

1. ΘΕΜΑ_2_37201

Δίνεται η παράσταση $A = |x-1| + |y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$ β) $0 < A < 4$

2. ΘΕΜΑ_2_36898

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να δείξετε ότι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1).

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. ΘΕΜΑ_2_36894

α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\left| \alpha \right| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$.

4. ΘΕΜΑ_2_35412

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$.

5. ΘΕΜΑ_2_35112

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x-6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$.

ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$.

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x-6| + 2} = 3x + 4$.

6. ΘΕΜΑ_2_35041

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

7. ΘΕΜΑ_2_15054

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$.

8. ΘΕΜΑ_2_14071

α) Η αλγεβρική παράσταση K , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1 , πάνω στον άξονα είναι:

$$A. K = |x + 1| + |x - 2|$$

$$B. K = |x - 1| + |x + 2|$$

$$Γ. K = (|x| + 1) + (|x| - 2)$$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν είναι $K = |x + 1| + |x - 2|$ τότε:

i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x = \frac{3}{2}$.

ii. Αν $x > 2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση K και να αποδείξετε ότι $K > 3$.

9. ΘΕΜΑ_2_14617

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $6 < x < 8$.

β) Αν γνωρίζουμε ότι $6 < x < 8$, να αποδείξετε ότι $3 < \frac{24}{k} < 4$.

10. ΘΕΜΑ_2_14572

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$.

Να δείξετε ότι:

$$α) -3 < x < -1$$

$$β) |2x + 4| < 2$$

11. ΘΕΜΑ_2_14491

α) Να λυθεί η ανίσωση: $|y - 3| < 1$.

β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

12. ΘΕΜΑ_2_14412

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$.

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$.

13. ΘΕΜΑ_2_13177

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β) Να δείξετε ότι : $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

14. ΘΕΜΑ_2_33888

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β .

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$.

15. ΘΕΜΑ_2_14730

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε:

i. την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$,

ii. τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $A = 5$.

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16. ΘΕΜΑ_4_36672

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i. $|x + 2|$

ii. $|x - 7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x + 2| + |x - 7|.$$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

17. ΘΕΜΑ_4_13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$.