

1. ΘΕΜΑ_2_21260

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.

- α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ε) .
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$.
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

2. ΘΕΜΑ_2_20926

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία (ε) ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της (ε) .
- β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία (ε) είναι το B .

3. ΘΕΜΑ_2_20864

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): 2x + y - 6 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x + y + 2 = 0$.

- α) Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.
- β) i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία (ε_1) .
- ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

4. ΘΕΜΑ_2_18733

Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$.
- β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$ είναι κάθετα.
- γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$.

5. ΘΕΜΑ_2_20885

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3,-1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .
- β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι: $E = 8$.

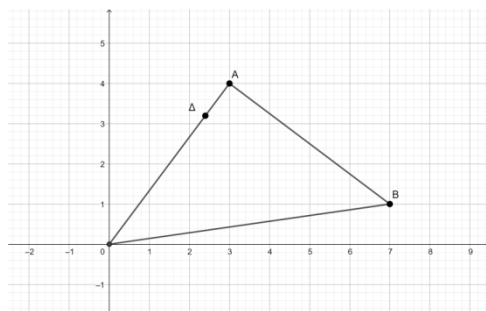
6. ΘΕΜΑ_2_18979

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x + 3y = 5$ και $(\varepsilon_2): 4x + 6y = 8$.

- α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες.
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας (ε_1) .
 γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_2) .

7. ΘΕΜΑ_2_17805

Δίνεται το τρίγωνο AOB με $A(3,4)$, $B(7,1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO .



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.
 β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$.
 γ) Δίνεται ότι $(OAB) = \frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(A\Delta B) = \frac{1}{5}(OAB)$.

8. ΘΕΜΑ_2_15440

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(1,1)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$.
 β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και Γ ορίζουν τρίγωνο.
 ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

9. ΘΕΜΑ_2_16425

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): y = \frac{2}{3}x + 1$ και $(\varepsilon_2): x = \frac{2}{3}y + 9$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$.
 β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

10. ΘΕΜΑ_2_18240

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.

- α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε) .
 γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες $(\eta), (\varepsilon)$.

11. ΘΕΜΑ_2_16774

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2,5)$, $B(3,6)$, $\Gamma(-1,-2)$.

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A .
- γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$.

12. ΘΕΜΑ_2_16771

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $\Gamma(4,-1)$ και το διάνυσμα $\overline{AB} = (3,-1)$.

- α) Να βρεθεί το σημείο B .
- β) Αν $B(5,0)$:
 - i. Να δείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
 - ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

13. ΘΕΜΑ_2_16810

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(1,1)$, $B(5,2)$, $\Gamma(0,-2)$, $\Delta(8,0)$.

- α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α).

14. ΘΕΜΑ_2_16769

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,7)$, $B(-1,5)$ και $\Gamma(3,3)$.

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β) Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, τότε να υπολογίσετε:
 - i. τις συντεταγμένες του M ,
 - ii. την εξίσωση της διαμέσου AM .

15. ΘΕΜΑ_2_16759

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_3) .

16. ΘΕΜΑ_2_16194

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 8x + \psi - 28 = 0$, $(\varepsilon_2): x - \psi + 1 = 0$, $(\varepsilon_3): 3x + 4\psi + 5 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ε_1) και (ε_2) .

β) Αν το σημείο τομής είναι το $M(3,4)$ να υπολογίσετε:

- το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων,
- την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε_3) .

17. ΘΕΜΑ_3_15152

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x + y + a = 0$ με $a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B .

β) Για ποιες τιμές του a , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .

γ) Για $a = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$.

18. ΘΕΜΑ_4_22067

Θεωρούμε μία ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x$ με θετική κλίση λ .

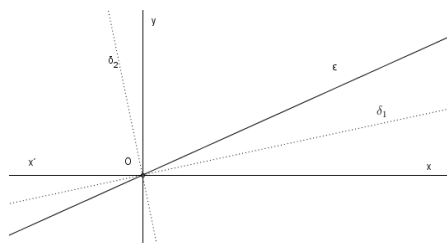
α) Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι:

$$y = \lambda_1 x \quad \text{με} \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}$$

β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2 είναι:

$$y = \lambda_2 x \quad \text{με} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}}$$

γ) Αν $\lambda = 1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\phi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$.



19. ΘΕΜΑ_4_20939

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής:

$$(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2 = 0, \quad \text{με} \quad \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

α) Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π .

γ) Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό.

δ) Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό O , υπάρχουν δύο επιλογές:

1η επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό Ο με την πηγή

2η επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό Ο με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.

Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο,

- i. να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής.
- ii. Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα;

20. ΘΕΜΑ_4_20861

Δίνεται το σημείο $M(-2, 2)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο M .
- β) i. Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy .
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) , η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy , τρίγωνο, με εμβαδόν $E = 8$.
- γ) Αν $(\varepsilon_1): y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή O .

21. ΘΕΜΑ_4_20728

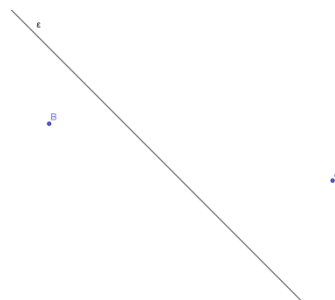
Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $(\varepsilon_2): y = x$.

- α) Να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
- β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα xx' .
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(3, 3)$.
- δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

22. ΘΕΜΑ_4_20724

Η ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y - 1 = 0$ του σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $A(8, 1)$, $B(-7, 4)$ (για την ακρίβεια A, B είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε) , σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα



σημείο Π. Να βρείτε :

- α) ποια πόλη από τις Α, Β είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου,
- β) τις συντεταγμένες του Π, αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη Β.
- γ) τις συντεταγμένες του Σ στις παρακάτω περιπτώσεις
 - i. ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις Α, Β.
 - ii. το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις Α, Β να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

23. ΘΕΜΑ_4_20655

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,0)$.

- α) i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά.
- ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.
- β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x, y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta\Gamma) = (AB\Gamma)$.
- γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος β) αποτελείται από τις ευθείες $(\varepsilon_1): x - 4y - 7 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - 4y + 11 = 0$, τότε:
 - i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ, (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες.
 - ii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x - 4y - 7 = 0$ και $x - 4y + 11 = 0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία ΑΓ ».

24. ΘΕΜΑ_4_18732

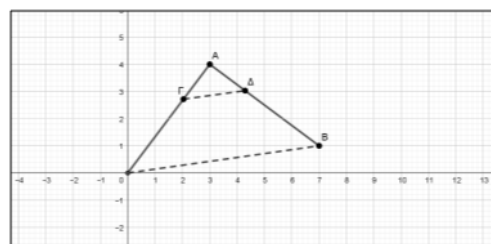
Σε σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(7,1)$.

- α) Αν $\Gamma\left(2, \frac{8}{3}\right)$ και $\Delta\left(\frac{13}{3}, 3\right)$ να δείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

ii. $\Gamma\Delta \parallel OB$,

iii. Να δείξετε ότι: $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (AOB)$.



- β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του α) ερωτήματος, αν για τα σημεία Γ και Δ ισχύουν $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{v}\overrightarrow{AO}$ και

$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{v}\overrightarrow{AB}, \text{ να δείξετε ότι } (A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{v}\right)^2 (ABO).$$

25. ΘΕΜΑ_4_15692

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$.

- α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(x-y)^2 - (x-y) - 6 = 0$,

ii. η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε.

Έστω $(\varepsilon_1): x - y - 3 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - y + 2 = 0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.

β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες.

γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών.

26. ΘΕΜΑ_4_22266

Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (E) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\zeta): 6x - 8y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (E) παριστάνει ευθεία.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (E), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (E) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ) . Ποια είναι η εξίσωση της (ε) ;

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(1,3)$ από την ευθεία (ζ) .

27. ΘΕΜΑ_4_22265

Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία $A(1,-1)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(\mu-1, 3\mu-2)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία $(\varepsilon): y = 3x + 1$.

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου AB Γ είναι σταθερό.

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο B και από τις οποίες το σημείο A, απέχει απόσταση ίση με 1.

28. ΘΕΜΑ_4_22262

Δίνεται τρίγωνο AB Γ με κορυφές τα σημεία $A(-2,1)$, $B(1,5)$, $\Gamma(5,-1)$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AB Γ .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας B Γ .

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή A. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας B Γ , από το οποίο, το A απέχει την ελάχιστη απόσταση.

δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.

29. ΘΕΜΑ_4_22073

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο

$\Lambda(2,6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda-1, 2+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του.
 ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι.
- β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
- i. ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι;
 ii. το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι.

30. ΘΕΜΑ_4_15433

Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3, 1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $(\delta): x + y - 1 = 0$.

- α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:
- i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.
 ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.
- β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8 .

31. ΘΕΜΑ_4_17695

Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία Α και Β. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.
 β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;
 γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t = 2$.
 δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία $(\varepsilon): 4x + 3y + 7 = 0$ ισούται με 6 .

32. ΘΕΜΑ_4_17694

Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες $A(3, 6)$ και $B(7, -2)$.

- α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή.
- β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη.

33. ΘΕΜΑ_4_16057

Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A , έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B , έχει εξίσωση $(\varepsilon): 15x - 8y - 30 = 0$.
- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ) , εκτός από την (ε) , η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B .
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ) .

34. ΘΕΜΑ_4_15987

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 1$.
- β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.
- γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

35. ΘΕΜΑ_4_15681

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B\left(\frac{\alpha}{2}, \beta\right)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$, όπου α, β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

- α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA .
- β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι αντίστοιχα
 $(OB): 2\beta x - \alpha y = 0$ και $(AB): 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$
- γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$.
- δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

36. ΘΕΜΑ_4_15380

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .
- β) Για $\alpha = 4$:

- i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα yy' .
- ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

37. ΘΕΜΑ_4_14984

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12$ τ.μ.

α) Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών

$$(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0 \text{ και } (\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) .

γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2) , που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε.

38. ΘΕΜΑ_4_15194

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1, 1)$, $B(4, 4)$ και $\Gamma(3, 1)$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA) = (KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ;

39. ΘΕΜΑ_4_15273

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 5)$ και $\Gamma(-2, 2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;