

1^ο Πειραματικό Λύκειο Λάρισας  1ο Πειραματικό Λύκειο Λάρισας	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	2024-2025
Άρης Χατζηχρίστας		ΦΥΛ #007
Κεφάλαιο 2^ο: ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (§2.3)		

Η επιλογή των ασκήσεων είναι από το βιβλίο του Β.Παπαδάκη «Μαθηματικά Β' Λυκείου – Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών» και το βιβλίο του Γ.Μαυρίδη «Μαθηματικά Β' Λυκείου – Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών»

Απόσταση Σημείου από Ευθεία

Η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Παράδειγμα

Η απόσταση του σημείου $M(2, -3)$ από την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y - 9 = 0$ είναι:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3.$$

Εμβαδόν Τριγώνου

Το εμβαδό οποιουδήποτε τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|.$$

Παράδειγμα

Αν είναι $A(1, 2)$, $B(3, 8)$ και $\Gamma(0, 4)$ οι κορυφές ενός τριγώνου $AB\Gamma$, τότε

$$\overrightarrow{AB} = (2, 6) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = (-1, 2).$$

Οπότε, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |4 + 6| = 5 \text{ τ.μ.}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$ δίνεται από τον τύπο

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

Μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών

Μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις ε_1 και ε_2 .

Για να βρούμε τη μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών, εργαζόμαστε με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1ος τρόπος

Το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη μεσοπαράλληλη ε των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 , αν και μόνο αν:

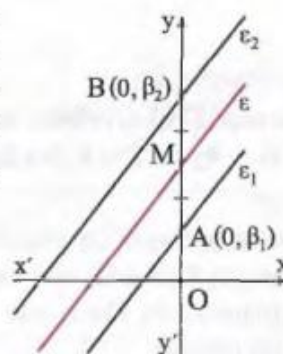
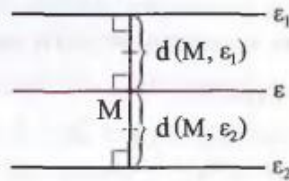
$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

Η παραπάνω σχέση μάς οδηγεί στην εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε .

2ος τρόπος

Έστω $\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$ δύο παράλληλες ευθείες, οι οποίες τέμνουν τον άξονα y' στα σημεία $A(0, \beta_1)$ και $B(0, \beta_2)$ αντίστοιχα. Η μεσοπαράλληλη ε των ε_1 και ε_2 είναι παράλληλη στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ) και διέρχεται από το μέσο $M\left(0, \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)$. Άρα η εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε είναι:

$$y - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \lambda(x - 0) \Leftrightarrow y = \lambda x + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$



Διχοτόμος γωνίας

Διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

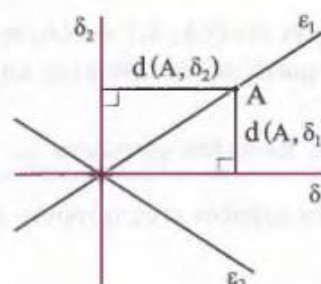
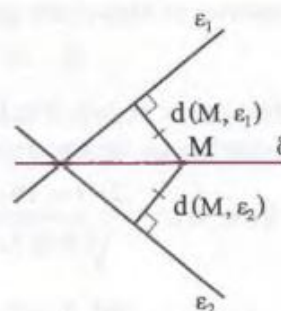
Για να βρούμε τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν δύο ευθείες, εργαζόμαστε ως εξής:

Το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη διχοτόμο μιας γωνίας που σχηματίζουν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 , αν και μόνο αν:

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

Η παραπάνω σχέση μάς οδηγεί σε εξισώσεις δύο ευθειών δ_1 και δ_2 . Η μία από αυτές είναι η εξίσωση της διχοτόμου της οξείας γωνίας και η άλλη της διχοτόμου της αμβλείας γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 . Για να βρούμε ποια από τις δύο εξισώσεις αντιστοιχεί στην οξεία και ποια στην αμβλεία γωνία, εργαζόμαστε ως εξής:

- Επιλέγουμε τυχαίο σημείο A της ε_1 .
- Βρίσκουμε τις αποστάσεις $d(A, \delta_1)$ και $d(A, \delta_2)$.
- Αν ισχύει ότι $d(A, \delta_1) < d(A, \delta_2)$, τότε η δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας και η δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας των ε_1 και ε_2 . Αν προκύψει ότι $d(A, \delta_1) = d(A, \delta_2)$, συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.



Βασικές Εφαρμοχές

1	Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α(-2, 3) από την ευθεία: α) $x + y + 1 = 0$ β) $y = 2x - 3$ γ) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ δ) $5x + 3y + 1 = 0$
2	Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο και απέχουν από το σημείο Α(-1, 3) απόσταση ίση με 1.
3	Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών: $\varepsilon_1: 2x - y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x - y + 3 = 0$
4	Δύο παράλληλες ευθείες απέχουν απόσταση ίση με 8 και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε: $3x - 4y - 12 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.
5	α) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $3x - 4y + 1 = 0$ και $5x + 12y + 4 = 0$. β) Ποια από τις παραπάνω διχοτόμους αντιστοιχεί στην οξεία γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες;
6	Δίνονται τα σημεία Α(2, 4), Β(-6, 2) και Γ(0, 10). Να βρείτε: α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, β) σημείο Δ της ευθείας ε: $2x - y - 3 = 0$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ΒΓΔ να έχει εμβαδόν ίσο με 19 τ.μ.
7	Δίνονται τα σημεία Α(-1, -2) και Β(3, 1). Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει (ΜΑΒ) = 8 τ.μ.
8	Δίνεται η ευθεία ε: $3x - 4y - 5 = 0$ και το σημείο Μ(-4, 2). Να βρείτε: α) την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων, β) ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο Μ.

Ασκήσεις

1	Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(7,-5)$ από την ευθεία (ε) με εξίσωση: i) $3x + 4y + 9 = 0$ ii) $x + 2y + 1 = 0 .$
2	9.10 Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A(1, 4)$ από την ευθεία: α) $\varepsilon_1 : y = 2x - 8$ γ) $\varepsilon_3 : y = 5$ β) $\varepsilon_2 : y = 3x - 9$ δ) $\varepsilon_4 : x = 7$
3	9.11 Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(-1, 3)$ ισαπέχει από τις ευθείες: $\varepsilon : 12x + 5y + 10 = 0 \quad \text{και} \quad \zeta : 3x + 4y - 14 = 0$

4	9.17 Οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 14)y + \lambda + 2 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 3)x + (\lambda - 10)y + 4 - 2\lambda = 0$ είναι παράλληλες. Να βρείτε: α) τον αριθμό λ, β) σε ποια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 βρίσκεται πλησιέστερα το σημείο $A(3, 2)$.
5	9.23 Να βρείτε τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ευθεία $\zeta: 3x + y - 2017 = 0$ και απέχουν από το σημείο $A(-4, 2)$ απόσταση ίση με $2\sqrt{10}$.
6	9.28 Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x + (\lambda - 2)y - 3\lambda + 2 = 0 \quad (1)$ α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από σταθερό σημείο P. γ) Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο P του ερωτήματος (β) και ισαπέχουν από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(3, 7)$.
7	Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\alpha - 1)x + 2y - 5 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: (3 - \alpha)x + 2y = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους. i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$. ii) Να υπολογίσετε την απόσταση d των ευθειών (ε_1) και (ε_2). iii) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών (ε_1) και (ε_2).
8	Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $3x + 4y + 7 = 0$ η οποία είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών (ε_1) και (ε_2) οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση 2 μονάδες. i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2). ii) Ένα σημείο M ανήκει στην ευθεία $y = x$ και βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. Να βρείτε τις συνταγμένες του M έτσι, ώστε αυτό να απέχει από κάποια από τις ευθείες (ε_1), (ε_2) απόσταση ίση με 2 μονάδες.
9	Δίνονται το σημείο $A(0,1)$ και η ευθεία $\eta: x + 2y - 7 = 0.$ Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία είναι κάθετη προς την (η) και απέχει από το σημείο A απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

10	Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ και απέχει από το σημείο $B(3,1)$ απόσταση ίση με 2.
11	Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $M(3,5)$ και ισαπέχει από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(3,1)$.
12	Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $12x - 5y + 10 = 0 \quad \text{και} \quad 3x + 4y - 8 = 0.$ Να βρείτε: i) το σημείο τομής A των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ii) τα σημεία του άξονα $x'x$ τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) iii) τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2).
13	9.38 Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 3x - 4y + 1 = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: 8x - 6y + 5 = 0$ Να βρείτε: α) τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2, β) ποια από τις παραπάνω διχοτόμους αντιστοιχεί στην οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.
14	9.39 Δίνονται τα σημεία $A(3, 1)$ και $B(13, 6)$. Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (3, 6)$ και ε_2 η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B. Να βρείτε: α) τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2, β) την απόσταση του B από την ευθεία ε_1, γ) τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2.
15	Δίνονται τα σημεία $A(1, 5)$, $B(0, 2)$ και $\Gamma(4, 0)$. i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου. ii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD. iii) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM. iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.
16	Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, -4)$, $B(2, 1)$ το οποίο έχει εμβαδό $E = 8$ τ.μ. Να βρείτε το σημείο Γ αν είναι γνωστό ότι αυτό βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: y = -2x$ και οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί.

17	Δίνονται τα σημεία $A(1,1) \text{ και } B(5,3).$ Να βρείτε: i) το σημείο Γ του θετικού ημιάξονα Ox, για το οποίο ισχύει η σχέση $(AB\Gamma) = 5 \text{ τ.μ.}$ ii) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει η σχέση $(ABM) = 2(OAB),$ όπου Ο η αρχή των αξόνων.	
18	9.46 Δίνονται τα σημεία $A(8, 3)$ και $B(6, -1)$. Να βρείτε σημείο Γ του άξονα $x'x$, ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να έχει εμβαδόν 7 τ.μ.	
19	9.47 Θεωρούμε τα σημεία $A(2, -1)$ και $B(4, 5)$ και έστω Γ σημείο της ευθείας $\varepsilon: 2x - y - 1 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ, ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να έχει εμβαδόν 4 τ.μ.	
20	9.48 Έστω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(-1, 2)$, $B(2, 4)$, $\Gamma(3, -2)$ και $\Delta(-2, -1)$. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.	
21	9.67 Έστω οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda x + \lambda$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + 2$ οι οποίες απέχουν απόσταση ίση με 1. α) Να βρείτε τον αριθμό λ. β) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2. γ) Έστω ε_3 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(4, 2)$ και τέμνει την ε_1 σε σημείο με τετμημένη 7. Να βρείτε: i) την εξίσωση της ευθείας ε_3, ii) τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_2 και ε_3.	
22	9.75 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\Gamma(-2, -1)$, στο οποίο η πλευρά AB βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $2x + y - 10 = 0$ και το ύψος AD βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση: $x + 3y - 15 = 0$ Να βρείτε: α) τις συντεταγμένες της κορυφής Α, β) τις εξισώσεις των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$, γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Β, δ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.	

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Κάθε ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω για την οποία ισχύει $0 \leq \omega < \pi$. Σ Λ
2. Ο συντελεστής διεύθυνσης κάθε ευθείας που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία είναι αρνητικός αριθμός Σ Λ
3. Κάθε ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης. Σ Λ
4. Αν μία ευθεία είναι παράλληλη σε ένα διάνυσμα που δεν είναι κάθετο στον άξονα $x'x$, τότε η ευθεία και το διάνυσμα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Σ Λ
5. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $y_1 \neq y_2$ είναι $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$. Σ Λ
6. Αν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, τότε ισχύει η ισοδυναμία $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$. Σ Λ
7. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$
 Σ Λ
8. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ είναι $y = y_0$. Σ Λ
9. Η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y = \lambda x + \beta$. Σ Λ
10. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y = \lambda x$. Σ Λ
11. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{xOy}$ και $\widehat{yOx'}$ έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ αντίστοιχα. Σ Λ

12. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα $y'y$ είναι $y = y_0$. Σ Λ

13. Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. Σ Λ

14. Κάθε ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$. Σ Λ

15. Η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$
Σ Λ

16. Το εμβαδό κάθε τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}).$$
Σ Λ

