

ΓΕ.Λ. ΑΡΓΟΥΣ ΟΡΕΣΤΙΚΟΥ



Τράπεζα Θεμάτων ΙΕΠ
Άλγεβρα Α Λυκείου
Κεφάλαιο 2

Γεώργιος Ε. Καραφέρης

«Τα θέμα/τα προέρχεται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-archiki-selida>)».

Τράπεζα ΘεμάτωνΚεφάλαιο 2°Παράγραφος 2.1**1. ΘΕΜΑ 2ο (12685)**

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4, \text{ τότε να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2.$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha = \beta.$ (Μονάδες 13)

2. ΘΕΜΑ 2 (13053)

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta + \gamma = -\alpha.$ (Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha.$ (Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να

αποδείξετε $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$ (Μονάδες 13)

3. ΘΕΜΑ 2 (13088)

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$ (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

4. ΘΕΜΑ 2 (13472)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta.$ (Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1.$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2.$ (Μονάδες 9)

5. ΘΕΜΑ 2 (14458)

Έστω x , υπραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x + 4y)(x + y) = 9xy.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y - x)^2 = 0$ (Μονάδες 8)

ii. $y = \frac{x}{2}$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$.

(Μονάδες 12)

6. ΘΕΜΑ 2 (14473)

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$.

α) Να δείξετε ότι $y = 2x$. (Μονάδες 12)

β) Για $y = 2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}. \quad (\text{Μονάδες } 13)$$

7. ΘΕΜΑ 2 (14489)

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$. (Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.
(Μονάδες 15)

8. ΘΕΜΑ 2 (14555)

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.
(Μονάδες 13)

9. ΘΕΜΑ 2 (35388)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να

ισχύουν: $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma} = \frac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$ (Μονάδες 15)

10. ΘΕΜΑ 2 (36884)

α) Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y , ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.
(Μονάδες 13)

11. ΘΕΜΑ 3 (14329)

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}, B = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 15)

12. ΘΕΜΑ 4 (15052)

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες EZ και $H\Theta$ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y, x, y \in (0,6)$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

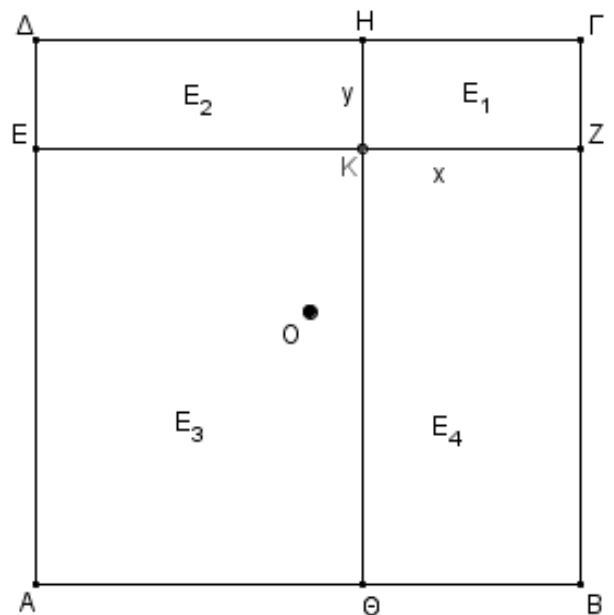
(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

(Μονάδες 6)

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα EZ και $H\Theta$ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου.
(Μονάδες 5)



Παράγραφος 2.2**13. ΘΕΜΑ 2 (12673)**

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$0 < \alpha < \beta.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

14. ΘΕΜΑ 2 (12922)

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$. (Μονάδες 8)

15. ΘΕΜΑ 2 (13266)

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$. (Μονάδες 8)

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. (Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 8)

16. ΘΕΜΑ 2 (13323)

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει: $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$. (Μονάδες 13)

17. ΘΕΜΑ 2 (14410)

Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$.

α) i) Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

ii) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $A + B = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $A = -B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

18. ΘΕΜΑ 2 (14475)

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$. (Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$. (Μονάδες 13)

19. ΘΕΜΑ 2 (14492)

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 13)

20. ΘΕΜΑ 2 (14704)

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ (Μονάδες 5) β) $2x - 3y$ (Μονάδες 10) γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

21. ΘΕΜΑ 2 (35040)

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $L = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - L = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$. (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq L$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = L$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

22. ΘΕΜΑ 2 (36899)

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$. (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$. (Μονάδες 13)

23. ΘΕΜΑ 2 (37179)

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2a^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; (Μονάδες 13)

24. ΘΕΜΑ 2 (37871)

Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \frac{x^4-4}{x^2-2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

α) Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$. (Μονάδες 15)

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$. (Μονάδες 5)

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της; (Μονάδες 5)

25. ΘΕΜΑ 3 (14602)

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$. (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

26. ΘΕΜΑ 3 (14713)

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$. (Μονάδες 7)

β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

i. $A = \frac{\alpha^2+9}{\alpha}$. (Μονάδες 8)

ii. $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$; (Μονάδες 10)

Παράγραφος 2.3

27. ΘΕΜΑ 2 (13177)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

- α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$. (Μονάδες 8)
 β) Να δείξετε ότι : $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$. (Μονάδες 8)
 γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1. (Μονάδες 9)

28. ΘΕΜΑ 2 (14071)

α) Η αλγεβρική παράσταση K , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

A. $K = |x+1| + |x-2|$ B. $K = |x-1| + |x+2|$ Γ. $K = (|x|+1) + (|x|-2)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

β) Αν είναι $K = |x+1| + |x-2|$ τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x = \frac{3}{2}$. (Μονάδες 10)

ii) Αν $x > 2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση K και να αποδείξετε ότι $K > 3$. (Μονάδες 10)

29. ΘΕΜΑ 2 (14412)

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = 2$. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$. (Μονάδες 13)

30. ΘΕΜΑ 2 (14491)

α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$ (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

31. ΘΕΜΑ 2 (14572)

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$. (Μονάδες 10)

$$\beta) |2x + 4| < 2.$$

(Μονάδες 15)

32. ΘΕΜΑ 2 (14617)

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

(Μονάδες 13)

33. ΘΕΜΑ 2 (14730)

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε

i. Την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$ (Μονάδες 8)

ii. Τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $A = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

34. ΘΕΜΑ 2 (15054)

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει :

$$\alpha < 0 < \beta < \gamma.$$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός

$$A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta \quad \text{είναι θετικός.} \quad (\text{Μονάδες 16})$$

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$. (Μονάδες 9)

35. ΘΕΜΑ 2 (35041)

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

36. ΘΕΜΑ 2 (35112)

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2, A = 3x - 4$.

ii. για κάθε $x < 2, A = 8 - 3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = 3x + 4.$$

(Μονάδες 13)

37. ΘΕΜΑ 2 (35412)

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές. (Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$

(Μονάδες 15)

38. ΘΕΜΑ 2 (36894)

α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

39. ΘΕΜΑ 2 (36898)

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να δείξετε ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1). (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

40. ΘΕΜΑ 2 (37201)

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| + |y - 3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$.

(Μονάδες 13)

41. ΘΕΜΑ 4 (13179)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i ερώτημα. (Μονάδες 7)

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει:

$$\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|. \quad (\text{Μονάδες 6})$$

42. ΘΕΜΑ 4 (33888)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β . (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$. (Μονάδες 12)

43. ΘΕΜΑ 4 (36672)

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x + 2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x - 7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x + 2| + |x - 7|$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

Παράγραφος 2.4

44. ΘΕΜΑ 2 (12943)

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$ (Μονάδες 13)

45. ΘΕΜΑ 2 (14452)

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$. (Μονάδες 10)

46. ΘΕΜΑ 2 (14599)

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$.
(Μονάδες 13)

47. ΘΕΜΑ 2 (14682)

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$. (Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.
(Μονάδες 13)

48. ΘΕΜΑ 2 (14750)

Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$.
Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$. (Μονάδες 12)

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$. (Μονάδες 13)

49. ΘΕΜΑ 2 (14774)

α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$
(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε,
να δείξετε ότι $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}$. (Μονάδες 12)

50. ΘΕΜΑ 2 (14849)

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$. (Μονάδες 8)

51. ΘΕΜΑ 2 (15051)

α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το
ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$
(Μονάδες 13)

52. ΘΕΜΑ 2 (34152)

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; (Μονάδες 07)
 β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; (Μονάδες 08)
 γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$. (Μονάδες 10)

53. ΘΕΜΑ 2 (34155)

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$. (Μονάδες 15)
 β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B . (Μονάδες 10)

54. ΘΕΜΑ 2 (34157)

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$. (Μονάδες 12)
 β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$. (Μονάδες 13)

55. ΘΕΜΑ 2 (36778)

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

- β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

56. ΘΕΜΑ 2 (37172)

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$, $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$

- α) Να αποδείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$. (Μονάδες 13)
 β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. (Μονάδες 12)

57. ΘΕΜΑ 2 (37192)

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$$\sqrt{2} \cong 1,41, \sqrt{3} \cong 1,73, \sqrt{5} \cong 2,24, \sqrt{7} \cong 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$

(Μονάδες 13)

58. ΘΕΜΑ 2 (37194)

α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

59. ΘΕΜΑ 2 (37197)

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = -3$ να αποδείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$. (Μονάδες 12)

60. ΘΕΜΑ 2 (37198)

Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$. (Μονάδες 12)

61. ΘΕΜΑ 2 (37199)

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$. (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$ (Μονάδες 12)

62. ΘΕΜΑ 3 (14805)

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2} = 1,41$)

(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 = 2\alpha$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2.$$

(Μονάδες 10)

63. ΘΕΜΑ 4 (14931)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)

«Το/τα θέμα/τα προέρχεται και αντλήθηκε/αν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-archiki-selida>)».



Βοηθητικό Υλικό: Α΄ Λυκείου
Λύκειο Άργους Ορεστικού
Σχολικό έτος : 2024-2025