

1^ο Πειραματικό Λύκειο Λάρισας  1ο Πειραματικό Λύκειο Λάρισας	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ	2024-2025
Άρης Χατζηχρίστας		ΦΥΛ #006
Κεφάλαιο 2^ο : ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ (§2.2)		

Η επιλογή των ασκήσεων είναι από το βιβλίο του Β.Παπαδάκη «Μαθηματικά Β' Λυκείου – Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών» και το βιβλίο του Γ.Μαυρίδη «Μαθηματικά Β' Λυκείου – Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών»

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0 \quad (1)$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

1. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$:

- ▶ παριστάνει ευθεία, αν και μόνο αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$,
- ▶ δεν παριστάνει ευθεία, αν και μόνο αν $A = 0$ και $B = 0$.

2. Αν $B \neq 0$, τότε η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda = -\frac{A}{B}$$

3. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία:

- ▶ παράλληλη στον άξονα $x'x$, αν και μόνο αν $A = 0$ και $B \neq 0$,
- ▶ παράλληλη στον άξονα $y'y$, αν και μόνο αν $B = 0$ και $A \neq 0$.

Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία

Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι:

- α) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$,
- β) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$.

Βασικές Εφαρμογές

1	Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 + 2\lambda - 8)x + (\lambda^2 - 4)y + \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad (1)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1): α) παριστάνει ευθεία, β) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$, γ) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$, δ) παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
----------	--

2	Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της μορφής: $(2\alpha^2 + \alpha + 3)x + (\alpha^2 - \alpha + 1)y + 3\alpha + 1 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
3	Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες: $(\lambda - 1)x + \lambda y + 8 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda x + 3y + 1 - 2\lambda = 0$ α) να είναι κάθετες, β) να είναι παράλληλες.
4	Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες: $y = \mu x \quad \text{και} \quad (1 + \mu)x = (1 - \mu)y$
5	Να αποδείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει δύο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις: α) $x^2 - 2y^2 - xy - 3x + 9y - 4 = 0$ β) $x^2 - y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$
6	Δίνεται η εξίσωση $a(x + y + 1) = 3x + y - 5 \tag{1}$ όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $a \in \mathbb{R}$. ii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο. iii) Να βρείτε εκείνη την ευθεία της εξίσωσης (1) η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $\eta : y - 2x + 2$.
7	Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 + \lambda)x + (-4\lambda^2 + \lambda + 1)y - (5\lambda + 1) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$ i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία (ε_λ) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. ii) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε_0) και (ε_1) που οι εξισώσεις τους προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση για $\lambda = 0$ και $\lambda = 1$ αντίστοιχα. iii) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες (ε_λ) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
8	Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\kappa - 1)x + (\kappa + 1)y - 4 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + (2 - 2\kappa)y - 3\kappa = 0,$ όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός. i) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες μεταξύ τους. ii) Για $\kappa = 2$, να βρείτε την οξεία γωνία ω των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

1	8.15 Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 4)x + (\lambda^2 + 2\lambda - 8)y + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (1)$ Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1): α) παριστάνει ευθεία, β) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$, γ) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$, δ) παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.	
2	8.16 Δίνεται η ευθεία: $(a - 3)x + 2y + 2a - 14 = 0 \quad (1)$ α) Να βρείτε για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε που παριστάνει η εξίσωση (1): i) είναι παράλληλη στην ευθεία: $\zeta_1: 5x - 10y + 13 = 0$ ii) είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta_2: 6x - 3y + 1 = 0$, iii) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$, iv) διέρχεται από το σημείο $M(-4, -6)$. β) Έστω οι ευθείες ε_1 και ε_2 των οποίων οι εξισώσεις προκύπτουν από την (1) για $a = 4$ και $a = 5$ αντίστοιχα. Αν η ε_1 τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα και η ε_2 τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να βρείτε το εμβαδόν του $AB\Delta\Gamma$.	
3	8.17 Δίνεται η εξίσωση: $3x + 4y - \mu(x + y - 1) = 0 \quad (1)$ α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία. β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε. γ) Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία ε που έχει εξίσωση την (1) να είναι: i) κάθετη στον άξονα $x'x$, ii) κάθετη στον άξονα $y'y$, iii) παράλληλη στην ευθεία $\zeta: 4x + 2y + 13 = 0$.	

4

8.21 Δίνεται η εξίσωση:

$$(2\kappa + \mu + 1)x - (\kappa - \mu - 4)y - 8\kappa - \mu + 5 = 0 \quad (1)$$

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
- β) Για κάθε $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$, με $(\kappa, \mu) \neq (1, -3)$, να αποδείξετε ότι οι ευθείες που έχουν εξίσωση την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- γ) Να βρείτε ποια από τις ευθείες που έχουν εξίσωση την (1) είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$\zeta: 6x - 2y + 2017 = 0$$

5

8.28 Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 3)y - 5 = 0$$

KOL:

$$\varepsilon_2: (\lambda - 3)x + (\lambda - 4)y + 2 = 0$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

- $$\alpha) \quad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \qquad \beta) \quad \varepsilon_1 // \varepsilon_2$$

6

8.31 Οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda + 1)x + (\lambda - 4)y - 4 = 0$ και $\varepsilon_2: \lambda x + (5 - \lambda)y - 7 = 0$ είναι κάθετες.

- α) Να βρείτε τον αριθμό λ.
β) Θεωρούμε την εξίσωση:

$$(\mu^2 - 3\mu + 2)x + (\mu^2 - 1)y - 2\mu^2 + 2\mu = 0 \quad (1)$$

- Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
- Να βρείτε τον αριθμό μ , ώστε η ευθεία ζ που έχει εξίσωση την (1) να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 .

7

8.33 Να βρείτε την οξεία γωνία ω που σχηματίζουν οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: \sqrt{3} \cdot x - y + 7 = 0$$

KOI:

$$\varepsilon_2: \sqrt{3} \cdot x - 3y + 13 = 0$$

8	8.40 Δίνονται οι ευθείες: $ε_1: ax + (2 - a\sqrt{3})y - \sqrt{3} = 0 \quad \text{και}$ $ε_2: 3x + \sqrt{3} \cdot y - a^4 = 0$ Η οξεία γωνία των ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ ισούται με 60° και η ευθεία $ε_1$ δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. α) Να βρείτε τον αριθμό a. β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ε_1, ε_2$ και ο άξονας $x'x$ σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.
9	8.42 Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 2y^2 - 3xy - 7x - y + 3 = 0 \quad (1)$ α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες, οι οποίες είναι κάθετες. β) Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών του ερωτήματος (α).
10	8.43 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 3 = 0 \quad (1)$ α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$. β) Έστω ότι οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία A και B και έστω M το μέσο του AB. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το M και είναι παράλληλη στις $ε_1$ και $ε_2$.
11	8.44 Δίνεται η εξίσωση: $6x^2 - y^2 - xy - x - 2y - 1 = 0 \quad (1)$ α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$. β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$. γ) Αν η ευθεία $\zeta: 4x + 3y - 7 = 0$ τέμνει τις $ε_1$ και $ε_2$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, να βρείτε την απόσταση AB.

12	8.45 Δίνεται η εξίσωση: $3x^2 + 2y^2 + 7xy + 2x - y - 1 = 0 \quad (1)$ α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις. β) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες του ερωτήματος (α).
13	8.46 Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2y^2 - xy - 5x - 2y + 4 = 0 \quad (1)$ α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2. β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ η οποία διέρχεται από το σημείο $P(-3, 1)$ και τέμνει τις παραπάνω ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Α και Β, ώστε το Ρ να είναι μέσο του ΑΒ.
14	8.47 Δίνεται η εξίσωση: $4x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 2y - 8 = 0 \quad (1)$ α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2. β) Έστω Α, Β, Γ και Δ τα σημεία τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ και Δ.
15	8.52 Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x + (2\lambda - 5)y - 8\lambda + 15 = 0 \quad (1)$ α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε. γ) Έστω ε_1 και ε_2 οι ευθείες με εξισώσεις που προκύπτουν από την (1) για $\lambda = 2$ και $\lambda = 3$ αντίστοιχα. Να βρείτε: - τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2, - την ευθεία ε_3 που είναι συμμετρική της ε_1 ως προς την ε_2.

