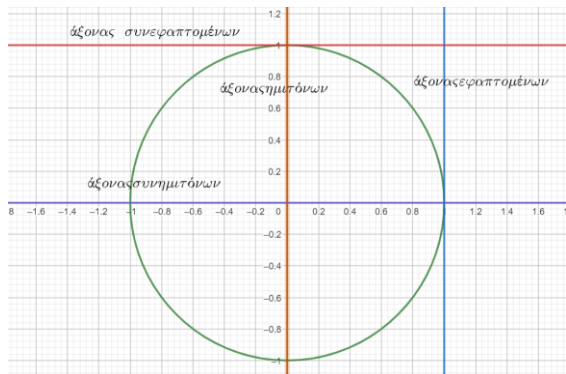


Τριγωνομετρικός Κύκλος – Άξονες τριγωνομετρικών αριθμών.



Μοίρες	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ	0	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ	0
σφω	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ	0	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ

Αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο

$\sin(-\omega) = \sin \omega$ $\cos(-\omega) = \cos \omega$	$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu \omega$ $\sigma\phi(-\omega) = -\sigma\phi \omega$	$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu \omega$ $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi \omega$	$\sin(180^\circ - \omega) = -\sin \omega$ $\sigma\phi(180^\circ - \omega) = -\sigma\phi \omega$
$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu \omega$ $\epsilon\phi(180^\circ + \omega) = \epsilon\phi \omega$	$\sin(180^\circ + \omega) = -\sin \omega$ $\sigma\phi(180^\circ + \omega) = \sigma\phi \omega$	$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sin \omega$ $\epsilon\phi(90^\circ - \omega) = \sigma\phi \omega$	$\sin(90^\circ - \omega) = \eta\mu \omega$ $\sigma\phi(90^\circ - \omega) = \epsilon\phi \omega$

Ασκήσεις

1	Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων: α) $A = \frac{\eta\mu \frac{5\pi}{4} \cdot \sin \frac{7\pi}{6} \cdot \epsilon\phi \frac{4\pi}{3} \cdot \sin \frac{3\pi}{4}}{\eta\mu \frac{2\pi}{3} \cdot \epsilon\phi \frac{3\pi}{4} \cdot \sigma\phi \frac{5\pi}{6} \cdot \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ β) $B = \frac{\eta\mu 150^\circ + \sin 120^\circ + \sigma\phi 240^\circ}{\sin(-45^\circ) + \eta\mu 225^\circ + \eta\mu 120^\circ + \epsilon\phi 150^\circ}$
---	--

2

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) \frac{\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2}-\theta\right) \cdot \sigma\nu\left(\frac{35\pi}{2}+\theta\right) \cdot \varepsilon\varphi(21\pi-\theta)}{\sigma\nu\left(\frac{25\pi}{2}+\theta\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right) \cdot \sigma\nu(33\pi+\theta)}$$

$$\beta) \frac{\eta\mu\left(\frac{49\pi}{2} + \omega\right) \cdot \sigma\nu\nu(16\pi - \omega) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{13\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\nu\nu\left(\frac{39\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\nu\nu\left(\frac{65\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\varphi(-\omega - 28\pi)}$$

3

Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{ii) } \eta_{\mu}(\pi+x) \cdot \sigma_{\nu} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sigma_{\nu}(2\pi-x) \cdot \eta_{\mu} \left(\frac{5\pi}{2} - x \right) = 1$$

$$\text{ii) } 1 - \varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \varepsilon\varphi(\pi + x) = \frac{1}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(18\pi + x)}.$$

4

Να αποδείξετε ότι:

$$\textbf{i)} \quad \eta \mu^2 \frac{\pi}{8} + \eta \mu^2 \frac{3\pi}{8} = 1$$

ii) $\varepsilon\varphi\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=1.$

5

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\varepsilon\varphi(\pi+\theta)\cdot\sigma\mathrm{uv}(-\theta)\cdot\eta\mu(\pi+\theta)}{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\mathrm{uv}(\theta-2\pi)\cdot\sigma\mathrm{uv}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=1$$

[illegible]

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Θέμα 2ο

(13 ασκήσεις)

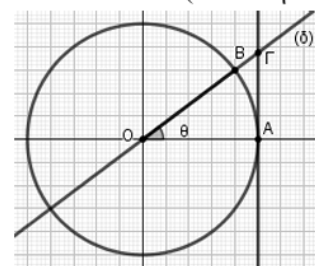
15092. Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας

$\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ.

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ.

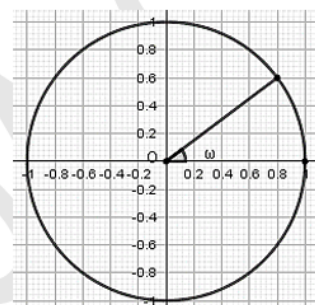
β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.



15193. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sin \omega = 0.8$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι -0.8 . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.

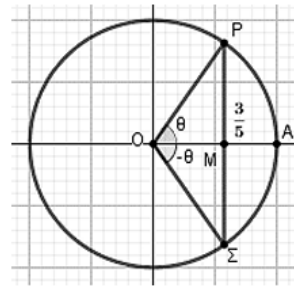


15266. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = \frac{3}{5}$

β) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.

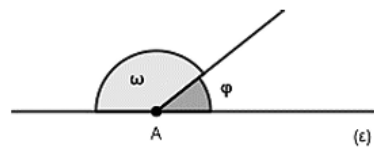


15652. Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που

σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας ω του σχήματος.



15999. Δίνεται η παράσταση $A = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \eta\mu(-\theta)$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$.

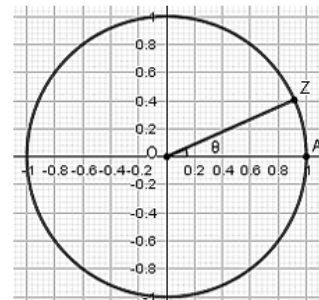
β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A, όταν $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ και $\sin \theta = \frac{12}{13}$.

17933. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\eta\mu\theta = 0, 4$.

ii. Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu(4\pi - \theta)$.

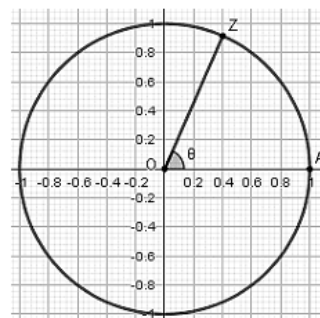


17936. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $\widehat{AOZ} = \theta$.

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $\frac{\pi}{2} + \theta$.

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \theta = 0, 4$.

ii. Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\sin(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$.



18229. Έστω θ μια γωνία για την οποία ισχύει $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ και $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

β) Αν $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sin(\pi - \theta)\sin(-\theta) - \eta\mu(\pi - \theta)\eta\mu(-\theta).$$

20761. Δίνεται γωνία ω η οποία είναι ίση με -1125° .

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω ισούται με $\frac{-25\pi}{4}$ ακτίνια (rad).

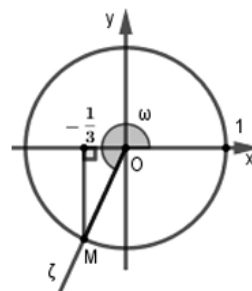
β) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

20942. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γωνία $\angle \text{XOZ} = \omega$ με $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$.

α) Να αιτιολογήσετε ότι $\sin \omega = -\frac{1}{3}$.

β) Να υπολογίσετε το ημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας ω .

γ) Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $\pi - \omega$.



21237. Δίνεται ότι $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}}$.

α) Να δείξετε ότι: **i.** $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii. $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$

β) Αν για την γωνία θ έχουμε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

22002. Δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) $\sin 72^\circ$

β) $\sin 108^\circ$

γ) $\eta\mu 162^\circ$

Θέμα 4ο

18231. Έστω $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(-\frac{3}{5}\right)$, $f\left(-\frac{5}{9}\right)$.

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}$, να

βρείτε τους αριθμούς $f(\sin 120^\circ)$, $f(\eta\mu 120^\circ)$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x-2)$, $x \geq 1$.

