

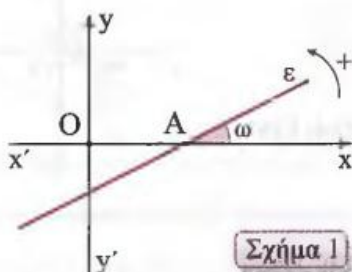


Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

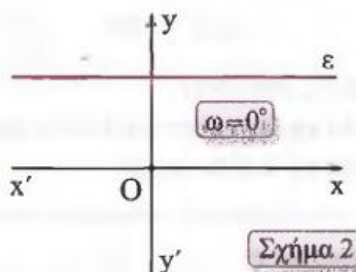
Γωνία που σχηματίζει ευθεία με τον άξονα $x'x$

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων Οxy θεωρούμε μια ευθεία ϵ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α. Η γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη θετική φορά, μέχρι να συμπίσει με την ευθεία ϵ , ονομάζεται γωνία που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τον άξονα $x'x$ (σχήμα 1). Αν η ευθεία ϵ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\omega = 0^\circ$ (σχήμα 2). Για τη γωνία ω ισχύει ότι:

$$0^\circ \leq \omega < 180^\circ \quad \text{ή} \quad 0 \leq \omega < \pi \quad (\text{σε rad})$$



Σχήμα 1



Σχήμα 2

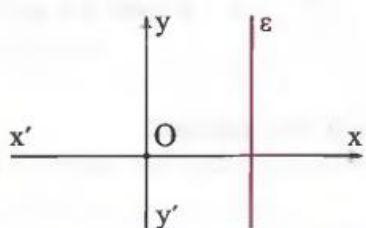
Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Αν η ευθεία ϵ δεν είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ (δηλαδή αν $\omega \neq \frac{\pi}{2}$), τότε ως συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση της ευθείας ϵ ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τον άξονα $x'x$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ϵ συμβολίζεται με λ_ϵ ή λ . Είναι δηλαδή:

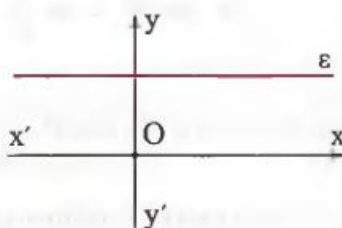
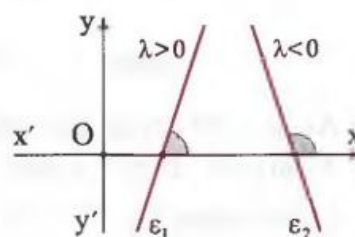
$$\lambda = \epsilon\omega$$

Ισχύουν τα εξής:

- Αν $\epsilon // y'y$, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία αυτή.
- Αν $\epsilon // x'x$, τότε $\lambda_\epsilon = 0$ και αντίστροφα.
- Αν $\lambda_\epsilon > 0$, τότε η ευθεία ϵ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.
- Αν $\lambda_\epsilon < 0$, τότε η ευθεία ϵ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

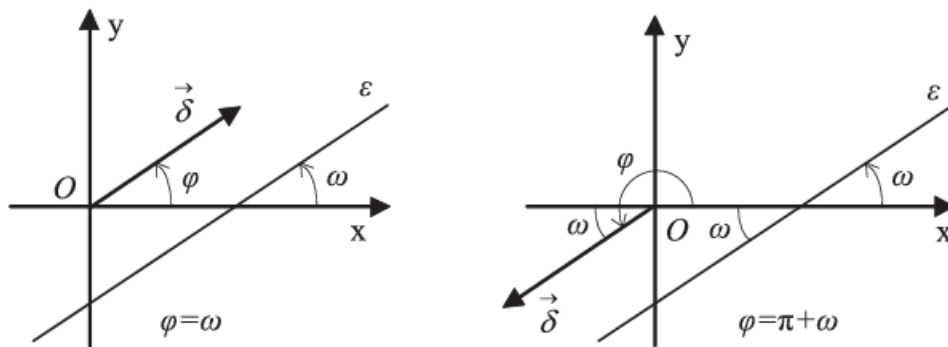


Δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης

 $\lambda = 0$ 

- Έστω τώρα ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο σε μια ευθεία ε . Αν φ και ω είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το $\vec{\delta}$ και η ε με τον x' x αντιστοίχως, τότε θα ισχύει $\varphi = \omega$ ή $\varphi = \pi + \omega$ και επομένως $\varepsilon\varphi = \varepsilon\omega$. Άρα:

“Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης”.



Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Συνθήκες Καθετότητας και Παράλληλίας Ευθειών

Επομένως, αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, τότε:

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

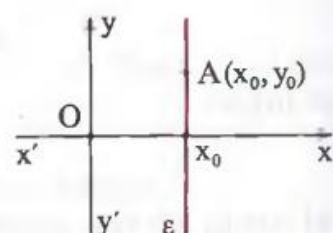
Εξίσωση ευθείας με γνωστά τον συντελεστή διεύθυνσης και ένα σημείο της
Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων. Η ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έχει εξίσωση:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

Εξίσωση ευθείας παράλληλης στον άξονα $y'y$ με γνωστό ένα σημείο της

Όταν μια ευθεία είναι κατακόρυφη (παράλληλη στον άξονα $y'y$), τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία αυτή. Μια κατακόρυφη ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση:

$$x = x_0$$



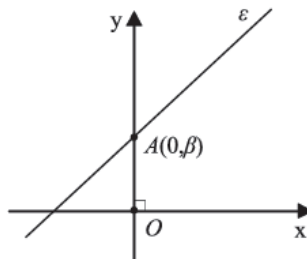
Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Ειδικές περιπτώσεις

- Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - \beta = \lambda(x - 0)$, η οποία τελικά γράφεται

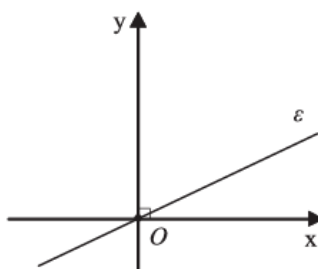
$$y = \lambda x + \beta.$$



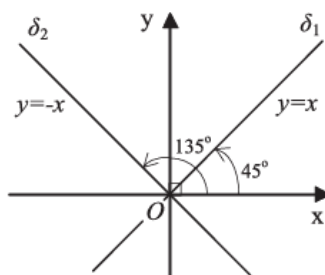
ΠΡΟΣΟΧΗ: Όταν μας δίνεται μια ευθεία της μορφής $y = \alpha x + \beta$, το α (ο συντελεστής δηλαδή του x) είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

- Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε η εξίσωσή της είναι $y - 0 = \lambda(x - 0)$ ή

$$y = \lambda x.$$

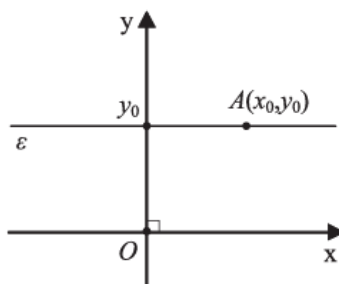


Έτσι, οι διχοτόμοι των γωνιών xOy και yOx' έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ αντιστοίχως.



- Τέλος, αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι όπως λέμε μια οριζόντια ευθεία, έχει εξίσωση $y - y_0 = 0(x - x_0)$, δηλαδή

$$y = y_0.$$



Βασικές Εφαρμογές

1	Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία: α) είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = 3x + 10$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, -1)$, β) είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: y = \frac{x+3}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $B(3, -5)$, γ) σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-2, 3)$, δ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a} = (2, 8)$ και διέρχεται από το σημείο $\Delta(3, 7)$, ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (3, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $E(4, 5)$.
2	Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1, -1)$, $B(2, 0)$ και $\Gamma(-1, -3)$ είναι συνευθειακά.
3	Δίνονται τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(5, 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του ευθύγραμμου τμήματος AB .
4	Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: y = 2x - 6$ και $\zeta: y = -3x + 19$. Να βρείτε: α) το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ, β) τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.
5	Δίνεται η ευθεία: $\varepsilon: y = \frac{1}{2}x - 3$ και το σημείο $A(3, 1)$. Να βρείτε: α) την προβολή του σημείου A στην ευθεία ε, β) το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία ε.
6	Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B(-3, -3)$. Η εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$ (δηλαδή της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά $A\Gamma$) είναι $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ και η εξίσωση του ύψους AA είναι $y = -2x - 4$. Να βρείτε: α) τις συντεταγμένες της κορυφής A, β) τις εξισώσεις των πλευρών AB και $B\Gamma$, γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ, δ) την εξίσωση του ύψους BE, ε) τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου του τριγώνου $AB\Gamma$.
7	Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(1, 4)$, $B(0, -2)$ και $\Gamma(4, 0)$. Να βρείτε: i) την εξίσωση της πλευράς AB ii) την εξίσωση της διαμέσου AM.
8	Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: y = -\frac{1}{3}x + 2017$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 6 τετραγωνικές μονάδες (τ.μ.).
9	Δίνεται η ευθεία $\zeta: y = x - 2$. Να βρείτε ευθεία ε η οποία διέρχεται από το σημείο $P(3, 5)$ και τέμνει τη ζ σε σημείο A , το οποίο απέχει απόσταση $\sqrt{10}$ από την αρχή των αξόνων.
10	Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$ και τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1: y = 3x - 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = 3x - 10$ στα σημεία A και B αντίστοιχα τέτοια, ώστε $(AB) = 9$.

Ασκήσεις

1	7.25 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$ και: α) είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta_1: y = 5x - 7$, β) είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta_2: y = \frac{1}{4}x + 21$, γ) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$, δ) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, ε) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, στ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.	
2	7.26 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(4, -1)$ και: α) είναι παράλληλη στην ευθεία: $\zeta_1: y = -2x + 5$ β) είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta_2: y = \frac{-x + 12}{3}$, γ) σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$, δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = (3, -6)$, ε) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{w} = (0, 4)$, στ) είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{xOy}$.	
3	7.30 Δίνεται το σημείο $A(4, 2)$ και τα διανύσματα $\vec{a} = (\mu, 6)$ και $\vec{\beta} = (6, \mu - 1)$, με $\mu \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 30$. Να βρείτε: α) τον αριθμό μ, β) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι: i) παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a}$, ii) κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.	
4	7.38 Θεωρούμε την ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(5, 6)$. Να βρείτε: α) την εξίσωση της ευθείας ε, β) τα σημεία τομής της ε με τους άξονες, γ) την εξίσωση της ευθείας ζ_1 που είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-4, -3)$, δ) την εξίσωση της ευθείας ζ_2 που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο $\Delta(6, 7)$, ε) το σημείο τομής των ευθειών ζ_1 και ζ_2.	
5	7.42 Δίνεται το σημείο $A(-3, 5)$ και η ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x + 1$. Να βρείτε: α) την προβολή του A στην ευθεία ε, β) το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ε.	
6	7.53 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -2x + \mu$, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(16 - \mu, 8 - \mu)$. Να βρείτε: α) τον αριθμό μ, β) τα σημεία της ευθείας ε τα οποία απέχουν από το σημείο $B(-1, 2)$ απόσταση ίση με 5.	

7	7.56 Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: y = (a + 3)x + a, \quad \varepsilon_2: y = \frac{5}{3}x - \frac{14}{3} \quad \text{και}$ $\varepsilon_3: y = -3x + 14$ Η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο $A(11, 9)$. α) Να αποδείξετε ότι $a = -2$. β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 διέρχονται από το ίδιο σημείο. γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ η οποία διέρχεται από το σημείο A και τέμνει τις ε_2 και ε_3 στα σημεία M και B αντίστοιχα έτσι, ώστε το M να είναι μέσο του AB.	
8	7.59 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A(-3, 2)$, ενώ η πλευρά $B\Gamma$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x - 5$ και το ύψος $\Gamma\Delta$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία: $y = \frac{2}{3}x - 2$ Να βρείτε: α) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ, β) την εξίσωση της πλευράς AG, γ) την εξίσωση της πλευράς AB, δ) τις συντεταγμένες της κορυφής B, ε) την εξίσωση της διαμέσου BM, στ) την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς $B\Gamma$.	
9	7.60 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, 1)$. Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα δύο από τα ύψη του έχουν εξισώσεις: $y = -3x + 11 \quad \text{και} \quad y = x + 3$ Να βρείτε: α) τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές AB και AG, β) τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ, γ) την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.	
10	7.75 Να βρείτε ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $P(3, 2)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 4 τ.μ.	
11	7.76 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ και το σημείο $P(3, 11)$. Να βρείτε ευθεία ζ που διέρχεται από το σημείο P και τέμνει την ε σε σημείο A το οποίο απέχει απόσταση 5 από την αρχή των αξόνων.	

12	7.81 Δίνονται τα σημεία: $A(3\lambda - 1, 6\lambda - 5)$ και $B(4\mu - 6, 10 - 2\mu)$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι: α) το σημείο A κινείται σε ευθεία ε και το σημείο B κινείται σε ευθεία ζ, β) οι ευθείες ε και ζ είναι κάθετες και να βρείτε το σημείο τομής τους.
13	7.82 Δίνεται το σημείο $A(2\lambda - 3, 6\lambda - 11)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: α) το σημείο A κινείται πάνω σε ευθεία ε, β) για οποιαδήποτε τιμή του $\theta \in \mathbb{R}$, το σημείο $B(2 - \sin^2\theta, 1 + 3\eta\mu^2\theta)$ ανήκει στην ευθεία ε.
14	7.104 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Είναι $B(4, 7)$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Η ευθεία $\Delta\Gamma$ έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, η ευθεία ΔM έχει εξίσωση $y = \frac{10}{11}x + \frac{1}{11}$ και η ευθεία ΔA έχει εξίσωση $y = \mu x + \mu - 9$. Να βρείτε: α) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ, β) τον πραγματικό αριθμό μ, γ) τις συντεταγμένες της κορυφής A, δ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.
15	Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB: y = x - 1, \quad A\Delta: y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \Gamma(7, 3).$ Να βρείτε: i) τις συντεταγμένες της κορυφής A ii) τις εξισώσεις των ευθειών ΓB και $\Gamma\Delta$ iii) τις συντεταγμένες της κορυφής B.
16	Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου τα ύψη $B\Delta$ και ΓE έχουν εξισώσεις $y = 2x - 15 \quad \text{και} \quad y = 7x - 35$ αντίστοιχα και η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(1, 2)$. Να βρείτε: i) τις εξισώσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ ii) τις συντεταγμένες της κορυφής B iii) την εξίσωση της διαμέσου AM.

17	Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ έχουν εξισώσεις $y = -\frac{1}{2}x - 2 \quad \text{και} \quad y = \frac{3}{2}x + 2$ αντίστοιχα. i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α. ii) Αν η εξίσωση της μιας διαγωνίου του ΑΒΓΔ είναι $y = -\frac{5}{2}x + 2,$ να βρείτε: α) τις συντεταγμένες του σημείου Β β) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.
18	Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3), \quad B(0, 1) \quad \text{και} \quad \Gamma(2, -1)$ i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά ii) Να βρείτε την προβολή του σημείου Κ(7,0) πάνω στην ευθεία ΑΒ.
19	Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = x - 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = 3x - 1.$ Μία ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Μ(3,4) και τέμνει τις ευθείες (ε₁) και (ε₂) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα έτσι, ώστε το σημείο Μ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. i) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).
20	Δίνονται τα σημεία $A(2, 3) \quad \text{και} \quad B(2\kappa + 1, \kappa) \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathbb{R}.$ i) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β ανήκει σε σταθερή ευθεία. ii) Να βρείτε την προβολή Μ του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε). iii) Να βρείτε το συμμετρικό Γ του σημείου Α ως προς το σημείο Μ. iv) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. v) Να υπολογίσετε την τιμή του κ, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο.

