

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου

Κεφάλαιο 4 Τράπεζα θεμάτων



Γε.Λ. Άργους Ορεστικού

Γεώργιος Ε. Καραφέρης

Τράπεζα ΘεμάτωνΚεφάλαιο 4οΠαράγραφοι 4.1-4.2

1. ΘΕΜΑ 2(12710)

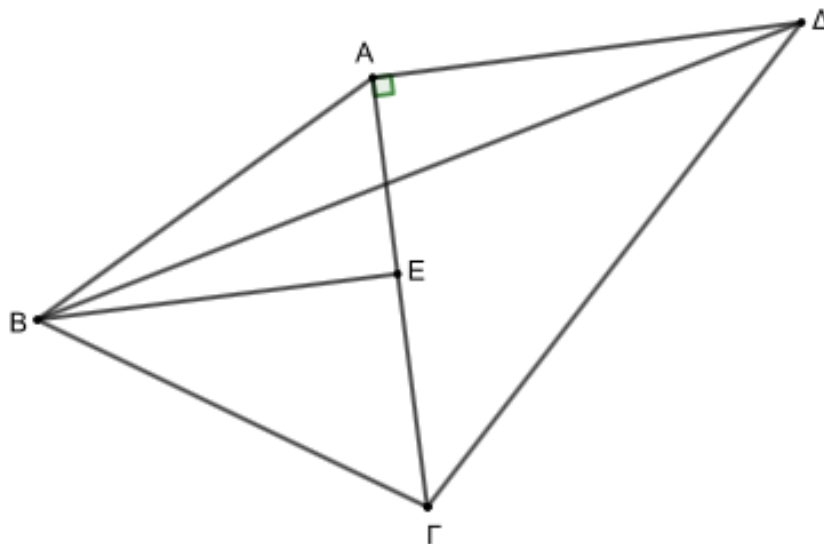
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE .

Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι: α) $BE \parallel A\Delta$. (Μονάδες 10)

β) οι γωνίες $EB\Delta$ και $A\Delta B$ είναι ίσες. (Μονάδες 7)

γ) το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



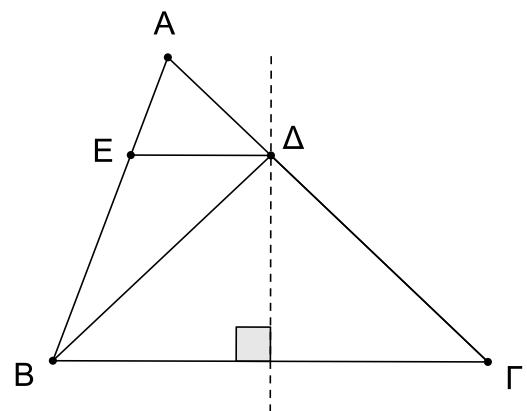
2. ΘΕΜΑ 2 (13534)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$.

Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$. (Μονάδες 13)



3. ΘΕΜΑ 2 (13748)

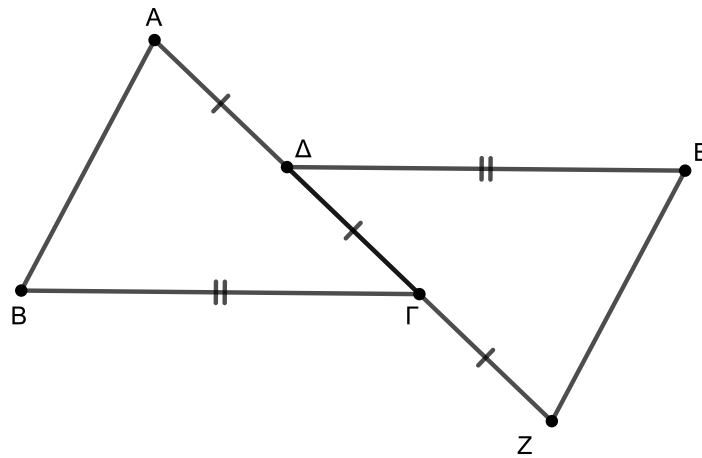
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) $AB \parallel EZ$.

(Μονάδες 15)



4. ΘΕΜΑ 2 (34399)

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

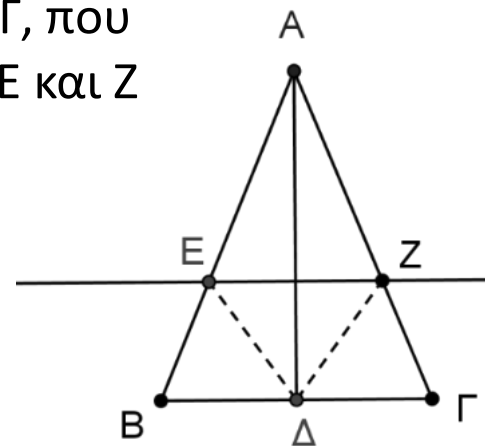
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)



5. ΘΕΜΑ 2 (34776)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔE της γωνίας $\hat{A\Delta B}$ να είναι

παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

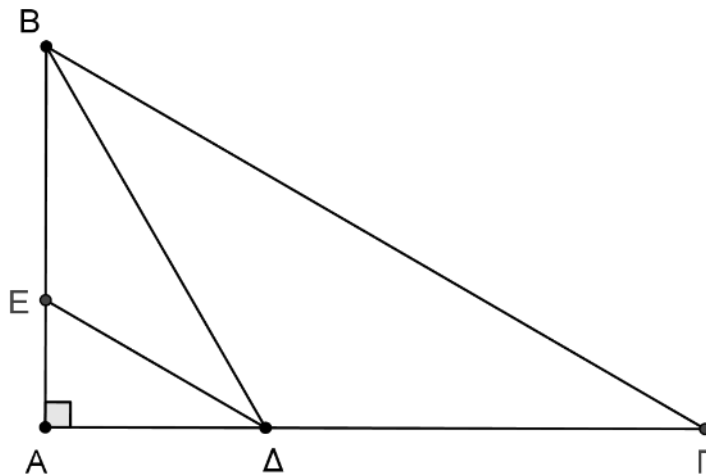
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{E\Delta B} = \widehat{\Delta B \Gamma}$ και $\widehat{E\Delta A} = \widehat{\Gamma}$, (Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\widehat{A\Delta B} = 60^\circ$, τότε να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma}$.

(Μονάδες 9)



6. ΘΕΜΑ 2 (34777)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία Γχ κάθετη στη ΒΓ, προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α, και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{\Gamma\hat{\Delta}A}$, (Μονάδες 12)

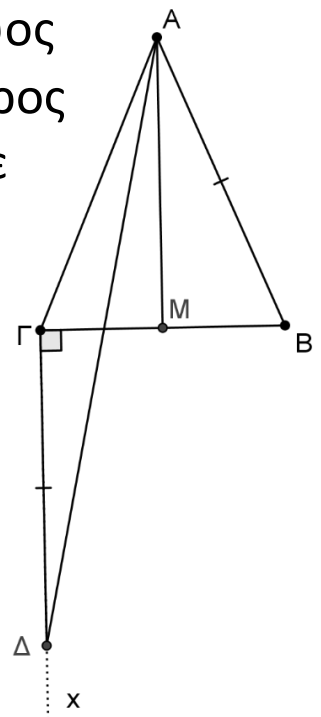
β) $\Gamma\Delta \parallel AM$, (Μονάδες 6)

γ) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{M\hat{A}\Gamma}$. (Μονάδες 7)

7. ΘΕΜΑ 2 (34779)

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $A\epsilon = AG$.

Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) $E\Delta // B\Gamma$.

(Μονάδες 13)

8. ΘΕΜΑ 2 (36165)

Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$.

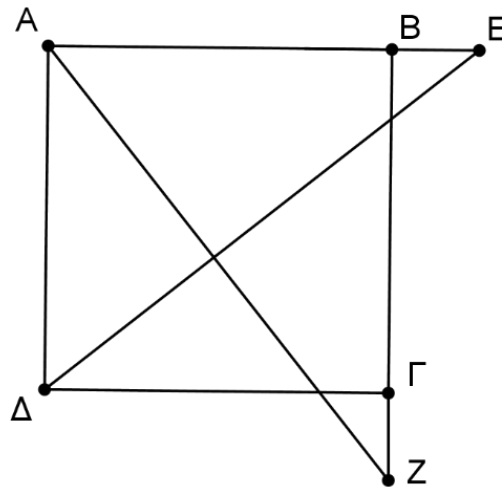
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABZ και $A\Delta E$ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $E\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{Z}B$ είναι ίσες.

(Μονάδες 13)



9. ΘΕΜΑ 4 (1744)

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE . Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = \Gamma H$.

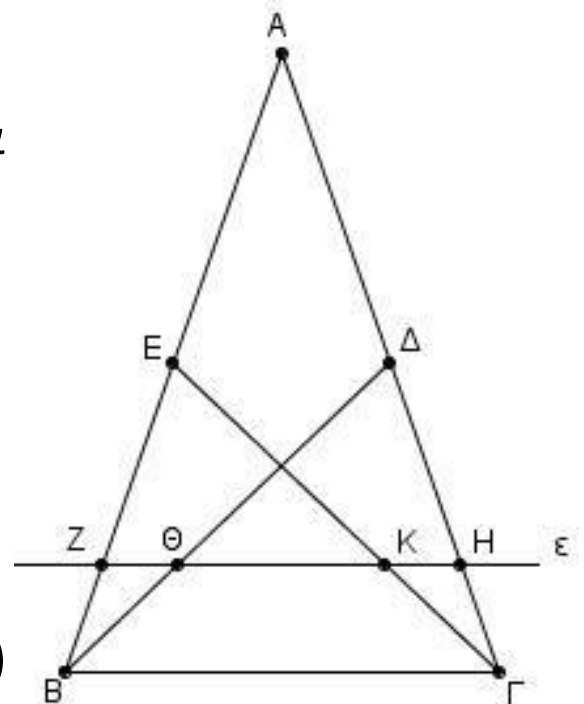
(Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $H\Gamma K$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) $ZK = H\Theta$.

(Μονάδες 8)



10. ΘΕΜΑ 4 (1783)

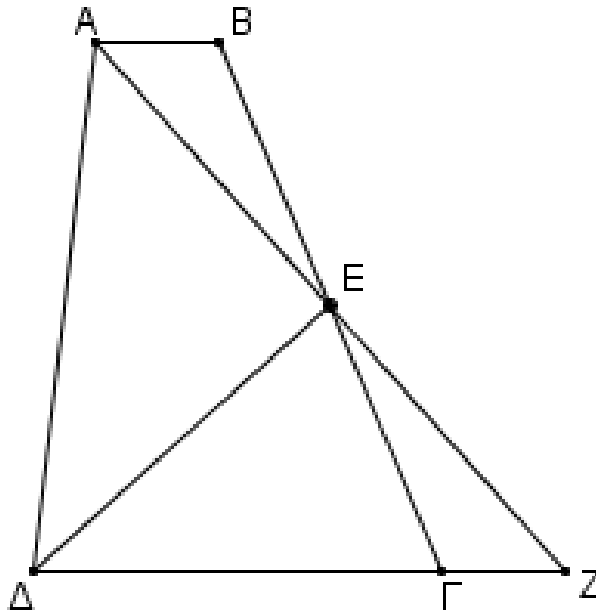
Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) ισχύει $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$. Αν η διχοτόμος τής γωνίας A τέμνει την $B\Gamma$ στο E και την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔAZ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

β) Το E είναι το μέσο της $B\Gamma$

(Μονάδες 10)



γ) Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπέζιου.

(Μονάδες 8)

11. ΘΕΜΑ 4 (1818)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία (ϵ) παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία

παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία

τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z ,

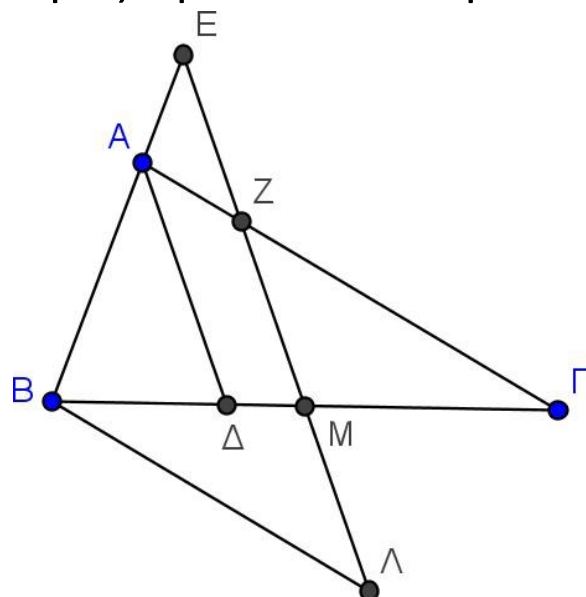
την ευθεία (ϵ) στο σημείο Λ

και την προέκταση της BA στο

σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και $B\Lambda E$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) $B\Lambda = \Gamma Z$. (Μονάδες 9)



γ) $AE = AG - BL$. (Μονάδες 8)

12. ΘΕΜΑ 4 (13822)

Δίνονται οι ευθείες (ϵ) και (ψ).

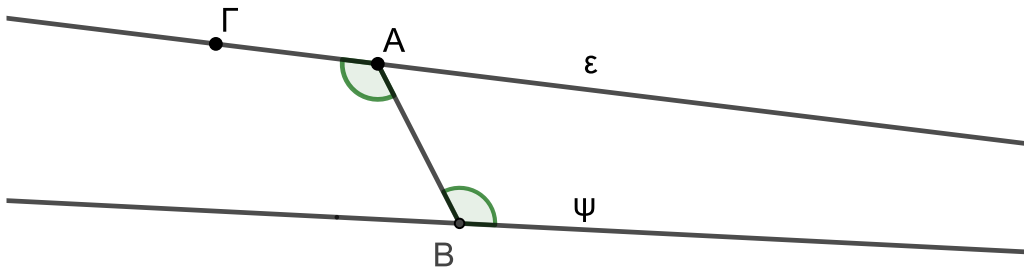
α) Αν η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από την $A\hat{B}\psi$:

i. Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\epsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ϵ και ψ και γιατί; (Μονάδες 6)

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών. (Μονάδες 7)

γ) Αν ισχύει $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ϵ και ψ και γιατί; (Μονάδες 6)



13. ΘΕΜΑ 4 (13843)

Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 4)

β) οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{A}x$ και $A\hat{B}y$ τέμνονται σε σημείο M . (Μονάδες 6)

γ) το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .

(Μονάδες 10)

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας BAx τέμνει την $\gamma'\gamma$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $AB\gamma$ τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$. (Μονάδες 5)

14. ΘΕΜΑ 4 (34335)

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax . Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

α) το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R) (Μονάδες 9)

β) η διχοτόμος της γωνίας BMx είναι κάθετη στη MO , (Μονάδες 9)

γ) το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας BMx . (Μονάδες 7)

Παράγραφοι: 4.4-4.5-4.6

15. ΘΕΜΑ 2(12704)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B}=70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}}=140^\circ$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ , ώστε $A\Delta = AB$. Να αποδείξετε ότι: α) $\hat{B\Delta\Gamma}=40^\circ$.

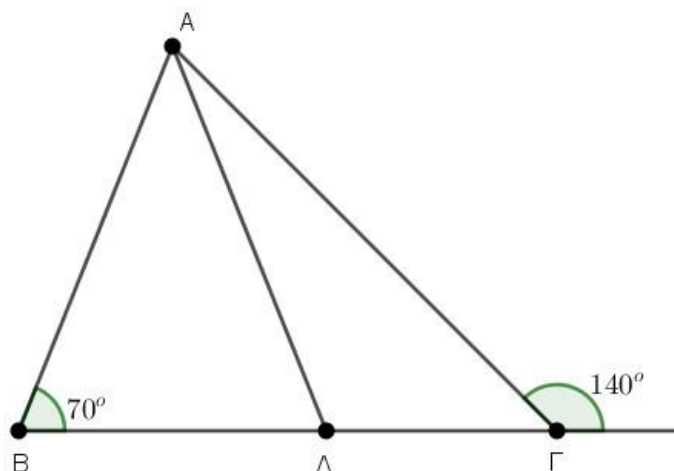
(Μονάδες 9)

β) $\hat{A\Delta\Gamma} = 110^\circ$.

(Μονάδες 7)

γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)



16. ΘΕΜΑ 2 (12707)

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 55^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το σημείο A και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Z ώστε $B\hat{Z}\Delta = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$. Η $Z\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

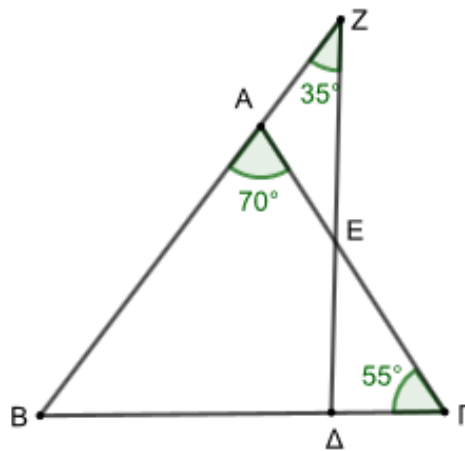
(Μονάδες 7)

β) $Z\hat{\Delta}B = 90^\circ$.

(Μονάδες 8)

γ) το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)



17. ΘΕΜΑ 2 (12708)

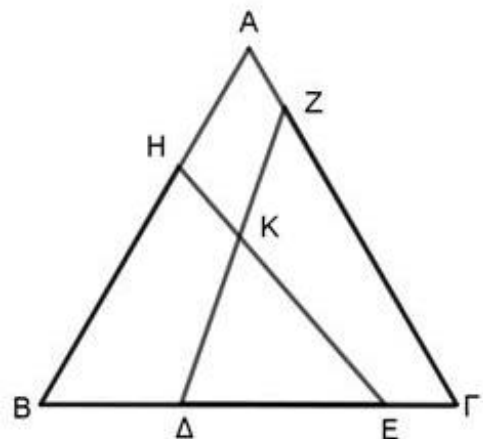
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $B\Gamma$ και GA θεωρούμε σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε $BE = \Gamma Z$. Στις πλευρές AB και GB θεωρούμε σημεία H και Δ αντίστοιχα ώστε $BH = \Gamma\Delta$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔZ και EH τέμνονται στο σημείο K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EH = \Delta Z$ και $B\hat{H}E = \Gamma\hat{\Delta}Z$.

(Μονάδες 12)

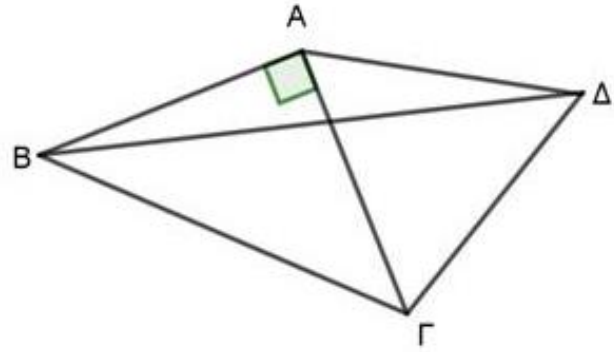
β) τα τρίγωνα BEH και $KE\Delta$ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.

(Μονάδες 13)



18. ΘΕΜΑ 2 (12709)

Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών B , Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $AB\Delta$.

(Μονάδες 12)

19. ΘΕΜΑ 2 (13442)

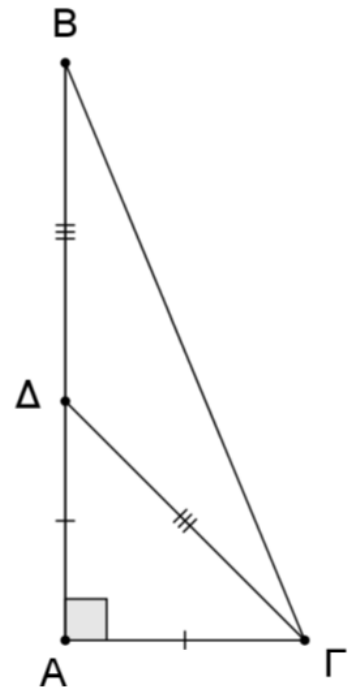
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά του AB θεωρούμε σημείο Δ ώστε $B\Delta = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

(Μονάδες 13)



20. ΘΕΜΑ 2 (13443)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\hat{\Gamma\hat{B}\Delta} = 20^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

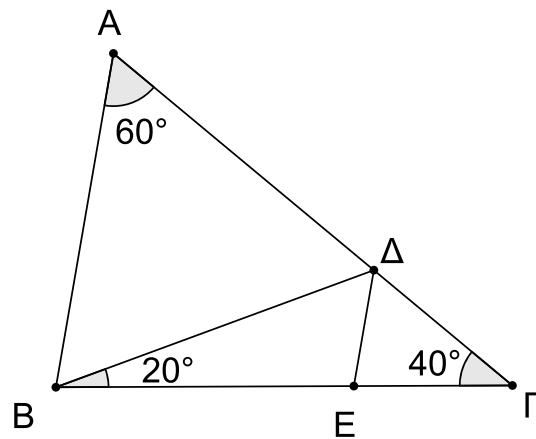
β) Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B\hat{\Delta}E} = 60^\circ$.

(Μονάδες 8)

ii. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.

(Μονάδες 7)

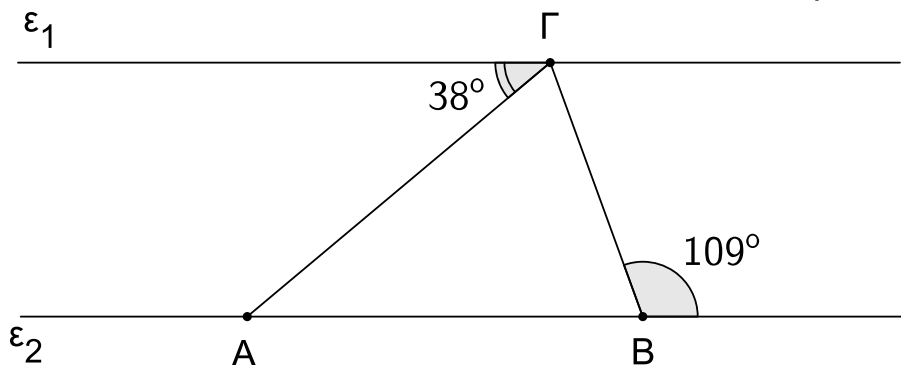


21. ΘΕΜΑ 2 (13535)

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ABΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές του A και B. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

- α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 15)
 β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

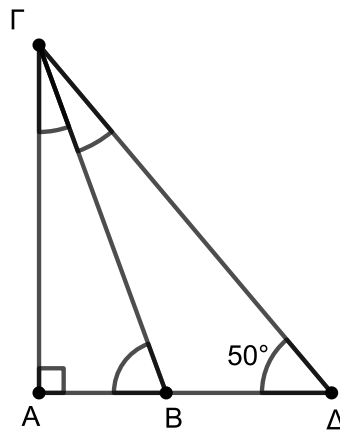
(Μονάδες 10)



22. ΘΕΜΑ 2 (13654)

Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{A\hat{B}\Gamma} - \hat{A\hat{\Gamma}B} = 50^\circ$ και $\hat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 50^\circ$.

- α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $\hat{A\hat{B}\Gamma}$ και $\hat{A\hat{\Gamma}B}$ του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι η ΓB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\hat{\Gamma}\Delta}$. (Μονάδες 15)



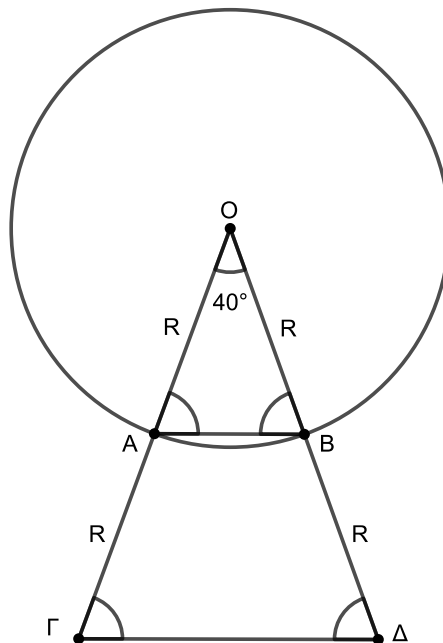
23. ΘΕΜΑ 2 (13687)

Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα AG και BD αντίστοιχα, έτσι ώστε $AG = OA$ και $BD = OB$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 70^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{O\Gamma\Delta}$ και $\widehat{O\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$. (Μονάδες 5)



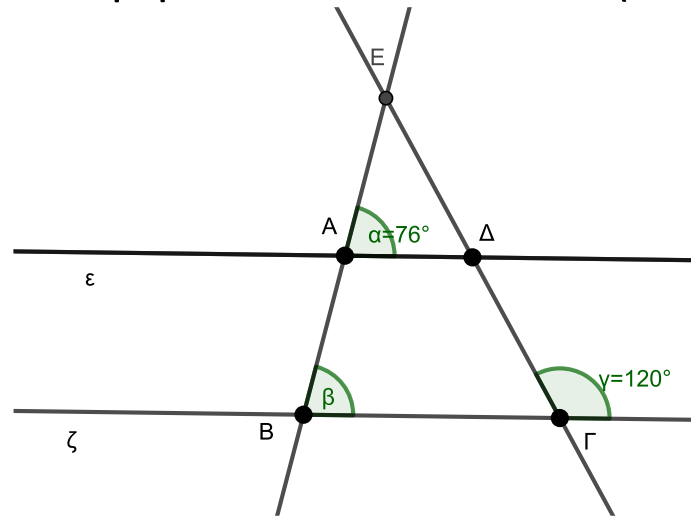
24. ΘΕΜΑ 2 (13741)

Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ϵ και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία $\hat{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ . (Μονάδες 12)

γ) Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ. (Μονάδες 8)



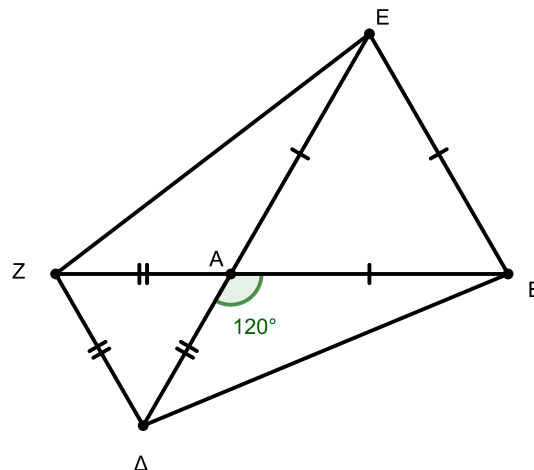
25. ΘΕΜΑ 2 (14844)

Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ. (Μονάδες 12)



26. ΘΕΜΑ 2 (34397)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BA=BE$, (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $B\hat{A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ (Μονάδες 13)

27. ΘΕΜΑ 2 (34413)

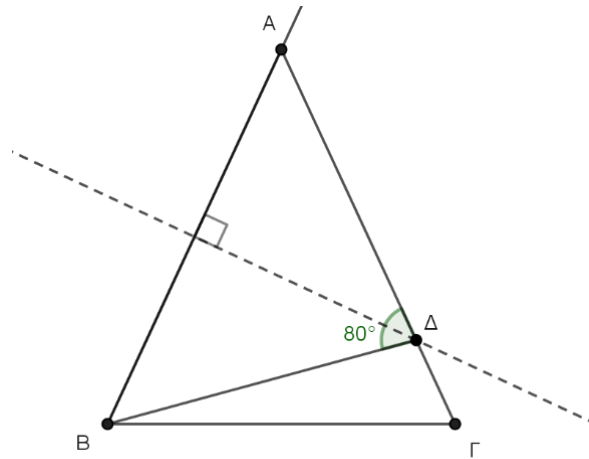
Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $\chi\hat{O}\gamma$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οχ και Ογ της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; (Μονάδες 25)

28. ΘΕΜΑ 2 (34418)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία Α είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB=AG$. (Μονάδες 10)

β) Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Δ. Αν η γωνία ΑΔΒ είναι ίση με 80° , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)



29. ΘΕΜΑ 2 (34500)

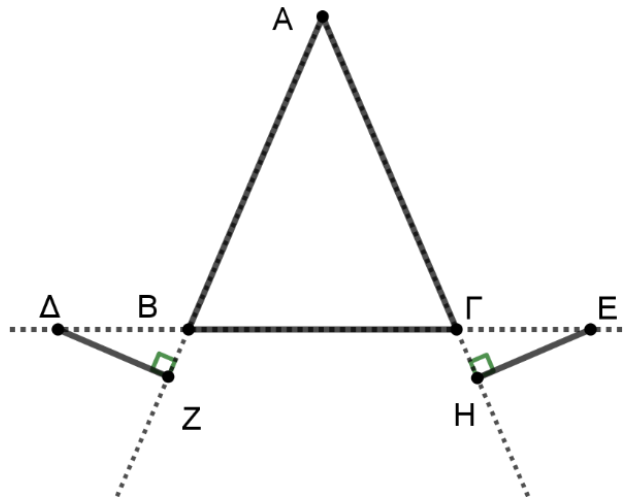
Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta=\Gamma E$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp AG$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ=\Gamma H$, (Μονάδες 10)

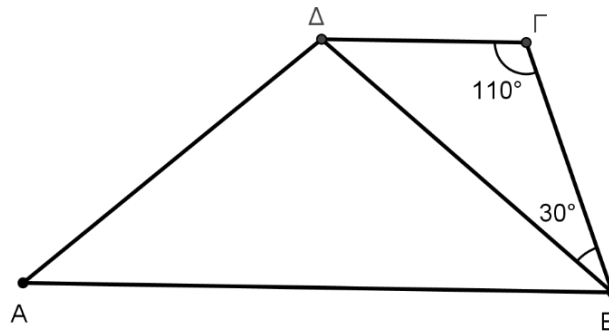
ii. το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH . (Μονάδες 8)



30. ΘΕΜΑ 2 (34506)

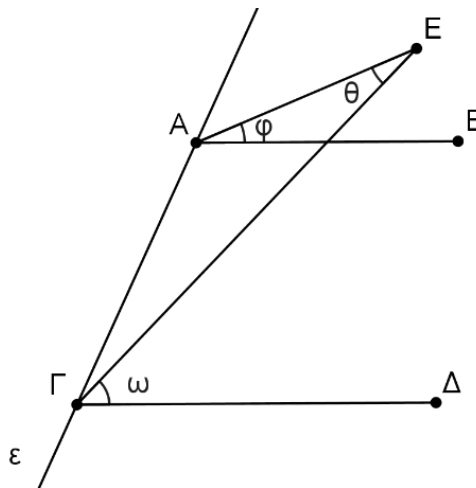
Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά AD . Αν είναι η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\hat{\Delta B\Gamma} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A\Delta B}$. (Μονάδες 25)



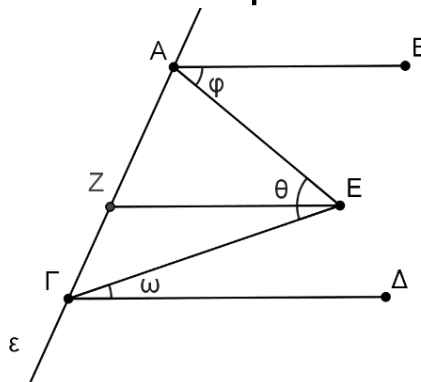
31. ΘΕΜΑ 2 (34770)

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε .

α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$. (Μονάδες 10)



β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$. (Μονάδες 15)



32. ΘΕΜΑ 2 (34775)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB=KA=KG$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και GKA είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

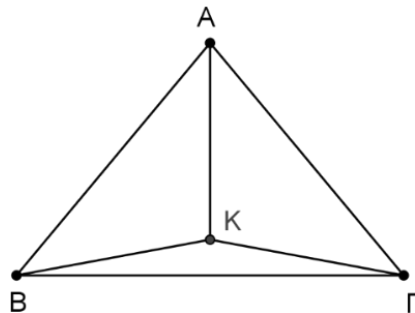
β) Να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες $\hat{ABK}$ και $\hat{AGK}$,

(Μονάδες 8)

ii. τη γωνία $\hat{BKG}$.

(Μονάδες 7)



33. ΘΕΜΑ 2 (34778)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\hat{A}_{εξ}$, όπου $\hat{A}_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

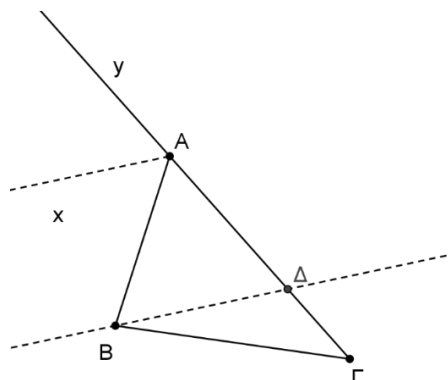
i. $\hat{BA} = 60^\circ$,

(Μονάδες 9)

ii. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο,

(Μονάδες 9)

β) Αν η γωνία $\hat{B\Delta A}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$. (Μονάδες 7)



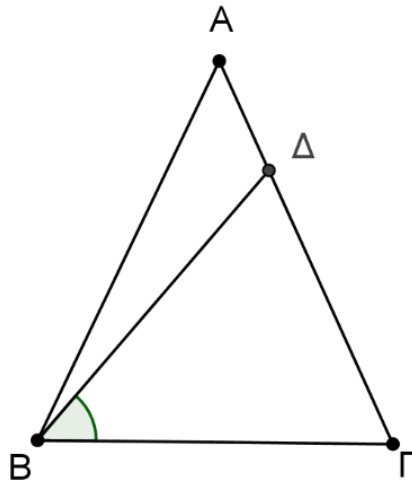
34. ΘΕΜΑ 2 (34785)

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$.

Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς AG , τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$,
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$.
(Μονάδες 13)



35. ΘΕΜΑ 2 (34786)

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς AG και $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$, (Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta E B$.

(Μονάδες 15)

36. ΘΕΜΑ 2 (34787)

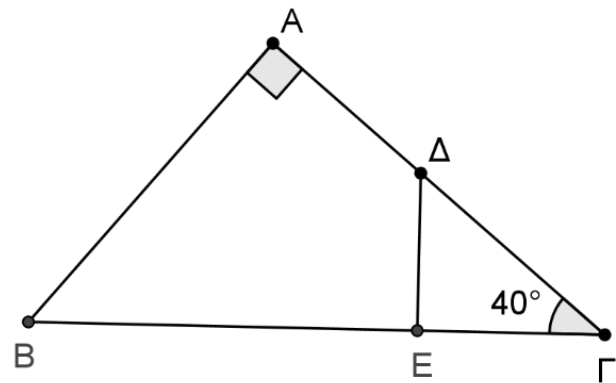
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$

($AB=AG$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^\circ$.

Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε

$B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε:



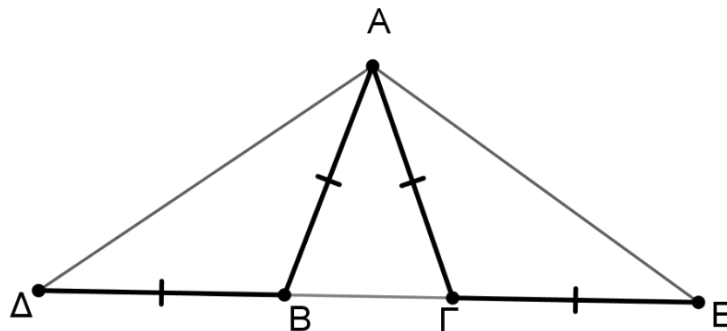
- α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$, (Μονάδες 10)
 β) τη γωνία $\widehat{A\Gamma}$. (Μονάδες 15)

37. ΘΕΜΑ 2 (36087)

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{A\hat{\Gamma}E} = 110^\circ$, (Μονάδες 10)
 β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα, (Μονάδες 10)
 γ) το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)



38. ΘΕΜΑ 2 (36101)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 80^\circ$ και $\widehat{B} = 20^\circ + \widehat{\Gamma}$, και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

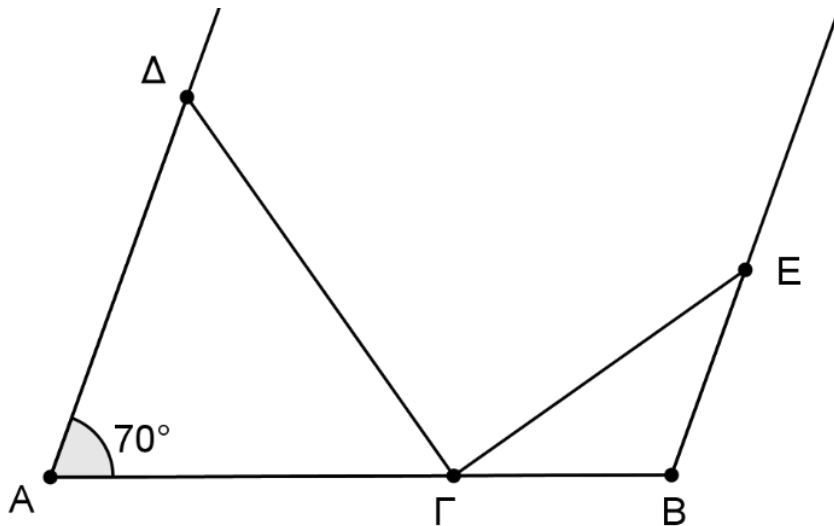
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$. (Μονάδες 12)
 β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A\hat{D}E}$ και $\widehat{E\hat{D}\Gamma}$ (Μονάδες 13)

39. ΘΕΜΑ 2 (36118)

Στο παρακάτω σχήμα, οι $A\Delta$ και BE είναι παράλληλες.

Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = A\Gamma$, $BE = B\Gamma$ και $\widehat{A} = 70^\circ$.

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $A\Delta\Gamma$ και $B\Gamma E$. (Μονάδες 16)
 β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta\hat{\Gamma}E} = 90^\circ$. (Μονάδες 9)



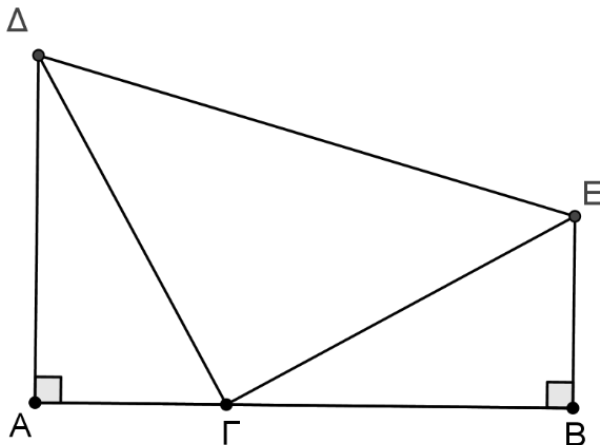
40. ΘΕΜΑ 2 (36163)

Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $AD=BG$ και $AG=BE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AG\Delta$ και BGE είναι ίσα. (Μονάδες 13)

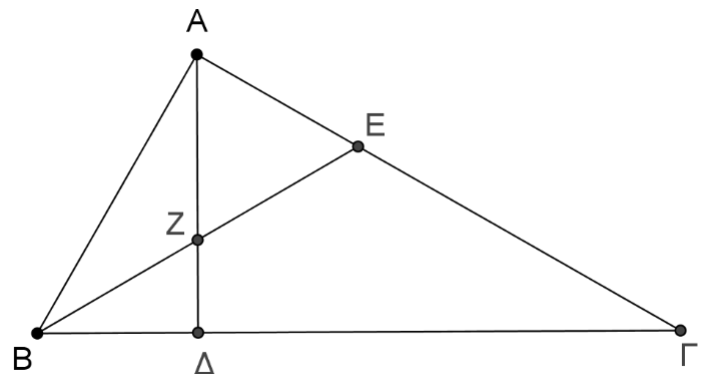
β) Αν η γωνία $\angle EGB = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο ΔGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 12)



41. ΘΕΜΑ 2 (36167)

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι 60° .



(Μονάδες 10)

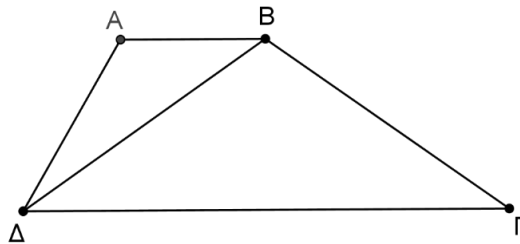
β) Αν το ύψος του $\triangle A\Delta$ και η διχοτόμος του $\triangle BE$ τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AZE$ είναι ισόπλευρο.
(Μονάδες 15)

42. ΘΕΜΑ 2 (36172)

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\widehat{B\Gamma} = 110^\circ$ και $\widehat{A\Delta B} = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\widehat{\Gamma}$, (Μονάδες 11)

β) τη γωνία $\widehat{A}$. (Μονάδες 14)



43. ΘΕΜΑ 2 (36228)

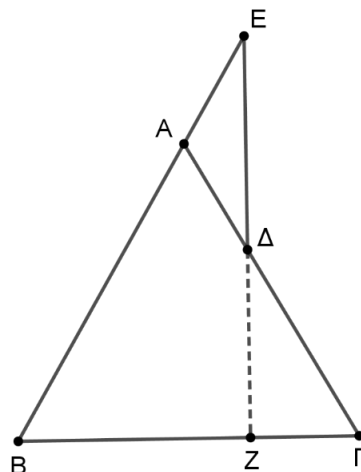
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE = A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\triangle A\Delta E$.

(Μονάδες 10)

β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

(Μονάδες 15)



44. ΘΕΜΑ 2 (36329)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

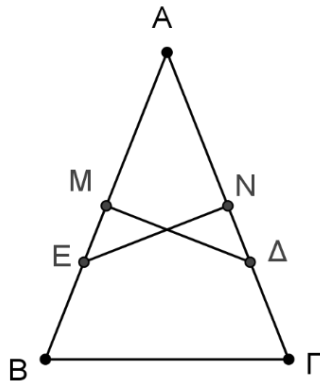
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι $M\Delta = NE$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Αν είναι $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = NE$.

Μονάδες 13)



45. ΘΕΜΑ 2 (36336)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $\angle B\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$.

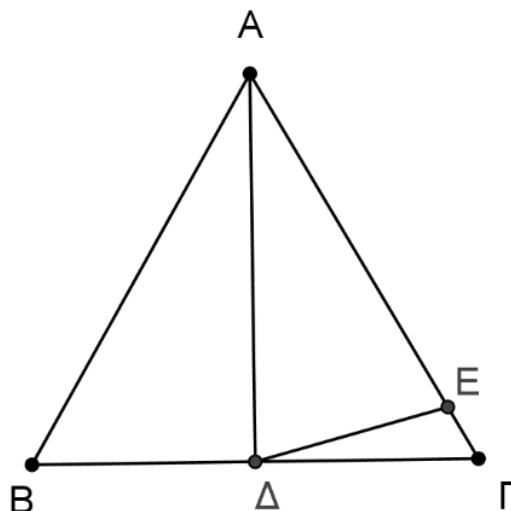
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$.

(Μονάδες 8)



46. ΘΕΜΑ 2 (37009)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο D φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ED\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}\hat{D}E$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{E}\hat{D}\Gamma$.

(Μονάδες 7)

47. ΘΕΜΑ 2 (37013)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα D και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 12)

48. ΘΕΜΑ 2 (17014)

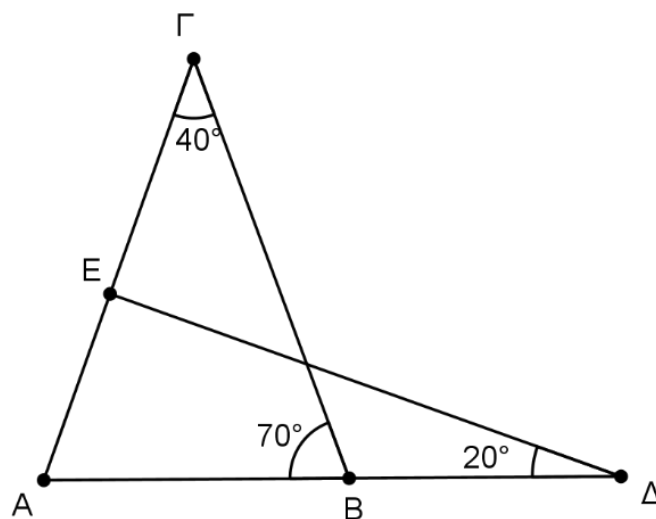
Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) η γωνία $\hat{A}E\Delta$ είναι ορθή.

(Μονάδες 13)



49. Θέμα 3 (11882)

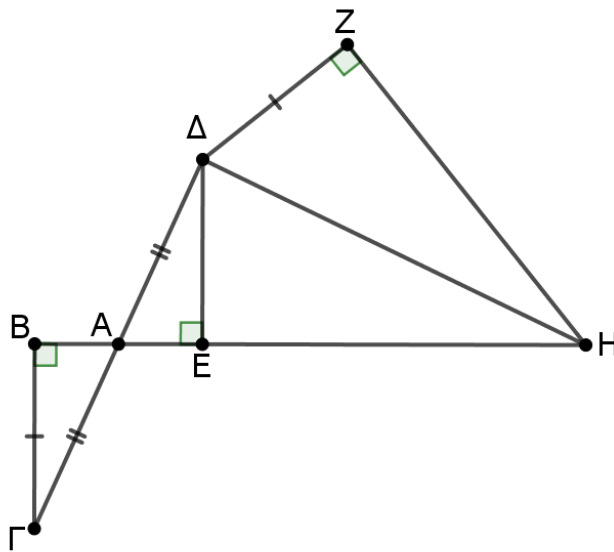
Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ και ΔZH είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{A\Delta E}$ και $\widehat{\Delta ZH}$, αντίστοιχα. Επίσης $A\Gamma = A\Delta$ και $B\Gamma = \Delta Z$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και ΔE είναι ίσα. Μονάδες 10

β) Η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $E\widehat{H}Z$. Μονάδες 6

γ) Αν, επιπλέον, οι $A\Delta$ και ΔH είναι κάθετες, τότε $\widehat{A\Delta E} = \frac{E\widehat{H}Z}{2}$.
Μονάδες 9



50. ΘΕΜΑ 3 (12200)

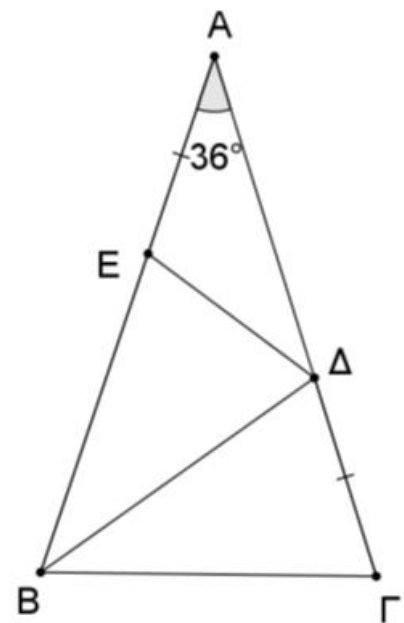
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\widehat{A} = 36^\circ$. Έστω $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και E σημείο της πλευράς AB ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = B\Delta$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

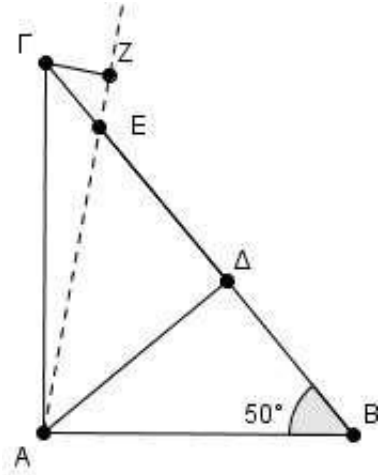
γ) Η παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της ΔE (προς το



Ε) στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BΔZ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

51. ΘΕΜΑ 4 (1708)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το ύψος του AΔ και σημείο E στην ΔΓ ώστε ΔE=BΔ. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

ii. $\hat{\Gamma A E} = 10^\circ$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZΓE.

(Μονάδες 9)

52. ΘΕΜΑ 4 (1784)

Δίνεται τραπέζιο AΔEB, με $A\Delta // BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = A\Delta + BE$, και O το μέσον της ΔE. Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = A\Delta$ και $BZ = BE$.

Αν γωνία $\hat{\Delta A Z} = \varphi$,

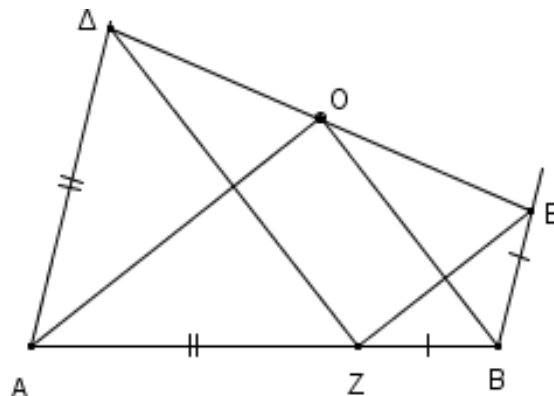
α) να εκφράσετε τη γωνία AZΔ σε συνάρτηση με τη φ .

(Μονάδες 8)

β) να εκφράσετε τη γωνία EZB σε συνάρτηση με τη φ .

(Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των



τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα.

(Μονάδες 9)

53. ΘΕΜΑ 4 (1792)

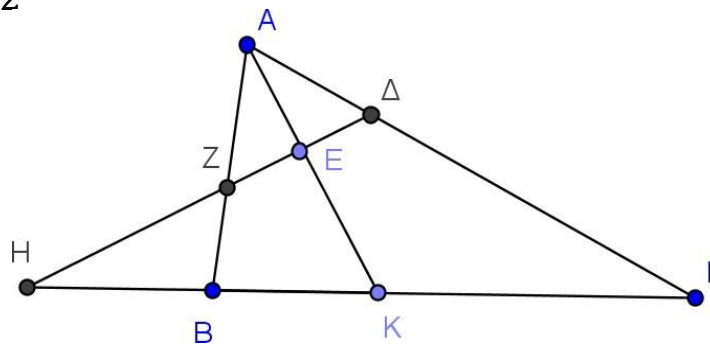
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \angle Z\hat{A}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \quad (\text{Μονάδες 7})$$

$$\beta) ZK = K\Delta \quad (\text{Μονάδες 8})$$

$$\gamma) \angle Z\hat{H}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} \quad (\text{Μονάδες 10})$$



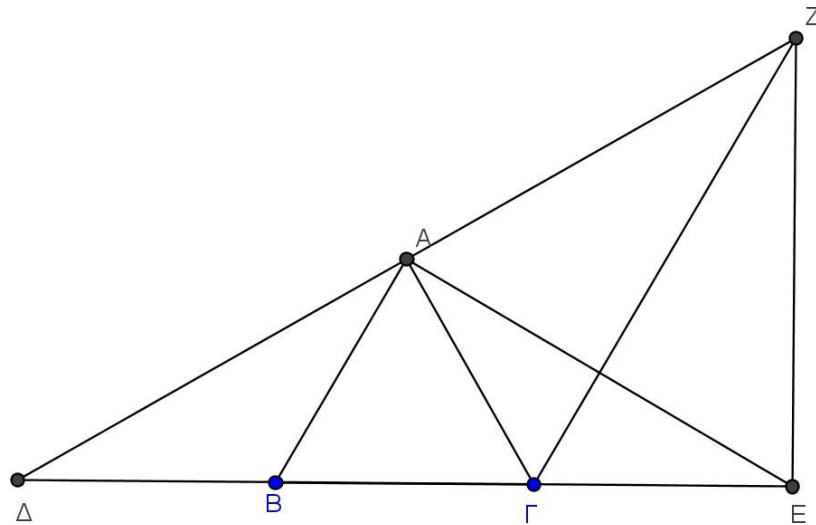
54. ΘΕΜΑ 4 (1819)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και την προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ζ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ.
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$.
(Μονάδες 12)
(Μονάδες 5)

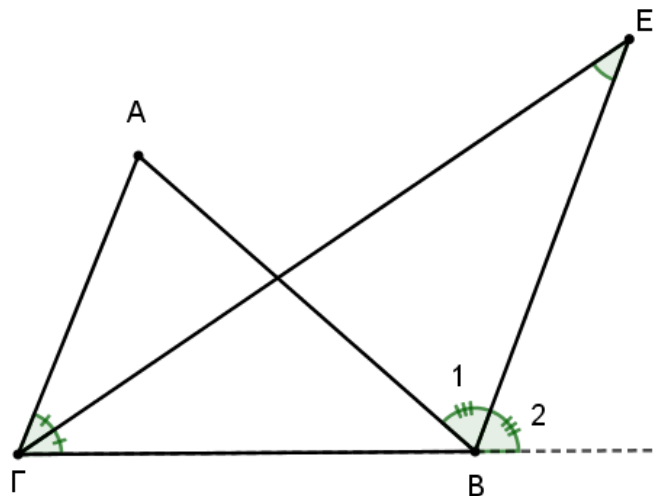


55. ΘΕΜΑ 2 (1851)

Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$ και της εξωτερικής γωνίας του $\hat{B}$, τέμνονται στο Ε. Δίνεται ότι $\angle ABE = 70^\circ = 2\angle \Gamma EB$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.
(Μονάδες 13)



56. ΘΕΜΑ 4 (1894)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του $\angle A$. Έστω ΔK και ΔP

οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = \hat{\Delta E \Gamma}$ (Μονάδες 8)

ii. $\Delta E = \Delta B$ (Μονάδες 8)

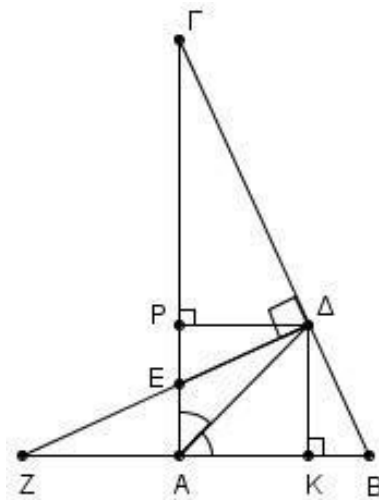
β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta \Gamma Z$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 (13499)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB < A\Gamma$ και AH το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔZ και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

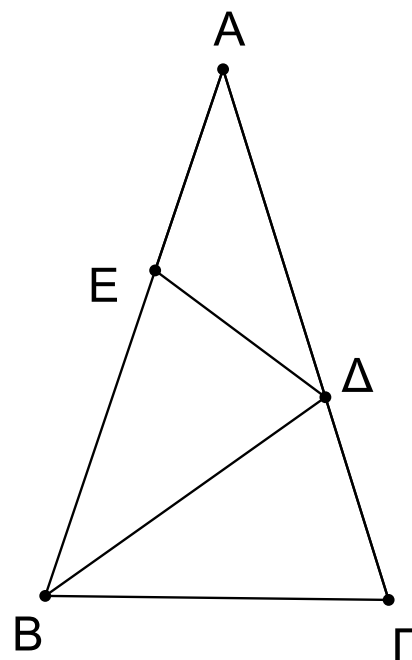
α) $\hat{\Gamma A \Delta} = \hat{\Delta A H}$ και $\hat{E A B} = \hat{H A E}$. (Μονάδες 14)

β) $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$. (Μονάδες 11)



57. ΘΕΜΑ 4 (13537)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $A\Delta = B\Delta = B\Gamma$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $AE = \Gamma\Delta$.



α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$. (Μονάδες 6)
- ii. $\hat{A} = 36^\circ$. (Μονάδες 6)
- iii. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

58. ΘΕΜΑ 4 (13697)

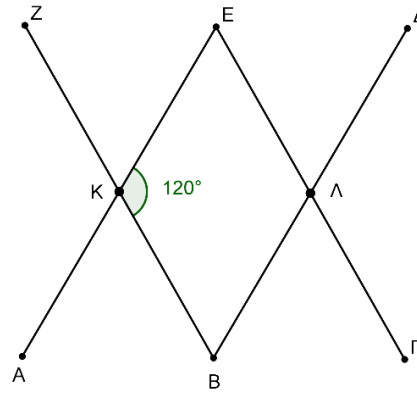
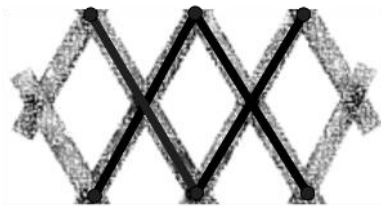
Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα AE , BZ , $B\Delta$ και ΓE αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.

Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $AE \parallel B\Delta$ και $BZ \parallel \Gamma E$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή K κοινό μέσο των AE , BZ και Λ κοινό μέσο των $B\Delta$, ΓE . Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι AE και BZ με κορυφή το κοινό τους μέσο K , η γωνία $B\hat{K}E$, είναι ίση με 120° .

α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^\circ$. (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα AKB και $B\Lambda\Gamma$ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 6)



59. ΘΕΜΑ 4 (13750)

Από σημείο B εξωτερικό ενός κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα BA . Ενώνουμε το σημείο B με το κέντρο O του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $ΟΓ = ΒΟ$. Από το σημείο $Γ$ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $ΓΔ$, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = ΔΓ$

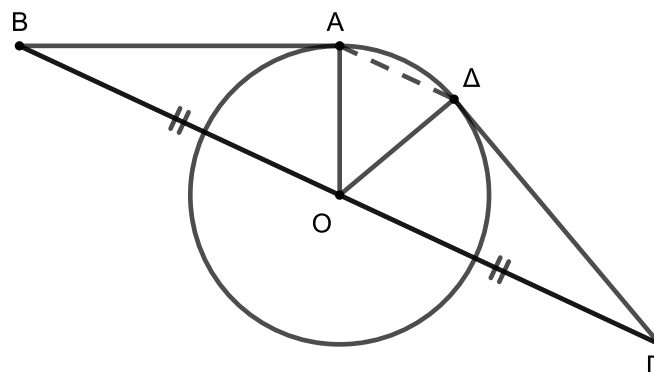
(Μονάδες 08)

ii. $ΑΔ // ΒΓ$

(Μονάδες 10)

β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος BA είναι ίσο με την ακτίνα R , τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο $ΑΟΔ$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



60. ΘΕΜΑ 4 (13752)

Σε τρίγωνο $ABΓ$ με $\widehat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο $Δ$ της πλευράς $ΑΓ$. Φέρουμε τμήμα $ΔΕ$ ίσο και παράλληλο με την

πλευρά ΒΓ και από το σημείο Ε φέρουμε τμήμα ΕΖ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $\widehat{\Delta\hat{E}Z}$ και $\widehat{A\hat{B}G}$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.

2. Οπότε $\Delta\hat{E}Z = A\hat{B}G$.

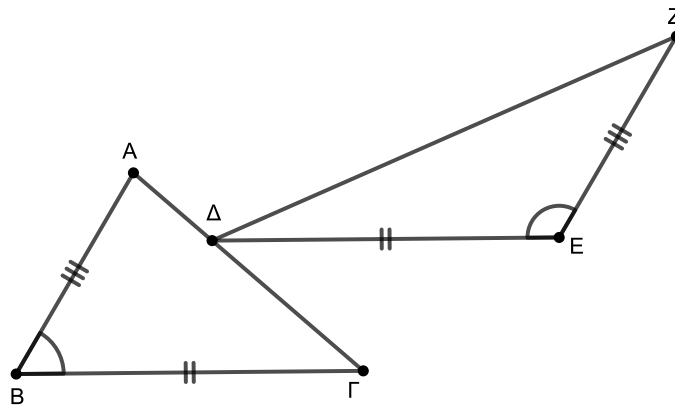
3. Τα τρίγωνα ΔEZ και ABG είναι ίσα.

4. Το τμήμα ΔZ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ. (Μονάδες 08)

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3. (Μονάδες 10)

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\widehat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΓ και ΔΖ για τα διάφορα είδη της γωνίας $\widehat{B}$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 07)



61. ΘΕΜΑ 4 (34321)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BG = 2ED$,

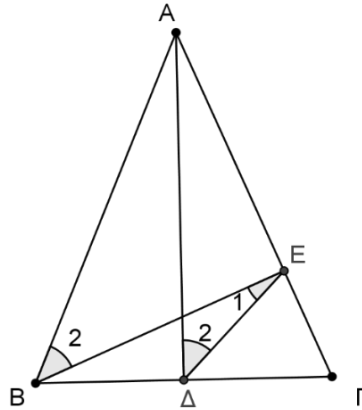
(Μονάδες 7)

β) $\widehat{E}_1 = \frac{\widehat{A}}{2}$,

(Μονάδες 9)

$$\gamma) \widehat{B}_2 = \widehat{A}_2$$

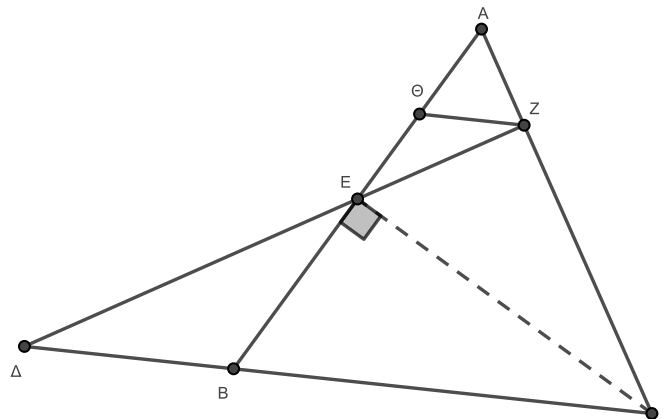
(Μονάδες 9)



62. ΘΕΜΑ 4 (37097)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $ΓΕ$. Στην προέκταση της $ΓΒ$ (προς το μέρος του B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. Έστω ότι, η ευθεία ΔE τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘEZ . (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2 \cdot \Theta Z$. (Μονάδες 5)
- δ) Να αποδείξετε ότι $3 \cdot AB = 4 \cdot \Theta B$. (Μονάδες 5)



63. ΘΕΜΑ 4 (37164)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$).

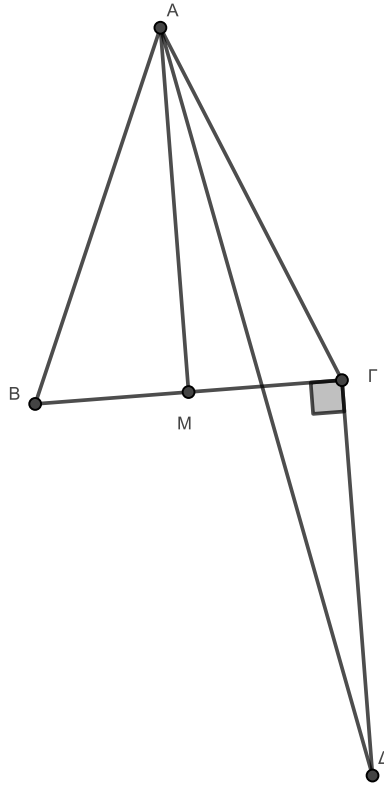
Να αποδείξετε ότι:

- α) $AM \parallel \Gamma\Delta$. (Μονάδες 6)

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{M\hat{A}\Gamma}$. (Μονάδες 7)

γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$. (Μονάδες 7)

δ) $AD < 2 AB$. (Μονάδες 5)



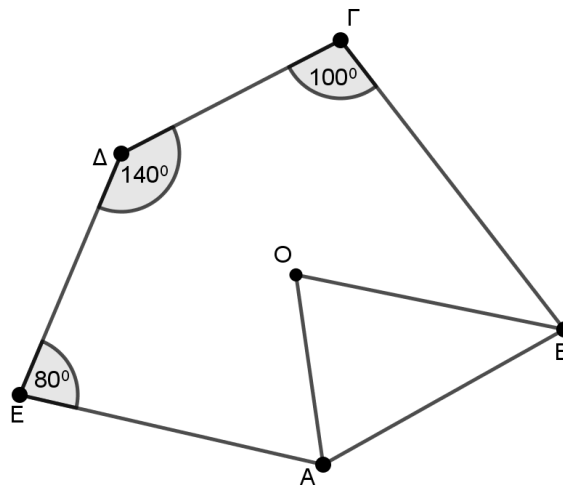
Παράγραφος: 4.8

64. Θέμα 2 (12640)

Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος $\widehat{A} + \widehat{B}$. (Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 13)



65. Θέμα 2 (12644)

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.

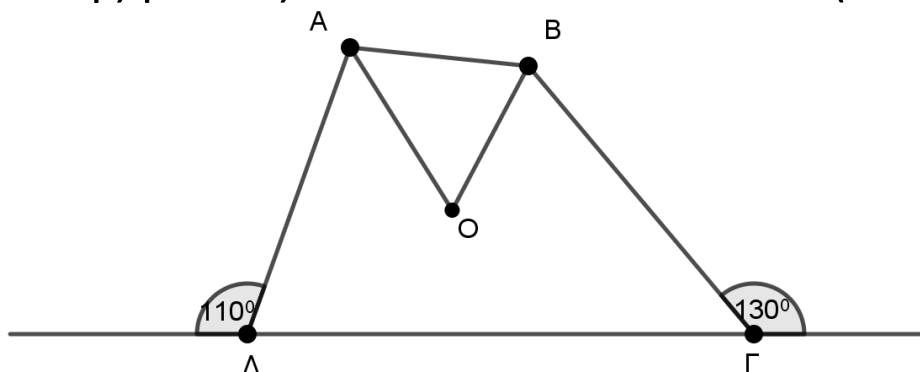
(Μονάδες 9)

β) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.

(Μονάδες 9)

γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

(Μονάδες 7)

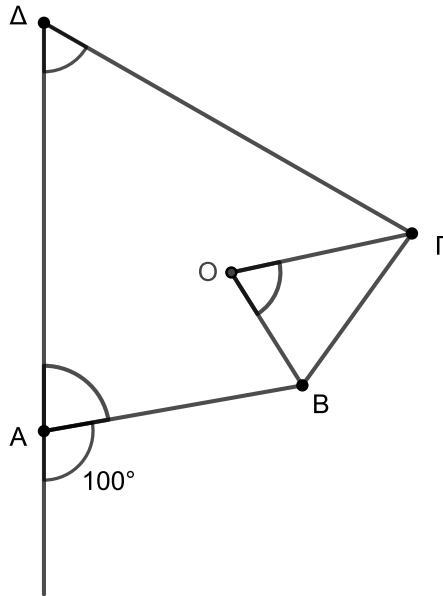


66. ΘΕΜΑ 2 (13619)

Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με $\hat{A}_{\text{εξ}} = 100^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ$.

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ο, τότε:

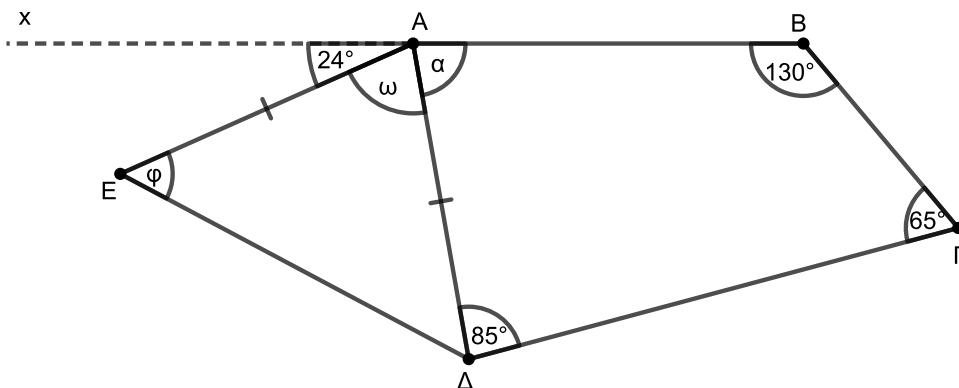
- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{D}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{BO\Gamma} = 70^\circ$. (Μονάδες 15)



67. ΘΕΜΑ 2 (13749)

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$. (Μονάδες 08)
- β) Τη γωνία $\hat{\omega}$. (Μονάδες 08)
- γ) Τη γωνία $\hat{\varphi}$. (Μονάδες 09)



68. ΘΕΜΑ 2 (34315)

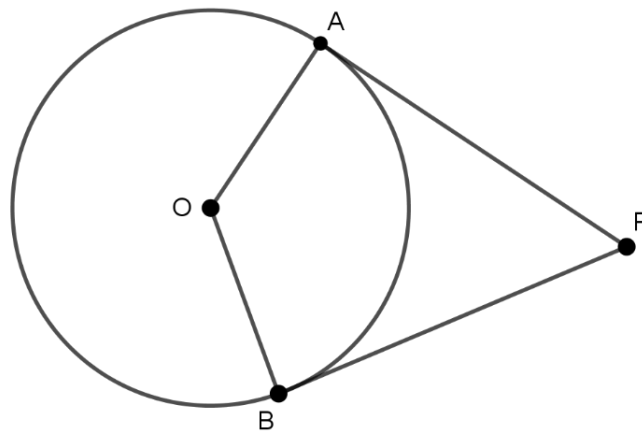
Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας 4 cm και εξωτερικό του σημείο P . Έστω PA, PB τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρονται από το P , τα σημεία επαφής τους A, B με τον κύκλο

αντίστοιχα και τέτοια ώστε η γωνία $\widehat{APB}$ να ισούται με 60° .

α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνίας $\widehat{AOB}$ είναι ίσο με 120° . (Μονάδες 7)

β) Αν PO η διακεντρική ευθεία του σημείου P , τότε να υπολογίσετε:

- ι. το μέτρο της γωνίας $\widehat{APO}$, (Μονάδες 9)
- ii. το μήκος του τμήματος OP . (Μονάδες 9)

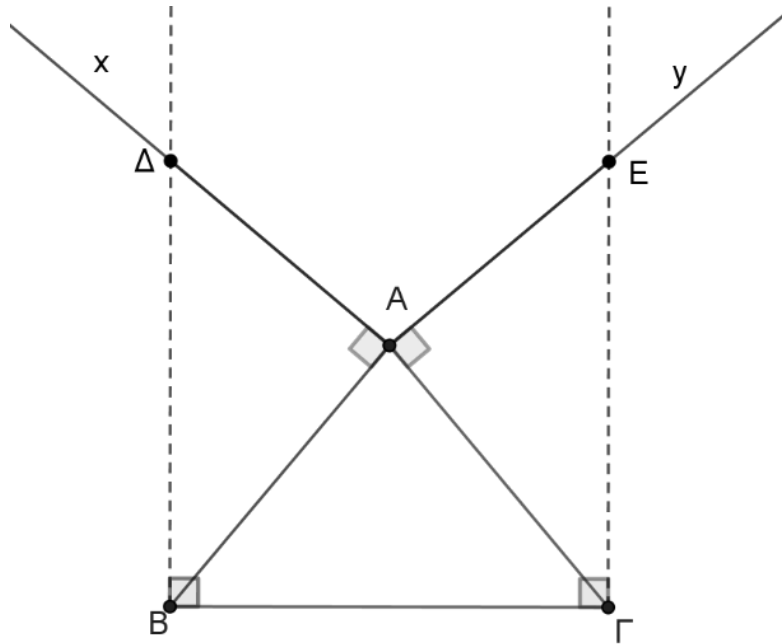


69. ΘΕΜΑ 2 (34422)

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\widehat{BAG}$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου που έχει για κορυφές τα σημεία A, E και Δ . (Μονάδες 13)



70. ΘΕΜΑ 2 (36114)

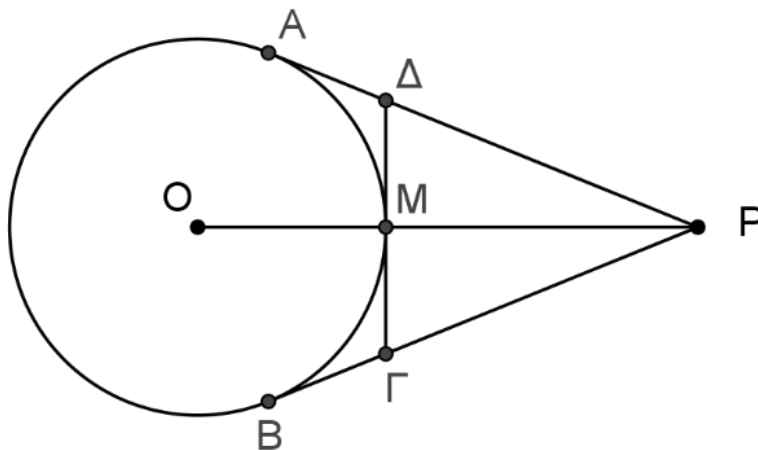
Δίνεται κύκλος κέντρου O και ένα εξωτερικό του σημείο P , από το οποίο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου PA και PB . Έστω ότι το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $\widehat{APB}$ είναι 40° να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{AOB}$.

(Μονάδες 12)



71. ΘΕΜΑ 2 (36117)

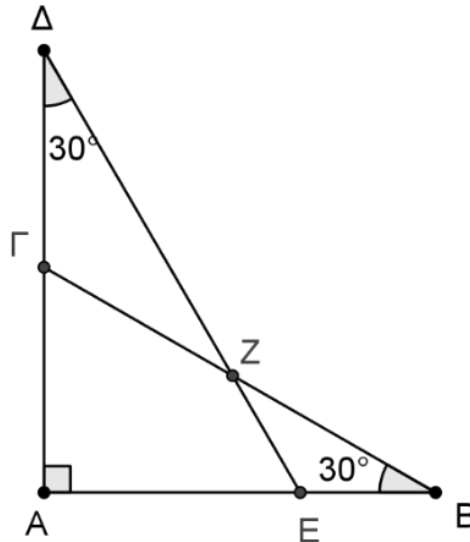
Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία A ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$ και Z το σημείο τομής των πλευρών τους $B\Gamma$ και ΔE αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\epsilon Z\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και EBZ είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 12)



72. ΘΕΜΑ 4 (34316)

Δίνεται κύκλος κέντρου O και διάμετρός του AB . Έστω Γ το μέσο ενός ημικυκλίου του, Δ τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και $\hat{A\Gamma B} = \hat{A\Delta B} = 90^\circ$. Στην προέκταση της ΔB προς το μέρος του B θεωρούμε σημείο E ώστε $BE = AD$.

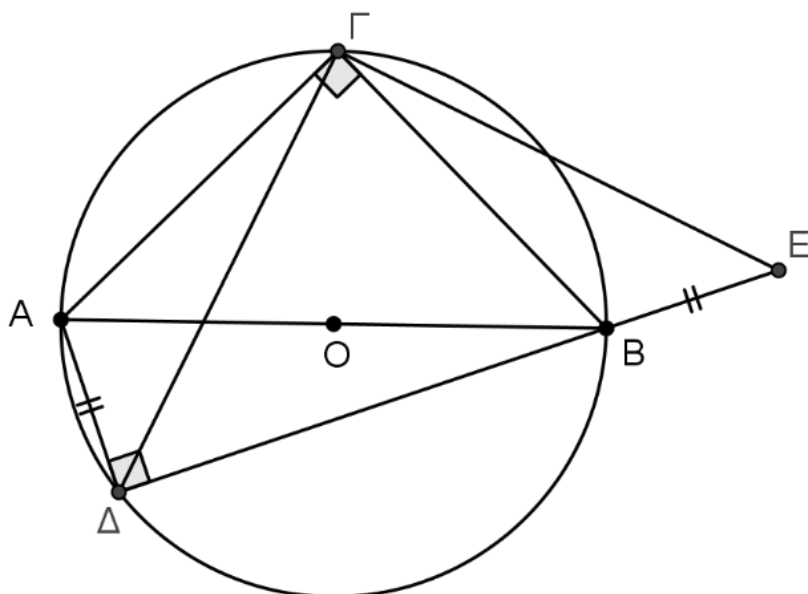
α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες $\hat{\Gamma\Delta A}$ και $\hat{\Gamma\Delta E}$ είναι ίσες, (Μονάδες 6)

ii. τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα, (Μονάδες 7)

iii. η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE (Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτόμενη του κύκλου. (Μονάδες 6)



«Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-archiki-selida>)».



Γενικό Λύκειο Άργους Ορεστικού
Σχολικό έτος 2024-2025