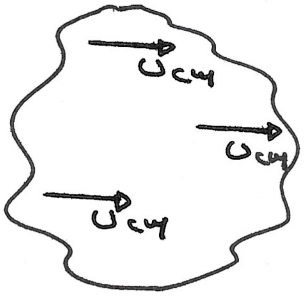
# 4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Μέχρι τώρα, όλα τα σώματα κατά την κίνησή τους, τα θεωρούσαμε υλικά σημεία. Δηλαδή σώματα αμελητέων διαστάσεων, που μπορούσαν να εκτελέσουν μόνο μεταφορική κίνηση.
Στην πραγματικότητα όμως ένα στερεό σώμα μπορεί να εκτελέσει μεταφορική, στροφική ή και σύνθετη κίνηση. (Μεταφορά + περιστροφή).

Μας ενδιαφέρουν τα μηχανικά στερεά, δηλαδή υποθετικά στερεά που δεν παραμορφώνονται από την επίδραση δυνάμεων.

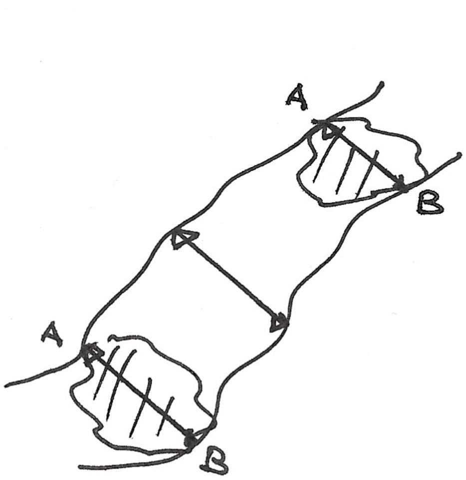
## ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στην μεταφορική κίνηση όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια ταχύτητα $u_{cm}$, που είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του.




Κέντρο μάζας cm ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο που κινείται όπως ένα υλικό σημείο, με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σ' αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Στη μεταφορική κίνηση, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του στερεού, μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του.

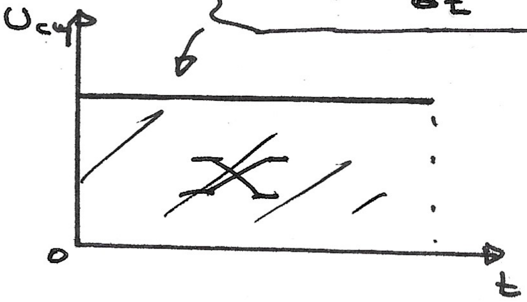



Άρα μεταφορική μπορεί να είναι και μια καμπυλόγραμμη κίνηση. (Θαλαμίσκοι του λούνα πάρκ).

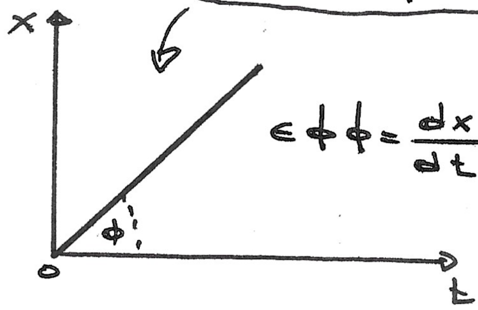
# ΕΙΔΗ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

## * $\boxed{\text{Ε.Ο.Κ.} \quad : \quad \vec{\upsilon}_{cm} = ct}$ *

$\upsilon_{cm} = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = ct$



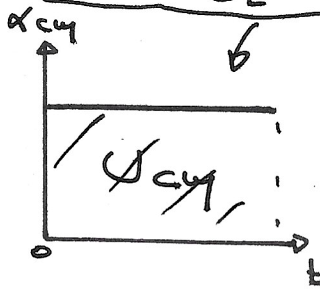
$x = \upsilon_{cm} \cdot t$



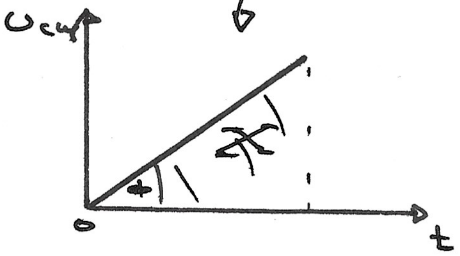
$\varepsilon\varphi\phi = \frac{dx}{dt} = \upsilon_{cm}$

## * $\boxed{\text{Ε.Ο. Επιταχ. Κ. χωρίς } \upsilon_{o,cm} \quad : \vec{\alpha}_{cm} = ct}$ *

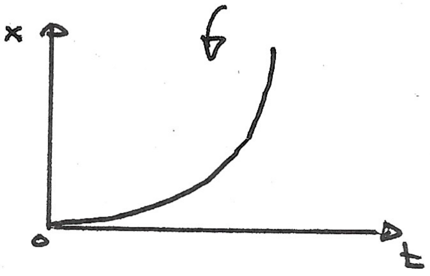
$\alpha_{cm} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = ct > 0$



$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t$



$x = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2$



$\varepsilon\varphi\phi = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \alpha_{cm}$

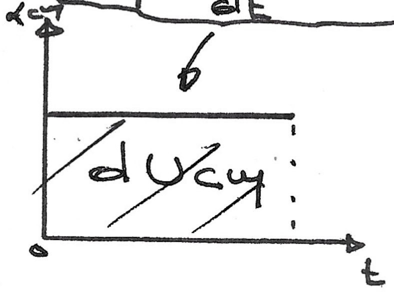
$$\left.\begin{aligned} &\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t \rightarrow t = \frac{\upsilon_{cm}}{\alpha_{cm}} \\ &x = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = \frac{1}{2}\alpha_{cm}\frac{\upsilon_{cm}^2}{\alpha_{cm}^2} \rightarrow$$

$$x = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2\alpha_{cm}} \rightarrow$$

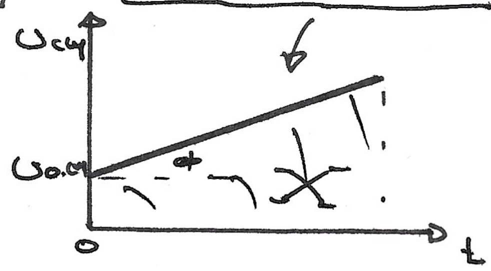
$$\boxed{\upsilon_{cm} = \sqrt{2x \cdot \alpha_{cm}}}$$

## * $\boxed{\text{Ε.Ο. Επιταχ. κ. με } \upsilon_{o.cm} : \vec{\alpha}_{cm} = ct}$ *

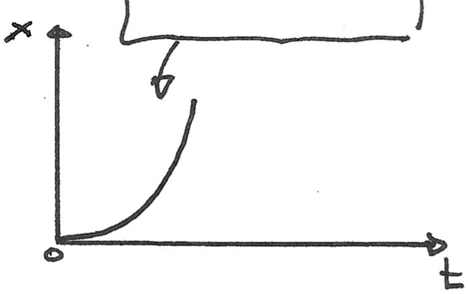
$$\boxed{\alpha_{cm} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = ct > 0}$$




$$\boxed{\upsilon_{cm} = \upsilon_{o.cm} + \alpha_{cm} t}$$




$$\boxed{x = \qquad}$$

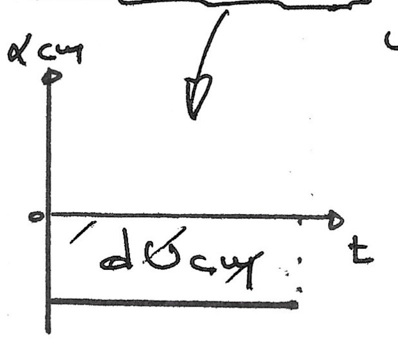



$$\varepsilon\varphi\,\phi = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \alpha_{cm}$$

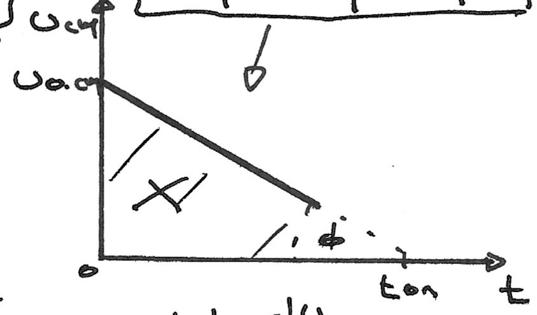
$$\left.\begin{aligned} &\upsilon_{cm} = \upsilon_{o.cm} + \alpha_{cm} \cdot t \rightarrow t = \frac{\upsilon_{cm} - \upsilon_{o.cm}}{\alpha_{cm}} \\ &x = \upsilon_{o.cm} \cdot t + \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\upsilon_{cm} = \sqrt{\upsilon_{o.cm}^2 + 2 x \alpha_{cm}}}$$

## * $\boxed{\text{Ε.Ο. Επιβραδ. κ. με } \upsilon_{o.cm} : \vec{\alpha}_{cm} = ct < 0}$ *

$$\boxed{\alpha_{cm} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = ct < 0}$$

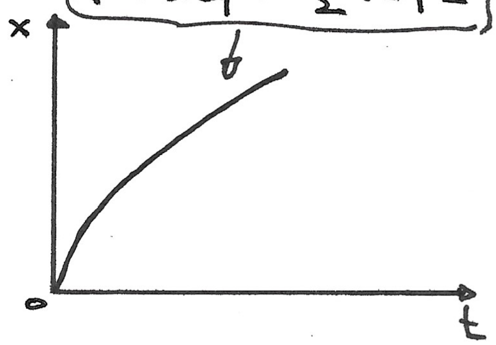



$$\boxed{\upsilon_{cm} = \upsilon_{o.cm} - \alpha_{cm} t}$$




$$\varepsilon\varphi\,\phi = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \alpha_{cm}$$

$$\boxed{x = \upsilon_{o.cm} t - \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2}$$




$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{o.cm} - \alpha_{cm} \cdot t \xrightarrow[t_{o\lambda}]{\upsilon_{cm} = 0} 0 = \upsilon_{o.cm} - \alpha_{cm} \cdot t_{o\lambda} \rightarrow \boxed{t_{o\lambda} = \frac{\upsilon_{o.cm}}{\alpha_{cm}}}$$

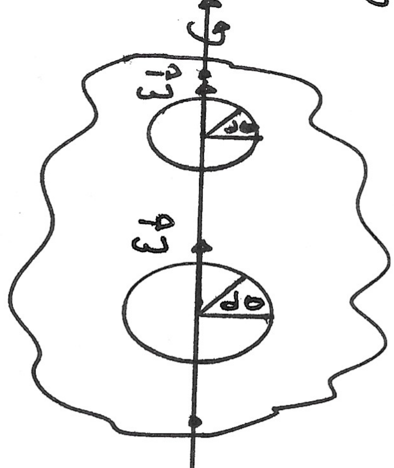
$$x = \upsilon_{o.cm} t - \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2 \xrightarrow{t_{o\lambda}} x_{o\lambda} = \upsilon_{o.cm} \frac{\upsilon_{o.cm}}{\alpha_{cm}} -$$

$$- \frac{1}{2} \alpha_{cm} \left(\frac{\upsilon_{o.cm}}{\alpha_{cm}}\right)^2 = \frac{\upsilon_{o.cm}^2}{\alpha_{cm}} - \frac{\upsilon_{o.cm}^2}{2\alpha_{cm}} \rightarrow$$

$$\boxed{x_{o\lambda} = \frac{\upsilon_{o.cm}^2}{2\alpha_{cm}}}$$

# ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Κατά την περιστροφική κίνηση το στερεό αλλάζει προσανατολισμό στο χώρο.
Υπάρχουν τουλάχιστον δύο υλικά σημεία του στερεού ακίνητα – στην πραγματικότητα άπειρα – που καθορίζουν τον άξονα περιστροφής.



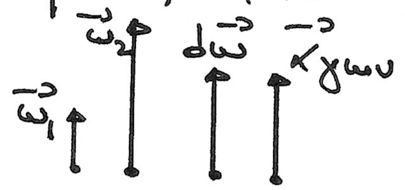

<u>Η γωνιακή ταχύτητα ω</u> δείχνει πόσο γρήγορα στρέφεται το κινητό και έχει:

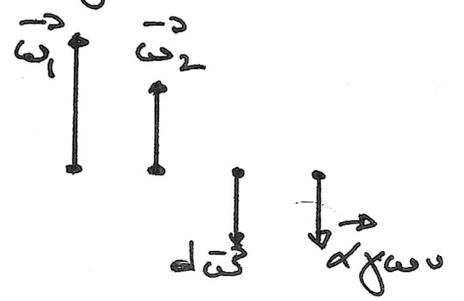
- Σημείο εφαρμογής το σημείο τομής του άξονα περιστροφής με το επίπεδο της κυκλικής τροχιάς.
- Μέτρο ίσο με το ρυθμό μεταβολής της διαγραφόμενης επίκεντρης γωνίας $d\theta$ : $\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt} : 1\,rad/s}$
- Διεύθυνση του άξονα περιστροφής.
- Φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

"Όλα τα υλικά σημεία του στερεού έχουν ίσες γωνιακές ταχύτητες".

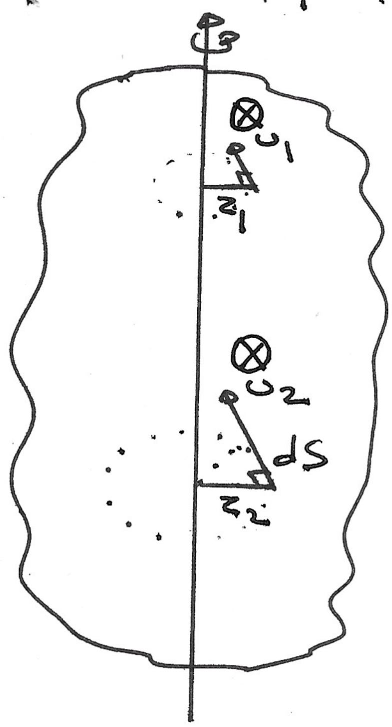
<u>Η γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{γων}$</u> δείχνει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα ω και έχει:

- Σημείο εφαρμογής ίδιο με την γωνιακή ταχύτητα ω.
- Μέτρο ίσο με το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας ω : $\boxed{\alpha_{γων} = \frac{d\omega}{dt} : 1\,rad/s^2}$
- Διεύθυνση του άξονα περιστροφής.
- Φορά, τη φορά μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας, της $d\omega$.



Κάθε υλικό σημείο του στερεού που περιστρέφεται εντός από την γωνιακή ταχύτητα ω, έχει αυτόμη μία ταχύτητα, την γραμμική.




Η γραμμική ταχύτητα έχει:

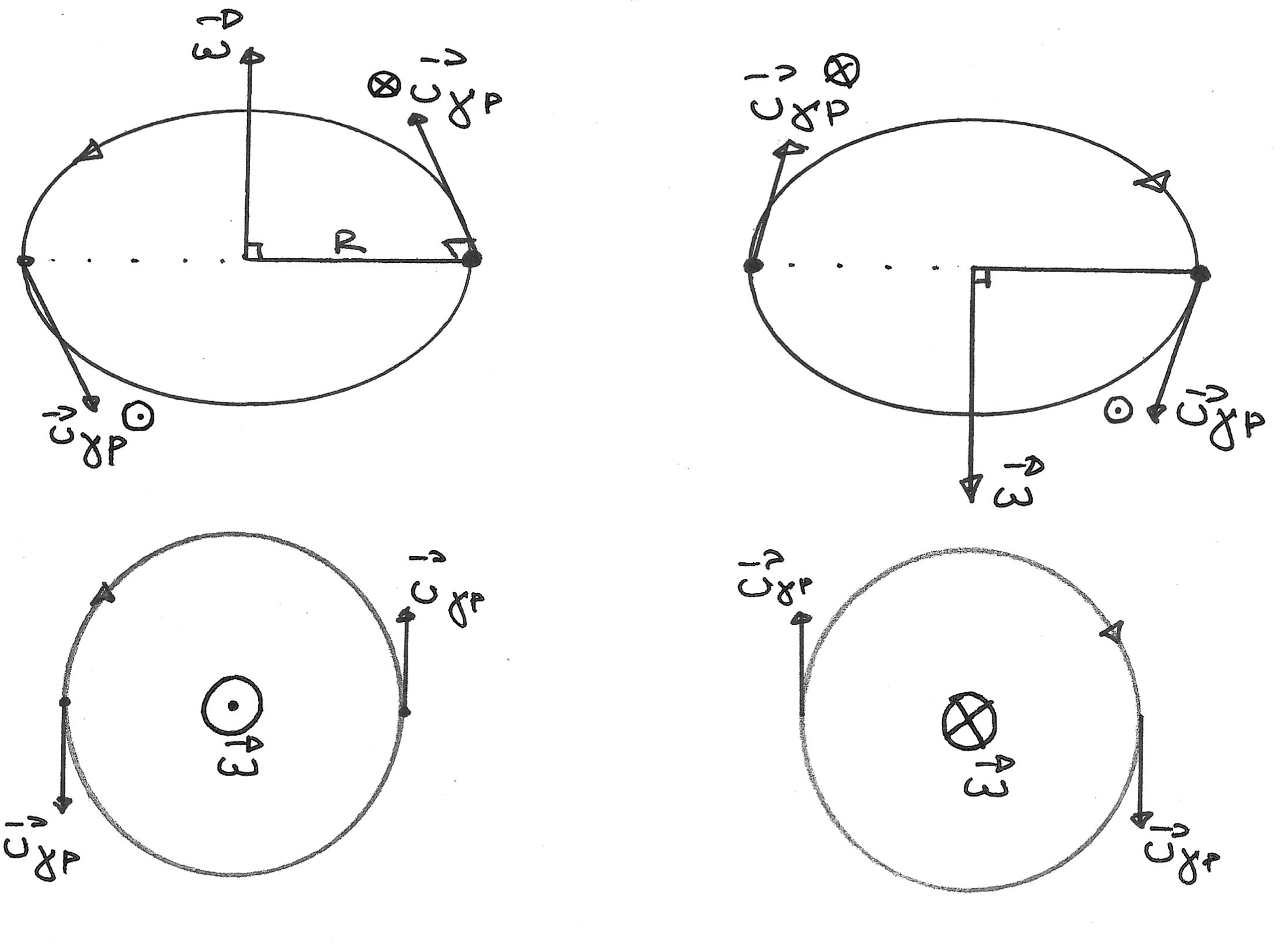
i) Σημείο εφαρμογής το υλικό σημείο.

ii) Μέτρο ίσο με το ρυθμό μεταβολής του διαγραφόμενου τόξου: $υ = \frac{dS}{dt} \xrightarrow[T]{dS=2\pi R}$

$υ = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi f \cdot R = ωR : 1\,m/s$

iii) Διεύθυνση εφαπτόμενη της τροχιάς, κάθετη στην επιβατική ακτίνα.

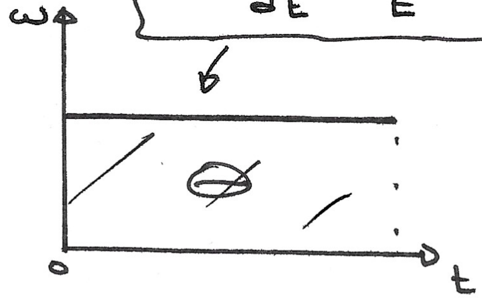
iv) φορά, τη φορά περιστροφής.



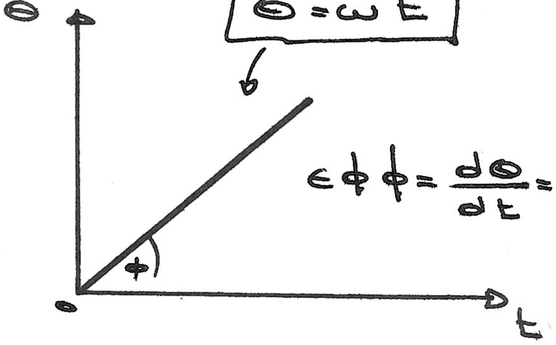
# ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

## * Ομαλή Στροφική κίνηση : $\vec{\omega} = ct$ *

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{t} = ct$$



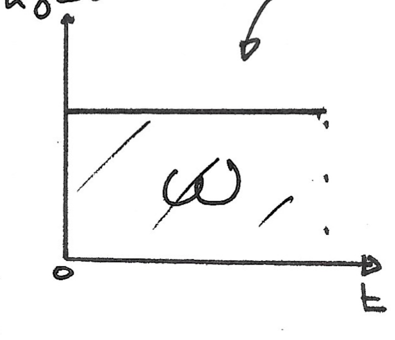

$$\theta = \omega t$$



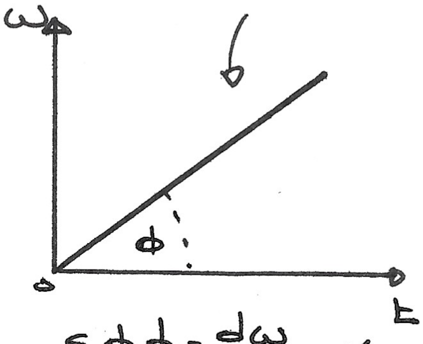

$$\varepsilon\varphi\, \phi = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

## * Ομαλά Επιταχ. Στροφική κίνηση χωρίς $\omega_0$ *

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = ct > 0$$

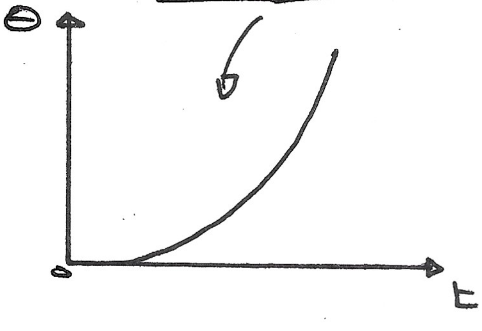



$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t$$




$$\varepsilon\varphi\, \phi = \frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$$



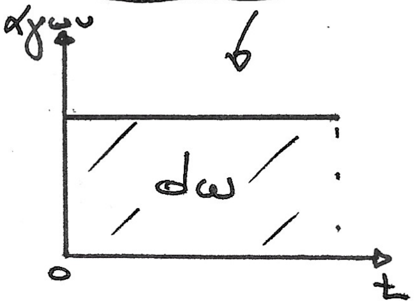

$$\left.\begin{aligned} &\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t \rightarrow t = \frac{\omega}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \\ &\theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\omega^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu}^2} \rightarrow$$

$$\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \rightarrow$$

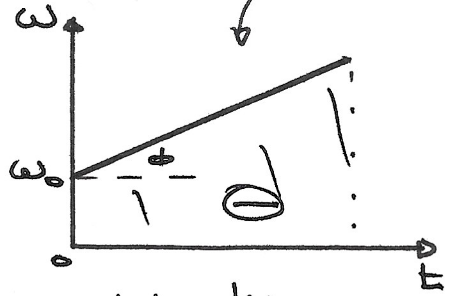
$$\boxed{\omega = \sqrt{2\theta \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}}}$$

## * Ομαλά Επιταχυν. Στροφική κίνηση με $\omega_0$ *

$\boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = ct > 0}$

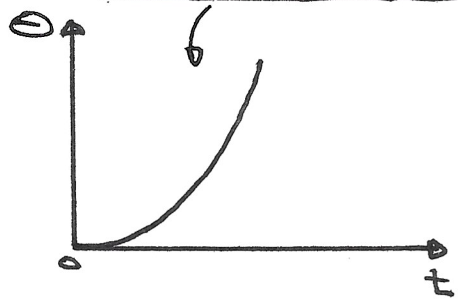



$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t}$




$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

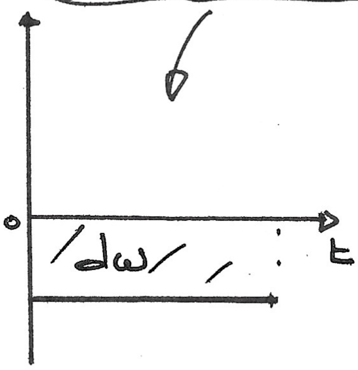
$\boxed{\Theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2}$



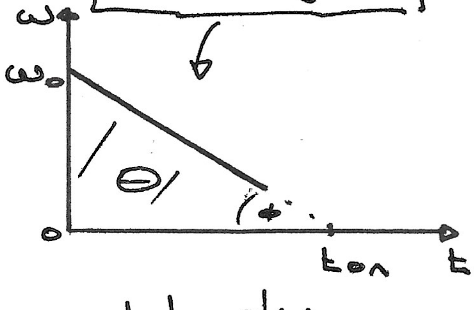

$$\left.\begin{aligned} &\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \\ &\Theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha_{\gamma\omega\nu} t}}$$

## * Ομαλά Επιβραδυν. Στροφική κίνηση με $\omega_0$ *

$\boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = ct < 0}$

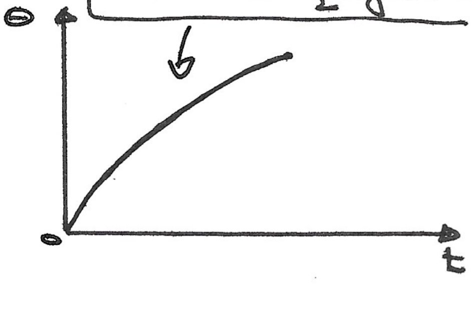



$\boxed{\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t}$




$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$\boxed{\Theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2}$

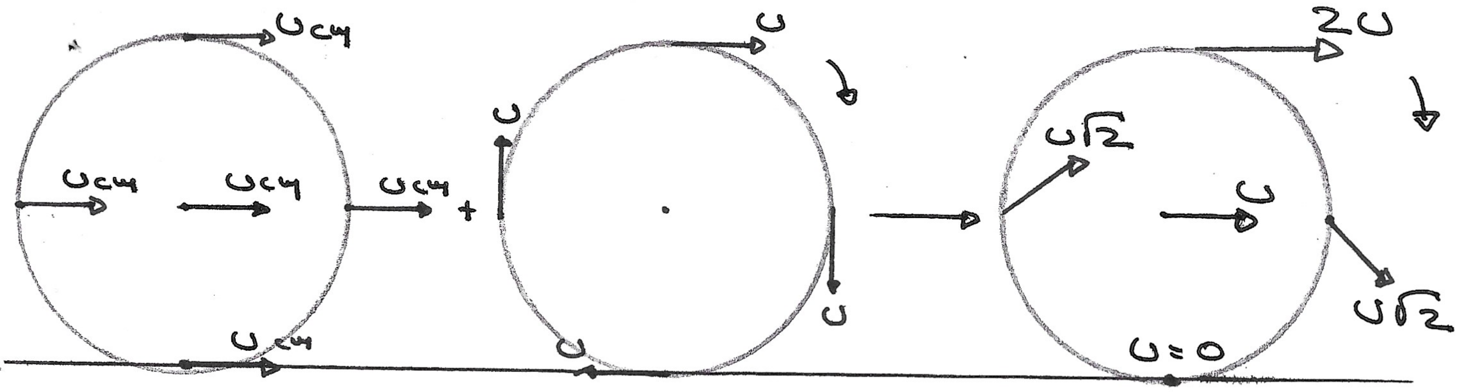



$$\omega = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t \xrightarrow[t_{o\lambda}]{\omega = 0} 0 = \omega_0 - \alpha_{\gamma\omega\nu} t_{o\lambda} \rightarrow \boxed{t_{o\lambda} = \frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}}$$

$$\Theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \xrightarrow{t_{o\lambda}} \Theta_{o\lambda} = \omega_0 \frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} -$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\left(\frac{\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} - \frac{\omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \rightarrow \boxed{\Theta_{o\lambda} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}}}$$

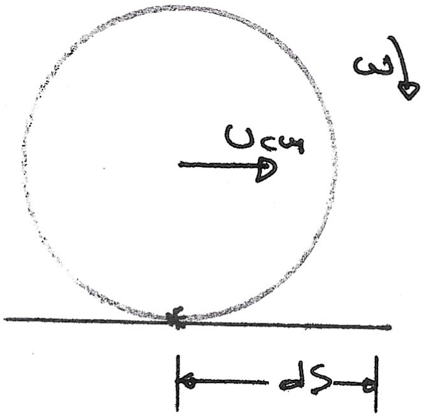
# ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ : ΜΕΤΑΦΟΡΑ + ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ




ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στη μεταφορική κίνηση το στερεό θεωρείται υλικό σημείο.

Αποδεικνύεται ότι : $\boxed{\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon}$.




$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{cm} &= \frac{dS}{dt} \\ d\theta &= \frac{dS}{R} \longrightarrow dS = d\theta \cdot R \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

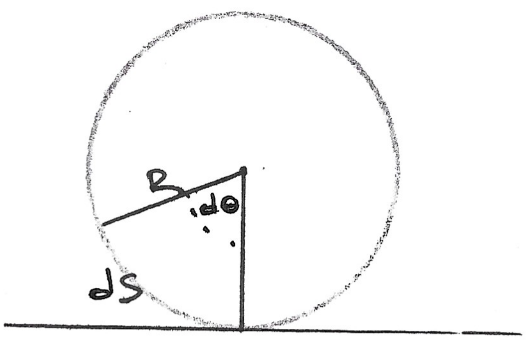
$$\upsilon_{cm} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \rightarrow$$

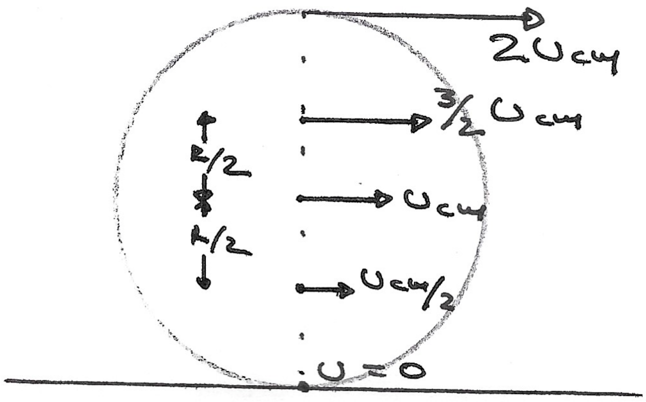
$$\boxed{\upsilon_{cm} = \omega \cdot R = \upsilon_{\gamma\rho}} \rightarrow$$

$$d\upsilon_{cm} = d\omega \cdot R \rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R}$$



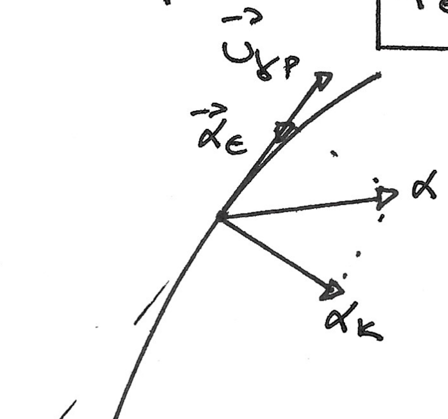

ΚΥΛΙΣΗ ΤΡΟΧΟΥ

# ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

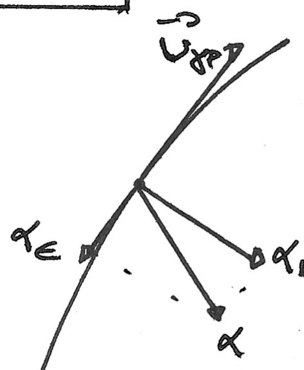
Σε κάθε καμπυλόγραμμη κίνηση το διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει φορά προς το εσωτερικό της τροχιάς, και αναλύεται σε δύο συνιστώσες:

i) Την κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_K = \frac{\upsilon_{\gamma\rho}^2}{R}$ : $1\,m/s^2$ η οποία μεταβάλλει τη διεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας.
Δηλαδή η $\vec{\alpha}_K$ "στρίβει" το διάνυσμα της $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$.

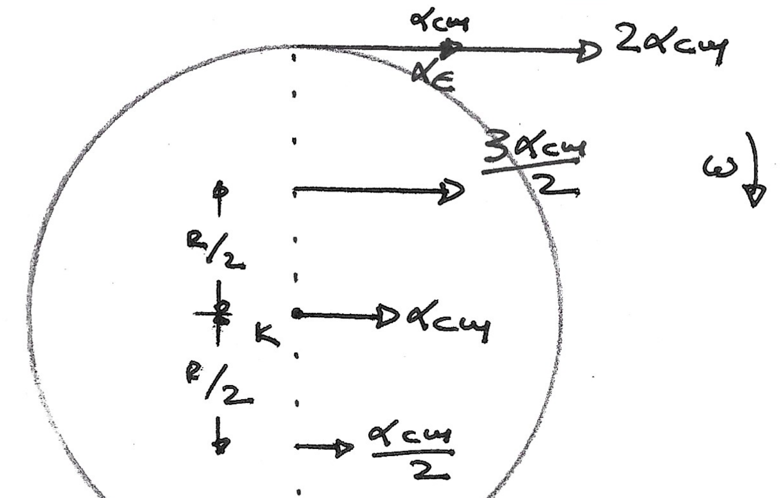
ii) Την επιτρόχιο επιτάχυνση $\alpha_E$ η οποία μεταβάλλει το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας: $\boxed{\alpha_E = \frac{d\upsilon_{\gamma\rho}}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \alpha_{cm}}$.




Αν $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}_E$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.




Αν $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \uparrow\downarrow \vec{\alpha}_E$ η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.




Επιταχυνόμενη

Σύνθετη

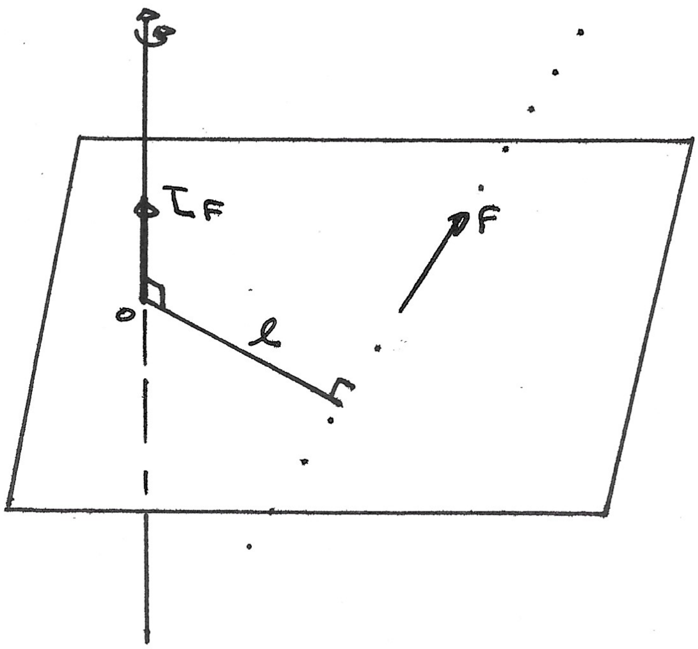
κίνηση.

# ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ - $\tau_F$

Το φυσικό μέγεθος που προκαλεί μεταφορά των στερεών σωμάτων είναι η δύναμη F.

Το φυσικό μέγεθος που προκαλεί περιστροφή των στερεών σωμάτων είναι η ροπή δύναμης $\tau_F$.

## ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟ




Ονομάζουμε ροπή δύναμης $\tau_F$ ως προς σημείο Ο, ένα φυσικό διανυσματικό μέγεθος που έχει:

i) Σημείο εφαρμογής το σημείο Ο.

ii) Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης F επί την απόσταση του σημείου Ο από το φορέα της δύναμης:

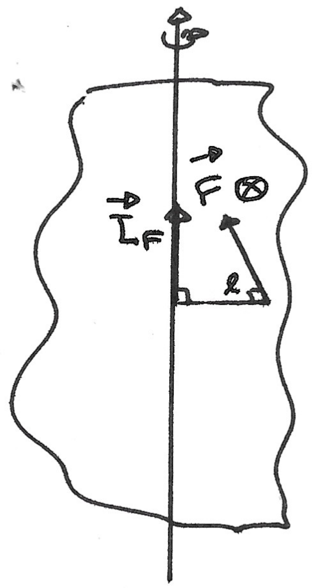
$$\boxed{\tau_F = F\cdot \ell \; (1N\cdot m)}$$

iii) Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το σημείο Ο και τη δύναμη.

iv) Φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

## ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

Ονομάζουμε ροπή δύναμης - που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής - ως προς τον άξονα περιστροφής, ένα φυσικό διανυσματικό μέγεθος που έχει:




i) Σημείο εφαρμογής το σημείο τομής του άξονα περιστροφής με το επίπεδο της δύναμης.

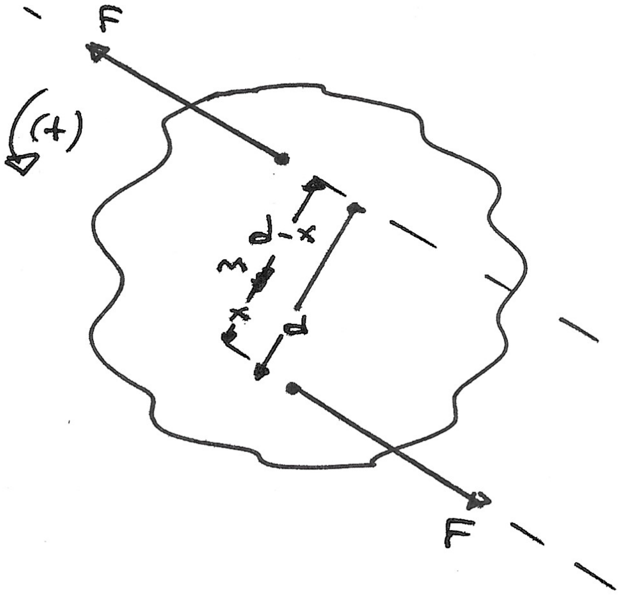
ii) Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόστασή της από τον άξονα περιστροφής.

$$\boxed{\tau_F = F\cdot \ell \,(1\,N\cdot m)}$$

iii) Διεύθυνση, του άξονα περιστροφής.

iv) φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

## ΡΟΠΗ ΖΕΥΓΟΥΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ




Ζεύγος δυνάμεων ονομάζεται ένα σύστημα δύο αντίρροπων δυνάμεων με ίσα μέτρα και διαφορετικά σημεία εφαρμογής.

Η ροπή του ζεύγους ισούται με το γινόμενο του μέτρου της μιας δύναμης F επί την απόσταση d -μοχλοβραχίονας- του ζεύγους των δυνάμεων.

$$\tau_m = F(d-x) + F\cdot x =$$
$$= Fd - Fx + F\cdot x \Rightarrow$$
$$\boxed{\tau_m = F\cdot d}$$

Η ροπή ζεύγους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των δυνάμεων και δεν έχει σημείο εφαρμογής (ελεύθερο διάνυσμα).

# ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΕΡΕΟΥ

Για να μελετήσουμε την ισορροπία ενός στερεού σώματος, εργάζομαι ως εξής:

i) Καθορίζω το στερεό του οποίου την ισορροπία θα μελετήσω, και σημειώνω τις δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό.

ii) Επιλέγω σύστημα δύο ορθογωνίων αξόνων x, y με κριτήριο επιλογής να αναλύσω όσο το δυνατόν λιγότερες δυνάμεις.

iii) Αναλύω τις δυνάμεις στους άξονες.

iv) Γράφω συνθήκες ισορροπίας:

Αποκλείω τη μεταφορική κίνηση $\rightarrow \boxed{\Sigma F = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}}$

Αποκλείω την περιστροφική κίνηση $\rightarrow \boxed{\Sigma \tau = 0}$

## Παρατηρήσεις:

1. Τη συνθήκη $\Sigma\tau = 0$ την εφαρμόζω ως προς εκείνο το σημείο από το οποίο διέρχονται οι περισσότερες άγνωστες και μη ζητούμενες δυνάμεις.

2. Αν ένα στερεό ισορροπεί υπό την επίδραση ν δυνάμεων και οι ν-1 δυνάμεις διέρχονται από ένα σημείο, τότε και η νιοστή δύναμη διέρχεται από το σημείο αυτό.

3. Αν ένα στερεό ισορροπεί υπό την επίδραση ν δυνάμεων και οι ν-1 δυνάμεις είναι παράλληλες μεταξύ τους, τότε και η νιοστή δύναμη είναι

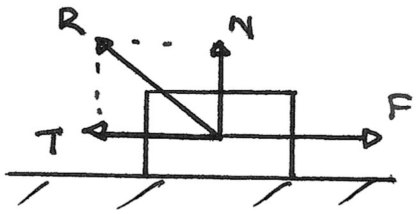
παράλληλη με τις υπόλοιπες δυνάμεις.

(4) Οι αρθρώσεις ασκούν γενικά τυχαίες δυνάμεις που η διεύθυνσή τους καθορίζεται από τη διεύθυνση των υπόλοιπων δυνάμεων.

(5) Αν μία δύναμη υπολογισθεί αρνητική, τότε έχει φορά αντίθετη αυτής που σχεδιάσαμε.

(6) Για τη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma \tau = 0$, ορίζω αυθαίρετα σαν θετική φορά περιστροφής την αντίθετη της φοράς κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

(7) Όταν ένα σώμα τείνει να ολισθήσει ή ολισθαίνει ως προς μία μη λεία - τραχεία - ανώμαλη επιφάνεια, τότε η αντίδραση R που ασκεί η επιφάνεια στο σώμα είναι πλάγια και αναλύεται σε δύο συνιστώσες:




i) Την κάθετη συνιστώσα N ή $F_\kappa$.

ii) Την οριζόντια συνιστώσα, η οποία έχει φορά αντίθετη της πιθανής κίνησης του σώματος και ονομάζεται τριβή T.

| | |
|---|---|
| Όταν το σώμα δεν ολισθαίνει | $T_{\sigma\tau} \le \mu_s \cdot N$ |
| Όταν το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει | $T_{\sigma\tau.max} = \mu_{s.max} \cdot N$ |
| Όταν το σώμα ολισθαίνει | $T_{o\lambda\iota\sigma\theta.} = \mu_{o\lambda\iota\sigma\theta.} \cdot N$ |