ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γνωρίζουμε ότι $3\cdot 3=3^2$, $3\cdot 3\cdot 3=3^3$.

Γενικά αν α είναι φυσικός αριθμός και ν είναι φυσικός αριθμός διάφορος του μηδέν, τότε ορίζουμε ως **νιοστή δύναμη του** α και συμβολίζουμε με α^ν το γινόμενο που αποτελείται από ν παράγοντες ίσους με α.

Δηλαδή : $\alpha^\nu=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha...\cdot\alpha$, $\nu\neq 0$.

Ο αριθμός α λέγεται **βάση** της δύναμης και ο ν **εκθέτης**.

- Αν $\nu=2$, τότε έχουμε τη δύναμη α^2 και διαβάζουμε τετράγωνο του α ή α στο τετράγωνο.
- Αν $\nu=3$, τότε έχουμε τη δύναμη α^3 και διαβάζουμε κύβος του α ή α στο κύβο.
- Αν $\nu=1$, τότε $\alpha^1=\alpha$.
- Αν $\alpha=1$, τότε $1^\nu=1$
- Αν $\alpha=0$, τότε $0^\nu=0$

Αριθμητική παράσταση – προτεραιότητα πράξεων

- **Αριθμητική παράσταση** λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.
- Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση (**προτεραιότητα πράξεων**) είναι η εξής:

1. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
2. Κάνουμε όλους τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
3. Κάνουμε όλες τις προσθέσεις και αφαιρέσεις.
Αν στη παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις, τότε εκτελούμε **πρώτα** τις πράξεις στις παρενθέσεις με την προηγούμενη σειρά.

Ασκήσεις

1. Συμπλήρωσε στον πίνακα τα τετράγωνα και τους κύβους των αριθμών:

α	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
α^2														
α^3														

Λύση

α	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
α^2	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	625
α^3	512	729	100	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	8000	15625

2. Να γράψετε με τη μορφή δυνάμεων τα παρακάτω γινόμενα:

α) $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5$ **β)** $8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 6\cdot 6\cdot 6$ **γ)** $1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

δ) $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$ **ε)** $x\cdot x\cdot x$ **στ)** $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$

Λύση

α) $\underbrace{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}_{6\ \text{φορές}}=5^6$

β) $\underbrace{8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8}_{6\ \text{φορές}}\cdot\underbrace{6\cdot6\cdot6}_{3\ \text{φορές}}=8^6\cdot6^3$

γ) $\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}_{6\ \text{φορές}}=1^6$

δ) $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=\alpha^4$

ε) $x\cdot x\cdot x=x^3$

στ) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=2^4\cdot\alpha^3$

3. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}.

Λύση

$2^1=2$
$2^2=2\cdot2=4$
$2^3=2\cdot2\cdot2=8$
$2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$
$2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$
$2^6=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=64$
$2^7=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=128$
$2^8=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=256$
$2^9=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=512$
$2^{10}=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=1024$

4. Να βρείτε τα τετράγωνα των αριθμών: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 και 90.

Λύση

$10^2=10\cdot10=100$ $\quad 20^2=20\cdot20=400$ $\quad 30^2=30\cdot30=900$
$40^2=40\cdot40=1600$ $\quad 50^2=50\cdot50=2500$ $\quad 60^2=60\cdot60=3600$
$70^2=70\cdot70=4900$ $\quad 80^2=80\cdot80=6400$ $\quad 90^2=90\cdot90=8100$

5. Βρες τους κύβους των αριθμών:10, 20, 30, 40, 50.

Λύση

$10^3=10\cdot10\cdot10=1000$ $\quad 20^3=20\cdot20\cdot20=8000$ $\quad 30^3=30\cdot30\cdot30=27.000$
$40^3=40\cdot40\cdot40=64.000$ $\quad 50^3=50\cdot50\cdot50=125.000$

6. Κάνε τις πράξεις: **α)** $3\cdot5^2$ **β)** $3\cdot5^2+2$ **γ)** $3\cdot5^2+2^2$
δ) $3\cdot5+2^2$ **ε)** $3\cdot(5+2)^2$

Λύση

α) $3\cdot5^2=3\cdot25=75$

β) $3\cdot 5^2+2=3\cdot 25+2=75+2=77$

γ) $3\cdot 5^2+2^2=3\cdot 25+4=75+4=79$

δ) $3\cdot 5+2^2=3\cdot 5+4=15+4=19$

ε) $3\cdot(5+2)^2=3\cdot 7^2=3\cdot 49=147$

7. Κάνε τις πράξεις: α) $3^2+3^3+2^3+2^4$ **β)** $(13-2)^4+5\cdot 3^2$

Λύση

α) $3^2+3^3+2^3+2^4=9+27+8+16=60$

β) $(13-2)^4+5\cdot 3^2=11^4+5\cdot 9=14.641+45=14.686$

8. Βρες τις τιμές των παραστάσεων:
α) $(6+5)^2$ **και** 6^2+5^2 **β)** $(3+6)^2$ **και** 3^2+6^2 **.Τι παρατηρείς;**

Λύση

α) $(6+5)^2=11^2=11\cdot 11=121$ και $6^2+5^2=6\cdot 6+5\cdot 5=36+25=61$

β) $(3+6)^2=9^2=81$ και $3^2+6^2=9+36=45$

Παρατηρούμε ότι το τετράγωνο του αθροίσματος και το άθροισμα των τετραγώνων είναι δύο διαφορετικοί αριθμοί.

9. Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:
α) $\alpha+\alpha+\alpha$ **β)** $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$ **γ)** $x+x+x+x$ **δ)** $x\cdot x\cdot x\cdot x$

Λύση

α) $\alpha+\alpha+\alpha=3\alpha$ **β)** $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=\alpha^3$

γ) $x+x+x+x=4x$ **δ)** $x\cdot x\cdot x\cdot x=x^4$

10. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε ανεπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10.
α) 34.720 **β) 123.654** **γ) 890.650**

Λύση

α) $34.720=30.000+4.000+700+20=3\cdot 10.000+4\cdot 1.000+7\cdot 100+2\cdot 10=$
$3\cdot 10^4+4\cdot 10^3+7\cdot 10^2+2\cdot 10^1$

β) $123.564=100.000+20.000+3.000+500+60+4=$
$100.000+2\cdot 10.000+3\cdot 1.000+5\cdot 100+6\cdot 10+4\cdot 1=$
$10^5+2\cdot 10^4+3\cdot 10^3+5\cdot 10^2+6\cdot 10^1+4\cdot 10^0$

γ) $890.650 = 800.000 + 90.000 + 600 + 50 = 8 \cdot 100.000 + 9 \cdot 10.000 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 =$
$8 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1$

11. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα με το εξαγόμενο των πράξεων κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.

$(1+2) \cdot (3+4)$	20
$1 \cdot (2+3 \cdot 4)$	21
$(1 \cdot 2+3) \cdot 4$	9
$1 + (2+3) \cdot 4$	14

Λύση

$(1+2) \cdot (3+4) = 3 \cdot 7 = 21$
$1 \cdot (2+3 \cdot 4) = 1 \cdot (2+12) = 1 \cdot 14 = 14$
$(1 \cdot 2+3) \cdot 4 = (2+3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$
$1+(2+3) \cdot 4 = 1+5 \cdot 4 = 1+20 = 21$

12. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα με την αριθμητική παράσταση κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.

$2 + 2 \cdot 2$	150
$3 + 3 \cdot 3$	68
$4 + 4 \cdot 4 \cdot 4$	16
$5+5 \cdot 5+5 \cdot 5$	6
$5 \cdot 5+5 \cdot 5 \cdot 5$	12
$4 + 4 \cdot 4 - 4$	55

Λύση

$2+2 \cdot 2 = 2+4 = 6$
$3+3 \cdot 3 = 3+9 = 12$
$4+4 \cdot 4 \cdot 4 = 4+16 \cdot 4 = 4+64 = 68$
$5+5 \cdot 5+5 \cdot 5 = 5+25+25 = 55$
$5 \cdot 5+5 \cdot 5 \cdot 5 = 25+25 \cdot 5 = 25+125 = 150$
$\not{4} + 4 \cdot 4 - \not{4} = 16$

13. Να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

α) $2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10}$ **β)** $2 \cdot 3^2 + 4$ **γ)** $2 \cdot (3^2 + 4)$

δ) $(2 \cdot 3)^2 + 4$ **ε)** $2 \cdot 3^3 + (3^2 - 2^3) \cdot 6^2$

Λύση

α) Είναι $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
$2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$ και $2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$, άρα
$2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} = 4+16+64+256+1024 = 1364$

β) $2 \cdot 3^2 + 4 =$ (προηγούνται οι δυνάμεις)
$2 \cdot 9 + 4 =$ (μετά τις δυνάμεις προηγούνται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις)

$18+4=20$ (στο τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις)

γ) $2\cdot\left(3^2+4\right)=$ (προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις όπου θα βρούμε πρώτα τις δυνάμεις)

$2\left(9+4\right)=$ (προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις)

$2\cdot 13=26$

δ) $\left(2\cdot 3\right)^2+4=$ (προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις)

$6^2+4=$ (προηγούνται οι δυνάμεις)

$36+4$ (στο τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις)

ε) $2\cdot 3^3+\left(3^2-2^3\right)\cdot 6^2=$ (προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις όπου θα υπολογίσουμε πρώτα τις δυνάμεις)

$2\cdot 3^3+\left(9-8\right)\cdot 6^2=$ (προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις)

$2\cdot 3^3+1\cdot 6^2=$ (προηγούνται οι δυνάμεις)

$2\cdot 27+1\cdot 36=$ (μετά τις δυνάμεις προηγούνται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις)

$54+36=90$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

14. Να γράψετε με τη μορφή δυνάμεων τα γινόμενα:
α) $8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8$ **β)** $k\cdot k$ **γ)** $13\cdot13\cdot13\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9$ **δ)** $4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot y\cdot y\cdot y$

15. Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τα γινόμενα:
α) $3\cdot3^2\cdot3^3$ **β)** $x^2\cdot x^3$ **γ)** $\alpha\cdot\alpha^2\cdot\alpha\cdot\alpha^5$

16. Να βρείτε ποια δύναμη του 10 είναι οι αριθμοί:
α) 100 **β)** 10.000 **γ)** 1.000.000

17. Γράψε με τη μορφή δυνάμεων τους αριθμούς:
α) 9 **β)** 25 **γ)** 100 **δ)** 27 **ε)** 125

18. Υπολόγισε:
α) τη διαφορά του διπλάσιου του 2,5 από το τετράγωνο του 2,5
β) τη διαφορά του κύβου 0,5 από το τριπλάσιο του 0,5.

19. Να βρείτε τη τιμή της παράστασης $5\cdot10^5+3\cdot10^3+2\cdot10+4$

20. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $2\cdot4^2$ **β)** $2\cdot4^2+7$ **γ)** $2\cdot\left(4^2+7\right)$ **δ)** $2\cdot4^2+7^2$ **ε)** $2\cdot\left(4^2+7^2\right)$

21. Να βρείτε τη τιμή των παρακάτω παραστάσεων:
α) $\left(3+4\right)^2$ και 3^2+4^2 **β)** $\left(5-2\right)^2$ και 5^2-2^2

22. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $\left(2^5-3^3\right)\cdot\left[2\left(4\cdot9-6^2\right)+3\cdot1^{111}\right]$ **β)** $2\cdot\left(3\cdot2^2-2\cdot5\right)+3\left(4^3-6\cdot3^2\right)$

23. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε ανεπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10.
α) 4923 **β)** 40207

24. Να κάνετε τις πράξεις:
α) $\left(5\cdot14\right):7$ **β)** $\left(4^3-3^3\right):37$ **γ)** $\left(91:13\right):\left(5^2-3\cdot2^3\right)$
δ) $\left(2^4-4^2\right):1821$ **ε)** $\left[48:\left(4\cdot7-2^4\right)\right]\cdot\left(10^2-9^2\right)$

25. Αν $x=2^6-\left(7^2+3^2\right)$ και $y=3^4-4\cdot2^4-\left[\left(3^2+1^{2015}\right)+5\right]$, να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $A=x^2\left(y^4-x\right)-x^2:y$.

Στέλιος Μιχαήλογλου