



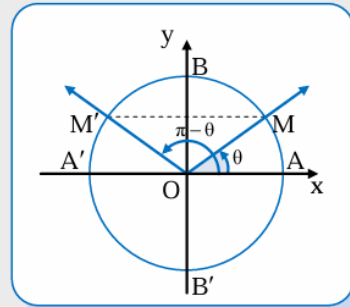
Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

Οι ρίζες της εξίσωσης

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta$$

δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

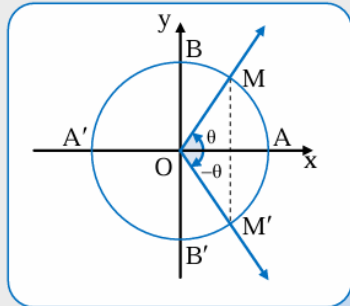


Οι ρίζες της εξίσωσης

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$$

δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Οι ρίζες της εξίσωσης

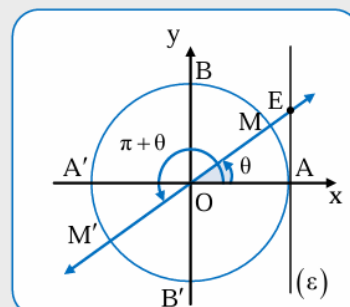
$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta$$

δίνονται από τον τύπο

$$x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Από τον ίδιο τύπο δίνονται και οι
ρίζες της εξίσωσης

$$\sigma\phi x = \sigma\phi\theta.$$

**ΒΑΣΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ : Να φτάσουμε σε ΙΣΟΤΗΤΑ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**Αντιμετώπιση του «μείον»

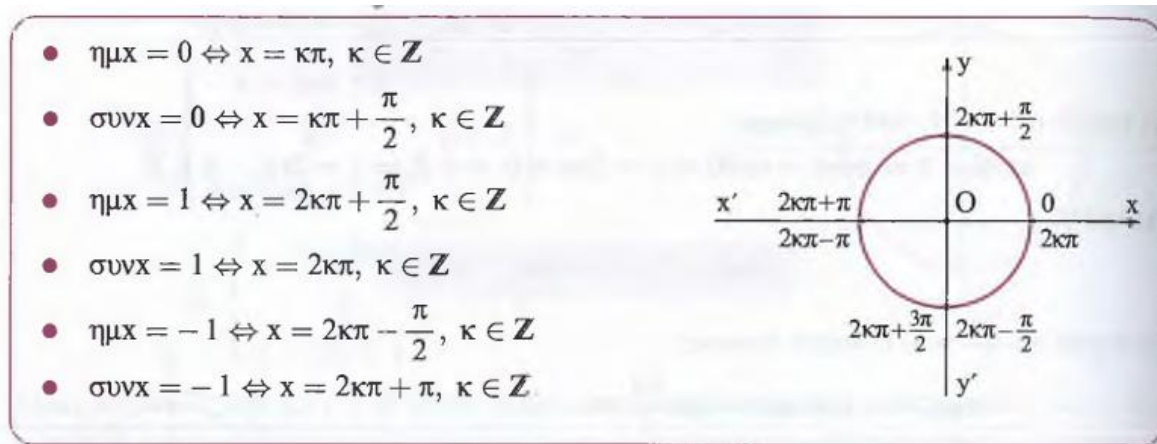
$$\eta\mu x = -\eta\mu\theta \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu(-\theta)$$

$$\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)$$

$$\epsilon\phi x = -\epsilon\phi\theta \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi(-\theta)$$

$$\sigma\phi x = -\sigma\phi\theta \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi(-\theta)$$

Οι εξισώσεις $\eta\mu x = 0$, $\sigma\upsilon\nu x = 0$, $\eta\mu x = \pm 1$, $\sigma\upsilon\nu x = \pm 1$



ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Αν στην εξίσωση υπάρχει **εφαπτομένη(x)** ή **συνεφαπτομένη(x)** θα πρέπει από την αρχή να βάλουμε **περιορισμό**.

- Για την εφαπτομένη: θα πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$, δηλαδή $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- Για την συνεφαπτομένη: θα πρέπει $\eta\mu x \neq 0$, δηλαδή $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

Κατηγορίες βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων

1. Τριγωνομετρικός αριθμός (x) = αριθμός

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \begin{matrix} \text{ψάχνω γωνία με} \\ \text{ημίτινο ίσο με } \frac{1}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \begin{matrix} \text{έχουμε φτάσει σε} \\ \text{ισότητα ημιτόνων} \end{matrix} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{1}{2} \begin{matrix} \text{αρχικά ψάχνω γωνία με} \\ \text{συνημίτινο ίσο με } \frac{1}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \begin{matrix} \text{αντιμετωπίζουμε} \\ \text{το "μείον"} \end{matrix} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{2\pi}{3} \right) \begin{matrix} \text{έχουμε πλέον} \\ \text{ισότητα συνημιτόνων} \end{matrix} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ : Οι εξισώσεις $\eta\mu x = \alpha$ και $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$ με $\alpha > 1$ ή $\alpha < -1$ είναι **ΑΔΥΝΑΤΕΣ**.

2. Εξισώσεις που αρχικά ανάγονται σε λύση πολυωνυμικής εξίσωσης.

$2\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + 2 = 0$. Παρατηρούμε την πολυωνυμική μορφή της εξίσωσης και θέτουμε $\eta\mu x = \omega$.

$$\text{Τότε : } 2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0 \stackrel{\Delta=9>0}{\Leftrightarrow} \omega_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \text{ άρα } \omega = 2 \text{ ή } \omega = \frac{1}{2}.$$

Επιστρέφουμε στον μετασχηματισμό και έχουμε : $\eta\mu x = 2$ που είναι αδύνατη και $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ που λύνουμε σύμφωνα με την προηγούμενη κατηγορία.

3. Εξισώσεις της μορφής : $\eta\mu x = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu x$

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Παρατήρηση

Η ισοδυναμία

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1$$

είναι έγκυρη διότι αν υπήρχε τιμή του x τέτοια, ώστε

$$\sigma\upsilon\nu x = 0,$$

τότε θα είχαμε και

$$\eta\mu x = 0$$

πράγμα άτοπο.

4. Εξισώσεις της μορφής : $\eta\mu(f(x)) = \sigma\upsilon\nu(g(x))$

Χρησιμοποιούμε τους τύπους της συμπληρωματικής γωνίας.

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + x \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5. Λύση σε συγκεκριμένο διάστημα.

Να λυθεί η $\sqrt{3}\epsilon\phi x = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$

Έχουμε

$$\sqrt{3}\epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow \epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{6}$$
$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Όμως,

$$x \in (0, 2\pi).$$

Δηλαδή,

$$0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{6} < 2\pi$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} < \kappa\pi < \frac{11\pi}{6}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} < \kappa < \frac{11}{6}.$$

Και επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\kappa = 0 \quad \text{ή} \quad \kappa = 1.$$

Άρα, οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης είναι

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

Μεθοδολογία

Αρχικά, λύνουμε την εξίσωση αδιαφορώντας για τον περιορισμό $x \in (0, 2\pi)$.

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Στη συνέχεια, απαιτώντας να ισχύει η συνθήκη

$$x \in (0, 2\pi)$$

δηλαδή

$$0 < x < 2\pi$$

εγκλωβίζουμε τον ακέραιο κ ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς.

1	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ β) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ γ) $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ δ) $\sigma\phi x = 1$ ε) $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ στ) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ζ) $\epsilon\phi x = -1$ η) $\sigma\phi x = -\sqrt{3}$	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ β) $2\eta\mu x - 5 = 0$ γ) $2\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$ δ) $\sqrt{2} \cdot \eta\mu x - 1 = 0$ ε) $\sqrt{3} \cdot \epsilon\phi x + 1 = 0$ στ) $\sqrt{3} \cdot \sigma\phi x - 3 = 0$ ζ) $\frac{4\eta\mu x + 8}{3} = 2$ η) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sigma\phi x + 7}{3} = 2$
2	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $(\eta\mu x - 1) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ β) $(2\sigma\upsilon\nu x + 1)(\epsilon\phi x - 1) = 0$ γ) $(\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1)(\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$ δ) $(2\sqrt{3} \cdot \eta\mu x + 3)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{5}) = 0$	
3	■ Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις: α) $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ β) $\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ γ) $\epsilon\phi\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ δ) $\sigma\phi\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sigma\phi\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ β) $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sigma\phi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ γ) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$ δ) $\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ε) $\epsilon\phi\left(\frac{7\pi}{10} - 2x\right) + \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{5} + x\right) = 0$
4	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = -\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ β) $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x$ γ) $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x \cdot \epsilon\phi x - 1 = \eta\mu x - \sqrt{3} \cdot \epsilon\phi x$ δ) $\sigma\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\phi x$ ε) $2\sqrt{3} \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 6\sigma\upsilon\nu x = 3 - \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$	
5	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\eta\mu^2 x = \eta\mu^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ β) $\eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 3x$ γ) $\eta\mu^3 x = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$ δ) $2(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu x = 0$	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ β) $4\eta\mu^2 x - 2(\sqrt{3} - 1) \cdot \eta\mu x - \sqrt{3} = 0$ γ) $-2\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ δ) $3\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x + 1 = 0$

6	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sin x}$ β) $\frac{\sin x}{1 - \eta\mu x} - \cos x = 2$ γ) $\frac{1}{\eta\mu^2 x} + 2\sqrt{3} \cdot \sigma\phi x + 2 = 0$ δ) $\frac{1}{\sin x} - \sin x = \cos x$ ε) $\eta\mu x + \sin x = \frac{1}{\eta\mu x - \sin x}$	
7	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = \sin x$ β) $\eta\mu x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 0$ γ) $\eta\mu x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 1$ ■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\sqrt{3} \cdot \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x \cdot \sin x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$ β) $\eta\mu^3 x + \eta\mu^2 x \cdot \sin x - 3\eta\mu x \cdot \sin^2 x - 3\sin^3 x = 0$ γ) $2\eta\mu^2 x + (1 - \sqrt{3}) \cdot \eta\mu x \cdot \sin x + (1 - \sqrt{3}) \cdot \sin^2 x = 1$ δ) $2\eta\mu^2 x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \eta\mu x \cdot \sin x = 1$ ε) $2\eta\mu^2 x - \sqrt{12} \cdot \eta\mu x \cdot \sin x + 4\sin^2 x = 1$ στ) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \cos x = 2$	
8	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\sin(9\pi - x) - \sin(24\pi - x) = 2$ β) $\eta\mu\left(\frac{21\pi}{2} + x\right) - \eta\mu\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) = 2$ γ) $\eta\mu\left(\frac{25\pi}{2} + x\right) - \sin(11\pi - x) + 1 = 0$ δ) $\sqrt{3} \cdot \left[\sin\left(\frac{41\pi}{2} + x\right) + \eta\mu(21\pi + x)\right] - 3 = 0$	
9	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{8}\right) + 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = -2$ β) $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) + \eta\mu\left(\frac{4\pi}{5} - 2x\right) = -1$	
10	■ Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $8\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x - 3 = 0$ στο $(0, \pi)$ β) $6\sin^2 x + \sqrt{3} \cdot \sin x - 3 = 0$ στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$	
11	■ Η εξίσωση: $\mu \cdot \sin^2 x + \mu - 1 = \eta\mu^2 x + (\mu + 1) \cdot \sin x$ έχει λύση τον αριθμό $\frac{35\pi}{3}$. α) Να βρείτε τον αριθμό μ. β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.	

12	■ Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + \epsilon\phi x = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \sigma\phi x$ ■ Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu x} = 2\sigma\upsilon\nu x + 2\sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ ■ Να λύσετε την εξίσωση: $1 - 3\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$	■ Να λύσετε την εξίσωση: $3\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x - \epsilon\phi x = 0$ ■ Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1$ ■ Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4} - 4x\right) + \sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 2$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
13	■ Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \eta\mu(7\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + x\right)$ α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f. β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2f(x) = 3\sqrt{1 - f(x)}$	
14	■ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{20\pi}{3}, \frac{10}{3}\right)$, να βρείτε τον αριθμό α. γ) Για την τιμή του α που βρήκατε: i) να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή, ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \alpha$.	
15	■ Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2} - 4x\right) + \eta\mu(21\pi + 4x) \quad \text{και}$ $g(x) = \eta\mu\left(\frac{37\pi}{2} + 2x\right) - \sigma\upsilon\nu(37\pi - 2x)$ α) Να απλοποιήσετε τους τύπους των συναρτήσεων f και g. β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f, καθώς και για ποια x παίρνει την τιμή αυτή. γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της g, καθώς και για ποια x παίρνει την τιμή αυτή. δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και g στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ε) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + g(x) = 0$	

16	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \alpha \cdot \sin 3x + \beta$ πέρχεται από τα σημεία: $A\left(\frac{2\pi}{9}, 5\right) \text{ και } B\left(\frac{13\pi}{12}, \sqrt{2} + 4\right)$ α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β. β) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f. γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$. δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της.
17	Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin 2x$ και $g(x) = \eta\mu 2x$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της C_f, μια οριζόντια κατά $\frac{\pi}{12}$ προς τα αριστερά και μια κατακόρυφη κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. α) Να βρείτε τον τύπο της h. β) Να λύσετε την εξίσωση $h(x) = 0$. γ) Να βρείτε για ποια x η h παίρνει την ελάχιστη τιμή της. δ) Θεωρούμε και τη συνάρτηση $\varphi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της C_g κατά $\frac{\pi}{6}$ προς τα δεξιά. Να λύσετε την εξίσωση: $h(x) = \varphi(x)$
18	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha^2 + 2) \cdot \sin(\beta x), \quad x \in \mathbb{R}$ όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. i) Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 2 και η περίοδός της είναι $\frac{\pi}{2}$, να βρείτε τους α και β. ii) Για $\alpha = 0$ και $\beta = 4$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -1.$

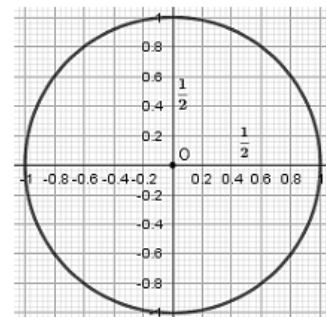
19	Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -\frac{\varepsilon\varphi \frac{19\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu \frac{29\pi}{6}} - \eta\mu \frac{27\pi}{2} - \eta\mu \left(\frac{45\pi}{2} + 2x \right) + \sigma\upsilon\nu(25\pi + 2x)$ α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3 - 2\sigma\upsilon\nu 2x$ και να βρείτε την περίοδο της. β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή M και την ελάχιστη τιμή μ της f, καθώς και για ποια x παίρνει τις τιμές αυτές. γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $-\pi \leq x \leq 2\pi$. δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
20	■ Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις: α) Η εξίσωση $\eta\mu x = 2$ είναι αδύνατη. β) Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 2$ είναι αδύνατη. γ) Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\pi}{2}$ είναι αδύνατη. δ) Η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{\pi}{4}$ είναι αδύνατη. ε) Ισχύει ότι $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$. στ) Αν η εξίσωση $\eta\mu x = a$ (με άγνωστο τον x) δεν είναι αδύνατη, τότε έχει άπειρες λύσεις. ζ) Οι εξισώσεις $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$ έχουν κάποιες κοινές λύσεις. η) Οι εξισώσεις $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$ είναι ισοδύναμες. θ) Οι γωνίες $x = 2\kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$, είναι λύσεις της εξίσωσης $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \theta$. ι) Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = 0$ είναι οι $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$.
21	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, 2\pi].$ i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f. iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f: α) με τον άξονα $x'x$ β) με την ευθεία $y = 1$.
22	Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 4\eta\mu x \quad \text{και} \quad f(x) = 4\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \quad \text{με} \quad x \in \mathbb{R}.$ Να βρείτε: i) με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. ii) την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. iii) τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Θέμα 2ο

(25 ασκήσεις)

14977.α) Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.



β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

15036. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$.

15969. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

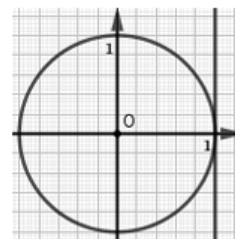
β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

16131. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ όπου $k \in \mathbb{Z}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.



16298. Δίνεται γωνία ω , με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\sigma\upsilon\nu \omega = -\frac{1}{2}$ και $\eta\mu \omega > 0$.

α) Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες ϕ με $\phi \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu \phi = -\frac{1}{2}$.

21995. Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$

β) $\alpha = 2$

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

32675. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

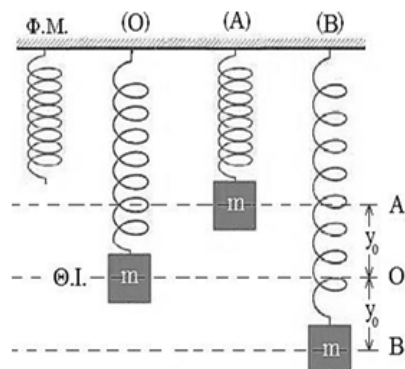
Θέμα 4ο

14975. Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$



α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης.

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με $1,1$ μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

15003. Δίνεται η συνάρτηση

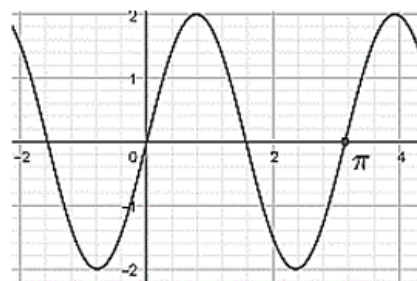
$$f(x) = \eta\mu\alpha x \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu\alpha x \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) - 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu\alpha x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\epsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.



15014. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2 .

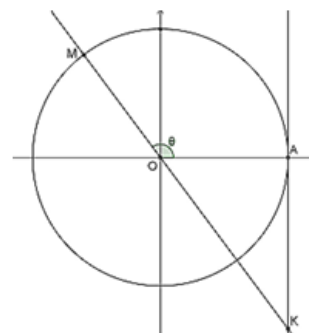
β) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $\beta = 8$.

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

15025. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = \widehat{AOM}$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της

οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο K .

α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta$, $\epsilon\phi\theta$, $\sigma\phi\theta$.



β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K.

γ) Έστω μια γωνία $\varphi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \varphi$.

15026. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right), x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x.

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15049. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x), x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y'y.

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον x'x.

15050. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

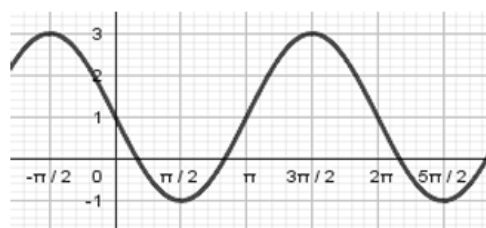
15288. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β , και γ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



ii. Για $\alpha = -2, \beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$.

15347. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

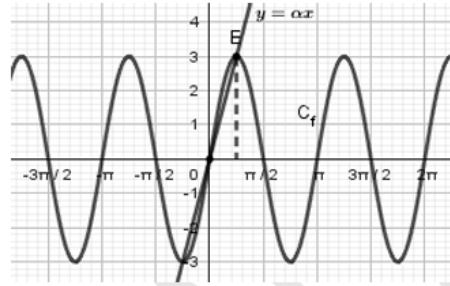
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο

$$M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right).$$

δ) Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

15287. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,



α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης

$$3\eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0.$$

15422. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$, $\alpha > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (\alpha + 2)\eta\mu 2x$.

β) i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

δ) Αν $g(x) = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f , C_g οι γραφικές παραστάσεις των f , g αντίστοιχα.

15821.α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\varphi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και

$g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

18234. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

20645. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

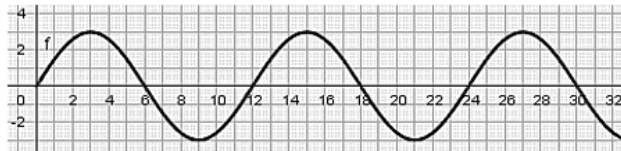
α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f .

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$.

20712. Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε



μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

γ) τον τύπο της συνάρτησης f .

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

20747. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3}\epsilon\phi\omega \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση

$$-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1, \quad \omega \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ τότε:}$$

α) i. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

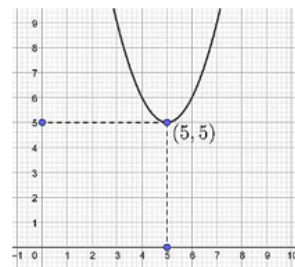
ii. Για $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με

οποιοδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g .

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



21244. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2}\sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και

περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\phi\left(\pi - x\right) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$. Να δείξετε ότι $A = -1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Θέμα 3ο

15789. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in [0, \pi]$.

α) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την

συνάρτηση $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

ii. Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται;

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

