

**ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ ΕΠΙΛΥΣΗΣ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ / ΕΠΙΠΕΔΟ 1**

Σπάζοντας τον Κώδικα των Αριθμών

Τα εργαλεία του Μαθηματικού Ντετέκτιβ: Από τη διαίρεση στο Ε.Κ.Π. και τον Μ.Κ.Δ.

$$x = b - (x) = 3A = \int \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y} \right) dy \quad \text{or} \quad \int \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y} \right) dy = \ln y + \frac{1}{y} + C$$

$f(x) = \frac{\pi_0}{2} \text{em}(x)$

Η Γέφυρα: Όταν το Υπόλοιπο είναι Μηδέν

Ευκλείδεια Διαίρεση
(Υπόλοιπο $\neq 0$)

$$14 \div 3 = 4, \text{ Υπόλοιπο } \mathbf{2}$$

Τέλεια Διαίρεση
(Υπόλοιπο $= 0$)

$$12 \div 3 = 4, \text{ Υπόλοιπο } \mathbf{0}$$

Διαιρέτες

Κάθε αριθμός a έχει διαιρέτες τους αριθμούς που τον διαιρούν ακριβώς (π.χ. 1 και a).

Πολλαπλάσια

Προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό με 0, 1, 2, 3... (Κάθε φυσικός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του!).

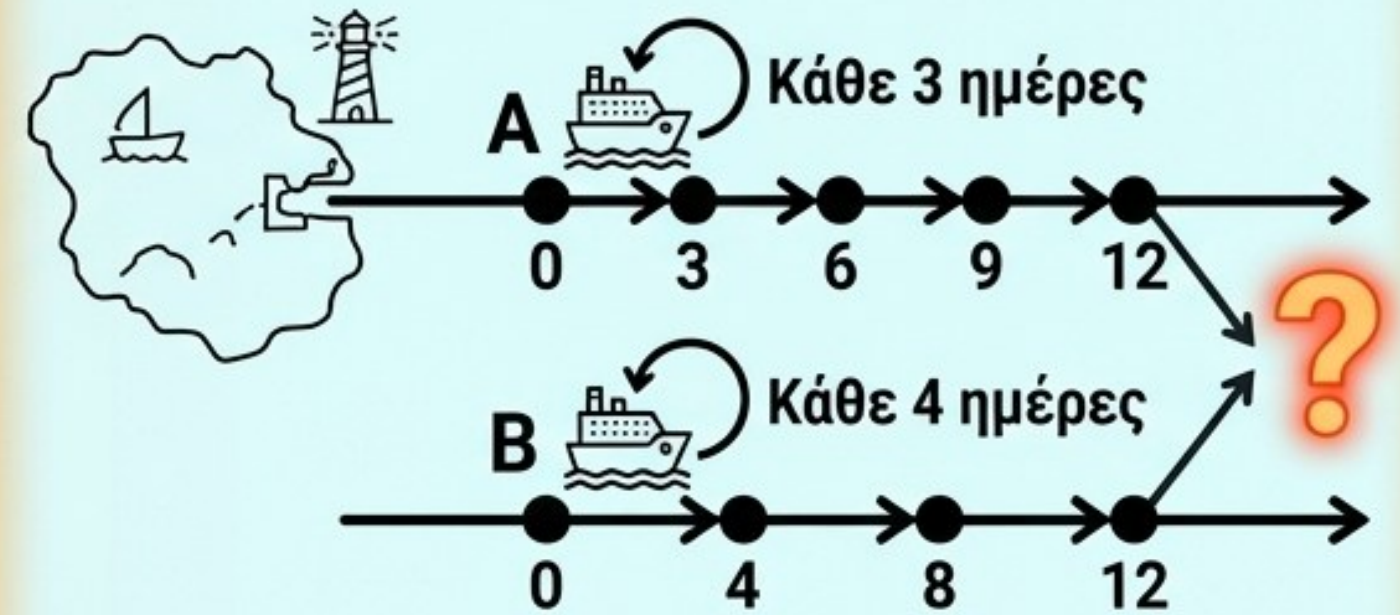
Τα Μυστήρια: 2 Υποθέσεις προς Επίλυση

Case File 1: Η Αποστολή της UNICEF



Έχουμε 150 τετράδια, 90 στυλό, 60 γόμες.
Πόσα όμοια πακέτα δώρων μπορούμε να
φτιάξουμε χωρίς να περισσέψει τίποτα;

Case File 2: Ο Συγχρονισμός των Πλοίων



Το Πλοίο A έρχεται στο νησί κάθε 3 ημέρες. Το
Πλοίο B κάθε 4 ημέρες. Αν συναντηθούν σήμερα,
σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν μαζί στο λιμάνι;

Για να λύσουμε αυτές τις υποθέσεις, χρειαζόμαστε τα σωστά εργαλεία...

Εργαλείο #1: Κριτήρια Διαιρετότητας (Cheat Codes)

Πώς ξέρουμε αν ένας αριθμός διαιρείται τέλεια, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση;

Κοίτα το Τέλος

2 : Λήγει σε 0, 2, 4, 6, 8
(π.χ. **772** → **NAI**)

5 : Λήγει σε 0 ή 5
(π.χ. **225** → **NAI**)

10 : Λήγει σε 0
(π.χ. **12.510** → **NAI**)

Πρόσθεσε τα Ψηφία +

3 & 9 : Αν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 3 ή το 9.

(π.χ. **12.510** →
1+2+5+1+0 = 9 → **9**
→ **NAI** και για τα δύο)

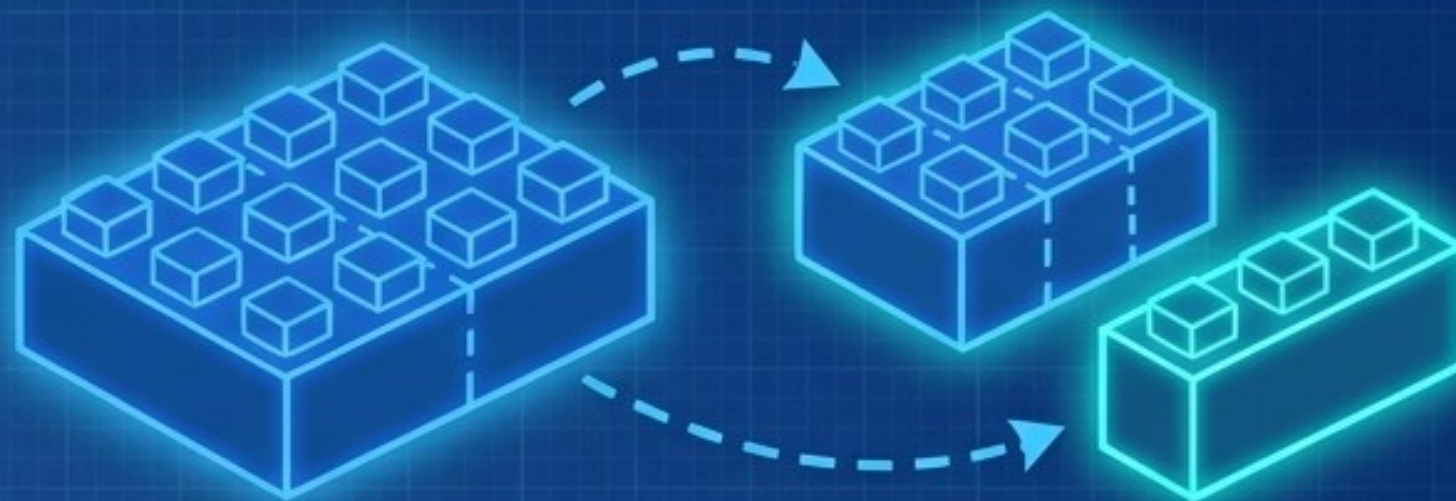
Κοίτα την Ουρά

4 & 25 : Αν τα δύο τελευταία ψηφία είναι μηδενικά.
(π.χ. **13.600** → **NAI**)

Εργαλείο #2: Πρώτοι Αριθμοί (Τα Άθραυστα Τούβλα)

Σύνθετος

Ο αριθμός που μπορεί να σπάσει σε μικρότερους διαιρέτες.



Πρώτος

Ένας αριθμός (εκτός του 1) που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1. (π.χ. 2, 3, 5, 7, 11...)



ΠΡΟΣΟΧΗ: Το 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος!

Δύο αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν ο μόνος κοινός τους διαιρέτης είναι το 1 ($\text{ΜΚΔ} = 1$).

Το Κόσκινο του Ερατοσθένη (Ανακαλύπτοντας τους Πρώτους)

~~1~~	2	3	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	~~13~~	14	~~15~~	16	~~17~~	~~18~~	~~19~~	20
21	22	~~23~~	24	25	26	~~27~~	28	~~29~~	30
~~31~~	~~32~~	~~33~~	34	~~35~~	36	~~37~~	38	~~39~~	40
41	42	~~43~~	44	5	46	~~47~~	48	~~49~~	50
51	52	~~53~~	54	~~55~~	56	57	58	~~59~~	60
~~61~~	~~62~~	~~63~~	64	65	66	~~67~~	68	69	70
~~71~~	~~72~~	~~73~~	74	75	76	77	78	~~79~~	80
81	82	~~83~~	84	85	86	87	88	~~89~~	90
91	92	93	94	95	96	~~97~~	98	99	100

Step 1: Διαγράφουμε το 1.

Step 2: Κρατάμε το 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του.

Step 3: Επαναλαμβάνουμε για τα 3, 5, και 7. Οι αριθμοί που μένουν είναι οι πρώτοι!



Ο Εφευρέτης: Ερατοσθένης (234 π.Χ.).
Διευθυντής της Βιβλιοθήκης της
Αλεξάνδρειας. Μέτρησε την περίμετρο
της Γης (~40.000 km) με εντυπωσιακή
ακρίβεια!

Εργαλείο #3: Ανάλυση σε Γινόμενο (Ο Καταρράκτης)

Πώς αποκωδικοποιούμε έναν μεγάλο αριθμό στα πρώτα του τούβλα.

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

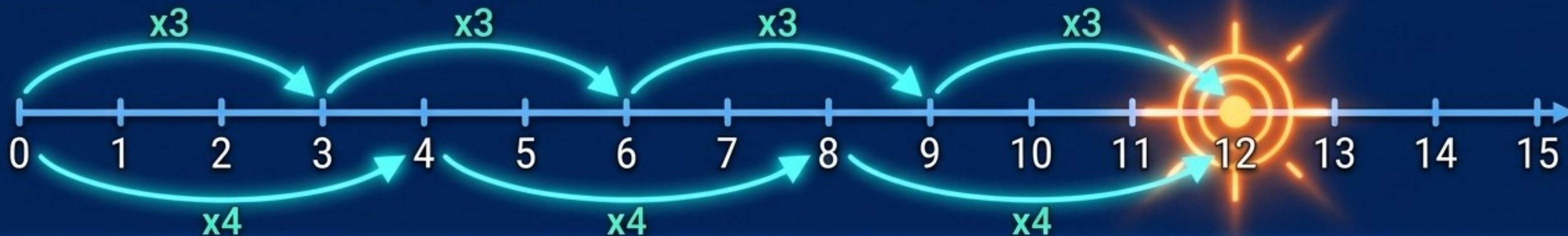
2940	
2940	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	
$2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$	

3780	
3780	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	
$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	

Τα Υπέρτατα Εργαλεία: Ε.Κ.Π. & Μ.Κ.Δ.

ΕΚΠ - Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια. (π.χ. $\text{ΕΚΠ}(3, 4) = 12$).
Ψάχνουμε πού θα συναντηθούν στο μέλλον.



ΜΚΔ - Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες. (π.χ. $\text{ΜΚΔ}(16, 24) = 8$).
Ψάχνουμε πώς να τα μοιράσουμε δίκαια.



Ο Κανόνας των Εκθετών (Υπολογισμός για Μεγάλους Αριθμούς)

Μ.Κ.Δ.
(Αυστηρός
Επιλογέας)



Πρώλα:
Μόνο Κοινοί
παράγοντες, με
τον **Μικρότερο**
εκθέτη.

$$\text{ΜΚΔ} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ = 420$$

$$\begin{aligned} 2520 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ 2940 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \\ 3780 &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Ε.Κ.Π.
(Συλλέκτης
των Πάντων)



Πρώλα:
Κοινοί **ΚΑΙ** μη κοινοί
παράγοντες, με τον
Μεγαλύτερο
εκθέτη.

$$\begin{aligned} \text{ΕΚΠ} &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \\ &= 52.920 \end{aligned}$$

Πότε χρησιμοποιώ τι; (Diagnostic Matrix)

	Μ.Κ.Δ.	Ε.Κ.Π.
Η Λογική	Σπάμε κάτι μεγάλο σε ίσα, μικρότερα κομμάτια.	Χτίζουμε κάτι μικρό προς τα εμπρός μέχρι να συγχρονιστεί.
Λέξεις - Κλειδιά	Μοιράζω, Ίσα κομμάτια, Το πολύ, Κόβω.	Ταυτόχρονα, Μαζί, Πότε θα ξανα..., Το λιγότερο.
Τυπικά Σενάρια	Πακέτα δώρων, κόψιμο υφασμάτων, χωρισμός ομάδων.	Δρομολόγια πλοίων ή λεωφορείων, πλανήτες σε τροχιά, συναντήσεις.

Επίλυση Υπόθεσης #1: Η Αποστολή της UNICEF

Μοιράζουμε 150 τετράδια, 90 στυλό, 60 γόμες σε όμοια πακέτα δώρων.



(Keyword: Μοιράζω → **ΜΚΔ!**)



$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$



$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$



$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$



Μπορούν να γίνουν
το πολύ **30**
όμοια πακέτα!



5 τετράδια
($150 \div 30$)

3 στυλό
($90 \div 30$)

2 γόμες
($60 \div 30$)

Επίλυση Υπόθεσης #2: Ο Συγχρονισμός των Πλοίων

Το Πλοίο Α ταξιδεύει ανά 3 ημέρες, το Πλοίο Β ανά 4 ημέρες. Πότε θα ξαναβρεθούν;



(Keyword: Πότε θα ξανα... → ΕΚΠ!)

$$\text{ΕΚΠ}(3, 4) = 12$$

Πλοίο Α (πολλαπλάσια του 3)



Πλοίο Β (πολλαπλάσια του 4)

Λύση: Ακριβώς μετά από **12 ημέρες** θα ξαναβρεθούν τα δύο πλοία στο λιμάνι **ταυτόχρονα!**

Quick-Fire Υποθέσεις (Δοκιμάστε τις δυνάμεις σας)



Εταιρεία Α βγάζει αμάξι
κάθε 2 χρόνια, Β κάθε 3,
Γ κάθε 5. Πότε θα
βγάλουν ξανά όλες μαζί;

ΜΚΔ

ΕΚΠ

Λύση: ΕΚΠ(2,3,5)
= **30** χρόνια.



Γυμναστής βάζει τους
μαθητές ανά 3, 5, 7 και
δεν περισσεύει κανείς.
Πόσοι είναι οι μαθητές;
(μεταξύ 100-200).

ΜΚΔ

ΕΚΠ

Λύση: ΕΚΠ(3,5,7)
= **105** μαθητές.



Ο Γιάννης πάει σινεμά
κάθε 10 μέρες, ο Νίκος
κάθε 12. Πότε θα
ξανασυναντηθούν;

ΜΚΔ

ΕΚΠ

Λύση: ΕΚΠ(10,12)
= **60** ημέρες.

Το Τελικό Σχεδιάγραμμα του Codebreaker

Τα Κριτήρια

2, 5, 10	→ Κοιτάμε το Τέλος
3, 9	→ Αθροίζουμε τα ψηφία
4, 25	→ Κοιτάμε τα δύο τελευταία

Οι Πρώτοι Αριθμοί

~~1~~	2	3	~~4~~	5
~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~
~~16~~	~~17~~	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~

Διαιρούνται **ΜΟΝΟ** με το 1 και τον εαυτό τους.

Ανάλυση σε Γινόμενο

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

ΜΚΔ vs ΕΚΠ

ΜΚΔ = Μοιράζω

Μόνο Κοινοί /
Μικρότερος εκθέτης

ΕΚΠ = Συγχρονίζω

Όλοι οι παράγοντες /
Μεγαλύτερος εκθέτης

Ο κώδικας των αριθμών σπάει με τη λογική, όχι με την αποστήθιση.