x+1) - f(x) = (x^2 - x)e^{f(x)} + 1$, για κάθε $x \in [0,1]$:Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ ώστε: $f''(\xi) = 0$. (2 Θ.Μ.Τ. και Θ. Rolle)

ΓΔ/198. Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αν $\gamma \in (\alpha, \beta)$ και $f(\gamma) < 0$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $f''(\xi) > 0$.

ΓΔ/199. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$, αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $A(\xi, f(\xi))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - 2y + 3 = 0$.

ΓΔ/200. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύουν: $f(1) = f(0) + k$ και $f'(1) = f'(0) = k$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 \neq x_2$ και $f''(x_1) = f''(x_2)$. (Υπόδειξη: Θ.Μ.Τ. και 2 Rolle)

ΓΔ/201. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .

Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\xi - \beta}$.

ΓΔ/202. Αν f, g παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ με $\alpha > 0$, $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, και $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\frac{f'(\rho)}{f(\rho)} + \frac{g'(\rho)}{g(\rho)} + \frac{1}{\rho} = 0$. (Θ. Rolle για την $h(x) = x \cdot f(x) \cdot g(x)$)

ΓΔ/203. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, $f(1)=e-1$ και $f(2)=e^2-8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\rho) - e^\rho + 6\rho = 0$.

ΓΔ/204. Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \delta]$, $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ και $f(\beta) < f(\alpha) < f(\delta) < f(\gamma)$, να αποδείξετε ότι:

A) Η συνάρτηση f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (α, δ) .

B) Η συνάρτηση f'' έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, δ) .

ΓΔ/205. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν κανένα από τα $f(\alpha)$, $f(\beta)$ δεν είναι η μέγιστη ούτε η ελάχιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$, δείξτε ότι η f'' έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

(Αν $f(\gamma) = m$ και $f(\delta) = M$ τότε γ, δ εσωτερικά του $[\alpha, \beta]$ )

ΓΔ/206. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(4)=1$ και $1 < f'(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Δείξτε ότι: $-3 < f(2) < -1$.

B) Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 4)$ ώστε $f(\xi) = 1 - \xi$.

ΓΔ/207. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(1)=3$ και $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Δείξτε ότι: $4 - x < f(x) < x + 2$. B) Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2x}{x^2 + 1}$.

Γ) Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [2, 3]$ ώστε $f(\xi) = 3\xi - 4$.

Θ.Μ.Τ. και μονοτονία παραγώγου.

ΓΔ/208. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή και γνησίως μονότονη παράγωγο και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} < f'(1)$.

Δείξτε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(2) + f(3) < f(1) + f(4)$.

ΓΔ/209. (Ανισότητα Jensen) Αν f συνεχής στο $[1, 5]$ παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$ και η f' είναι γν. αύξουσα, δείξτε ότι: $f(1) + f(5) > f(2) + f(4)$.

ΓΔ/210. Να αποδείξετε ότι $1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$ για κάθε $x > 0$.

(Υπόδειξη: Με Θ.Μ.Τ. στο $[0, x]$ για την $f(t) = e^t$ και παίρνοντας υπόψη ότι $f' \uparrow$)

ΓΔ/211. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ για κάθε $x > 0$.

ΓΔ/212. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

ΓΔ/213. Να αποδείξετε ότι $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ για κάθε $x \geq 1$.

ΓΔ/214. Να αποδείξετε ότι $x \sin x < \eta \mu x < x$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

ΓΔ/215. Να δείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt{x+2}} < \sqrt{x+2} - \sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

ΓΔ/216. Να αποδείξετε ότι $\frac{\beta - \alpha}{\sin^2 \alpha} < \epsilon \phi \beta - \epsilon \phi \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\sin^2 \beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha < \beta$.

ΓΔ/217. Να αποδείξετε ότι $x < \epsilon \phi x < \frac{x}{\sin^2 x}$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

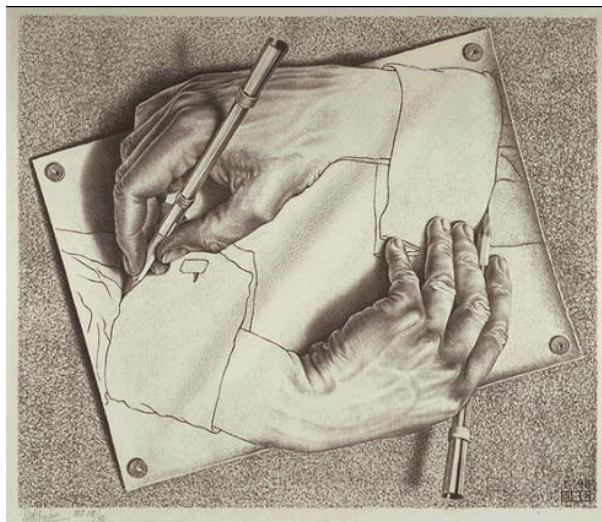
ΓΔ/218. Να αποδείξετε ότι $x + 1 < e^x < x e^x + 1$ για κάθε $x < 0$.

ΓΔ/219. Δείξτε ότι $\frac{2}{5} < \ln \frac{5}{3} < \frac{2}{3}$.

ΓΔ/220. Δείξτε ότι $e\alpha < \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \cdot \beta^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} < e\beta$ για κάθε $0 < \alpha < \beta$.

ΓΔ/221. Σ' έναν αγώνα δρόμου δύο αθλητές τερματίζουν ταυτόχρονα. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή στη διάρκεια του αγώνα κατά την οποία οι δύο αθλητές είχαν την ίδια ταχύτητα.

(Υπόδειξη: Έστω $f(t), g(t)$ το διάστημα που έχουν διανύσει οι δύο αθλητές τη χρονική στιγμή t και εφαρμόστε Θ. Rolle για την $h(t) = f(t) - g(t)$).



Εφαρμογές των Παραγώγων (Συνέπειες του Θ.Μ.Τ.)

“Τα μαθηματικά σωστά ιδωμένα, κατέχουν όχι μόνο αλήθεια αλλά και εξαιρετική ομορφιά, μια ομορφιά ψυχρή και αυστηρή, όμοια γλυπτού που δεν γοητεύει το αδύνατο μέρος της φύσης μας, χωρίς τις υπέροχες παγίδες της ζωγραφικής και της μουσικής, όμως εξαίσια και καθαρή και ικανή για αυστηρή τελειότητα, τέτοια που μόνο η μέγιστη τέχνη μπορεί να μας προσφέρει.”

Bertrand Russel

Σταθερή συνάρτηση

Μέθοδος: Για να αποδείξω ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο διάστημα Δ :

★ Παίρνω τον τύπο της κάνω τις πράξεις που γίνονται και αποδεικνύω ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής x .

★ Αποδεικνύω ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $f(x_1) = f(x_2)$.

★ Αν είναι παραγωγίσιμη στο Δ αποδεικνύω ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΓΕ/01. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει:

$$f'(x) = \eta \mu x f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} :$$

A) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{\sigma \nu x}$ είναι σταθερή.

B) Αν $f(0) = 1$ βρείτε την f .

ΓΕ/02. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) = x^2 f'(x) \text{ για κάθε } x > 0 :$$

A) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{\frac{1}{x}}$ είναι σταθερή.

B) Αν $f(1) = 1$ βρείτε την f .

ΓΕ/03. Έστω μια συνάρτηση $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν $f'(x) = \sigma \phi x \cdot f(x)$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

A) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{\eta \mu x}$ είναι σταθερή.

B) Να βρείτε τον τύπο της f .

ΓΕ/04. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $F(x) = f^2(x) + [f'(x)]^2$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) + f(x) = 0$ δείξτε ότι η F είναι σταθερή. Βρείτε επίσης τον τύπο της f αν $f(0) = 0$ και $f'(0) = 0$.

ΓΕ/05. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει:
 $f'(x) = 2f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: Α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + f^2(-x)$ είναι σταθερή. (Στη δοσμένη θέστε όπου x το $-x$)
 Β) Αν $f(0) = 1$ βρείτε την g .

ΓΕ/06. Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g ισχύουν: $f(0) = 1$, $g(0) = -1$, $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = f(x)$ τότε:

- i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) - g^2(x)$ είναι σταθερή
- ii) Δείξτε ότι $f(x) = -g(x)$
- iii) Βρείτε τις f, g ($f'(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = -f(x) \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = 0$ και πολλ. με το e^x)

ΓΕ/07. Βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f αν $xf'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \neq 0$ και $f(1) = 1$.
 (Πολλαπλασιάστε επί x)

ΓΕ/08. Αν f παραγωγίσιμη, $xf'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \neq 0$ και $f(1) = 1$, βρείτε την συνάρτηση f .

ΓΕ/09. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $f(0) = 2$, $f(2) = 3$ και $f(x) + xf'(x) = f'(x) + 1$ για κάθε $x \in A$ βρείτε τον τύπο της f .

ΓΕ/10. Βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει:
 $f(x)f'(x) = e^{2x} + x$ και $f(0) = -2$.

ΓΕ/11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x)e^{-x} = x^3 + 3x^2$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $1 - e$.

Βρείτε: Α) Την εξίσωση της εφαπτομένης. Β) Τον τύπο της f .

ΓΕ/12. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) - f(x) = \frac{e^{2x} + 2xe^x}{e^x + x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ διέρχεται από το σημείο $B(2, 2)$ να βρείτε:
 Α) Την εξίσωση της εφαπτομένης. Β) Τον τύπο της f .

ΓΕ/13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = \frac{2xf(x)}{x^2 + 1}$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 2$.

A) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

B) Βρείτε τον τύπο της f .

Γ) Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ ώστε: $2f(\xi) = e^\xi + 2$.

Μονοτονία – Ακρότατα.

Παρατήρηση: Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε $f \uparrow$ στο διάστημα Δ . Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Δηλαδή αν $f \uparrow$ στο διάστημα Δ αυτό δεν σημαίνει κατανάγκη ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, αφού μπορεί να υπάρχουν μεμονωμένα σημεία του Δ όπου η f' μηδενίζεται.

Π.χ. Ενώ η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η $f'(x) = 3x^2$ δεν είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$.

ΓΕ/14. Μελετήστε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

- A) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ B) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$ Γ) $f(x) = x^2 e^x$
 Δ) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ E) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$ ΣΤ) $f(x) = x \ln x$
 Ζ) $f(x) = x e^{x^2}$ Η) $f(x) = \eta \mu x - 2x$ Θ) $f(x) = x - \ln x$
 Ι) $f(x) = x - 2\eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$ ΙΑ) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ ΙΒ) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x}$
 ΙΓ) $f(x) = x^2 - 6 \ln x + x + 1$ ΙΔ) $f(x) = x^2 + \ln x + x + 1$
 ΙΕ) $f(x) = 1 + \ln(x^2 - 2x + 2)$ ΙΣΤ) $f(x) = e^{x^2 - 1} - x^2 + 1$.

Μέθοδος: Αναζητούμε τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f :

- ★ Στα σημεία που μηδενίζεται η παράγωγός της, f' .
- ★ Στα σημεία που δεν ορίζεται η f' , ενώ η f είναι συνεχής.
- ★ Στα άκρα κλειστών διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f .

ΓΕ/15. Μελετήστε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις

- συναρτήσεις: A) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ B) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ Γ) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$
 Δ) $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$ E) $f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 - 4x \ln x + 12x$

$$Z) f(x) = \frac{x^3 + 4}{x - 1} \quad H) f(x) = 1 + \sqrt{x^2} e^{-x} \quad \Theta) f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$$

$$I) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Παρατήρηση: Αν $f'(x_0) = 0$ αυτό δεν σημαίνει κατανάγκη ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_0 ακρότατο.. Θα πρέπει η f' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 ή ισοδύναμα η f να αλλάζει είδος μονοτονίας.

Π.χ. Αν $f(x) = x^3$ τότε: $f'(x) = 3x^2$ και $f'(0) = 0$. Παρόλα αυτά η f δεν παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ακρότατο αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΓΕ/16. Μελετήστε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$A) f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$$

$$B) f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$$

$$Γ) f(x) = \sqrt{3x - x^2}$$

$$Δ) f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 12$$

$$E) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2}$$

$$ΣΤ) f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$$

Σχόλιο: Κρίσιμα σημεία: Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων.

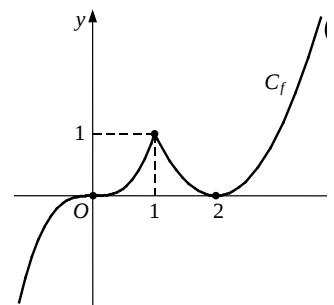
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , x < 1 \\ (x - 2)^2 & , x \geq 1 \end{cases}. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στο}$$

$\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ με $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x < 1 \\ 2(x - 2) & , x > 1 \end{cases}$. Οι ρίζες

της $f'(x) = 0$ είναι οι 0 και 2.

Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .



ΓΕ/17. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων:

$$\text{A) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x \leq 0 \\ 3x - 1 & , x > 0 \end{cases}$$

$$\text{B) } f(x) = -x|x| + x - 2$$

ΓΕ/18. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων:

$$\text{A) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & x < 0 \\ x^2 + 2x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{B) } f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2 & , x < 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & , x \geq 2 \end{cases}$$

ΓΕ/19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

A) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

B) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x^2 + 1$ για κάθε $x \geq 0$.

ΓΕ/20. Βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 3x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης αποδείξτε ότι η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,1)$, αν $-3 < \alpha < 3$.

ΓΕ/21. A) Να αποδείξετε ότι $e^x - x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = 2e^{f(x)} - f^2(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΓΕ/22. Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $(2-x)g'(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0, 2]$ να δείξετε ότι $g(0) > 0$.

ΓΕ/23. A) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 3x - 2021$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;

B) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \lambda x^2}{1 + x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

ΓΕ/24. Έστω η συνάρτηση $f(x) = xe^x - 10$.

A) Μελετήστε την ως προς τη μονοτονία.

B) Αποδείξτε ότι η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(-1, +\infty)$.

Γ) Δείξτε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < -1 < \beta$ ώστε να εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$.

ΓΕ/25. Αν για την f ισχύει $f(x) < f'(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

Μελετήστε την μονοτονία της $g(x) = e^{-x} f(x)$, $x \geq 0$.

Αν $f(0) = \alpha$, να αποδειχθεί ότι $f(x) > \alpha e^x$ για κάθε $x > 0$.

ΓΕ/26. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x(1-x)$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0,1)$.

ΓΕ/27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + \mu^2 x^3 + 2x - (\mu + 3)$ όπου η παράμετρος μ διατρέχει το $\mathbb{R}$.

A) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B) Βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και το σύνολο τιμών της f .

Γ) Αποδείξτε ότι η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

ΓΕ/28. A) Μελετήστε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$ και λύστε την ανίσωση $\ln(2x^2 - 1) - \ln x^2 < 1 - x^2$.

B) Μελετήστε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - 2x + 1$ και δείξτε ότι η $g(x) = 2x\ln x - x^2 - x$ είναι γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ΓΕ/29. Αποδείξτε τις ανισότητες: A) $\ln(x-1) < x-2$ για $x > 2$

B) $x \sin x < \eta \mu x$ για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ Γ) $e^x - 1 > \frac{x^2}{2} + x$ για $x > 0$.

ΓΕ/30. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ και να αποδείξετε ότι $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΓΕ/31. Μελετήστε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$f(x) = x - \frac{3\eta \mu x}{2 + \sigma \upsilon \nu x}$ και αποδείξτε ότι: $x(2 + \sigma \upsilon \nu x) > 3\eta \mu x$ για κάθε $x > 0$.

ΓΕ/32. A) Αν $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^v$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και v θετικός ακέραιος, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

(Υπόδειξη: Είναι $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|^{v-1}$)

ΓΕ/33.B) Αν $|f(x) - f(y)| + \sigma \upsilon \nu(2x - 2y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Πλήθος ριζών

Μέθοδος: Για να βρω το πλήθος των ριζών μιας συνάρτησης f κατασκευάζω πίνακα μονοτονίας της και βρίσκω το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα του πίνακα μονοτονίας.

Αν στο σύνολο τιμών ενός διαστήματος μονοτονίας περιλαμβάνεται το μηδέν, τότε η f έχει στο διάστημα αυτό ακριβώς μία ρίζα. Αν δεν περιλαμβάνει το μηδέν τότε η f δεν έχει σ' αυτό το διάστημα ρίζα.

Για να βρω το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ βρίσκω το σύνολο τιμών της f σε κάθε διάστημα μονοτονίας της. Αν το α περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών της f σε ένα διάστημα, τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει στο διάστημα αυτό ακριβώς μία ρίζα. Αν δεν περιλαμβάνεται, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο διάστημα αυτό.

ΓΕ/34. Δείξτε ότι η εξίσωση: $\ln x - \frac{x^2}{2} + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.

ΓΕ/35. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{x^2}{2} + \ln x = 0$ έχει μία ακριβώς λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

ΓΕ/36. Δίνεται η εξίσωση $4xe^{-2x} + x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της στο διάστημα $(-1,0)$.

ΓΕ/37. Η συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $[0,1]$.

ΓΕ/38. Δείξτε ότι η εξίσωση $\eta \mu x = -x + 1$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΓΕ/39. Βρείτε το πλήθος των ριζών των συναρτήσεων:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 6, \quad h(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 12$$

$$g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 5, \quad \varphi(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 12$$

ΓΕ/40. Αν $f(x) = x^2 - 2x + 2$ μελετήστε τη μονοτονία της και βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων: $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ και $f(x) = 2$.

ΓΕ/41. Αν $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων: $f(x) = 0$, $f(x) = 9$ και $f(x) = -19$.

Παρατήρηση: Για να έχει η εξίσωση $f(x) = \alpha$ μια τουλάχιστον λύση πρέπει το α να ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

ΓΕ/42. Βρείτε το πλήθος των ριζών της $g(x) = x^3 - 12x + 1$ καθώς και το πλήθος των ριζών της $g(x) = -16$.

ΓΕ/43. Βρείτε το πλήθος των ριζών της $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$ καθώς και το πλήθος των ριζών της $h(x) = -\frac{3}{2}$.

ΓΕ/44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + (2-x)^4$, $x \in \mathbb{R}$.

A) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

B) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ) Βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\lambda x^4 + \lambda(2-x)^4 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΓΕ/45. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - x + \ln x$.

A) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία.

B) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ) Να δείξετε ότι η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$.

ΓΕ/46. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Γ) Να βρείτε το πρόσημο της f .

ΓΕ/47. Αν $f: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $x^2 + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in [-2,2]$ και η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$:

A) Βρείτε τις ρίζες της f . B) Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-2,2)$.

Γ) Βρείτε τον τύπο της f . Δ) Υπολογίστε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{\eta\mu x \cdot \eta\mu 3x}$.

ΓΕ/48. Λύστε την $3^x + 4^x = 5^x$ με $x \in \mathbb{R}$.

Μονοτονία με ανώτερες παραγώγους

ΓΕ/49. Μελετήστε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση: $f(x) = 6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x$.

ΓΕ/50. Μελετήστε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση: $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 + 3$.

ΓΕ/51. Μελετήστε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση: $f(x) = 4e^x + x^4 + 6x^2 - 4x + 1$.

ΓΕ/52. Αν $f(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1)$ μελετήστε την ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΓΕ/53. Αν $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1 - e^x$ μελετήστε την ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και λύστε την εξίσωση: $f(x) = 0$.

ΓΕ/54. Μια συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ και $f'''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. α) Μελετήστε τη μονοτονία της f και β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f'(x) = 0$ και $f(x) = 0$ έχουν μοναδική ρίζα.

ΓΕ/55. Μελετήστε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = xe^x + x - 2e^x + 2$ και λύστε την εξίσωση: $f(x) = 0$.

ΓΕ/56. Αν $f(x) = x^3 \ln x - \frac{11}{6}x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$ λύστε την εξίσωση: $f(x) = 0$.

ΓΕ/57. Να λυθεί η εξίσωση $6x^2 \ln x = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$.

ΓΕ/58. Μελετήστε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις: $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $h(x) = \frac{1-x}{\ln \sqrt{x}}$

$$\varphi(x) = \frac{\ln x}{x-1}, \quad k(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}.$$

ΓΕ/59. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f(0) = f(1) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

ΓΕ/60. Αν $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$:

- A) Δείξτε ότι έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. B) Δείξτε ότι η f είναι περιττή.
Γ) Μελετήστε τη μονοτονία της. Δ) Βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf''(x))$.

Προβλήματα.

ΓΕ/61. Να βρείτε το σημείο N της παραβολής $y = x^2$ που απέχει από το σημείο $A(3,0)$ τη μικρότερη δυνατή απόσταση. Επίσης αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f στο N είναι κάθετη στην ευθεία AN .

ΓΕ/62. Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο $120m$ να βρείτε εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν .

ΓΕ/63. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν $1600m^2$ να βρείτε εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο .

ΓΕ/64. Να βρείτε το σημείο της παραβολής με εξίσωση $y^2 = -x$ έχει τη μικρότερη απόσταση από την ευθεία $y = 2x - 1$.

ΓΕ/65. Έστω σημείο $M(x, y)$ του $1^{ου}$ τεταρτημόριου της γραφικής παράστασης της $f(x) = 3 - x^2$. Από το M φέρνω παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y'$ που τους τέμνουν στα σημεία A, B . Βρείτε το M ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου $OAMB$ να είναι μέγιστο.

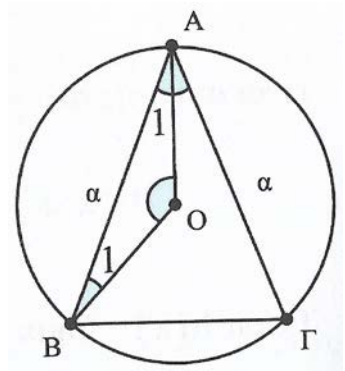
ΓΕ/66. Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$ κάθε μονάδας ενός προϊόντος συναρτήσει του πλήθους x μονάδων παραγωγής σύμφωνα με τον τύπο: $\Pi(x) = 19500 - \frac{x^2}{3}$. Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι 2000 δρχ και επιπλέον η βιομηχανία πληρώνει φόρο 600 δρχ ανά μονάδα προϊόντος . Πόσες μονάδες πρέπει να παράγει η βιομηχανία , ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος .

ΓΕ/67. Ισοσκελές τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1 cm. Έστω a cm το μήκος των ίσων πλευρών του και θ η γωνία που σχηματίζουν.
Α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = (1 + \sin\theta)\eta\mu\theta$.

(χρησιμοποιήστε Ν. Σνημιτόνων)

Β) Βρείτε την τιμή του $\theta \in (0, \pi)$ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να γίνεται μέγιστο.

Γ) Αν η γωνία θ αυξάνει με ρυθμό 1 rad/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους a των ίσων πλευρών τη στιγμή που το τρίγωνο γίνεται ισόπλευρο.



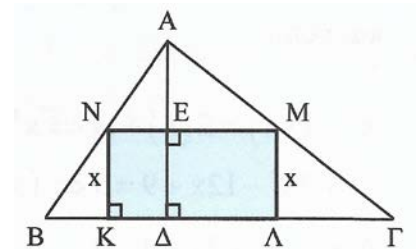
ΓΕ/68. Α) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \sqrt{x}$ που απέχει από το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

Β) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της $y = \sqrt{x-1}$ που απέχει από το σημείο $A(2, 0)$ τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

Γ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x) = e^x + 1$ που απέχει από το σημείο $A(1, 1)$ τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

ΓΕ/69. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε τρίγωνο ΑΒΓ βάσης $B\Gamma = 10$ cm και ύψους $A\Delta = 5$ cm.

Α) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν E και η περίμετρος P του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνονται από τους τύπους: $E(x) = 10x - 2x^2$ και $P(x) = 20 - 2x$ με $x \in (0, 5)$.



Β) Έστω ότι το ύψος x του ορθογωνίου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου για τις οποίες τα μέτρα του ρυθμού μεταβολής του εμβαδού και της περιμέτρου να είναι ίσα.

Γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + P(x) = E(x) + 11$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο που

$$E'(\xi)(2E(\xi) - 5) = 2\xi - 5 \quad (2^\circ \text{ θέμα επαναληπτικών Πανελλαδ. 2007})$$

ΓΕ/70. Χωρίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 16 cm σε δύο τμήματα και κατασκευάζω με αυτά δύο τετράγωνα. Να βρείτε πως πρέπει να χωριστεί το αρχικό ευθύγραμμο τμήμα, ώστε το συνολικό εμβαδόν των δύο τετραγώνων να είναι ελάχιστο.

ΓΕ/71. Σύρμα μήκους 4 cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και $4 - x$ cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε ισόπλευρο τρίγωνο και με το δεύτερο τετράγωνο.

Α) Να βρείτε το άθροισμα $E(x)$ των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x .

Β) Να βρείτε για ποια τιμή του x το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο;

Αν με το πρώτο κομμάτι σχηματίσουμε κύκλο και με το δεύτερο τετράγωνο:

Γ) Βρείτε το άθροισμα $S(x)$ των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x .

Δ) Δείξτε ότι το $S(x)$ γίνεται ελάχιστο όταν $\frac{x}{4-x} = \frac{\pi}{4}$.

ΓΕ/72. Δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο πλευράς x και είναι ανοικτό από την έδρα που βρίσκεται απέναντι από τη βάση του. Ο όγκος του δοχείου είναι $0,5m^3$.

α) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας του δοχείου είναι

$$E(x) = x^2 + \frac{2}{x}.$$

β) Υπολογίστε την πλευρά x ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται ελάχιστο.

ΓΕ/73. Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης x cm και όγκο 628 cm^3 . Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4 λεπτά ανά cm^2 ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας 1,25 λεπτά ανά cm^2 .

Α) Να εκφράσετε το συνολικό κόστος κατασκευής ενός κουτιού ως συνάρτηση του x .

Β) Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 cm;

Γ) Βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού με το λιγότερο κόστος. (Δίνεται ότι $\sqrt[3]{31,25} = 3,15$).

Δ) Αν $x \in [1, 4]$ βρείτε το μέγιστο κόστος που μπορεί να έχει ένα τέτοιο κουτί.

Ε) Αν το κουτί με $x = 1 \text{ cm}$ είναι γεμάτο νερό και το τρυπήσουμε στο κάτω μέρος ώστε να χάνει νερό με ρυθμό $12\pi \text{ cm}^3/\text{sec}$ να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο κατεβαίνει η επιφάνεια του νερού.

(Αν h το ύψος του κουτιού ο όγκος του είναι $V = \pi x^2 h$, η κυλινδρική επιφάνεια έχει εμβαδόν $E_{\text{κυλ}} = 2\pi x h$ και η ολική επιφάνεια $E_{\text{ολ}} = 2\pi x h + 2\pi x^2$)

ΓΕ/74. Οι κορυφές ενός τριγώνου είναι τα σημεία $A(0,0)$, $B(x, \sin x)$ και $\Gamma(\eta\mu^3 x, 0)$, με $x \in (0, \pi)$.

Α) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση του x .

Β) Βρείτε το x για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται μέγιστο καθώς και τη μέγιστη τιμή του.

ΓΕ/75. Ένα ναυπηγείο μπορεί να κατασκευάσει μέχρι και 20 πλοία το έτος. Το κόστος κατασκευής x τέτοιων σκαφών σε χιλιάδες ευρώ δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = 4x^2 + 30$ ενώ τα έσοδα από την πώλησή τους δίνονται από τη συνάρτηση: $E(x) = 3x^2 + 20x$.

Α) Βρείτε τη συνάρτηση που δίνει το κέρδος $P(x)$ του ναυπηγείου από τη ναυπήγηση x σκαφών.

Β) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του κέρδους.

Γ) Βρείτε πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος. (Θέμα εξετάσεων)

ΓΕ/76. Μια βιοτεχνία κατασκευάζει τριγωνικά πλακίδια τέτοια που το άθροισμα της βάσης x και του ύψους y να είναι σταθερό και ίσο με 50 cm .

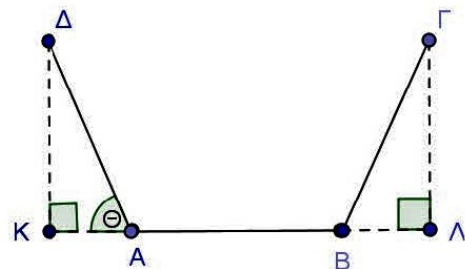
A) Βρείτε το εμβαδόν $E(x)$ του πλακιδίου συναρτήσει της βάσης x .

B) Για ποιο x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο;

Γ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του εμβαδού; (Θέμα εξετάσεων)

ΓΕ/77. Στο παρακάτω σχήμα

φαίνεται η κάθετη διατομή ενός καναλιού, που θέλουμε να κατασκευάσουμε, η οποία είναι το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta = B\Gamma = 2\text{ m}$. Τα τμήματα ΔK και $\Gamma\Lambda$ είναι ύψη του



τραπεζίου και η γωνία $\widehat{\Delta AK} = \theta$ μεταβάλλεται με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

A) Να αποδείξετε ότι για κάθε θ με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ το εμβαδόν της διατομής

$AB\Gamma\Delta$ είναι ίσο με $E(\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$.

B) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται.

Γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή της γωνίας θ για την οποία το εμβαδόν της κάθετης διατομής να ισούται με $\frac{15}{4}\text{ m}^2$.

Δ) Αν γνωρίζετε ότι, για $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, το ύψος $\Delta K = v(t)$ αυξάνεται

συναρτήσει του χρόνου t με ρυθμό $0,1\text{ m/s}$, ενώ η πλευρά $A\Delta$ παραμένει 2 m , τότε:

Δ1) Να αποδείξετε ότι γωνία θ αυξάνεται με αύξοντα ρυθμό.

Δ2) Να αποδείξετε ότι την χρονική στιγμή στην οποία το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται, ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ ισούται, αριθμητικά, με τον ρυθμό μεταβολής του ΔK .

Θ. Fermat

Σχόλιο: Το αντίστροφο του Θ. Fermat δεν ισχύει γενικά.

Έτσι αν $f'(x_0) = 0$ αυτό δεν σημαίνει κατανάγκη ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο. Θα πρέπει επιπλέον η f' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 (δηλαδή η f να αλλάζει είδος μονοτονίας)

Π.χ. Αν $f(x) = x^3$ τότε: $f'(x) = 3x^2$ και $f'(0) = 0$. Παρόλα αυτά η f δεν παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ακρότατο αφού η f' διατηρεί το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 = 0$.

ΓΕ/78. Βρες τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x + 1$ να έχει ακρότατο για $x_0 = 1$ και η εφαπτομένη στο σημείο $M(2, f(2))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία θ ώστε $\varepsilon\varphi\theta = 13$.

ΓΕ/79. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$ που μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_2 = 2$.

A) Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

B) Βρείτε το είδος του ακροτάτου και την τιμή του .

ΓΕ/80. Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 - 3x + 2$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές αυτών των ακροτάτων .

ΓΕ/81. Βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$ να δέχεται τοπικά ακρότατα στα σημεία $x = 1$ και $x = -2$. Μελετήστε κατόπιν τη μονοτονία της συνάρτησης.

Μέθοδος: Αν μου δίνουν ανισότητα ($\dots \geq 0$ ή $\dots \leq 0$) και μου ζητούν να αποδείξω ισότητα τότε χρησιμοποιώ το Θεώρημα Fermat.

Η ανισότητα προσδιορίζει τη θέση ενός τοπικού ακροτάτου.

Π.χ. Αν $\ln x + \alpha(1-x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\alpha = 1$.

Λύση: Έστω $f(x) = \ln x + \alpha(1-x)$ με $D_f = (0, +\infty)$ και $f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha$. Τότε η

δοσμένη γράφεται: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει ελάχιστο, είναι παρ-μη και το 1 είναι εσωτερικό σημείο του D_f .

Άρα με Θ. Fermat θα είναι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

ΓΕ/82. Αν $x^2 - 2\alpha x + 2\alpha - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $\alpha = 1$.

(Υπόδειξη: με Θ.Fermat)

ΓΕ/83. Αν $x^2 + \alpha \ln x - 1 \geq 0$ για κάθε $x > 0$ να δειχθεί ότι $\alpha = -2$

ΓΕ/84. Αν $(\alpha + 1)e^x - 2x \geq \alpha + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΓΕ/85. Α) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x \geq x + 1$ δείξτε ότι $\alpha = e$.

Β) Αν για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $\ln x - \alpha x + \alpha \leq 0$ να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΓΕ/86. Αν $2 \ln x \geq \alpha \frac{x-1}{x}$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

ΓΕ/87. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $\alpha^x \geq \alpha + e \ln x$ δείξτε ότι $\alpha = e$.

ΓΕ/88. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $\alpha^x \geq x^\alpha$ δείξτε ότι $\alpha = e$.

ΓΕ/89. Αν $\alpha > 0$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $\alpha^x \geq \left(\frac{\alpha x}{v}\right)^v$ με $v \in \mathbb{N}^*$

δείξτε ότι $\alpha = e$.

ΓΕ/90. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha^x + \beta^x \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$.

ΓΕ/91. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $xf(x) + 2x \geq 2 \ln(x+1)$ για κάθε $x > -1$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΓΕ/92. Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^x + \beta^{-2x} + \gamma^x \geq 3$ δείξτε ότι α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

ΓΕ/93. Αν f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 = \alpha$, $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι οι C_f και C_g έχουν παράλληλες εφαπτόμενες στα σημεία τους με τετμημένη $x_0 = \alpha$.

ΓΕ/94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+1)$, $x > -1$

Α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β) Βρείτε τα σημεία όπου η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$

Γ) Αποδείξτε ότι $1 + \ln(x+1) \leq e^x$ για κάθε $x > -1$

Δ) βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Ε) Αν $\alpha^x \geq 1 + \ln(x+1)$ για κάθε $x > -1$ δείξτε ότι $\alpha = e$.

ΓΕ/95. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) \geq x^4 + \sin x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$ να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ ταυτίζεται με τον άξονα $x'x$.

ΓΕ/96. Βρες τον $\alpha > 1$ αν $\log_{\alpha} x \geq x - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(Υπόδειξη: $\alpha^{\log_{\alpha} x} \geq \alpha^{x-1} \Leftrightarrow x \geq \alpha^{x-1}$)

ΓΕ/97. Αν $f(x) = \ln \frac{\alpha^x + \beta^x}{2}$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$ και $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\alpha\beta = e^2$.

ΓΕ/98. Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και $f(x) \leq 2^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

ΓΕ/99. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Αν $f(x) = -3x^2 + 7x$ και η διαφορά $g(x) - f(x)$ γίνεται ελάχιστη για $x = 1$, τότε : Α) Αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία τους $A(1, f(1))$ και $B(1, g(1))$ είναι παράλληλες.

Β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο B , αν $g(1) = 4$.

ΓΕ/100. Α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^{f(x)} + 2f(x) = x^3 + 2x$, να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

Β) Όμοια αν ισχύει: $f^2(x) - f(x) = x^3 + x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΓΕ/101. Α) Δείξτε ότι αν για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει η συνθήκη $f^3(x) + 3f(x) = x^5 + 3x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f δεν έχει ακρότατα.

Β) Όμοια αν: $f^2(x) - \ln f(x) = x^3 + x$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΓΕ/102. Α) Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^3(x) + f(x) = e^x - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β) Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $2f^3(x) + f(x) = x \ln x - 2x + e$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΓΕ/103. Αν $f(x) = \sqrt{x} - e^{-x}$:

Α) Μελετήστε την ως προς τη μονοτονία.

Β) Βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ) Δείξτε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο.

Δ) Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x \sqrt{x} = 1 + 2012e^x$ έχει μοναδική λύση.

ΓΕ/104. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει η σχέση $f^3(x) + f(x) = e^{-x} - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

A) Δείξτε ότι η f είναι γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B) Λύστε την εξίσωση $f(\ln x) = f(1-x)$.

ΓΕ/105. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ για την οποία ισχύει $f(x) \cdot \ln f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

ΓΕ/106. Αν $f(x) = 4x^3 - 2kx + k - 1$, τότε:

A) Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = 0$ (Θ.Rolle)

B) Δείξτε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον λύση της εξίσωσης $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$ στο διάστημα $(x_0, 2)$. (Θ.Bolzano)

Γ) Αν $k > 1$ δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x_0)$ ώστε $f'(\xi) < 0$. (Θ.M.T.)

ΓΕ/107. Αν f μονότονη και παραγωγίσιμη με μονότονη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, $f(5) = 4$, $f'(5) = 0$ και η $f \circ f$ παρουσιάζει στο $x_0 = 3$ ακρότατο βρείτε την τιμή του ακροτάτου.

(Υπόδειξη: $[f(f(3))]' = 0 \Leftrightarrow f'(f(3)) \cdot f'(3) = 0$, αλλά $f'(3) \neq 0$ κ.τ.λ.)

ΓΕ/108. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$ να δείξετε ότι: A) Η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

B) Υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ώστε: $f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

(Υπόδειξη: Με ΘΕΤ και ΘΜΕΤ)

Γ. Υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία

$y = 2x + 2000$. (Υπόδ.: με Θ.M.T.)

(3^ο θέμα Πανελλαδικών 2000)

ΓΕ/109. Για κάθε $k \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10$, $x \in \mathbb{R}$. A) Να βρείτε τη τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη

της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

B) Για $\kappa = 3$.

B1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B2) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

B3) για κάθε $\alpha \in (14, 15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

ΓΕ/110. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ και $g(x) = 2\eta\mu x + (x-1)^2$.

A) Μελετήστε τις συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B) Να αποδείξετε ότι: $x \cdot e^{1-x} - 2\eta\mu x \leq (x-1)^2$. (Συγκρίνετε τα ακρότατα)

ΓΕ/111. Για μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

(3^ο θέμα Πανελλαδικών 2001)

ΓΕ/112. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της

εξίσωσης $f(x) = 0$.

(4^ο θέμα Πανελλαδικών 2006)

ΓΕ/113. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{10-2x}$.

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και το σύνολο τιμών της.

B) Με τη βοήθεια του πεδίου τιμών βρείτε το διάστημα στο οποίο

κινείται το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση: $\sqrt{x-1} + \sqrt{10-2x} = 2\alpha - 6$ να έχει μία τουλάχιστον λύση.

ΓΕ/114. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(0) = 0$ και $f'(x) < 3(x^2 - 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) + f(x+1) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-2, 1)$.

(Αν $g(x) = f(x) - x^3 + 3x$ τότε $g'(x) < 0$ κ.τ.λ. και θεωρούμε $h(x) = f(x) + f(x+1) \dots$)

ΓΕ/115. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

B) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης

$x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α . (Λογαριθμούμε την εξίσωση)

Δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

(με Θ.Μ.Τ.)

(Θέμα Πανελληνίων)

ΓΕ/116. Θεωρούμε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα και η οποία εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο $O(0,0)$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

B) Είναι η f αντιστρέψιμη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

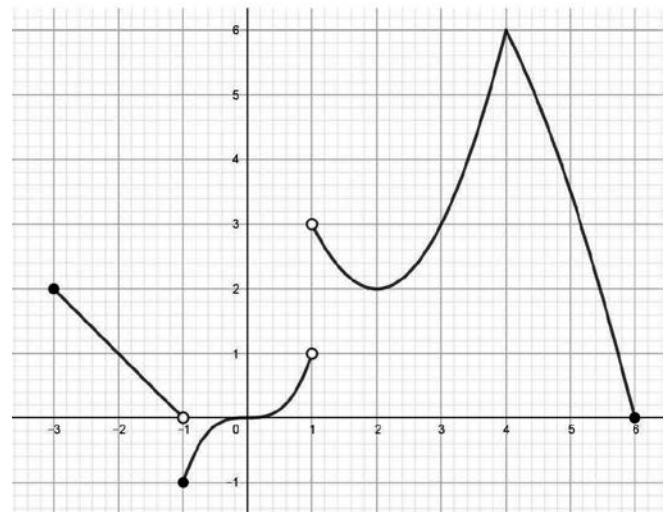
Γ) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, τα κρίσιμα σημεία της f .

Δ) Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[-3, -1]$ είναι ευθύγραμμο τμήμα, να βρείτε την παράγωγό της στο $(-3, -1)$.

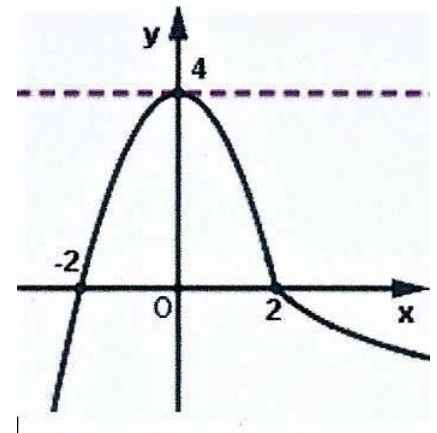
E) Αν $\alpha, \beta \in [-3, 1) \cup (1, 6]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{7 - f(\alpha)}{x - 6} + \frac{f(\beta) + 2}{x - 4} = 0 \text{ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο } (4, 6).$$

ΣΤ) Βρείτε τα σημεία όπου η f δεν είναι συνεχής και δικαιολογήστε γιατί δεν είναι.



ΓΕ/117. Δίνεται συνάρτηση f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ και συνάρτηση $g(x) = f(x) + x^2 - 6$ που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



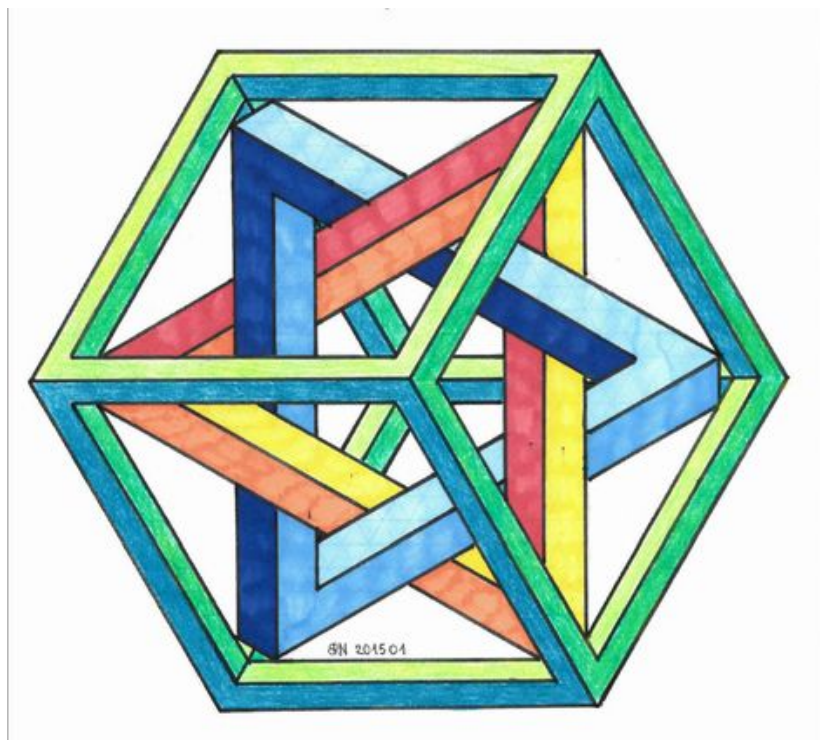
Α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β) Δείξτε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $x_0 = 0$.

Γ) Δείξτε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (-2, 2)$ τέτοια πού $f'(\rho_1) + f'(\rho_2) = 0$.

Δ) Υπολογίστε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 4}{\eta \mu x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)e^{g(x)}]$

Ε) Δείξτε ότι η εξίσωση $g(x) + x + 3 = f(x) + x^4 - 6x^3 + 10x^2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(3, 4)$.



Κυρτότητα-Σημεία καμπής

"Συχνά λέω ότι όταν μπορείς να μετρήσεις αυτό για το οποίο μιλάς και να το εκφράσεις με αριθμούς ξέρεις κάτι γι' αυτό . Αλλά όταν δεν μπορείς να το μετρήσεις , όταν δεν μπορείς να το εκφράσεις με αριθμούς , η γνώση σου είναι πενιχρή και μη ικανοποιητική . Μπορεί να είναι το ξεκίνημα της γνώσης , αλλά έχεις μόλις και μετά βίας προχωρήσει στο στάδιο της επιστήμης " .
Lord Kelvin

ΓΖ/01. Α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 1$. Βρείτε την f'' , να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και βρείτε τα σημεία καμπής της , αν υπάρχουν.

Β) Όμοια για την: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 12x + 5$.

Γ) Όμοια για την: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x - 3$.

Δ) Όμοια για την: $f(x) = 6e^x + x^3 - 3x^2 + 13x - 21$.

Ε) Όμοια για την: $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 1$.

ΣΤ) Όμοια για την $f(x) = e^x + (x-1)^4$

ΓΖ/02. Μελετήσετε την ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις συναρτήσεις: Α) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 24x - 2 + 6x^2 \ln x$

Β) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

Γ) $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$

Δ) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Ε) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

ΣΤ) $f(x) = 6e^x + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$

Ζ) $f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 - 3x^2$

Η) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 6 & , x \leq 1 \\ x^3 - 9x^2 + 15x - 2 & , x > 1 \end{cases}$

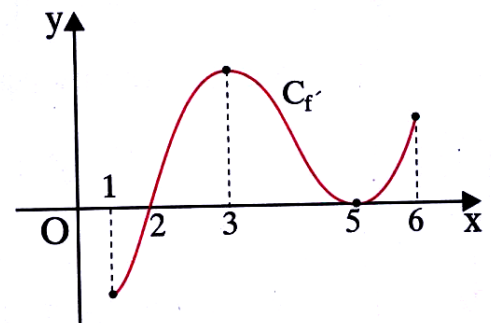
Θ) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 & , x \leq 1 \\ x^3 - 9x^2 + 15 & , x > 1 \end{cases}$

ΓΖ/03. Έστω συνάρτηση $f : [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$

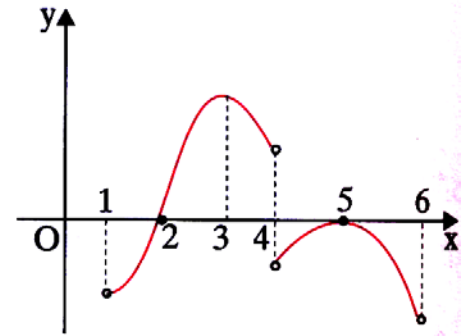
Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφ.

Παράσταση της παραγώγου f' .

Προσδιορίστε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γν. αύξουσα , γν. φθίνουσα , κυρτή , κοίλη και τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων και των σημείων καμπής .



ΓΖ/04. Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφ. παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f . Προσδιορίστε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γν. αύξουσα, γν. φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων. Βρείτε επίσης τα σημεία καμπής.



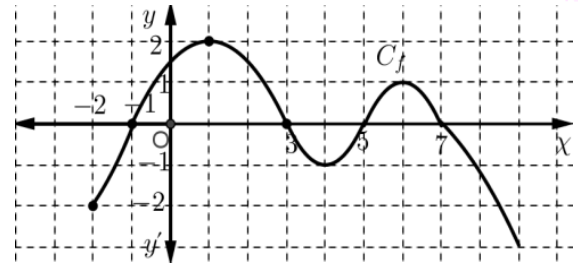
ΓΖ/05. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η

γραφική παράσταση της παραγώγου f' μίας συνάρτησης f .

Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f' .

Προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

Γ) Προσδιορίσετε τα διαστήματα κυρτότητας της f , και τις θέσεις των σημείων καμπής της.

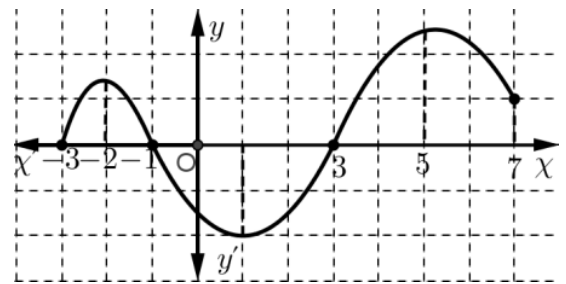


ΓΖ/06. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μίας συνάρτησης f .

Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f' .

Προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

Γ) Προσδιορίσετε τα διαστήματα κυρτότητας της f , και τις θέσεις των σημείων καμπής της.



ΓΖ/07. Για ποιες τιμές του α η $f(x) = \alpha^2 x^3 - 6\alpha x^2 + 5x - \alpha$ έχει θέση σημείου καμπής στο 2;

ΓΖ/08. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^2 x^4 - 4\alpha x^3 + 6(2\alpha - 1)x^2 - 4x + 11$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η C_f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$.

ΓΖ/09. Βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 36x + 5$ να έχει στο σημείο $x_0 = 3$ τοπικό ακρότατο και

η γραφική παράσταση της C_f να έχει σημείο καμπής το $M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

Παρατήρηση: Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η f είναι κυρτή στο διάστημα Δ . Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Δηλαδή αν η f είναι κυρτή στο διάστημα Δ αυτό δεν σημαίνει κατανάγκη ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, αφού μπορεί να υπάρχουν μεμονωμένα σημεία του Δ όπου η f'' μηδενίζεται. Όμοια αν f κοίλη.

Π.χ. Ενώ η $f(x) = \eta \mu x$ είναι κυρτή στο $(\pi, 2\pi)$ η $f''(x) = -\eta \mu x$ δεν είναι θετική για κάθε $x \in (\pi, 2\pi)$, αφού $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

ΓΖ/10. Δίνεται η $f(x) = \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7$. Βρείτε το

$\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής στο $x_0 = \frac{3}{2}$ και στη συνέχεια να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα τοπικά ακρότατα και τα κοίλα.

ΓΖ/11. Αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$ στα σημεία καμπής της είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΓΖ/12. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^4 + 4\alpha x^3 + 3(2\alpha^2 - 4\alpha + 5)x^2 + \alpha x + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ δεν έχει σημεία καμπής.

ΓΖ/13. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta^2 = 3\alpha\gamma$ δέχεται στο σημείο καμπής της οριζόντια εφαπτομένη.

ΓΖ/14. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ είναι κυρτή στα

διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

(Υπόδειξη: Θέστε $g(x)$ τον αριθμητή της f'' και μελετήστε τον ξεχωριστά.)

ΓΖ/15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3\alpha x^2 + 5\alpha x - 3\alpha^2 + 2\alpha^3 + 1$ $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής, το οποίο κινείται σε μια παραβολή.

ΓΖ/16. Αποδείξτε ότι τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha e^x - x^2$, $\alpha > 0$, βρίσκονται για κάθε τιμή του α σε μια παραβολή της οποίας και να βρείτε την εξίσωση.

ΓΖ/17. Αν η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $(f'(x))^3 + (f'(x))^2 + f'(x) = e^x + x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι: Α) Υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f με οριζόντια εφαπτομένη. Β) η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ΓΖ/18. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση: $f(x) + e^{f(x)} = 1 + x - x^2 - e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: Α) Η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμψής Β) Η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παρατήρηση: Αν $f''(x_0) = 0$ αυτό δεν σημαίνει κατανάγκην ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο x_0 σημείο καμψής. Θα πρέπει η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 ή ισοδύναμα η f' να αλλάζει είδος μονοτονίας.

Π.χ. Αν $f(x) = x^4$ τότε: $f''(x) = 12x^2$ και $f''(0) = 0$. Παρόλα αυτά η f δεν παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ σημείο καμψής αφού η f'' διατηρεί το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν του $x_0 = 0$.

ΓΖ/19. Έστω g μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(g(x))^2 = 5g(x) - e^x - \alpha^x + 2000$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha \neq 1$. Να αποδείξετε ότι η C_g δεν έχει σημεία καμψής.

ΓΖ/20. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^2(x) + xf(x) = -x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμψής.

ΓΖ/21. Δίνεται η συνάρτηση f θετική και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η $g(x) = \ln f(x)$ έχει θετική δεύτερη παράγωγο, αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις f και $\varphi(x) = e^{\lambda x} f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι κυρτές.

ΓΖ/22. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $g(x) = e^{-f(x)}$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $M(x_0, g(x_0))$ βρίσκεται «κάτω» από την C_g .

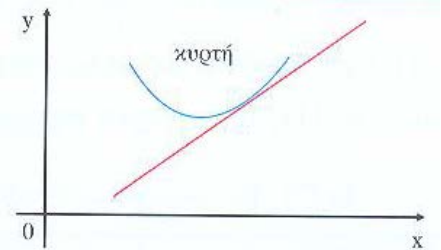
ΓΖ/23. Αν $f(x) = x \ln x$: Α) Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. Β) Βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(\kappa, f(\kappa))$ με $\kappa > 0$.

Γ) Αν $\kappa > 0$ δείξτε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει: $\ln x + \frac{\kappa}{x} \geq \ln \kappa + 1$.

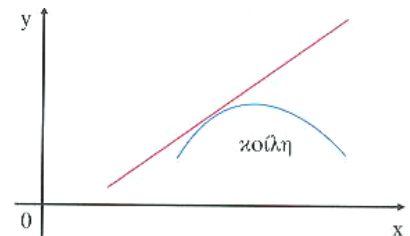
Δ) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αποδείξτε ότι $\beta^{2\beta} < \alpha^\alpha \cdot \gamma^\gamma$.

Σχόλιο: ★ Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη ε της C_f σε κάθε σημείο x_0 του Δ βρίσκεται κάτω από τη C_f .

Δηλαδή αν $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ η εφαπτομένη θα ισχύει: $f(x) \geq \alpha x + \beta$ για κάθε $x \in \Delta$ και το ίσον ισχύει μόνο για το σημείο επαφής.



★ Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη ε της C_f σε κάθε σημείο x_0 του Δ βρίσκεται πάνω από τη C_f . Δηλαδή αν $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ η εφαπτομένη θα ισχύει: $f(x) \leq \alpha x + \beta$ για κάθε $x \in \Delta$ και το ίσον ισχύει μόνο για το σημείο επαφής.



ΓΖ/24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x^2$.

A) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

B) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

Γ) Να αποδείξετε ότι $\ln x \leq x^2 - x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΓΖ/25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^4$.

A) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

B) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

Γ) Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 1 + 2x - x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΓΖ/26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$.

A) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

B) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

Γ) Υπολογίστε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{e^x + x^2 - x - 1}$.

ΓΖ/27. Αν $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{5}{3}$:

A) Μελετήστε την ως προς τη κυρτότητα.

B) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο $M(1, f(1))$.

$$\text{Αν } g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x \ln x + 2x - \frac{10}{3}.$$

Γ) Μελετήστε την ως προς τη κυρτότητα.

Δ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο $M(1, g(1))$.

Ε) Δείξτε ότι $f(x) < g(x)$ για κάθε $x > 1$.

ΣΤ) Δείξτε ότι $2x^3 - 3x^2 + 6x - 5 > 6x \ln x$ για κάθε $x > 1$.

Παρατήρηση: Αν γνωρίζουμε ότι η f είναι κυρτή στο Δ τότε συμπεραίνουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ , όχι όμως και ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Πράγματι η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ οπότε η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $f''(x) = 12x^2$ οπότε $f''(0) = 0$.

Όμοια αν γνωρίζουμε ότι η f είναι κοίλη στο Δ τότε συμπεραίνουμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ , όχι όμως και ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ΓΖ/28. Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x) \leq f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου α τυχαίος πραγματικός αριθμός. Ποια η γεωμετρική σημασία αυτού του συμπεράσματος;
(Υπόδειξη: Με την ιδιότητα της εφαπτομένης κοίλης συνάρτησης ή με Θ.Μ.Τ. και μονοτονία παραγώγου)

ΓΖ/29. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με την ιδιότητα:
 $(x^2 + x + 1)f''(x) + xe^{f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

ΓΖ/30. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f'(0) = f''(0) = 0$ και $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, να δείξετε ότι:
Α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, 0]$.

ΓΖ/31. Έστω f παραγωγίσιμη και κοίλη συνάρτηση στο διάστημα $\Delta = [1, 3]$. Δείξτε ότι $f(1) + f(3) < 2f(2)$. (Υπόδειξη: Με δύο Θ.Μ.Τ.).

ΓΖ/32. Α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $f(x) < f(\alpha)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. (Υπόδειξη: Rolle και μονοτονία)

Β) Αν $\rho \in (\alpha, \beta)$ δείξτε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει:
 $f(x) + \rho f'(\rho) \geq x f'(\rho) + f(\rho)$.

ΓΖ/33. Α) Μελετήστε ως προς την κυρτότητα την: $f(x) = \ln(\ln x)$

Β) Αποδείξτε ότι $\ln \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x \cdot \ln y}$ για κάθε $x, y \in (1, +\infty)$.

(Θεωρούμε ότι $x < y$ υψώνουμε στο τετράγωνο παίρνουμε τα $\ln$ και μετά Θ.Μ.Τ.)

ΓΖ/34. Αν η f κυρτή στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = 0$ βρείτε το πρόσημο της

$$g(x) = f(x) - xf'(x). \quad (\text{Αν } x < 0 \text{ με ΘΜΤ στο } [x, 0] \text{ υπάρχει } x_0 \text{ ώστε}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x)}{x}, \text{ οπότε } x < x_0 < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \text{ κτλ και όμοια αν } x > 0)$$

ΓΖ/35. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f''(x) + f(x) > 2f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y = 2x + 5$.

Α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $B(0, g(0))$.

Γ) Δείξτε ότι $f(x) \geq e^x \cdot (5 - 3x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Κανόνας De L'Hospital

ΓΖ/36. Υπολογίστε τα όρια: Α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 + 3x - 4}{x^5 + x - 2}$ Β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - 4}{x^3 + x - 2}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{x^3}$

Δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\sin x - 2}$

Ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x + 1}{x^2}$.

ΣΤ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

Ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2}{4x}$

Η) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{e^x - e}$

Θ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{x^2 + x + 1}$

ΓΖ/37. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

Α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\ln(\sqrt{x} + 2)}$

Β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x + 1) \ln x}{e^{2x}}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x - \eta \mu x}{x - \eta \mu x}$

Δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

ΓΖ/38. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

Α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} + x^2 + x - 14}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

Β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \eta \mu x}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln x}{x + \ln x}$

ΓΖ/39. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^x}{\eta\mu x} \right)$ B) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{\eta\mu x} \right)$ Γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sigma\phi x$

E) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$ ΣΤ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x$ Ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$

ΓΖ/40. Βρείτε τα όρια: A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$
 Γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x \cdot \ln x)$ (διαιρούμε και πολλαπλασιάζουμε με το x) Δ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot \ln x]$
 E) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)$ ΣΤ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta\mu x}$ Ζ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}$ Η) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x - e^{2x})$
 Θ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2 + x + 1)$ Ι) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - \ln x)$ ΙΑ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 3^x - e^{2x})$

ΓΖ/41. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α , β και γ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma x}{x - \eta\mu x} = 4.$$

ΓΖ/42. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε να είναι πραγματικός αριθμός το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha e^{1-x} + \beta x + 4}{x^2 - 2x + 1}$.

ΓΖ/43. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση: $xf(x) + e^{\eta\mu x} = f(x)\eta\mu x + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ασύμπτωτες

ΓΖ/44. Βρείτε τις ασύμπτωτες των: $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 - 2}$

ΓΖ/45. Βρείτε τις ασύμπτωτες των: $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$, $g(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - 1}$

ΓΖ/46. A) Βρείτε τις ασύμπτωτες της: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$.

B) Όμοια για τις $g(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ και $h(x) = \frac{x^2 + \ln x + 3}{2x^2 + 1}$.

ΓΖ/47. A) Βρείτε τις ασύμπτωτες των :

$$f(x) = \frac{2 - 3x^2}{x^2 - 3x + 2}, \quad g(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{3x^2 + 2x + 5}{x^2 - 4x + 4}$$

ΓΖ/48. Βρείτε τις ασύμπτωτες της: $f(x) = 2x + 3 + \frac{5e^x}{1 + e^x}$.

ΓΖ/49. Βρείτε τις ασύμπτωτες των :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x < 0 \\ \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} & , x \geq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2}{x^2 + 1} & , x \leq 1 \\ \frac{x^2 + x}{x - 1} & , x > 1 \end{cases}$$

ΓΖ/50. Βρείτε τις ασύμπτωτες της : $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

Όμοια για την $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.

ΓΖ/51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x - 1}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η ευθεία $y = -x + 2$ να είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ΓΖ/52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x^2 + \beta x + 5}{3x + \gamma}$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Βρείτε τους α, β, γ , ώστε η γραφ. παράσταση της f να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις $x = -2$ και $y = 3$.

ΓΖ/53. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 3$, να υπολογίσετε το όριο

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+1)f(x) - 8x^2 + 2x + \eta\mu x}{f(x) + x(f(x) + 1) - 4x^2 + 3}.$$

ΓΖ/54. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής

παράστασης της $f(x) = \frac{(\alpha + 1)x^2 - 2\alpha x + 3}{3x - 2}$ στο $+\infty$ να δείξετε ότι $\alpha = 5$

και $\beta = -2$. (Υπόδειξη: Πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \beta$)

ΓΖ/55. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 4$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $+\infty$, να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha f(x) + 6x}{xf(x) - 3x^2 + 5x + 2} = 1.$$

ΓΖ/56. Η ευθεία $(\varepsilon): y = 4x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Να βρείτε τα όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) - 4x^3}{xf(x) - 2010}$

B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)(x+1) - 4x^2}{3x - 2010}.$

ΓΖ/57. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α , β και γ ώστε οι ευθείες με εξισώσεις $x = -2$ και $y = x - 4$ να είναι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{(\alpha - 2)x^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1}{2x + \gamma}$.

ΓΖ/58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + 6}{x^2 - 4x + 3}$. Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να έχει μια μόνο κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ΓΖ/59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 5}{x - 2}$. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 2$. Ποιες άλλες ασύμπτωτες έχει η C_f ;

ΓΖ/60. Η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $-\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x]$.

β) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha f(x) + 4x}{xf(x) - 3x^2 + 3x} = 2$.

ΓΖ/61. Μια συνάρτηση f έχει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ την ιδιότητα $2x + 3 + \frac{1}{x^2} < f(x) < 2x + 3 + \frac{3x}{x^2 + 1}$. Δείξτε ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ΓΖ/62. Μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ την ιδιότητα $2x - 3 + \frac{x}{e^x + e^{-x} - 2} \leq f(x) \leq 2x - 3 + \frac{\ln^2 x}{x}$. Βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ΓΖ/63. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Αν $g(x) = f(x) - 2x + 1$, να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g .

ΓΖ/64. Αφού μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \ln x$, βρείτε το πλήθος των ριζών και τις ασύμπτωτες.

ΓΖ/65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - x \ln x + x - 1$.

A) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

B) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Γ) Εξετάστε αν η f έχει ασύμπτωτες. Δ) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

ΓΖ/66. Αν $f(x) = \ln^2 x - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, τότε

A) Μελετήστε την ως προς τη μονοτονία και βρείτε τα ακρότατα, το σύνολο τιμών και τον αριθμό των ριζών της.

B) Δείξτε ότι: $\ln^2 x \geq \ln \left(x e^{-\frac{1}{4}} \right)$.

Γ) Μελετήστε την ως προς την κυρτότητα και βρείτε τα σημεία καμπής.

Δ) Βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ΓΖ/67. A) Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή 2^η παράγωγο δείξτε ότι

ισχύει: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$.

B) Λύστε την ίδια άσκηση χωρίς να δίνεται ότι η 2^η παράγωγος είναι συνεχής.

ΓΖ/68. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f'' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Αν $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) \neq 0$, να

αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x^2 + f(x)}{(e^x - 1) f'(x)} = 1$ αν και μόνο αν $f''(0) = 2$.

(Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε De l'Hospital και διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με x)

ΓΖ/69. Έστω οι συναρτήσεις: $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) + x + x \eta \mu \frac{1}{x}$

για κάθε $x \neq 0$. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ΓΖ/70. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x + \alpha x + 1$, με $x \in (0, +\infty)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(e, f(e))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\eta): x - y + 2018 = 0$.

A) Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$.

B) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Δ) Να αποδείξετε ότι: $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$.

E) Να αποδείξετε ότι: $\ln x < f(x+1) - f(x) < \ln(x+1)$ για κάθε $x > 0$.

ΓΖ/71. Αν f συνεχής στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$ ώστε
 $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

A) Δείξτε ότι $f(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

B) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = 2e^x + f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{Παραγωγίστε με } x \text{ σταθερό})$$

Δ) Βρείτε τον τύπο της f .

Ε) Βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΓΖ/72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x - 1 + \eta\mu x}{x + 1}$. Να βρείτε:

A) Την ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$.

B) Τα σημεία τομής της (ε) και της C_f .

ΓΖ/73. Αν $f(x) = 2x + e^x$ συνχ:

A) Δείξτε ότι η ευθεία (ε): $y = 2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

B) Δείξτε ότι οι C_f και (ε) έχουν άπειρα κοινά σημεία.

Μελέτη συνάρτησης και χάραξη γραφικής παράστασης.

ΓΖ/74. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:

$$\text{A) } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{B) } f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x + 1 \quad \text{Γ) } f(x) = xe^x$$

$$\text{Δ) } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} \quad \text{Ε) } f(x) = \frac{x + 2}{x - 2} \quad \text{ΣΤ) } f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$\text{Ζ) } f(x) = x^4 - 4x^3 \quad \text{Η) } f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$$

ΓΖ/75. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

A) Μελετήστε την ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B) Μελετήστε την ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Γ) Βρείτε τις ασύμπτωτες.

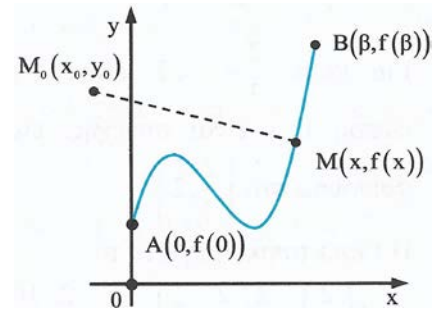
Δ) Κάνετε γραφική παράσταση.

Ε) Βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \frac{\eta\mu x}{x^2} \right]$.

ΓΖ/76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & , |x| \leq 1 \\ \frac{2}{x} & , |x| > 1 \end{cases}$.

- A) Μελετήστε την f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.
 B) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 Γ) Βρείτε το σύνολο τιμών της.
 Δ) Μελετήστε την ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 Ε) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f .

ΓΖ/77. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη C_f είναι γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[0, \beta]$ και $M_0(x_0, y_0)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου.



A) Βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x) = (M_0M)$ του M_0 από το τυχαίο σημείο $M(x, f(x))$ της C_f με $x \in [0, \beta]$.

B) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[0, \beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο απ' ό,τι τα υπόλοιπα σημεία και ένα τουλάχιστον που απέχει περισσότερο απ' ό,τι τα υπόλοιπα σημεία της.

Γ) Έστω ότι $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ και $B(3, 4)$.

Γ1) Βρείτε το υποσύνολο του $[0, 3]$ στο οποίο εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την f και στη συνέχεια βρείτε την τετμημένη ξ του σημείου στο οποίο η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. (είναι $f(x) = x(x-2)^2 + 1$)

Γ2) Κάνετε μελέτη της f και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

ΓΖ/78. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0) = 0$ και $f'(x) - f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- A) Βρείτε τον τύπο της f .
 B) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 Γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 Δ) Βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 Ε) Να σχεδιάσετε τη C_f .

(Δίνονται: $\frac{1}{e} \approx 0,4$ και $\frac{2}{e^2} \approx 0,3$)

ΓΖ/79. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(3) + f(-3) = 0$ και $f'(x) = \frac{2 - 2xf(x)}{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- A) Βρείτε τον τύπο της f .
 B) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 Γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 Δ) Βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 E) Να σχεδιάσετε τη C_f . (Δίνεται: $\sqrt{3} \approx 1,7$)

ΓΖ/80. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(e) = e^2$ και $xf'(x) - 2f(x) = x^2$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

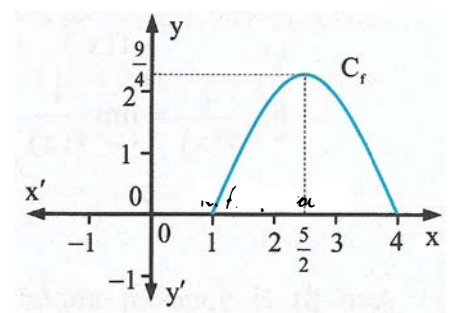
- A) Βρείτε τον τύπο της f .
 B) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 Γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 Δ) Βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 E) Να σχεδιάσετε τη C_f . (Δίνονται: $\frac{1}{2e} \approx 0,2$, $\frac{3}{2e^3} \approx 0,07$, $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6$, $\frac{1}{e\sqrt{e}} \approx 0,2$)
 ΣΤ) Να βρείτε ο πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x^2}}$ στο $(0, +\infty)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΓΖ/81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Δείξτε ότι:

- A) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια ότι η ευθεία $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$.
 B) Ο άξονας $x'x$ έχει άπειρα κοινά σημεία με την C_f .
 Γ) Η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.
 Δ) Η εξίσωση $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\frac{1}{\pi}, \pi\right)$.

E) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}{x + \sin x} = 1$.

ΓΖ/82. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διπλανό σχήμα, που έχει



άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = \frac{5}{2}$ και διέρχεται από τα σημεία $A\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$ και $B(2,2)$.

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα $x=1$ και $x=4$.

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: $f, \frac{1}{f}, f', \frac{1}{f'}$.

B) Βρείτε τη μονοτονία της $\frac{1}{f}$ και τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$.

Γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της $\frac{1}{f(x)}$ αν γνωρίζετε ότι είναι κυρτή.

ΓΖ/83. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε: $f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

A) Δείξτε ότι: $\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}$.

B) Δείξτε ότι: $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Γ) Εξετάστε την f' ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ) Βρείτε τα σημεία καμπής της f' και αποδείξτε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

Ε) Μελετήστε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $g(x) = 2f(x) - x$.

ΣΤ) Δείξτε ότι: $f(x) \leq f(0) + \frac{x}{2}$ για κάθε $x \geq 0$.

Ζ) Βρείτε τις ασύμπτωτες της f' .

Η) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f' .

Παράγωγοι

Ερωτήσεις Θεωρίας (Σωστού – Λάθους)

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, τότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

2. Αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η συνάρτηση $f + g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

3. Αν το γινόμενο $f \cdot g$ δύο συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .

- 4.** Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ μπορεί να διαπερνά την C_f .
- 5.** Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι τα σημεία x_0 της C_f όπου οι εφαπτόμενες της C_f είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- 6.** Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε και η $|f|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- 7.** Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι πραγματικός αριθμός.
- 8.** Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- 9.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$
- 10.** Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- 11.** Αν $f(x) = e^x$, τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}$
- 12.** Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.
- 13.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.
- 14.** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, ποτέ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f .
- 15.** Αν μια ευθεία (ε) έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μόνο ένα κοινό σημείο, τότε είναι οπωσδήποτε εφαπτομένη της.
- 16.** Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Τότε η γραφική της παράσταση δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

- 17.** Για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = (x-2)e^x$. Τότε η C_f στο σημείο $M(2, f(2))$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.
- 18.** Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η g με $g(x) = (x - x_0)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- 19.** Οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = x^2 - 20$ στα σημεία τομής τους με την ευθεία $x = x_0$, είναι παράλληλες.
- 20.** Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$, σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- 21.** Αν δυο συναρτήσεις τέμνονται, τότε στο κοινό τους σημείο δέχονται κοινή εφαπτομένη.
- 22.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε θα είναι συνεχής στο x_0 .
- 23.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε θα είναι πάντα παραγωγίσιμη στο x_0 .
- 24.** Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- 25.** Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι συνεχής στο x_0 .
- 26.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .
- 27.** Η γραφική παράσταση μιας πολωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.
- 28.** Η γραφική παράσταση μιας πολωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.
- 29.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 2, τότε $[f(2)]' = f'(2)$.
- 30.** Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:
 $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$.

31. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει $(f(f(x)))' = (f'(x))'$.

32. Αν το άθροισμα $f + g$ δύο συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .

33. Αν για τις f, g ισχύει ότι η $f + g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε και οι f, g δεν είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .

34. Αν η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη, τότε οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες.

35. Για μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει

α) αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή

β) αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια

γ) αν η f είναι περιοδική, τότε η f' είναι περιοδική με την ίδια περίοδο.

36. Αν η συνάρτηση f είναι πολωνυμική n -οστού βαθμού, τότε η συνάρτηση f' είναι επίσης πολωνυμική $n-1$ βαθμού.

37. Οι πολωνυμικές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

38. Σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση του.

39. Αν $f(x) = x^4$, τότε υπάρχουν σημεία της C_f με παράλληλες εφαπτόμενες.

40. Αν $y = \alpha x + \beta$, τότε ο ρυθμός μεταβολής των τιμών του y εξαρτάται από τις τιμές της μεταβλητής x .

41. Αν $f'(x) = 4x^3$, τότε ισχύει πάντα $f(x) = x^4$.

42. Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, τότε $f(\alpha) = f(\beta)$.

43. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

44. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε δεν υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle.