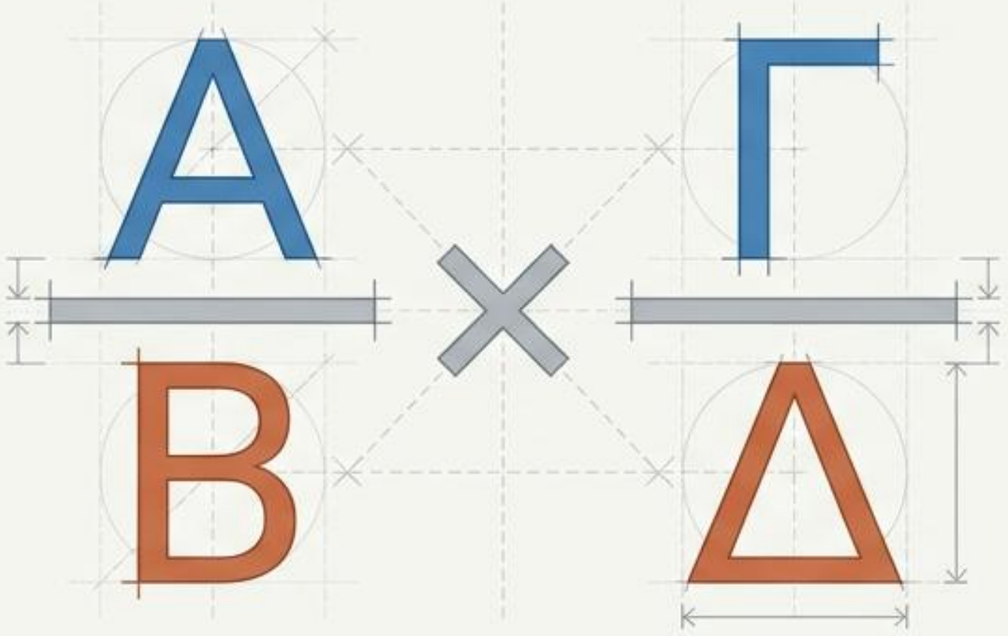



# Πολλαπλασιασμός Κλασμάτων & Αντίστροφοι Αριθμοί

Η στρατηγική πίσω από τους κανόνες, τις απλοποιήσεις και την προτεραιότητα των πράξεων.

Gemini Notebook

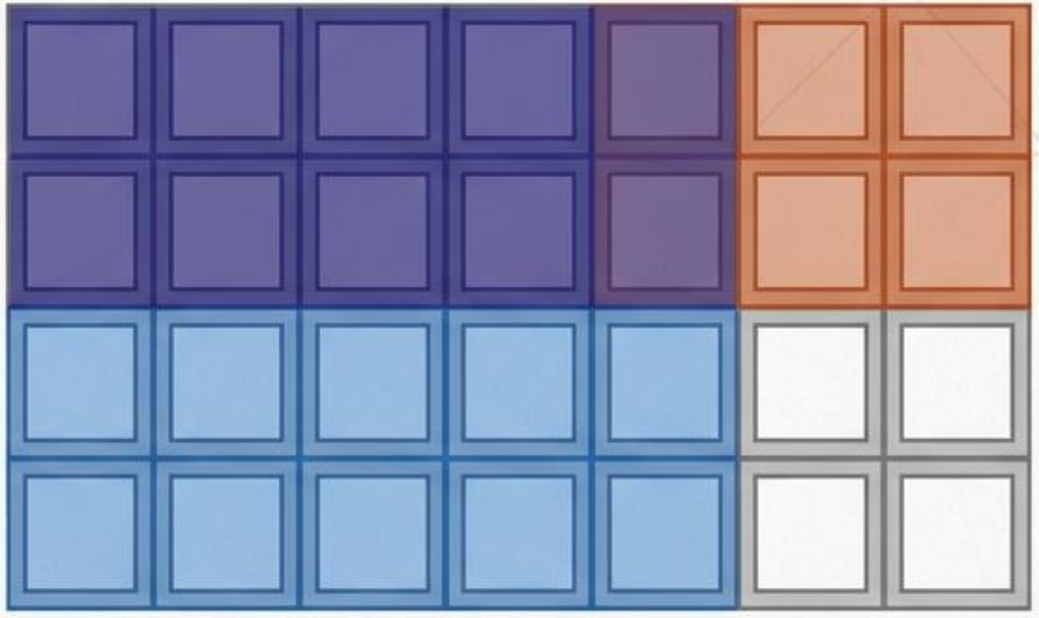
# Οπτική Απόδειξη: Γιατί πολλαπλασιάζουμε έτσι;

## Το Πρόβλημα

Ένας πεζόδρομος στρώθηκε με πλάκες. Τα 5/7 είναι χρωματιστές. Από αυτές, τα 2/3 είναι κόκκινες.

## Η Λύση μέσω σχεδίου

Όπως φαίνεται στο πλέγμα, αν πάρουμε τα 2/3 των 5/7, καταλήγουμε ακριβώς σε 10 κόκκινες πλάκες από τις 21 συνολικά.



$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{21}$$

Gemini Notebook

# Οι Βασικοί Μηχανισμοί της Πράξης

## Κλάσμα με Κλάσμα

Αριθμητής με Αριθμητή,
Παρονομαστής με Παρονομαστή

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$$

## Φυσικός Αριθμός με Κλάσμα

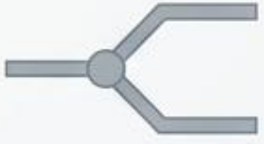
Ο ακέραιος πολλαπλασιάζεται
ΜΟΝΟ με τον αριθμητή

$$\lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda \cdot \alpha}{\beta}$$

$$5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{3} = \frac{35}{3}$$

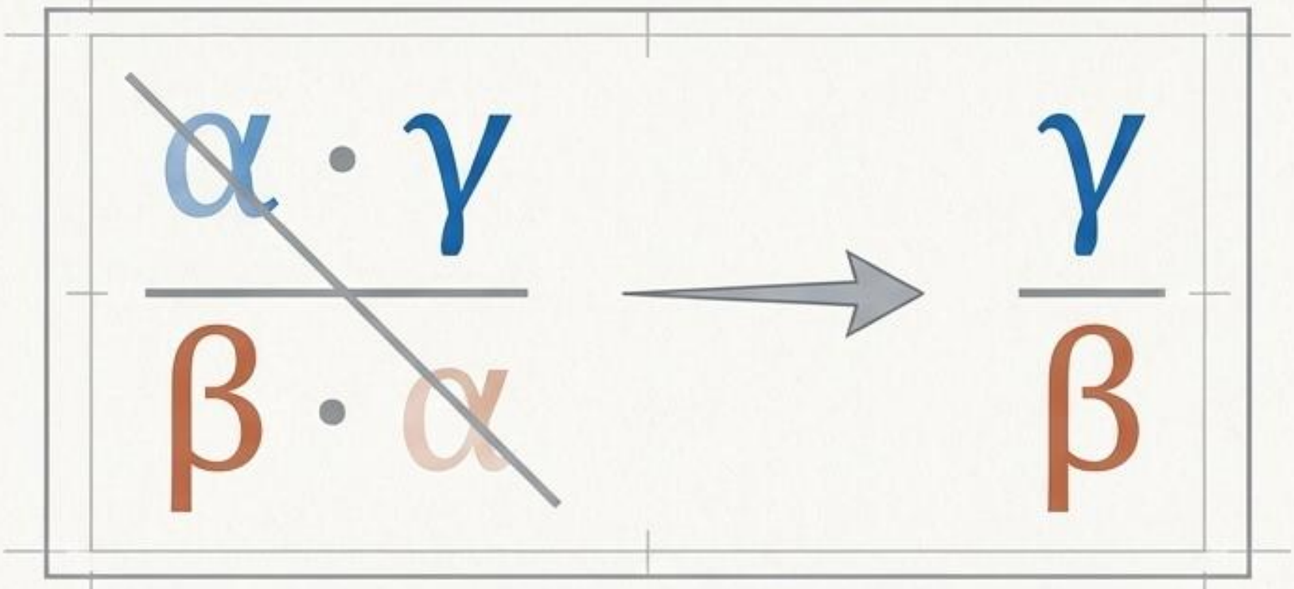
Gemini Notebook

# Οι Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού

| | | |
|---|---|---|
|  | Αντιμεταθετική: Μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά. | $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ |
|  | Προσεταιριστική: Αλλάζουμε την ομαδοποίηση. | $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left( \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} \right) = \left( \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}$ |
|  | **Επιμεριστική:** Το γινόμενο μοιράζεται στην πρόσθεση. | $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left( \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\varepsilon}{\zeta} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta}$ |

Gemini Notebook

# Η Στρατηγική Κίνηση: Απλοποίηση πριν τον Πολλαπλασιασμό




Γιατί να μεγαλώνουμε τους αριθμούς κάνοντας πολλαπλασιασμούς, μόνο και μόνο για να τους **μικρύνουμε** στο τέλος με διαιρέσεις;

Όταν έχουμε **γινόμενο κλασμάτων**, μπορούμε να **διαγράψουμε** (απλοποιήσουμε) οποιονδήποτε αριθμητή με οποιονδήποτε παρονομαστή, πριν κάνουμε τον πολλαπλασιασμό.

Gemini Notebook

# Εφαρμογή 1: Ωμή Δύναμη vs. Στρατηγική Ακρίβεια

## Χωρίς Απλοποίηση (Ο δύσκολος τρόπος)

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{70}{6} \cdot \frac{8}{5}$$

↓

$$\frac{3 \cdot 70 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5}$$

↓

$$= \frac{1680}{210}$$ (Τεράστιοι αριθμοί!)

↓

$$= 8$$ (Δύσκολη τελική διαίρεση)

## Με Απλοποίηση (Η κίνηση της Ακρίβειας)

$$\frac{3}{\cancel{7}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{70}}}{\underset{7}{\cancel{6}}} \cdot \frac{8}{\underset{5}{\cancel{5}}}$$

$$\overset{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{70}{\underset{2}{\cancel{6}}} \cdot \cancel{8}$$

$$1 \cdot 1 \cdot 8 = 8$$ (Υπολογισμός σε λίγα δευτερόλεπτα)

Gemini Notebook

# Αντίστροφοι Αριθμοί: Η Συμμετρία της Μαθηματικής Φύσης

$$\frac{\alpha}{\beta} \qquad \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \alpha} = 1$$

Δύο κλάσματα ή αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι**, όταν το **γινόμενό** τους είναι **ακριβώς 1**. Στην ουσία, το ένα κλάσμα **ανατρέπει το άλλο**.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$$

Τα κλάσματα $^5/_7$ και $^7/_5$ είναι αντίστροφα.

Gemini Notebook

# Ειδικές Περιπτώσεις Αντιστρόφων (Προσοχή στις Παγίδες)

## Φυσικοί Αριθμοί

Κάθε ακέραιος α έχει αντίστροφο το 1/α.

Ο αντίστροφος του 2 είναι το $\frac{1}{2}$.

## Ο Αριθμός 1

Ο μόνος αριθμός που ισούται με τον αντίστροφό του!

$$\frac{1}{1} = 1$$

## Ο Αριθμός 0

Το 0 δεν έχει αντίστροφο. Δεν υπάρχει κανένας αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί με το 0 να δώσει 1.

Gemini Notebook

# Πεδίο Εξάσκησης 1: Βασικοί Υπολογισμοί

## Άσκ. 2α

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{14} \rightarrow \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 14} \rightarrow \frac{9}{56}$$

## Άσκ. 2γ

$$\frac{4}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{100} \rightarrow \text{Απλοποίηση των 2} \rightarrow \frac{4}{100}$$

## Άσκ. 3α

$$2 \cdot \frac{7}{5} \rightarrow \frac{2 \cdot 7}{5} \rightarrow \frac{14}{5}$$

## Άσκ. 3β

$$8 \cdot \frac{100}{10} \rightarrow \frac{8 \cdot 10}{(\text{το } \frac{100}{10}/10 \text{ απλοποιείται σε } 10)} \rightarrow 80$$

Gemini Notebook

# Πεδίο Εξάσκησης 2: Ο Πίνακας της Λογικής (Άσκηση 4)

| ⊗ | 5/7 | 3/2 | 1 | 3/4 |
|---|---|---|---|---|
| 7/5 | 1 | 21/10 | 7/5 | 21/20 |
| 2/3 | 10/21 | 1 | 2/3 | 1/2 |
| 1 | 5/7 | 3/2 | 1 | 3/4 |
| 4/3 | 20/21 | 2 | 4/3 | 1 |

Διαγώνιος των Αντιστρόφων: Όταν ένα κλάσμα συναντά τον αντίστροφό του στον πίνακί, το γινόμενο είναι πάντα 1.

Στήλη/Γραμμή του 1: Οποιοδήποτε κλάσμα πολλαπλασιαστεί με το 1 παραμένει αμετάβλητο.

Gemini Notebook

# Η Ιεραρχία των Πράξεων: Τι Προηγείται;




Στα μαθηματικά, όπως και στην αρχιτεκτονική, η σειρά έχει σημασία. Ο **πολλαπλασιασμός** έχει πάντα προτεραιότητα έναντι της πρόσθεσης.

$$\frac{6}{5} + \frac{3}{5} \cdot \boxed{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}}$$

❌ **Λάθος Σκέψη:** $\frac{6}{5} + \frac{3}{5} = \dots$

✅ **Σωστή Σκέψη:** Πρώτα λύνουμε τον πολλαπλασιασμό $\left[\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{20}$. Μετά κάνουμε την πρόσθεση: $\frac{6}{5} + \frac{3}{20}$.

Gemini Notebook

# Συνδυαστικές Πράξεις (Ασκήσεις 8 & 9)

## Ολοκλήρωση Άσκ. 8α

$$\frac{6}{5} + \boxed{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{6}{5} + \frac{3}{20}$$ (Βρίσκουμε Ε.Κ.Π. το 20)

$$= \frac{24}{20} + \frac{3}{20}$$

$$= \frac{27}{20}$$

## Βασισμένο στην Άσκ. 9

$$7 + \boxed{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}}$$

$$= 7 + \frac{2}{15}$$

$$= \frac{105}{15} + \frac{2}{15}$$ (Μετατρέπουμε τον ακέραιο)

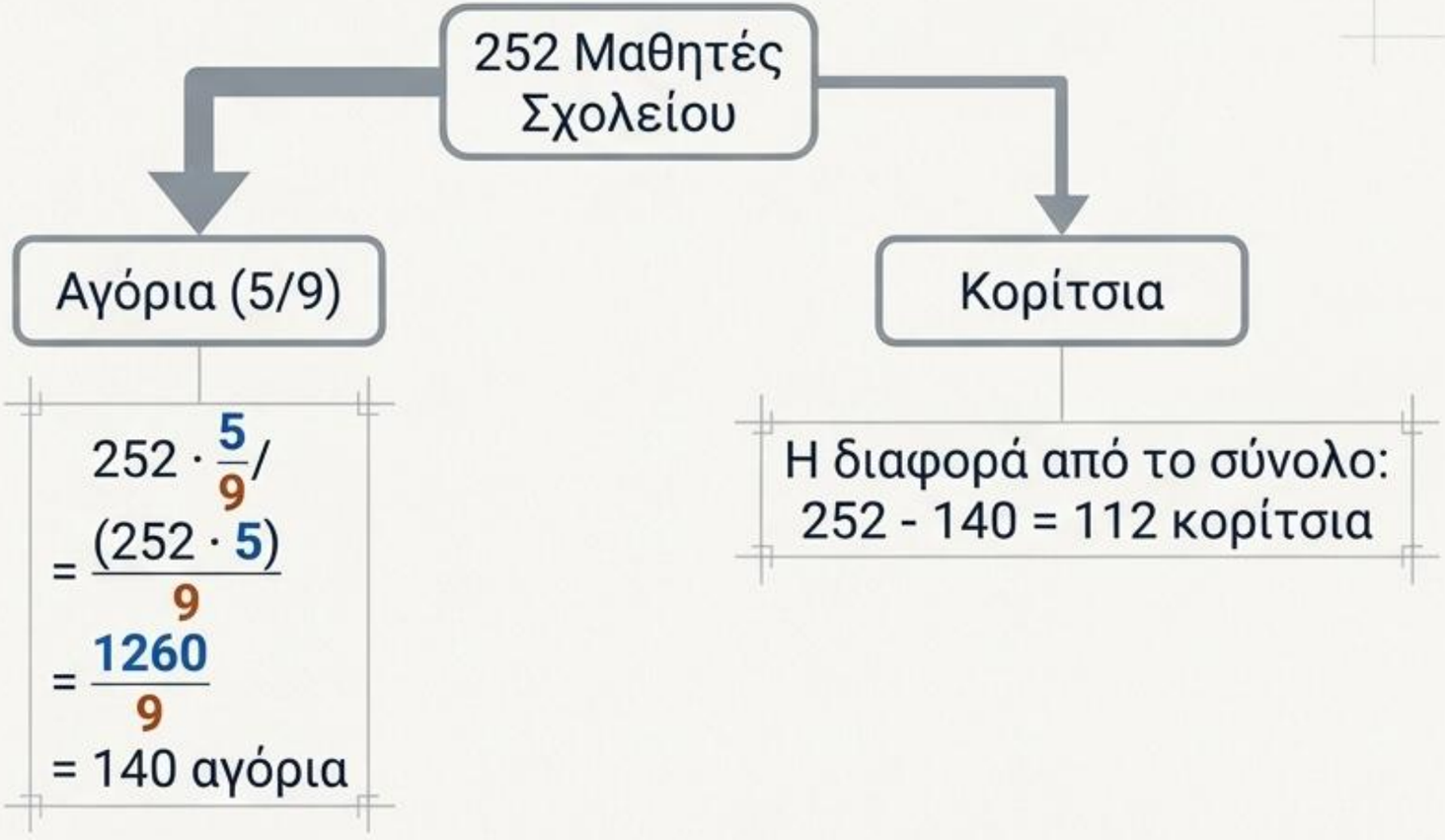
$$= \frac{107}{15}$$

*Πρώτα ο πολλαπλασιασμός, μετά η ομώνυμη πρόσθεση.*

Gemini Notebook

# Εφαρμογή 2: Λύνοντας Πραγματικά Προβλήματα

Σε ένα σχολείο με 252 μαθητές, τα 5/9 είναι αγόρια.
Πόσα είναι τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια;




Gemini Notebook

# Η Τελική Σύνοψη: Τα 3 Βήματα της Επιτυχίας

## 1. Ο Μηχανισμός

- Αριθμητής με Αριθμητή
- Παρονομαστής με Παρονομαστή

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

## 2. Η Στρατηγική

**Διάγραψε πριν πολλαπλασιάσεις.**

- Μειώνει τον κόπο
- Αποτρέπει τα λάθη στις τεράστιες διαιρέσεις

$$\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{5}_{1}} \cdot \frac{\cancel{10}^{3}}{\cancel{12}_{2}}$$

## 3. Η Προτεραιότητα

Ο **Πολλαπλασιασμός** είναι θεμέλιο. Έχει απόλυτη προτεραιότητα.

$$6 + \overset{\times}{3 \times 4} = 6 + 12 = 18$$

$$+$$

Gemini Notebook