



ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΕΚΘΕΤΗ

- Αν $a \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$, τότε ορίζουμε ως δύναμη του a τα εξής:

$$a^1 = a \quad \text{και} \quad a^v = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_v, \quad \text{αν } v > 1$$

Επιπλέον, αν $a \neq 0$, τότε ορίζουμε:

$$a^0 = 1 \quad \text{και} \quad a^{-v} = \frac{1}{a^v}, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

- Αν ο εκθέτης είναι ρητός, δηλαδή της μορφής $\frac{\mu}{v}$, με $\mu \in \mathbb{Z}$ και $v \in \mathbb{N}^*$, τότε ορίζουμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη ως εξής:

$$a^{\frac{\mu}{v}} = \sqrt[v]{a^\mu}, \quad a > 0$$

Επιπλέον, αν $\mu, v \in \mathbb{N}^*$, είναι $0^{\frac{\mu}{v}} = 0$.

Ειδικότερα, ισχύει ότι αν $a \geq 0$, τότε:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

- Η έννοια της δύναμης επεκτείνεται και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι άρρητος.

Ιδιότητες των δυνάμεων

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν και για δυνάμεις με πραγματικό εκθέτη. Δηλαδή, αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε:

- $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ και $a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1-x_2}$
- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$
- $(a b)^x = a^x b^x$ και $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Εκθετική συνάρτηση

Έστω a ένας θετικός αριθμός. Όπως είδαμε προηγουμένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η δύναμη a^x . Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη a^x , ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = a^x,$$

η οποία, στην περίπτωση που είναι $a \neq 1$, λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση a** .

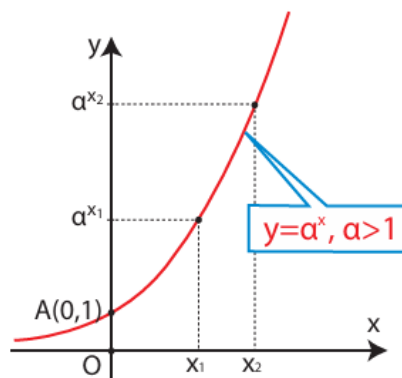
Αν είναι $a = 1$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

$$f(x) = a^x \text{ με } a > 1$$

- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } a^{x_1} < a^{x_2}$$

- Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x .



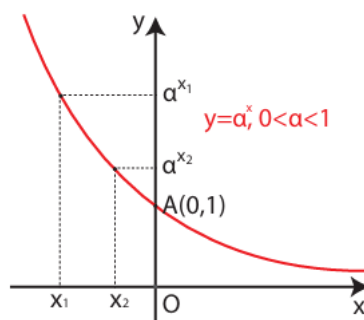
$$e = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$$

$$f(x) = a^x \text{ με } 0 < a < 1$$

- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } a^{x_1} > a^{x_2}$$

- Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο το θετικό ημιάξονα των x .



ΣΧΟΛΙΟ

Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, με $0 < a \neq 1$, προκύπτει ότι:

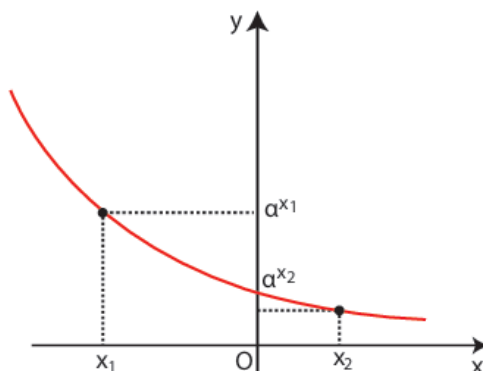
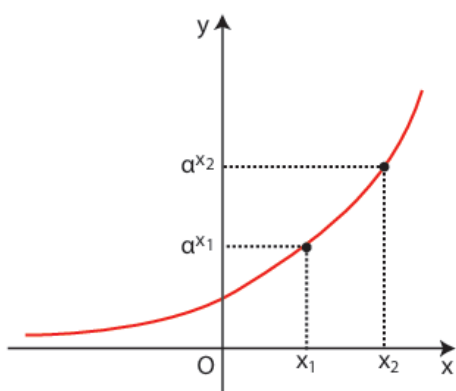
$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } a^{x_1} \neq a^{x_2}$$

οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι:

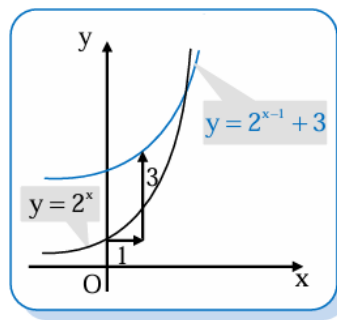
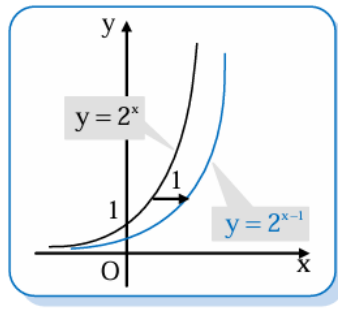
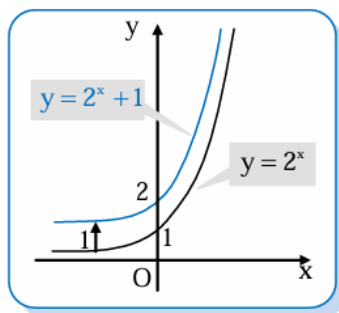
$$\text{αν } a^{x_1} = a^{x_2}, \text{ τότε } x_1 = x_2.$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$



Κατακόρυφη / οριζόντια μετατόπιση



Εξισώσεις της μορφής $a^{f(x)} = \theta$

Εξισώσεις της μορφής $a^{f(x)} = \theta^{g(x)}$

Εξισώσεις της μορφής $f(a^x) = 0$

Εξισώσεις της μορφής $f(a^x) = g(\theta^x)$

Εξισώσεις της μορφής $\kappa a^{2x} + \lambda(a\theta)^x + \mu\theta^{2x} = 0$

Εξισώσεις της μορφής $(f(x))^{g(x)} = 1$ και $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$

Ανισώσεις της μορφής $a^{f(x)} \leq \theta$ ή $a^{f(x)} \leq \theta^{g(x)}$

Ανισώσεις της μορφής $f(a^x) \geq 0$

Ανισώσεις της μορφής $f(a^x) \geq g(\theta^x)$

Ανισώσεις της μορφής $\kappa a^{2x} + \lambda(a\theta)^x + \mu\theta^{2x} \geq 0$

Ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \Gamma(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) \geq 0$

Ανισώσεις της μορφής $(f(x))^{g(x)} \geq 1$ με $f(x) > 0$

Εκθετικά συστήματα

Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

Μια εκθετική συνάρτηση της μορφής:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$$

βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορες επιστήμες και εκφράζει ένα μέγεθος Q που μεταβάλλεται με τον χρόνο t .

Το Q_0 είναι η αρχική τιμή του Q (για $t = 0$), δηλαδή $Q_0 = Q(0)$, και ισχύει $Q_0 > 0$.

Το c είναι μια σταθερά η οποία εξαρτάται από το μέγεθος Q που μελετάμε.

Η προηγούμενη συνάρτηση είναι γνωστή ως νόμος της εκθετικής μεταβολής.

- Αν $c > 0$, τότε η συνάρτηση $Q(t)$ είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει τον νόμο της εκθετικής αύξησης.
- Αν $c < 0$, τότε η συνάρτηση $Q(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει τον νόμο της εκθετικής απόσβεσης.

1	21.18 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $6^{2x-5} = 27$ β) $2^{3-x} = \sqrt{2}$ γ) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$ δ) $2^{ x -6} - \frac{1}{4} = 0$ ε) $2 \cdot 5^{x+3} - 50 = 0$ στ) $11^{x^2-3x-4} - 1 = 0$ ζ) $7^{2x-5} + \frac{1}{7} = 0$ η) $3^{x+2} = 0$
2	21.19 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $6^x = 3^x$ β) $5^{2x+3} = 0,2$ γ) $\left(\frac{5}{7}\right)^{ x -8} = \left(\frac{49}{25}\right)^3$ δ) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3} = \sqrt[4]{\frac{8}{27}}$
3	21.20 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $7^{3x-8} = 7^x$ β) $3^{5x+1} = 9^{2x}$ γ) $5^x \cdot 5^{2x-13} = 25$ δ) $27 \cdot 9^{x-4} = 3^{13-x}$ ε) $4^x \cdot 2^{x-9} = 2\sqrt{2}$ στ) $8^{x-5} = 4^{x+3}$ ζ) $\left(\frac{1}{16}\right)^{x-3} = 8^{2x-1}$ η) $\sqrt{5^{3x+3}} = 5 \cdot 25^{x-1}$
4	21.25 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 48 \cdot 2^{x-4} + 2 \cdot 2^{x-1} = 1$ β) $12 \cdot 4^{x-1} = 32 + 2^{2x+1}$ γ) $2^{x+2} \cdot 3^{x-1} = 48$
5	21.26 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ β) $9^{x+1} - 36 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0$ γ) $8^{2x+1} - 2^{3x+2} = 480$
6	21.27 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$ β) $e^x - e = 1 - e^{1-x}$ γ) $8^x - 20 \cdot 4^{x-1} - 7 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$ δ) $9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^{x+\frac{1}{2}} + 9 = 0$
7	21.30 Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις: α) $72 \cdot 3^{x-2} = 9 \cdot 2^{x+1}$ β) $3^{x+3} - 20 \cdot 5^{x-1} = 5^{x+1} + 18 \cdot 3^{x-2}$ γ) $9^{x+1} = 2 \cdot 4^{x+1} - 6 \cdot 3^{2x+1}$

8	21.32 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $5 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 5^{2x} = 0$ β) $9 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x = 0$ γ) $4^{x+1} - 12 \cdot 6^{x-1} - 6 \cdot 9^x = 0$ δ) $2 \cdot 49^{ x } = 9 \cdot 14^{ x } - 7 \cdot 4^{ x }$
9	21.35 Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $(x^2 + x - 1)^{x^2+3x} = 1$ β) $(x^2 - x - 1)^{x^2+3x} = (x^2 - x - 1)^{x^2-3x}$
10	21.36 Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις: α) $5^{3x-7} < 5^{x-1}$ β) $\left(\frac{5}{8}\right)^{3-2x} > \left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7}$ γ) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{x+8} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{3x}$ δ) $(0,5)^{x^2-2x} < (0,25)^{x+\frac{5}{2}}$ ε) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-x-6}$
11	21.42 Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $2^{2x} - 10 \cdot 2^{x-1} + 4 > 0$ β) $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 \leq 0$ γ) $9^{x+\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \geq 0$ δ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} - 30\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 1 \leq 0$
12	21.45 Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 2^{2x} \geq 0$ β) $6^{x+1} + 4^{x+1} < 10 \cdot 9^x$ γ) $4^{x+\frac{1}{2}} - 3 \cdot 10^x - 5^{2x+1} < 0$ δ) $50^x + 10 \cdot 2^{x-1} \leq \frac{3}{5} \cdot 10^{x+1}$
13	21.50 Να λύσετε τα συστήματα: α) $\begin{cases} 2^x - 5^y = 3 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = 7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ 4^x - 9^y = 7 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 3^{x+2} + 3^y = 28 \\ 8^{x-y} \cdot 4^{2y-x} = 2 \end{cases}$

14	21.56 Ένας βιολόγος, μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηρίων, παρατηρεί ότι: • 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτήρια ήταν 400, • 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτήρια ήταν 3200. Αν ο τύπος που δίνει τον αριθμό των βακτηρίων είναι: $P(t) = P_0 \cdot 2^{kt}$ όπου $P(t)$ ο αριθμός των βακτηρίων σε χρόνο t (σε ώρες), P_0 ο αρχικός αριθμός και k σταθερά που εξαρτάται από το είδος των βακτηρίων, να βρείτε: α) τη σταθερά k, β) τον αρχικό αριθμό των βακτηρίων, γ) σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηρίων είχε διπλασιαστεί.	
15	21.57 Ένα δείγμα 5 Kg ενός ραδιενεργού ισotόπου διασπάται σύμφωνα με τον τύπο: $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-kt}$ όπου $Q(t)$ η ποσότητα που απομένει μετά από χρόνο t (σε min), $Q_0 = Q(0)$ η αρχική ποσότητα (για $t = 0$) και k σταθερά που εξαρτάται από το υλικό. Αν το μισό του αρχικού δείγματος διασπάστηκε σε 10 min, να βρείτε πόση ποσότητα ραδιενεργού υλικού θα έχει απομείνει μετά από 40 min. 21.58 Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής και έχει χρόνο ημιζωής 12 χρόνια. α) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα $Q(t)$ του ραδιενεργού υλικού που απομένει μετά από t χρόνια είναι $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{12}}$, όπου Q_0 η αρχική του ποσότητα. β) Αν μετά από 60 χρόνια έχουν απομείνει 2 Kg από το ραδιενεργό υλικό, να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0. γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει 500 g από το ραδιενεργό υλικό.	

Η επιλογή των ασκήσεων είναι από τα βιβλία των Β. Παπαδάκη «Μαθηματικά Β' Λυκείου – Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών» και Γ. Μαυρίδη «Μαθηματικά Β' Λυκείου – Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών»