



Η επιλογή των ασκήσεων είναι από το βιβλίο του Β.Παπαδάκη «Μαθηματικά Β' Λυκείου – Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών» και το βιβλίο του Γ.Μαυρίδη «Μαθηματικά Β' Λυκείου – Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών»

<https://youtu.be/0VQGWcxKHdU?si=r6b62hdbzBG3vcvm>

<https://youtu.be/I9GSPA10Pdc?si=-gSJqRi9O3dzxwEc>

## Εξίσωση Κύκλου

### Ορισμός (Κύκλου)

Έστω ένα σημείο  $K$  και ένας θετικός αριθμός  $\rho$ . Ονομάζεται **κύκλος** με **κέντρο** το σημείο  $K$  και **ακτίνα**  $\rho$  ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $(MK) = \rho$ .

Ο κύκλος ( $c$ ) με κέντρο το σημείο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \rho^2 .$$

- Ο κύκλος με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho=1$ , δηλαδή ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 1$  ονομάζεται **μοναδιαίος κύκλος**.

Ο κύκλος ( $c$ ) με κέντρο το σημείο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 .$$

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 .$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει κύκλο.

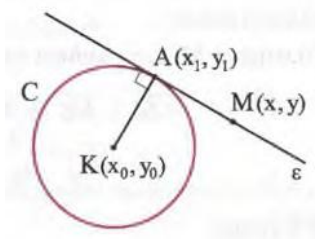
## Εφαπτομένη Κύκλου

Η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) του κύκλου  $c: x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2 .$$

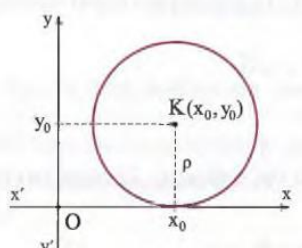
Αν ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο  $K(x_0, y_0)$  δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον προηγούμενο τύπο (ο αντίστοιχος τύπος είναι :  $(x - x_0) \cdot (x - x_1) + (y - y_0) \cdot (y - y_1) = \rho^2$ ). Σε αυτή την περίπτωση αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα σαν άσκηση ευθείας παίρνοντας υπόψη ότι :

$$KA \perp \varepsilon \text{ και } d(K, \varepsilon) = \rho .$$

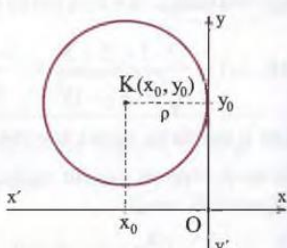


## Κύκλος που εφάπτεται στον άξονα $x'x$ ή στον άξονα $y'y$

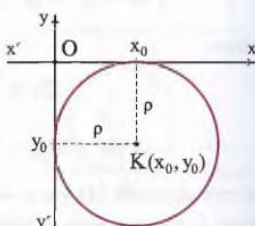
- Ένας κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  εφάπτεται στον άξονα  $x'x$ , αν και μόνο αν ισχύει:  
 $\rho = |y_0|$



- Ένας κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  εφάπτεται στον άξονα  $y'y$ , αν και μόνο αν ισχύει:  
 $\rho = |x_0|$



- Ένας κύκλος με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  εφάπτεται και στους δύο άξονες  $x'x$  και  $y'y$ , αν και μόνο αν ισχύει:  
 $\rho = |x_0| = |y_0|$



## Σχετική θέση σημείου και κύκλου

Συγκρίνουμε την απόσταση του σημείου από το κέντρο του κύκλου με την ακτίνα.

## Σχετική θέση ευθείας και κύκλου

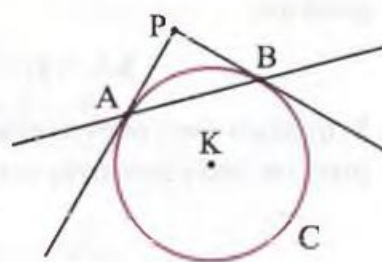
Συγκρίνουμε την απόσταση του κέντρου από την ευθεία με την ακτίνα.

## Σχετική θέση δύο κύκλων

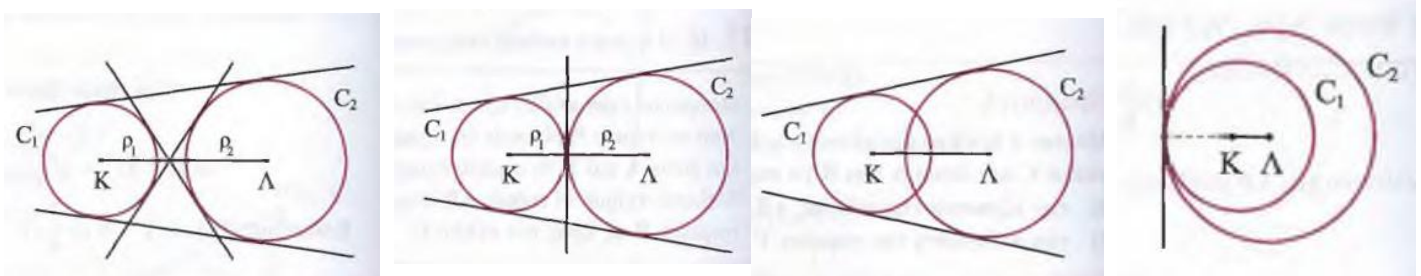
Συγκρίνουμε την απόσταση των δύο κέντρων με το άθροισμα και το απόλυτο της διαφοράς των ακτινών.

## Πολική ευθεία

Θεωρούμε έναν κύκλο  $C$  και ένα σημείο  $P$  εκτός αυτού. Από το σημείο  $P$  φέρουμε τις εφαπτομένες στον κύκλο  $C$  και έστω  $A$  και  $B$  τα σημεία επαφής, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ευθεία  $AB$  λέγεται **πολική ευθεία** του σημείου  $P$  ως προς τον κύκλο  $C$ .



## Κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων







8	<p>Δίνεται ο κύκλος <math>C: x^2 + y^2 = 25</math>. Να βρείτε:</p> <p>α) την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου <math>C</math> στο σημείο του <math>A(-4, 3)</math>,</p> <p>β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου <math>C</math> που είναι κάθετες στην ευθεία:</p> $\zeta: 4x - 3y + 2017 = 0$ <p>γ) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου <math>C</math> που διέρχονται από το σημείο <math>P(5, 10)</math>.</p>
9	<p>Δίνεται ο κύκλος:</p> $C: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ <p>Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου <math>C</math> στα σημεία του:</p> <p>α) <math>A(3, -1)</math>                      β) <math>B(4, 2)</math>                      γ) <math>\Gamma(-1, 7)</math></p>
10	<p>Δίνεται ο κύκλος <math>C: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20</math>. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου <math>C</math> που είναι κάθετες στην ευθεία:</p> $\zeta: 3x - 6y - 2017 = 0$
11	<p>Δίνεται ο κύκλος <math>C: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25</math> και το σημείο <math>P(9, 8)</math>.</p> <p>α) Να αποδείξετε ότι το <math>P</math> είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου <math>C</math>.</p> <p>β) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου <math>C</math> που διέρχονται από το σημείο <math>P</math>.</p>
12	<p>Δίνεται ο κύκλος <math>C: x^2 + y^2 = 15</math>. Από το σημείο <math>P(3, 4)</math> φέρουμε τις εφαπτομένες στον κύκλο <math>C</math> και έστω <math>A</math> και <math>B</math> τα σημεία επαφής. Να βρείτε:</p> <p>α) την εξίσωση της ευθείας <math>AB</math>,</p> <p>β) την απόσταση του σημείου <math>P</math> από την ευθεία <math>AB</math>.</p>
13	<p>Δίνονται οι κύκλοι <math>C_1: x^2 + y^2 = 25</math> και <math>C_2: (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 4</math>.</p> <p>α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι <math>C_1</math> και <math>C_2</math> τέμνονται.</p> <p>β) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των κύκλων <math>C_1</math> και <math>C_2</math>.</p>
14	<p>Δίνεται ο κύκλος <math>C_1: x^2 + y^2 = 5</math> και η εφαπτομένη <math>\varepsilon</math> του <math>C_1</math> στο σημείο του <math>A(1, 2)</math>. Θεωρούμε επίσης κύκλο <math>C_2</math>, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά στον <math>C_1</math> στο σημείο <math>B(1, -2)</math> και στην ευθεία <math>\varepsilon</math> στο σημείο <math>\Gamma</math>. Να βρείτε:</p> <p>α) την εξίσωση του κύκλου <math>C_2</math>,</p> <p>β) τις κοινές εφαπτομένες των κύκλων <math>C_1</math> και <math>C_2</math>.</p>
15	<p><b>11.17</b> Δίνεται η εξίσωση:</p> $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0 \quad (1)$ <p>Να αποδείξετε ότι:</p> <p>α) η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο <math>C</math>, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα,</p> <p>β) τα μέσα των χορδών του κύκλου <math>C</math>, οι οποίες έχουν ένα άκρο τους το σημείο <math>A(1, 3)</math> του <math>C</math>, ανήκουν σε έναν άλλο κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.</p>
16	<p>Δίνεται ο κύκλος <math>C_1: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9</math>.</p> <p>α) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου <math>C_1</math>.</p> <p>β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει το σημείο <math>A(3, 5)</math> από ένα σημείο του κύκλου <math>C_1</math>.</p> <p>γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του <math>C_1</math> από την ευθεία <math>\varepsilon: 4x - 3y - 10 = 0</math>.</p> <p>δ) Δίνεται ο κύκλος <math>C_2: (x - 5)^2 + (y + 6)^2 = 4</math>.</p> <p>i) Να αποδείξετε ότι καθένας από τους κύκλους <math>C_1</math> και <math>C_2</math> είναι εξωτερικός του άλλου.</p> <p>ii) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του <math>C_1</math> από ένα σημείο του <math>C_2</math>.</p>
17	<p>Δίνεται τρίγωνο <math>\Pi\rho\sigma</math> με <math>\Pi(-3, 1)</math>, <math>\rho(5, 5)</math> και <math>\sigma(2, -4)</math>. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου <math>\Pi\rho\sigma</math>.</p>