

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΤΑΞΗ: Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
Μάθημα :ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

A

ΘΕΜΑ Α

A1. Να απαντήσετε με σωστό Σ ή λάθος Λ στις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα τότε $f(x^4) < f(x^4 + 3)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο A_1 και γνησίως αύξουσα στο A_2 τότε θα είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 \cup A_2$.
3. Αν η συνάρτηση $f(x)$ αντιστρέφεται τότε ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.
4. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 3$ τότε η συνάρτηση $f(x)$ έχει ελάχιστο το 3.
5. Μια συνάρτηση που είναι γνησίως μονότονη είναι 1-1.

Μονάδες 5

A2. Να δώσετε τον ορισμό πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα

Μονάδες 7

A3. Ισχύει ότι : Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,5)$ και $B(2,4)$

B1. Βρείτε το είδος της μονοτονίας της.

Μονάδες 7

B2. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(x^2) - 3) = 5$

Μονάδες 8

B3. Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(e^x + 3) - 3) > 5$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Εστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(f(x)) - f(x) = x - \frac{1}{x}$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Γ1. Να δείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται και ότι $f(1) = 1$

Μονάδες 6

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$

Μονάδες 6

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(e^x)) = e^x - e^{-x} + 1$ για $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f(x) - x = f^{-1}(x) - \frac{1}{f^{-1}(x)}$ και να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) + \frac{1}{f^{-1}(x)} = f^{-1}(x) + x^2$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει: $f^4(x) + f^2(x) - xf(x) - 2 = 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \geq 0$

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι η $f(x)$ αντιστρέφεται.

Μονάδες 4

Δ3. Αν η $f(x)$ έχει σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$ να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = x^3 + x - \frac{2}{x}$.

Μονάδες 4

Δ4. Να μελετήσετε την $f^{-1}(x)$ ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 4

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{x^2 + x - 2}{x + 1}\right) = x + 1$

Μονάδες 5

Δ6. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$

Μονάδες 4

Καλή Επιτυχία!!!!