

Γεωμετρία Β΄ Λυκείου

Εμβαδά πολυγωνικών
χωρίων (τράπεζα
θεμάτων)

ΓΕΛ ΑΡΓΟΥΣ ΟΡΕΣΤΙΚΟΥ

Γεώργιος Ε. Καραφέρης

Τράπεζα Θεμάτων έως 7/7/2024**Κεφάλαιο 10^ο****Παράγραφος 10.2****1. ΘΕΜΑ 4 (18562)**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $a\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του. (Μονάδες 05)

β) i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιγράφηκε παρα-πάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμη πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

2. ΘΕΜΑ 4 (18564)

Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας. (Μονάδες 10)

β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που θα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις

απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου. (Μονάδες 08)

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

3. ΘΕΜΑ 4 (21183)

Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔEZH έχει πλευρά 1.

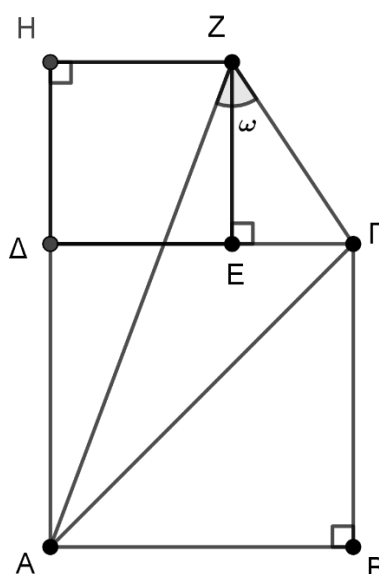
α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 2$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

ii. $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $\widehat{AZ\Gamma} = \hat{\omega}$. (Μονάδες 5)



Παράγραφος 10.3

4. ΘΕΜΑ 2 (16102)

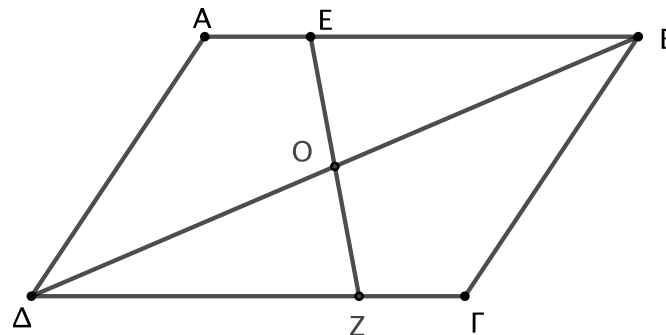
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\Delta O Z) = (B O E)$.

(Μονάδες 10)

β) $(\Delta O E A) = (B \Gamma Z O)$.

(Μονάδες 15)



5. ΘΕΜΑ 2 (16817)

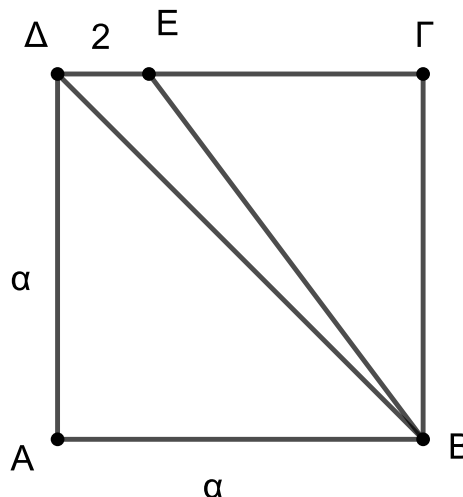
Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε $\Delta E = 2$. Αν γνωρίζουμε ότι: $(B E \Delta) = \frac{(A B \Gamma \Delta)}{8}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 12)

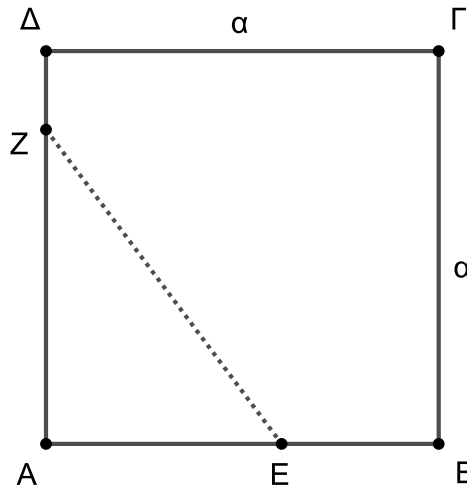


6. ΘΕΜΑ 2 (16821)

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $A E = \frac{3}{5} A B$, και στην πλευρά ΑΔ θεωρούμε σημείο Ζ έτσι ώστε $A Z = \frac{4}{5} A \Delta$.

α) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά, του τριγώνου ΑΕΖ και του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 13)



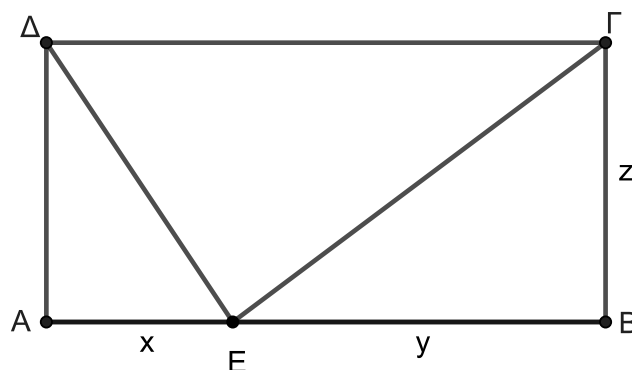
7. ΘΕΜΑ 2 (18550)

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 36 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 4$, $y = 8$ και $z = 6$. (Μονάδες 13)

β) i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ.

ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΕ προς το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

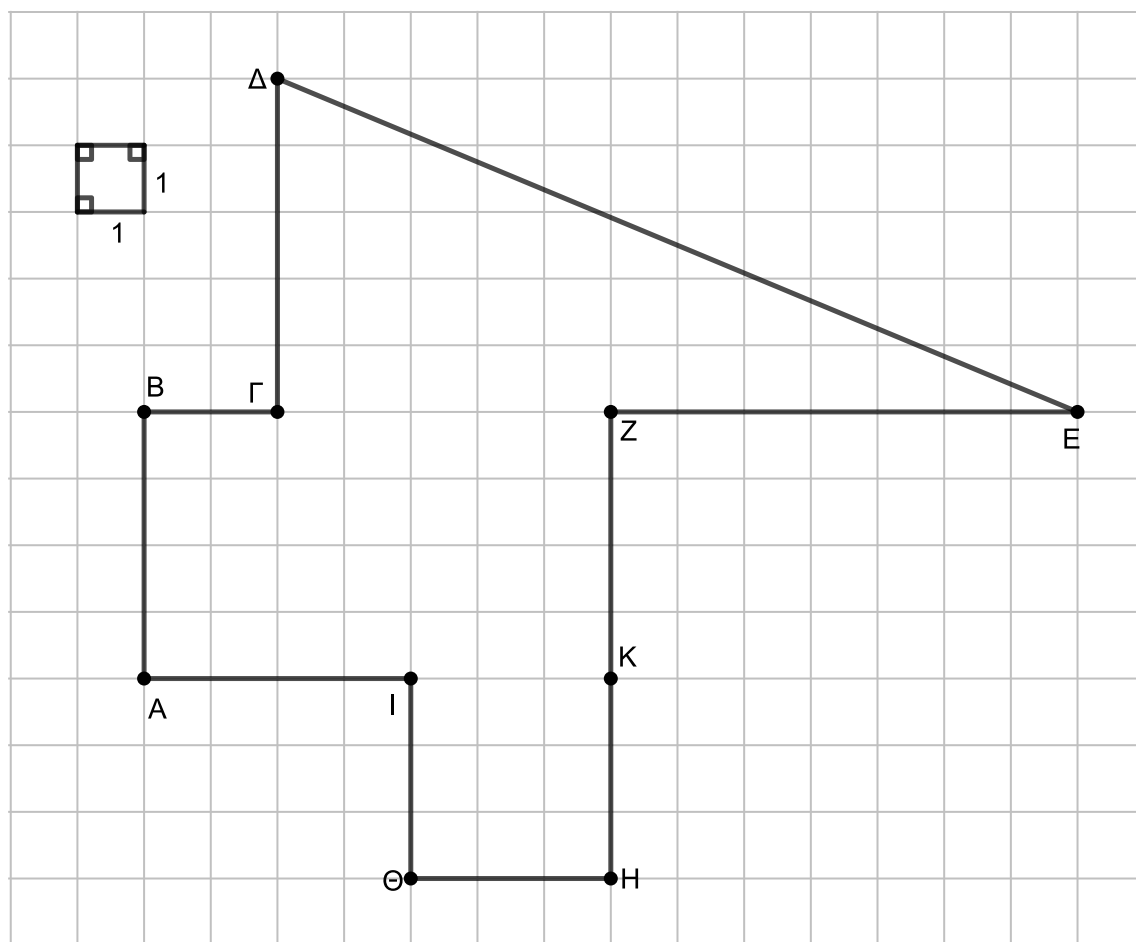


8. ΘΕΜΑ 2 (18558)

Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΑ. (Μονάδες 15)



9. ΘΕΜΑ 2 (18559)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ έχει μήκος 3 και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με 4. Αν ΒΕ=5, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΕ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ.

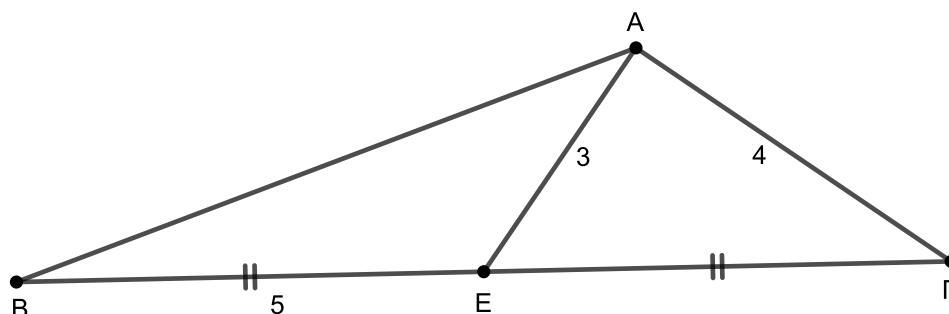
(Μονάδες 10)

β) i. Να δικαιολογήσετε γιατί $(ABE) = (AGE)$.

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)



10. ΘΕΜΑ 2 (18560)

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

- α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 13)
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδό
i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ. (Μονάδες 12)

11. ΘΕΜΑ 2 (21101)

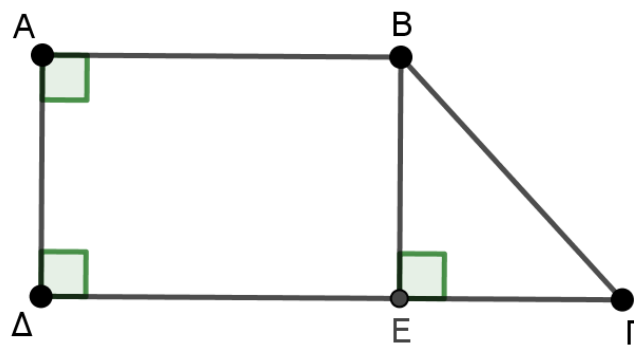
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $BΓ = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{2}$, $ΑΓ = 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 09)
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)
- γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 09)

12. ΘΕΜΑ 2 (21823)

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $ΑΔ = 4$, $AB = 5$, $\Delta Γ = 8$. Από την κορυφή Β του τραπεζίου, φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.

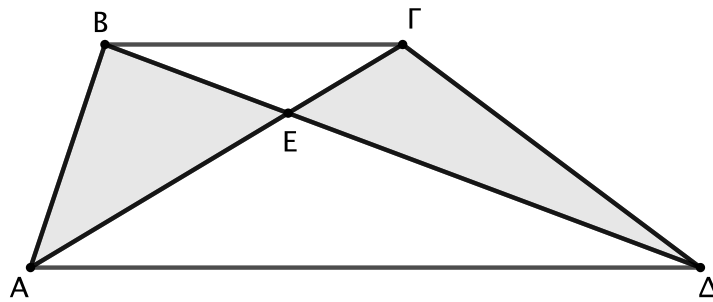
- α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΓ. (Μονάδες 8)
- β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ του τραπεζίου. (Μονάδες 9)
- γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)}$. (Μονάδες 8)



13. ΘΕΜΑ 2 (22032)

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ ($BΓ \parallel ΑΔ$) και έστω Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 13)
- β) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων ΑΒΕ και ΔΓΕ. (Μονάδες 12)



14. ΘΕΜΑ 2 (22035)

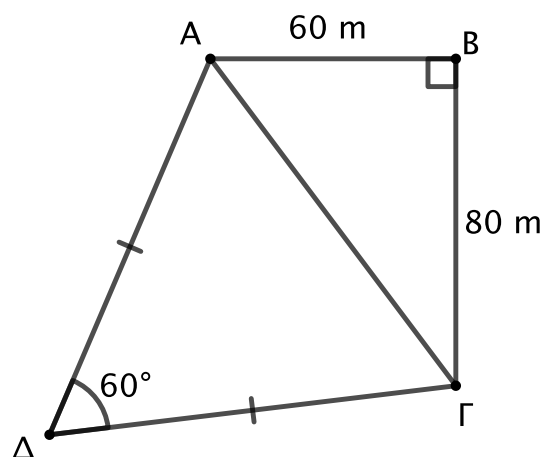
Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με $AB = 60 \text{ m}$, $B\Gamma = 80 \text{ m}$, $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$ και $AD = \Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ. (Μονάδες 09)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 04)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ. Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος; (Μονάδες 12)



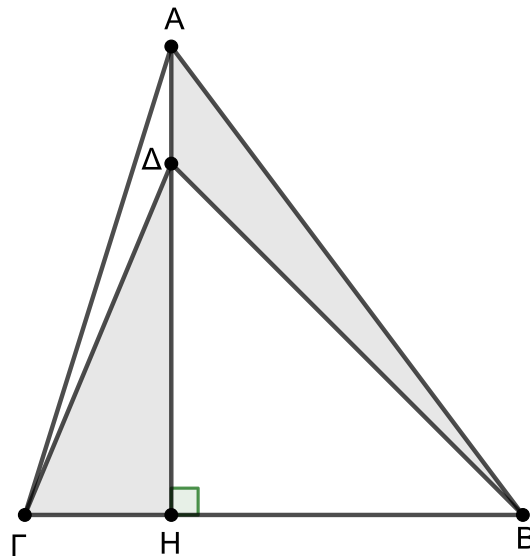
15. ΘΕΜΑ 2 (22331)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος το ΑΗ είναι ύψος και το Δ σημείο του ΑΗ. Δίνονται $AB = 20$, $BH = 12$, $\Gamma H = 5$ και ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ είναι $(AB\Delta) = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι $AH = 16$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 4$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΗ. (Μονάδες 6)

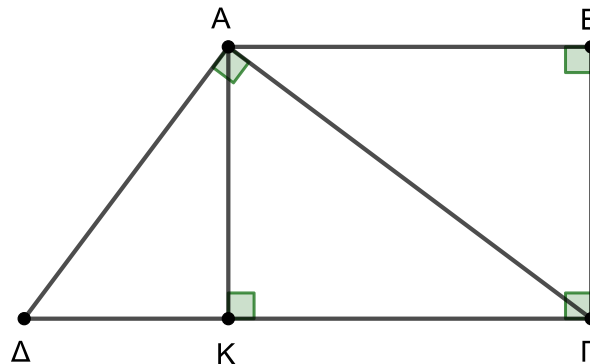


16. ΘΕΜΑ 2 (22338)

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ και στο οποίο η πλευρά $A\Delta$ και η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι κάθετες. Έστω K η προβολή της κορυφής A στην πλευρά $\Gamma\Delta$, $K\Delta = 9$ και $K\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι $AK = 12$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)



17. ΘΕΜΑ 2 (22339)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και έστω Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Έστω επίσης $AB = 15$ και $\Delta B = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Gamma = 25$,

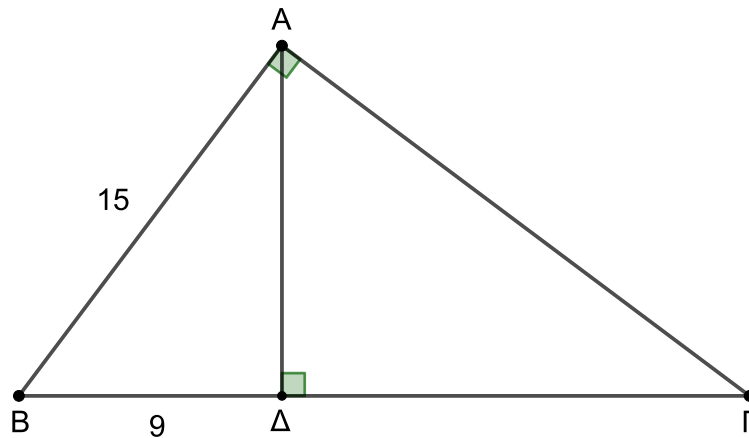
(Μονάδες 9)

ii. $A\Gamma = 20$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)



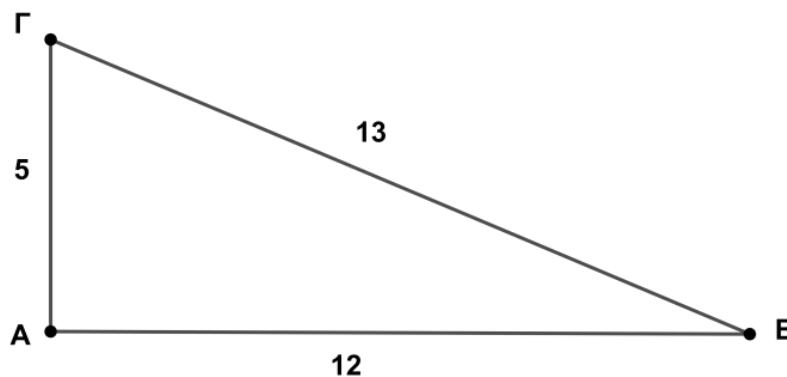
18. ΘΕΜΑ 2 (22513)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 12$, $A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 13$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος ν_α . (Μονάδες 9)



19. ΘΕΜΑ 3 (17908)

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 9)

β) Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A , τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔB . (Μονάδες 9)

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)

20. ΘΕΜΑ 4 (16135)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma = 10$ και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην $B\Gamma$.

α) Αν $\Delta B = 2$ να υπολογίσετε:

i. το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$,

(Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

β) Υποθέστε ότι το σημείο A κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$.

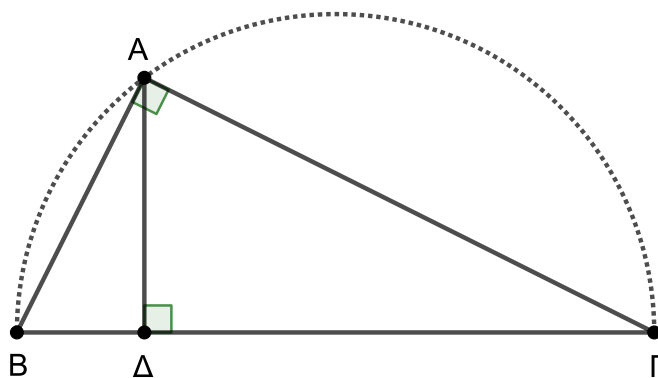
i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = 5A\Delta$.

(Μονάδες 7)

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του A πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν υπερβαίνει το 25». Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



21. ΘΕΜΑ 4 (16807)

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB = 24$, $B\Gamma = 12$ και σημείο E στην ευθεία AB .

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ όταν :

i. Το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AB .

ii. Το σημείο E ταυτίζεται με την κορυφή A του ορθογωνίου.

(Μονάδες 16)

β) Αφήνουμε το σημείο E να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος AB προς το B , απομακρυνόμενο από το σημείο B .

i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ αυξάνεται ή μειώνεται.

(Μονάδες 05)

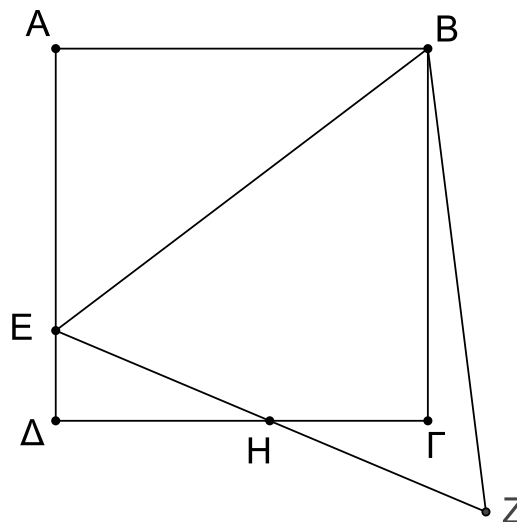
ii. Για το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)

22. ΘΕΜΑ 4 (17349)

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 3 και σημείο E της πλευράς AD , ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία BE και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο BEZ . Οι $\Gamma\Delta$ και EZ τέμνονται στο σημείο H και $\Delta H = \sqrt{3}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε το H είναι το μέσο της EZ . (Μονάδες 8)
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου BEZ και εξωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)



23. ΘΕΜΑ 4 (18173)

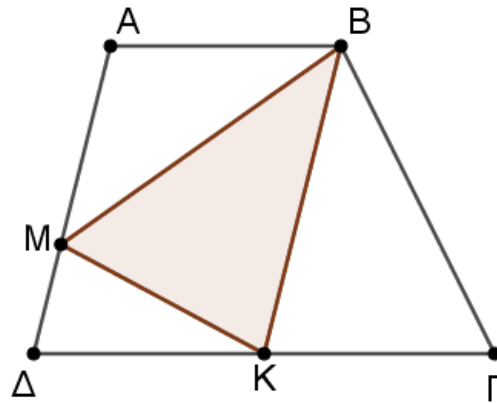
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$. Δίνεται επίσης ότι το σημείο K είναι μέσο της $\Gamma\Delta$ και M τυχαίο σημείο στην AD .

- α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(B\Gamma K) = \frac{1}{2} (ABK\Delta)$ (Μονάδες 09)

ii. $(BMK) = (B\Gamma K)$ (Μονάδες 09)

- β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο M κινείται πάνω στο εσωτερικό της AD , τότε ο λόγος των εμβαδών $(AB\Gamma\Delta)$ και (MBK) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 07)



24. ΘΕΜΑ 4 (18553)

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α :

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε

$B\Sigma' > B\Sigma$. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta$

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$.

(Μονάδες 15)

25. ΘΕΜΑ 4 (18555)

Σε τετράγωνο πλευράς α παίρνουμε σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α :

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Την περίμετρο του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) Στην τάξη του Βρασίδα η καθηγήτρια των Μαθηματικών απέδειξε ότι αν το σημείο Σ' βρίσκεται στην προέκταση του AB προς το B και κινείται απομακρυνόμενο από το σημείο B , τότε οι πλευρές $\Sigma'\Gamma$ και $\Sigma'\Delta$ μεγαλώνουν. Οπότε, αν το Σ' είναι δεξιότερα από το Σ , θα ισχύει ότι $\Sigma'\Gamma > \Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Delta > \Sigma\Delta$.

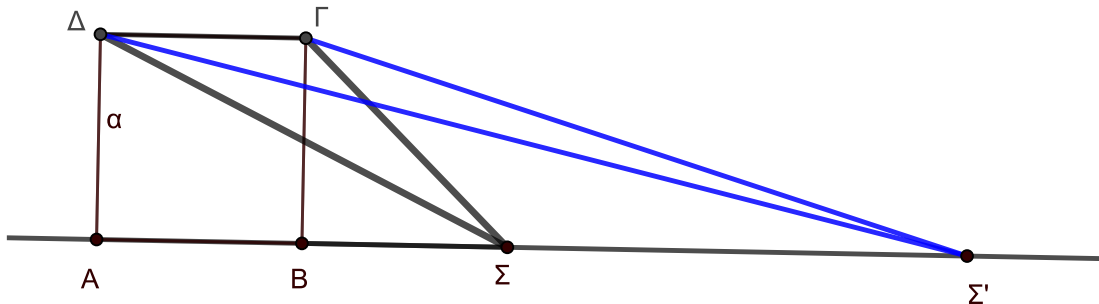
Ο Βρασίδας ζήτησε το λόγο και διατύπωσε τον ισχυρισμό :

«Η περίμετρος και το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερα από την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$ ». Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Βρασίδα:

i. σχετικά με τα εμβαδά των δύο τριγώνων; (Μονάδες 8)

ii. σχετικά με την περίμετρο των δύο τριγώνων; (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



26. ΘΕΜΑ 4 (18557)

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma E // A\Delta$ και $\Delta Z // \Gamma B$, με E και Z σημεία στην πλευρά AB του τραπεζίου.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$. (Μονάδες 9)

β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)

γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά; (Μονάδες 8)

27. ΘΕΜΑ 4 (18565)

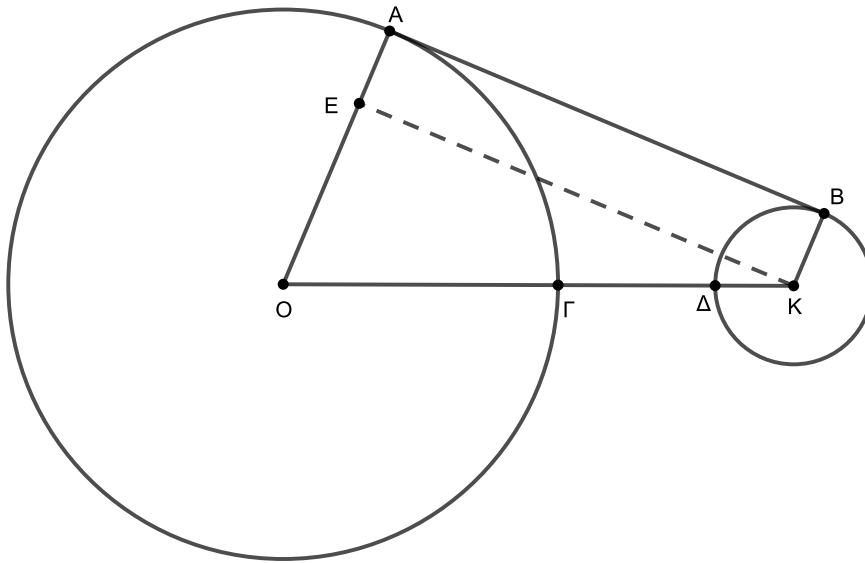
Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K . Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R=7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $\rho=2$. Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA . Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K,ρ) στο σημείο Δ .

α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta=4$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB . (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABKO$. (Μονάδες 07)

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ABKE να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ.; (Μονάδες 08)



28. ΘΕΜΑ 4 (18566)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$. Από τα σημεία Γ και Ζ φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Η.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά».

Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

29. ΘΕΜΑ 4 (21124)

α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με πλευρές $\alpha = 40$, $\beta = 25$, $\gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη u_α , u_β , u_γ . Να αποδείξετε ότι : i. Το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 300$ και τα ύψη του είναι $u_\alpha = 15$ και $u_\beta = u_\gamma = 24$. (Μονάδες 7)

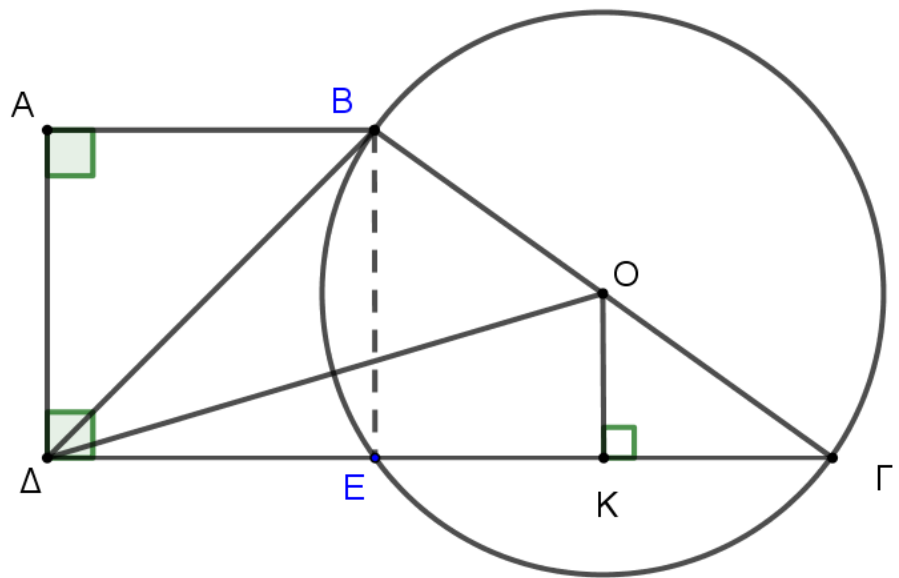
iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη u_α , u_β , u_γ είναι οξυγώνιο. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

30. ΘΕΜΑ 4 (21840)

Έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB=5$, $\Gamma\Delta=13$ και εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta)=54$. Ο κύκλος με διάμετρο τη $B\Gamma$ τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο σημείο E .
α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 6$. (Μονάδες 6)
β) Να υπολογίσετε το μήκος των BE και $B\Gamma$.



(Μονάδες 6)

γ) Αν OK είναι η κάθετη από το σημείο O στην $E\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OK=3$, και να υπολογίσετε το μήκος της OD .

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Delta O$. (Μονάδες 7)

31. ΘΕΜΑ 4 (22100)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες $\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$, και η διχοτόμος AE της γωνίας του $\hat{A}$. Από το B φέρνουμε την κάθετη προς την AE και έστω Z , Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις AE , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

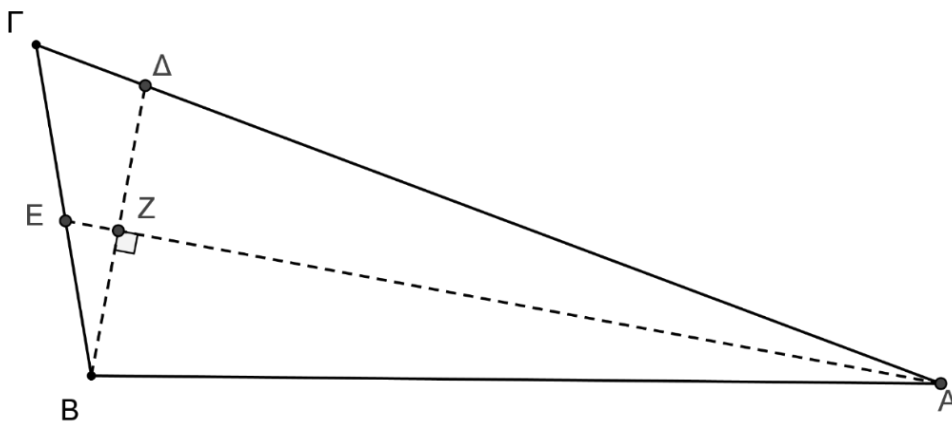
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{A} = 20^\circ$

(Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά. (Μονάδες 5)



32. ΘΕΜΑ 4 (22104)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του ΒΓ. Έστω Μ το μέσο Μ του τμήματος ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2} (AB\Delta)$ (Μονάδες 8)

ii. $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} (AB\Gamma)$ (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΔΓ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΜ και ΜΔΓ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ΑΒΜ και ΜΔΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

33. ΘΕΜΑ 4 (22396)

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω Δ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $A\Gamma$. Έστω $AD = 3$ και $\Delta\Gamma = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Delta = 4$.

(Μονάδες 6)

ii. $(AB\Gamma) = 10$.

(Μονάδες 6)

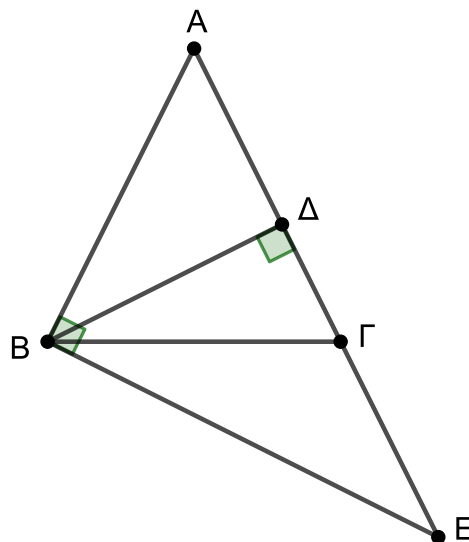
β) Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο B , τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E . Να βρείτε:

i. Το μήκος του ΔE .

(Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma E$.

(Μονάδες 7)



34. ΘΕΜΑ 4 (22509)

Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2\alpha$ και $A\Delta = \alpha$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο M με $MB = x$ και στην προέκταση της $A\Delta$ σημείο N με $\Delta N = 2x$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των α, x τα $M\Gamma^2$, $N\Gamma^2$ και MN^2

(Μονάδες 6)

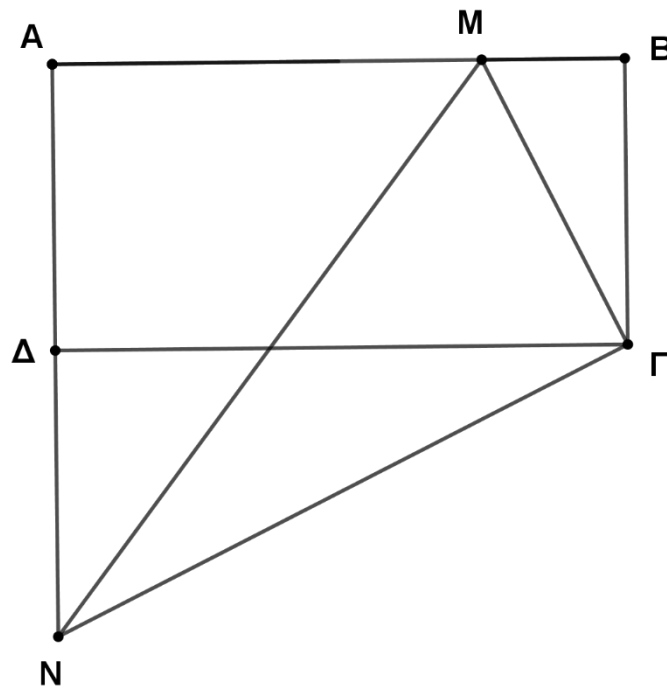
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των α, x τα εμβαδά των τριγώνων AMN και ΓMN .

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M , πάνω στην AB ώστε τα τρίγωνα AMN και ΓMN να είναι ισεμβαδικά.

(Μονάδες 5)

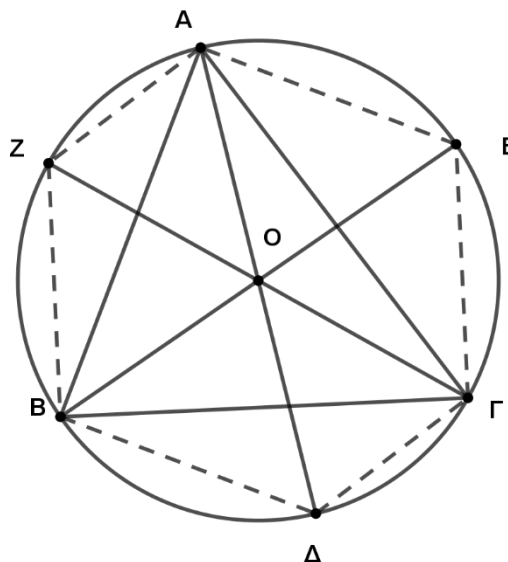


35. ΘΕΜΑ 4 (22510)

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O .

Θεωρούμε τις διαμέτρους AD , BE και $ΓΖ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $(AOB) = (BO\Delta)$ και $(AOG) = (\Delta OG)$ (Μονάδες 8)
 β) $(B\Delta\Gamma) = (AOB) + (AOG) - (BO\Gamma)$ (Μονάδες 8)
 γ) $(AZB\Delta\Gamma E) = 2(AB\Gamma)$ (Μονάδες 9)

Παράγραφος 10.4

36. ΘΕΜΑ 2 (15979)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 5$ και $\hat{A} = 120^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Gamma = 5\sqrt{3}$. (Μονάδες 13)

β) $(AB\Gamma) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$. (Μονάδες 12)

37. ΘΕΜΑ 2 (17346)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6$, $B\Gamma = 4$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 2\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$.

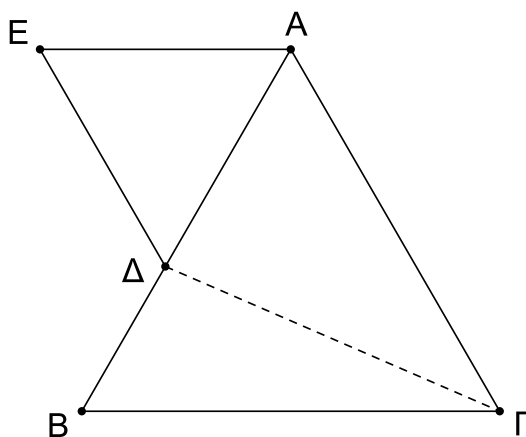
38. ΘΕΜΑ 2 (17347)

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

α) Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = 15\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Gamma\Delta E$. (Μονάδες 13)

Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



39. ΘΕΜΑ 2 (21196)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κάθετες πλευρές $\beta = 8$ και $\gamma = 6$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 24$ (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε:

i. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς α του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 6)

ii. Το ύψος του u_α που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα α του τριγώνου. (Μονάδες 7)

iii. Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(Μονάδες 7)

40. ΘΕΜΑ 2 (21299)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 5$ και η γωνία της κορυφής $\hat{\varphi}$ έχει $\eta\mu\varphi = \frac{2}{5}$.

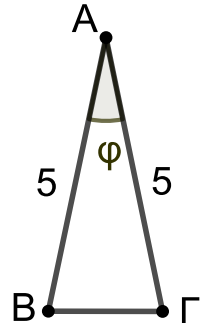
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε το ύψος BH του τριγώνου $AB\Gamma$ και να

υπολογίσετε το μήκος του.

(Μονάδες 13)



41. ΘΕΜΑ 2 (21838)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB=8$, $A\Gamma=12$ και γωνία $\hat{A} = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$(AB\Gamma)=24\sqrt{3}$ (Μονάδες 13)

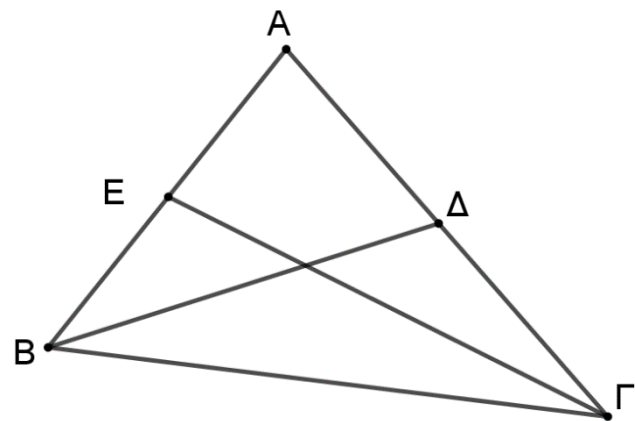
β) Αν $B\Delta$ και ΓE διάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $AE\Gamma$ είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 4)

ii. Τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $\Delta\Gamma B$ είναι ισοδύναμα με $(EB\Gamma)=(\Delta\Gamma B)=12\sqrt{3}$

(Μονάδες 8)



42. ΘΕΜΑ 2 (22259)

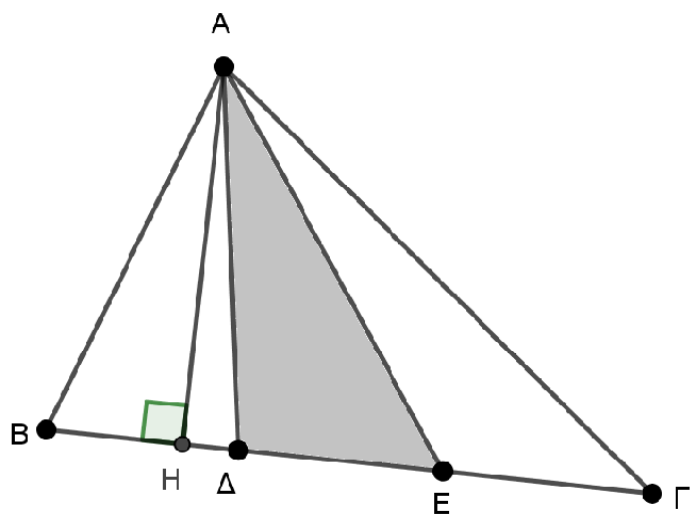
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην πλευρά του $B\Gamma$, τα σημεία Δ, E ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$. Από την κορυφή A , φέρνουμε το ύψος AH του τριγώνου $AB\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(A\Delta E) = \frac{1}{3} (AB\Gamma)$.

(Μονάδες 13)

β) Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $(AME) = \frac{1}{6} (AB\Gamma)$.

(Μονάδες 12)



43. ΘΕΜΑ 2 (22511)

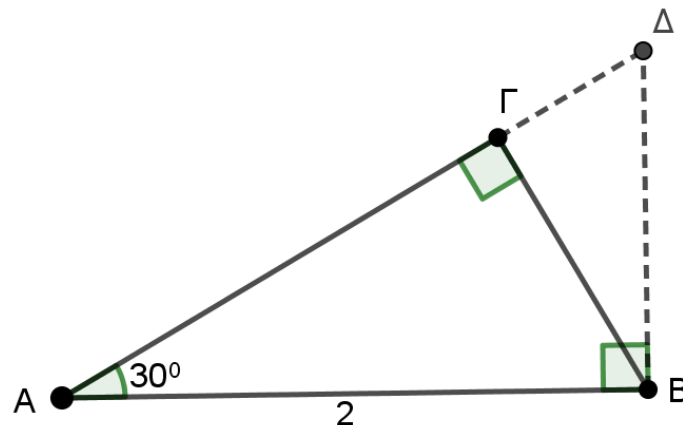
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 2$, $A\Gamma = 3$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε:

- α) το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 9)
 β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)
 γ) το ύψος u_α . (Μονάδες 8)

44. ΘΕΜΑ 3 (21783)

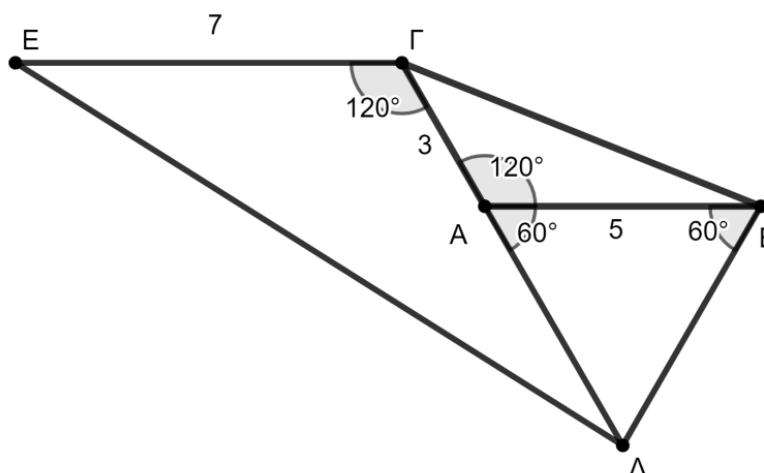
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$ και $AB = 2$.

- α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = \sqrt{3}$. (Μονάδες 7)
 β) Φέρνουμε κάθετη στην AB , στο σημείο B , που τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι $A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)
 γ) Αν K είναι το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 8)



45. ΘΕΜΑ 2 (29786)

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται $AB=5$, $A\Gamma=3$ και $\hat{B\hat{A}\Gamma} = 120^\circ = \hat{E\hat{\Gamma}\Delta}$ καθώς και $\hat{B\hat{A}\Delta} = 60^\circ = \hat{A\hat{B}\Delta}$.



- α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ. (Μονάδες 7)
 β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΔ. (Μονάδες 4)
 γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΔΕ. (Μονάδες 7)
 δ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ. (Μονάδες 7)

46. ΘΕΜΑ 3 (29849)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $AB = AG = 6$ και $BΓ = 8$.

- α) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 5)
 β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του. (Μονάδες 8)
 γ) Να υπολογίσετε:
 i. την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ
 ii. την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

47. ΘΕΜΑ 4 (22101)

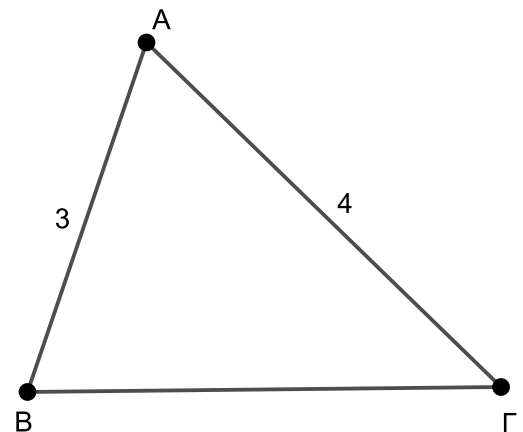
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

- α) Αν η γωνία Α έχει μέτρο 60° , τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 08)

ii. Το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 09)

- β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 08)



48. ΘΕΜΑ 4 (22369)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 8$, $BΓ = 7$ και $\hat{A} = 60^\circ$.

- α) Να αποδείξετε ότι $AG = 3$ ή $AG = 5$. (Μονάδες 6)
 β) Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο όπως στο παρακάτω σχήμα.
 i. Να αποδείξετε ότι $AG = 5$. (Μονάδες 6)

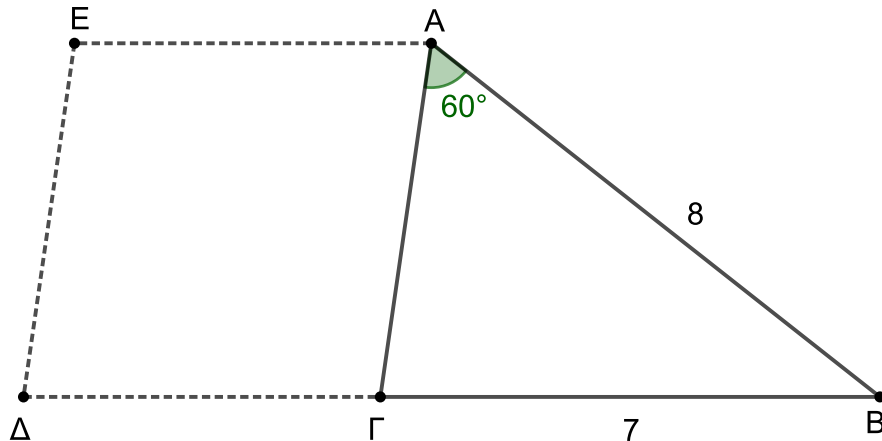
ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$(AB\Gamma) = 10\sqrt{3}.$$

(Μονάδες 6)

iii. Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο ΑΓΔΕ. Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ.

(Μονάδες 7)



49. ΘΕΜΑ 4 (22568)

Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα $R=10$, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα $r=6$. Η εφαπτομένη του κύκλου (Κ, r) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ, R) στα σημεία Α και Β. Η προέκταση της ΚΛ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ, R) στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια.

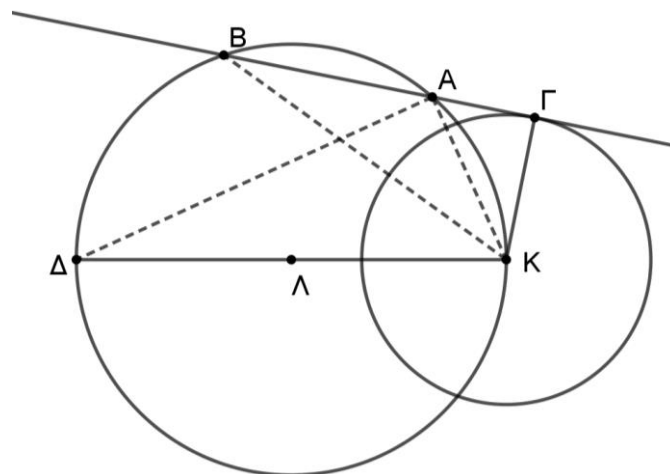
(Μονάδες 8)

ii. $KA \cdot KB = 120$

(Μονάδες 9)

β) Αν είναι $KB=15$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΚ.

(Μονάδες 8)



Παράγραφος 10.5

50. ΘΕΜΑ 2 (15978)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, τα Δ , E , Z , είναι σημεία των πλευρών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε: $A\Delta = \frac{1}{4}AB$, $BE = \frac{2}{3}B\Gamma$ και $\Gamma Z = \frac{1}{2}A\Gamma$.

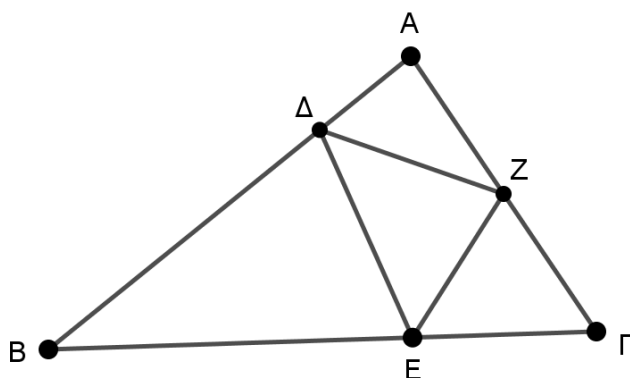
Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (A\Delta Z) = \frac{1}{8} (AB\Gamma), (BE\Delta) = \frac{1}{2} (AB\Gamma), (\Gamma EZ) = \frac{1}{6} (AB\Gamma).$$

(Μονάδες 15)

$$\beta) (\Delta EZ) = \frac{5}{24} (AB\Gamma).$$

(Μονάδες 10)



51. ΘΕΜΑ 2 (16127)

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρά $B\Gamma = 9$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta = 8$.

$\alpha)$ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

$\beta)$ Ένα άλλο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και η ομόλογη πλευρά της $B\Gamma$ είναι η $B'\Gamma' = 6$. Να υπολογίσετε:

i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$,

(Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

(Μονάδες 9)

52. ΘΕΜΑ 2 (16756)

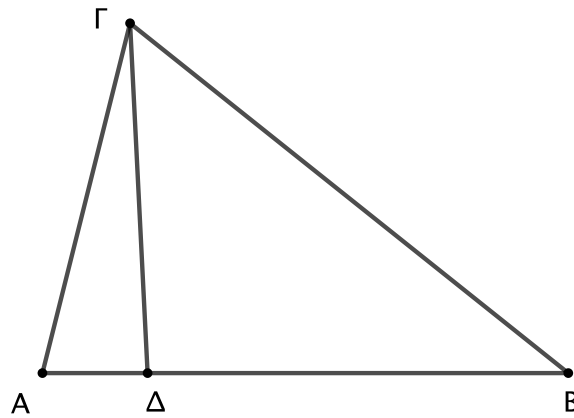
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB .

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι: } \frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB}{\Delta B}$$

(Μονάδες 15)

$\beta)$ Αν $(AB\Gamma) = 25$ και $AB = 5A\Delta$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$.

(Μονάδες 10)



53. ΘΕΜΑ 2 (16770)

Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά Οχ τέτοιο ώστε $\widehat{OEB} = 70^\circ$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $\widehat{ODA} = 70^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια.

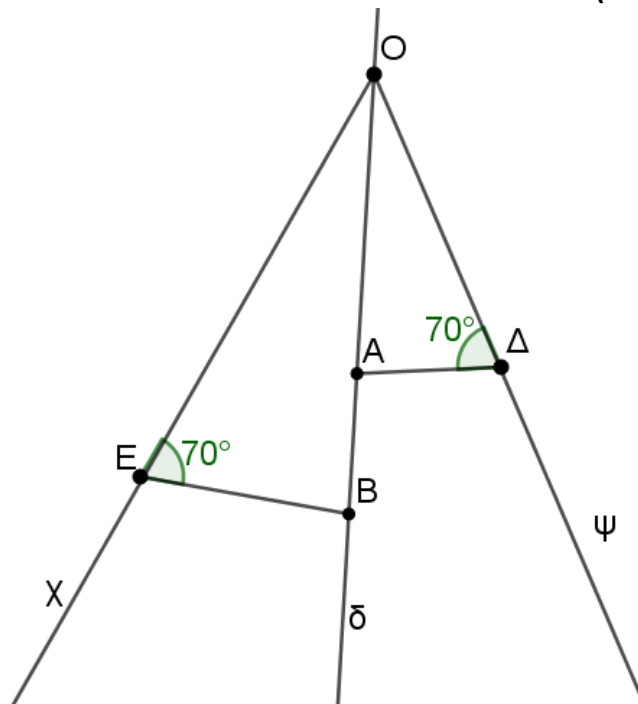
(Μονάδες 10)

β) Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ.

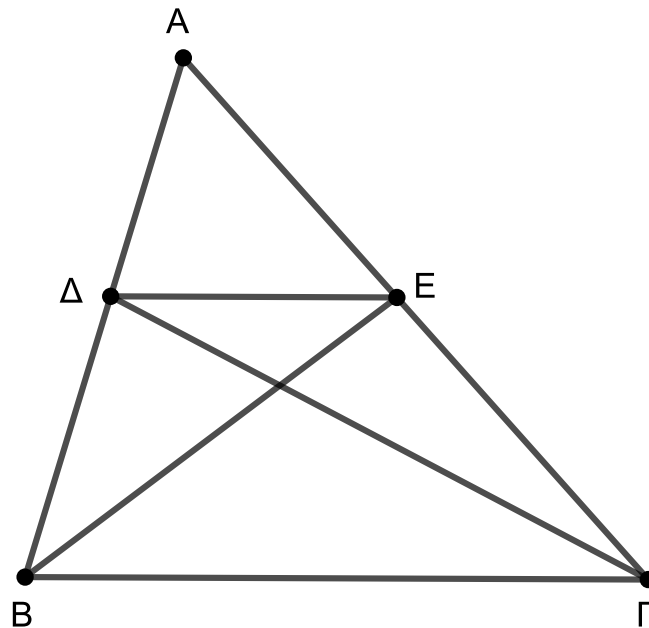
(Μονάδες 09)



54. ΘΕΜΑ 2 (16806)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

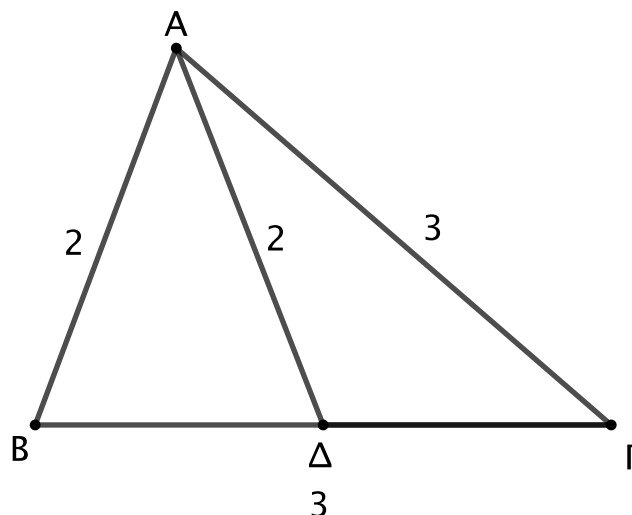
- α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E B)} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$ και $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E \Gamma)} = \frac{A\Delta}{E\Gamma}$. (Μονάδες 13)
- β) Να αποδείξετε ότι $(\Delta E B) = (\Delta E \Gamma)$. (Μονάδες 12)



55. ΘΕΜΑ 2 (18101)

Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με $A\Gamma = B\Gamma = 3$ και $AB = A\Delta = 2$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι ίσες. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι όμοια. (Μονάδες 9)
- γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων. (Μονάδες 8)



56. ΘΕΜΑ 2 (18561)

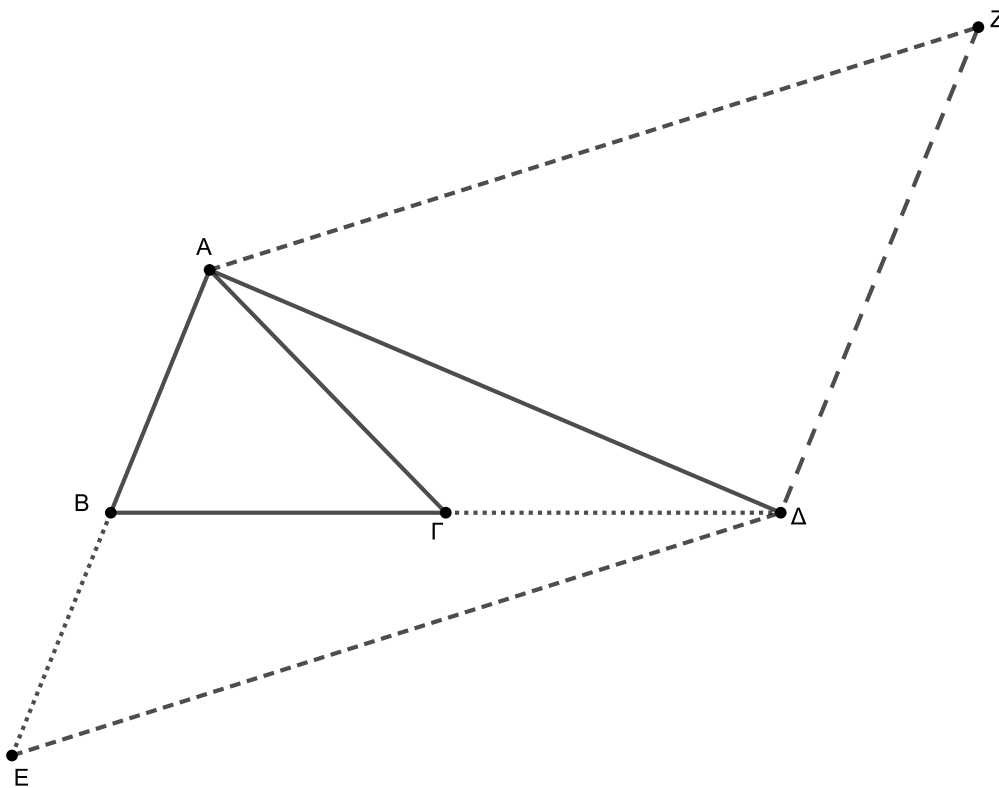
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$ και την πλευρά AB κατά τμήμα $BE=AB$.

α) Αν $(AB\Gamma)=25\text{ m}^2$, να αποδείξετε ότι $(B\Delta E)=50\text{ m}^2$.

(Μονάδες 10)

β) Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $E\Delta$ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην EA που τέμνονται στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AZ\Delta$ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 15)



57. ΘΕΜΑ 2 (20667)

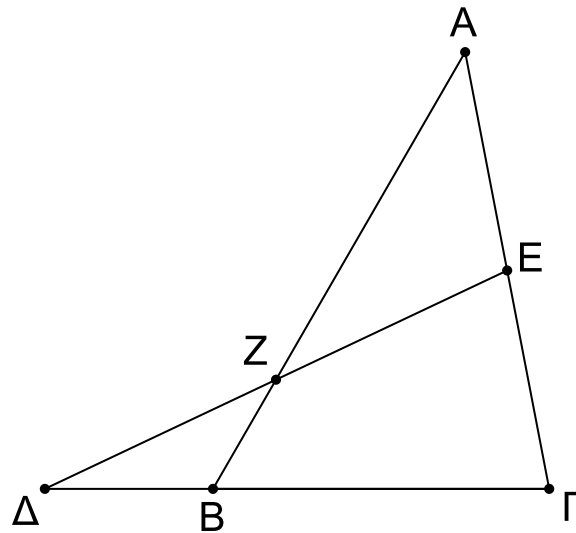
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 8$. Στην προέκταση της ΓB προς το B παίρνουμε σημείο Δ , ώστε $\Delta B = 4$ και E είναι το μέσο της $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $(\Gamma\Delta E) = 3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, αν το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι 12 τ.μ.

(Μονάδες 8)



58. ΘΕΜΑ 2 (21120)

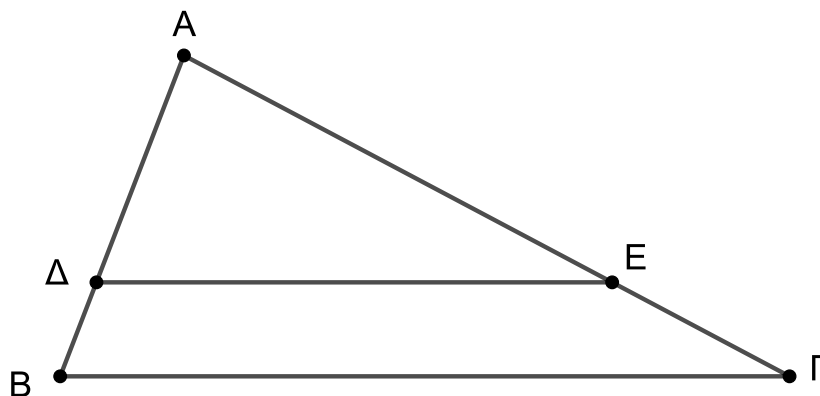
Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = \sqrt{2}$. Από σημείο Δ της πλευράς AB ώστε $A\Delta = 1$, φέρνουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την AG στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 18)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $A\Delta E$ και του τραπεζίου $B\Gamma E\Delta$. (Μονάδες 7)



59. ΘΕΜΑ 2 (21189)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M, N τα μέσα των πλευρών του AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ (Μονάδες 8)

$$\beta) \frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4} \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

$$\gamma) (BMN) = \frac{1}{8} (AB\Gamma\Delta) \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

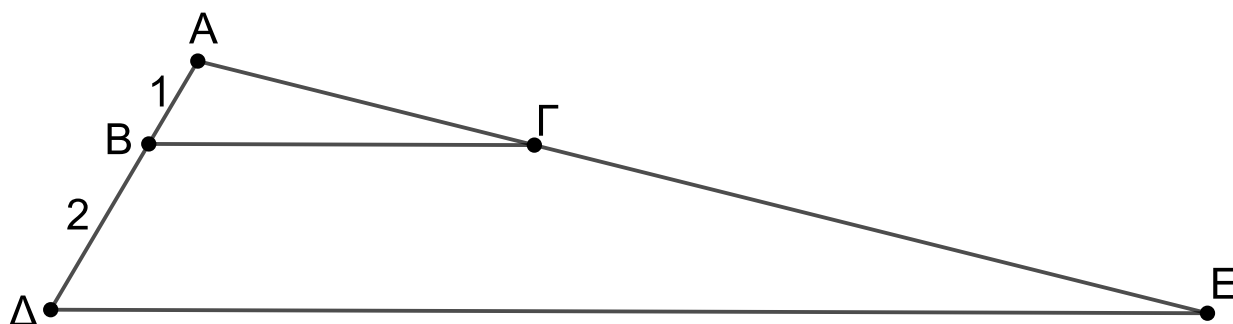
60. ΘΕΜΑ 2 (21304)

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 1$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E , αντίστοιχα, ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ και $B\Delta = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$. (Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $A\Delta E$. (Μονάδες 08)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 07)



61. ΘΕΜΑ 2 (21636)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με μήκη πλευρών $AB=6$, $A\Gamma=8$, και $B\Gamma=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

β) Αν $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$. (Μονάδες 5)

62. ΘΕΜΑ 2(22070)

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μήκη πλευρών $\alpha = 17$, $\beta = 8$, $\gamma = 15$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$:

i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ .

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$. (Μονάδες 12)

63. ΘΕΜΑ 2 (22260)

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, με $AB=4$, $A\Gamma=6$ και $\hat{A} = 150^\circ$. Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της $A\Gamma$ και το E είναι σημείο της $B\Gamma$ ώστε $GE = \frac{2}{3}GB$, τότε να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται $\eta_{150^\circ} = \frac{1}{2}$.

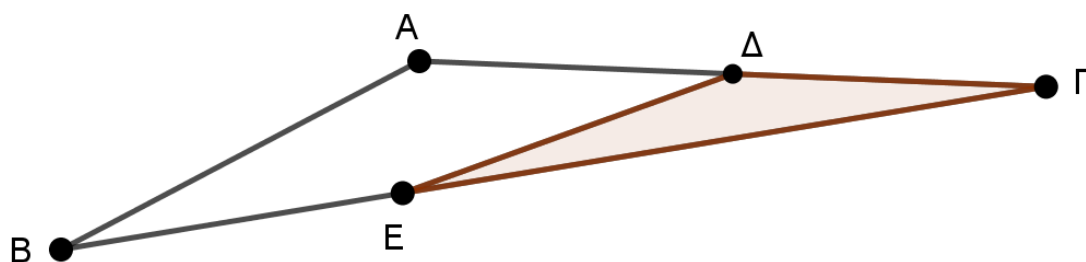
(Μονάδες 9)

β) το λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$.

(Μονάδες 9)

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 7)



64. ΘΕΜΑ 3(29850)

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $AB = A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 6$.

α) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του.

(Μονάδες 10)

γ) Στην προέκταση της πλευράς ΓA παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = 10$.

Να υπολογισθεί το εμβαδό του τριγώνου $AB\Delta$. (Μονάδες 10)

65. ΘΕΜΑ 4 (22340)

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το εσωτερικό σημείο K της πλευράς $B\Gamma$.

Θεωρούμε σημείο O του ευθύγραμμου τμήματος AK , ώστε $AO =$

$\frac{3}{4}AK$. Από το O φέρνουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(AO\Delta) = \frac{3}{4}(AK\Delta)$,

(Μονάδες 7)

ii. $(AOE) = \frac{3}{4}(AKE)$, (Μονάδες 7)

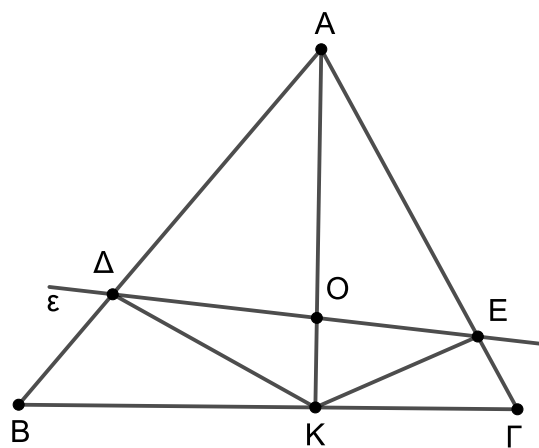
iii. $(ADE) = \frac{3}{4}(ADKE)$.

(Μονάδες 7)

β) Είναι δυνατόν να ισχύει $(ADE) =$

$\frac{3}{4}(AB\Gamma)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

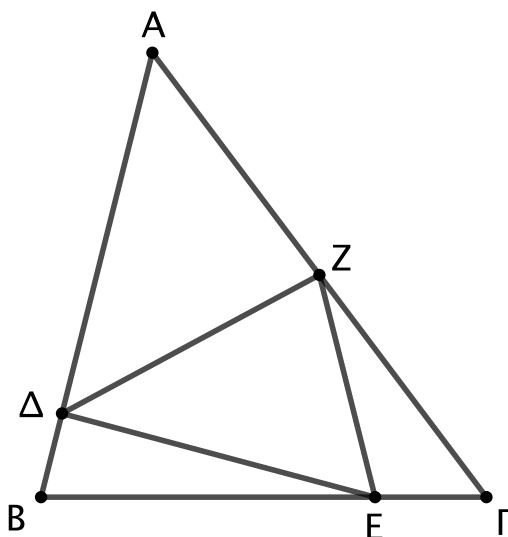


66. ΘΕΜΑ 3 (19037)

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , Z των πλευρών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\Delta B = \frac{1}{5}AB$, $E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma$, $Z\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}$, $\frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}$, $\frac{(Z\Delta\Delta)}{(AB\Gamma)}$ (Μονάδες 15)

β) Αν είναι $(AB\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ . (Μονάδες 10)



67. ΘΕΜΑ 4 (16114)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma E = \frac{1}{4}\Gamma A$.

α) Αν Δ σημείο της AB τέτοιο ώστε $A\Delta = \frac{1}{3}AB$:

i. Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4(A\Delta E)$ (Μονάδες 10)

ii. Αν από τα E και Γ φέρουμε τις κάθετες EZ και ΓH προς την AB , να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{\Gamma H}$ (Μονάδες 09)

β) Θεωρώντας ότι το Ε παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της ΑΒ, να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(AB\Gamma) = 2(A\Delta E)$ (Μονάδες 06)

68. ΘΕΜΑ 4 (16582)

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Έστω ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

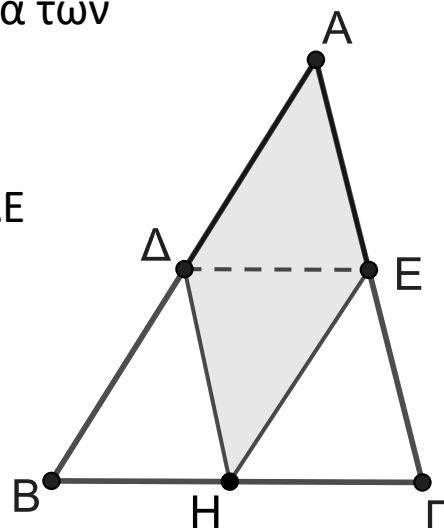
(Μονάδες 07)

ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου

(Μονάδες 06)



69. ΘΕΜΑ 4 (16732)

Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ.

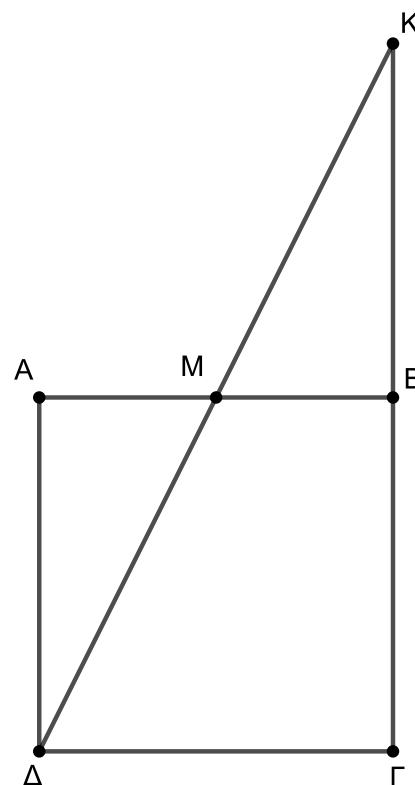
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια. (5 μονάδες)

β) $(ΜΚΒ) = \frac{1}{4} (ΔΚΓ)$ (5 μονάδες)

γ) $(ΜΒΓΔ) = \frac{3}{4} (ΑΒΓΔ)$. (10 μονάδες)

δ) Αν $(ΜΒΓΔ) = 75 \text{ m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου. (5 μονάδες)



70. ΘΕΜΑ 4 (17907)

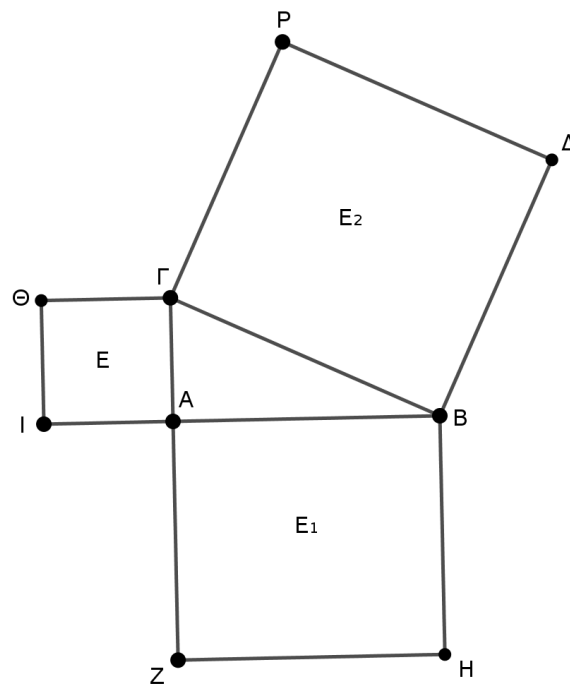
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, τα τετράγωνα ΑΒΗΖ, ΑΓΘΙ, ΒΓΡΔ. Έστω Ε,

E_1, E_2 , τα εμβαδά των τετραγώνων ΑΓΘΙ, ΑΒΗΖ, ΒΓΡΔ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E, E_2 = 5E$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. (Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΙΖ, ΒΗΔ, ΓΡΘ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) αν η $ΑΓ=1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΖΗΔΡΘΙ. (Μονάδες 7)



71. ΘΕΜΑ 4 (17956)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΕΚΔ) = \frac{(ΒΕΔ)}{2}$ (Μονάδες 09)

β) $(ΕΖΔ) = \frac{(ΑΕΔΖ)}{2}$ (Μονάδες 09)

γ) Το εμβαδόν του ΚΕΖΛ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ. (Μονάδες 07)

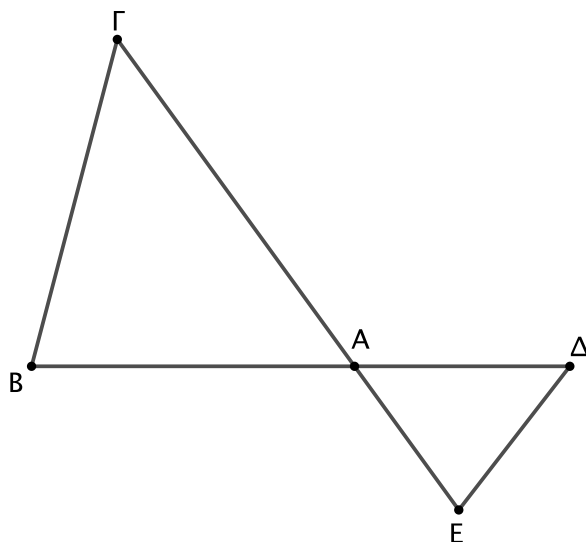
72. ΘΕΜΑ 4 (18301)

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $AD = \frac{1}{2} AB$ και $AE = \frac{2}{5} AG$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(ADE)}{(ABG)}$.
(Μονάδες 10)

β) Αν είναι $AD = \frac{1}{\lambda} AB$ και $AE = \frac{\lambda}{\mu} AG$, όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(ADE)}{(ABG)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ .
(Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(ADE) = (ABG)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 5)



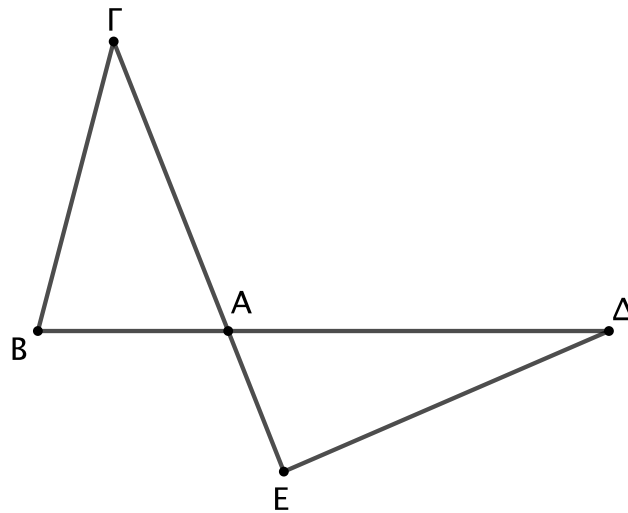
73. ΘΕΜΑ 4 (18302)

Σε τρίγωνο ABG προεκτείνουμε τις πλευρές BA και GA κατά τμήματα AD και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $AD = 2AB$ και $AE = \frac{1}{2} AG$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ADE και ABG είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 09)

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές BA και GA κατά τμήματα είναι $AD = \mu \cdot AB$ και $AE = \nu \cdot AG$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα ADE και ABG να είναι ισοδύναμα; (Μονάδες 10)

γ) Αν είναι $AG = \frac{3}{2} AB$ και $AD = 2AB$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του E ώστε τα ABG και ADE να είναι όμοια. (Μονάδες 06)



74. ΘΕΜΑ 4 (18369)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, $\hat{A} = 36^\circ$.

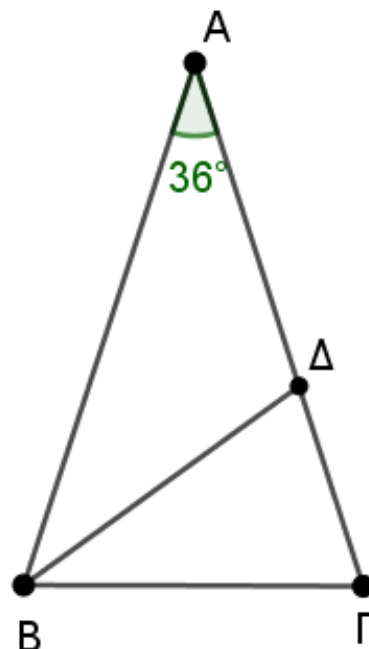
α) Αν η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.

(Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της $A\Gamma$. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Gamma)} = 3$. (Μονάδες 09)



75. ΘΕΜΑ 4 (18370)

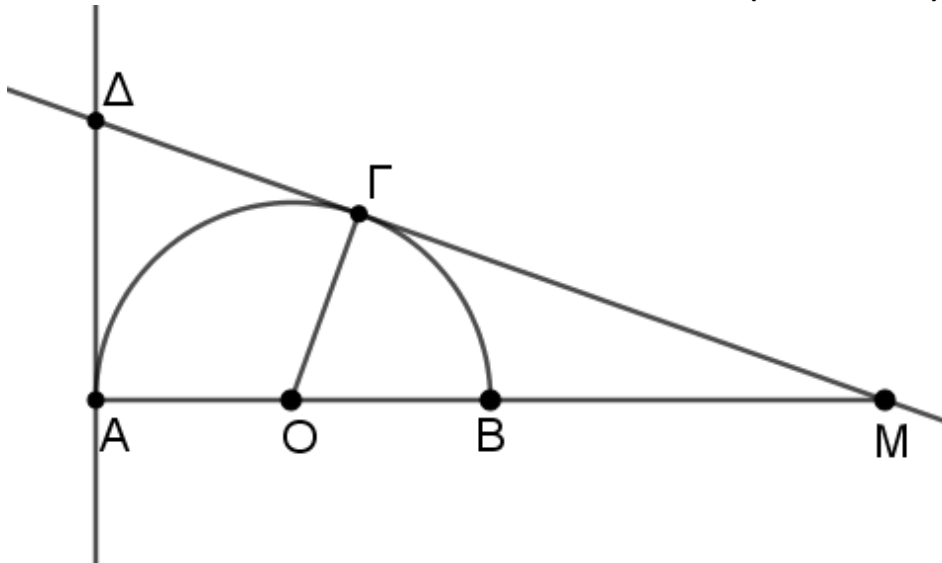
Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2\rho$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε σημείο M . Από το M φέρουμε το

εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της ΜΓ στο Δ τότε:

α) Αν $BM = 2\rho$ να αποδείξετε ότι $MG = 2\sqrt{2}\rho$. (Μονάδες 09)

β) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{MG} = \frac{MA}{MA}$. (Μονάδες 09)

ii. Αν για το Μ ισχύει ότι $BM = \lambda \cdot \rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , τέτοια ώστε $(ADM) = 9(MOG)$. (Μονάδες 07)



76. ΘΕΜΑ 4 (18371)

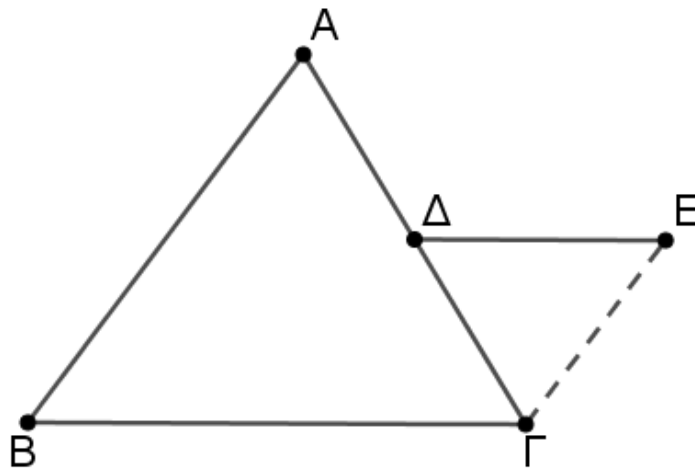
Δίνεται τρίγωνο ABΓ και Δ μέσο της ΑΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ και ίση με το μισό της ΑΒ όπως στο σχήμα.

α) i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Delta E \Gamma)}{(A B \Gamma)} = \frac{\Delta E}{2 B \Gamma}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(\Delta E \Gamma) = (A B \Delta)$. (Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\Delta E \Gamma)}{(A B \Gamma)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΓ έχουν $\hat{A} = \hat{I}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{\Delta \Gamma}{A \Gamma} = \frac{\Delta E}{A B} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\hat{A}, \hat{I}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\frac{(\Delta E \Gamma)}{(A B \Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{A B}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει

κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος; (Μονάδες 05)



77. ΘΕΜΑ 4 (20678)

Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο Ο. Το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.

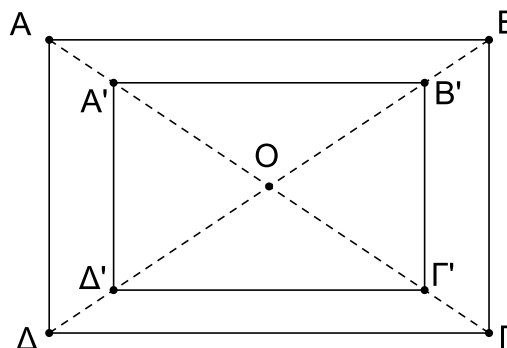
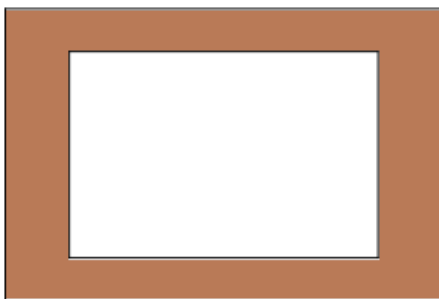
α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ'. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι όμοια. (Μονάδες 6)

γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της. Η διαγώνιος ΑΓ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $\widehat{ΑΟΒ} = 120^\circ$.

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας; (Μονάδες 6)

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας; (Μονάδες 8)



78. ΘΕΜΑ 4 (21194)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσός του και το σημείο Ε είναι το μέσο της ΑΜ. Από το Ε φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (AMB) = (AM\Gamma) \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

$$\beta) (ME\Delta) = \frac{1}{8} \cdot (AB\Gamma) \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

$$\gamma) (AB\Delta E) = (A\Gamma ZE) \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

79. ΘΕΜΑ 4 (21839)

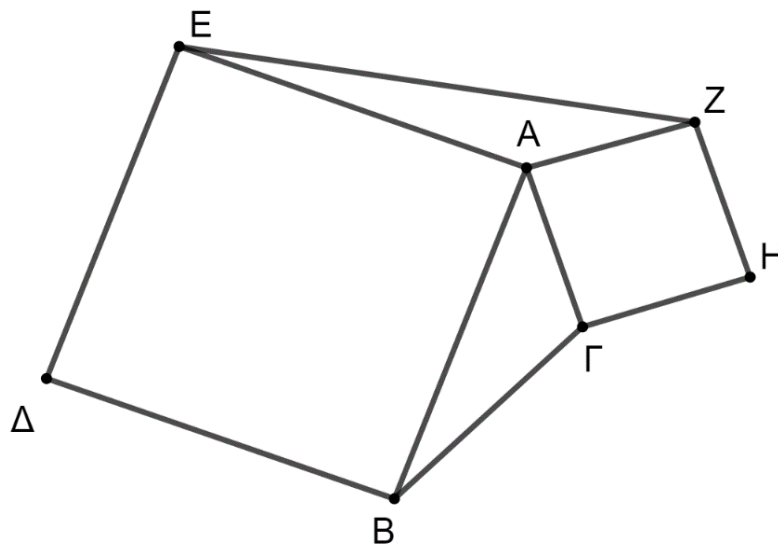
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 3 \text{ cm}$ και $\hat{A}$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζουμε τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma H Z$ και φέρνουμε την EZ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEZ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα.
(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου $EZH\Gamma B\Delta$ είναι $(EZH\Gamma B\Delta) = 54 \text{ cm}^2$:

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 30^\circ$.
(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
(Μονάδες 5)



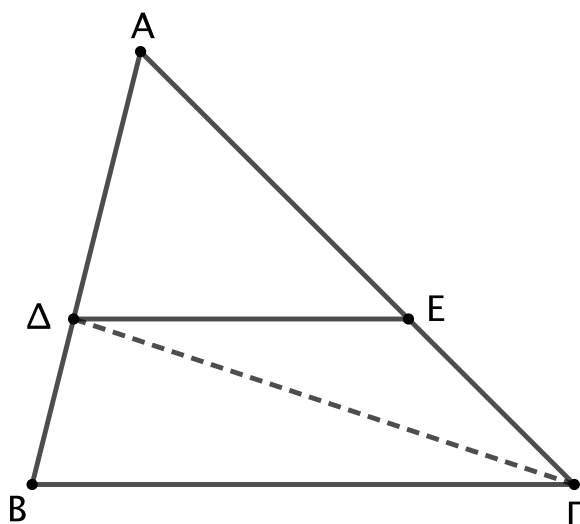
80. ΘΕΜΑ 4 (22023)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της AB . (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$. (Μονάδες 05)



81. ΘΕΜΑ 4 (22141)

Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει τα άκρα του B και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔA και $E A$, αντίστοιχα, του τριγώνου $A\Delta E$, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔE . Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, $AB = 4$ και $A\Gamma = 5$. Έστω ότι ο

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{1}{4}.$$

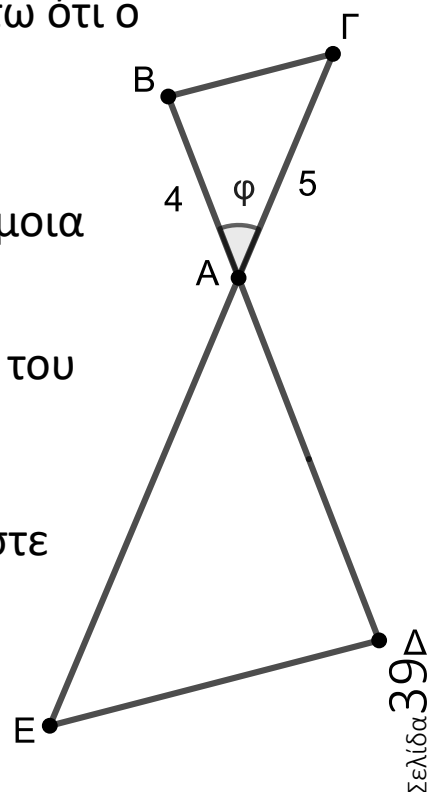
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

β) Αν $\angle B\hat{A}\Gamma = \varphi$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $(A\Delta E)$ του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$.

(Μονάδες 07)

γ) Να βρείτε σημείο Z εσωτερικό της πλευράς $A\Delta$, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma Z$ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $A\Delta E$.

(Μονάδες 08)



82. ΘΕΜΑ 4 (22148)

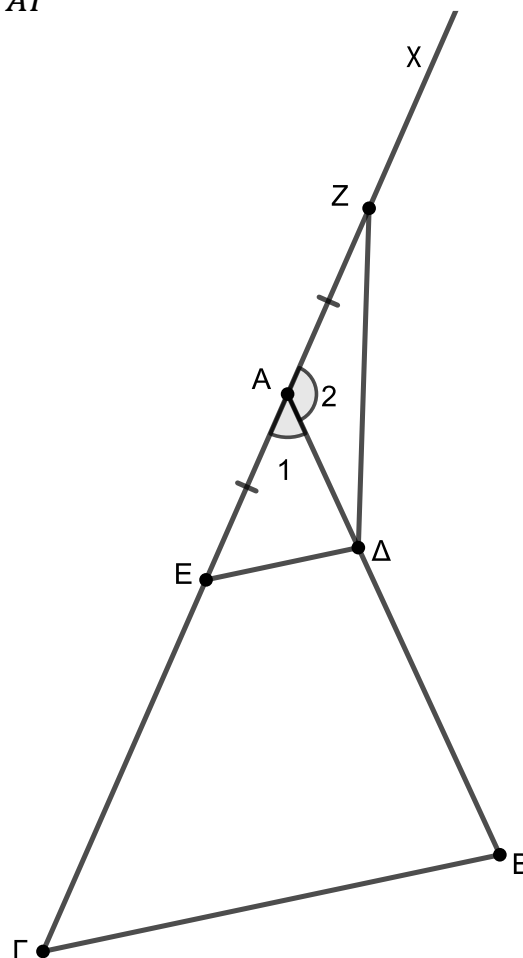
Έστω E σημείο στην πλευρά $ΓΑ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$. Από το E φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά $ΒΓ$ του $ΑΒΓ$ η οποία τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$ και παίρνουμε σημείο Z στην προέκταση $Αχ$ της πλευράς $ΓΑ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ ώστε να είναι $AZ = AE$, όπως στο σχήμα.

α) Έστω $ΑΓ = 3ΑΕ$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 07)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΔΕΖ$ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του $ΔΕΖ$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του $ΑΒΓ$, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. (Μονάδες 08)



83. ΘΕΜΑ 4 (22150)

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με E και Z τα μέσα των πλευρών του $ΑΓ$ και $ΑΒ$, αντίστοιχα.

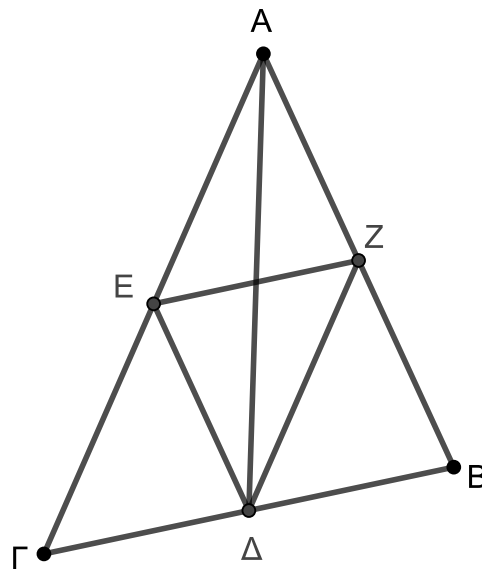
α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

ii. Για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι $(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ)$.

iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)

β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ; (Μονάδες 07)



84. ΘΕΜΑ 4 (22243)

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $AZ = \frac{3}{4}AB$.

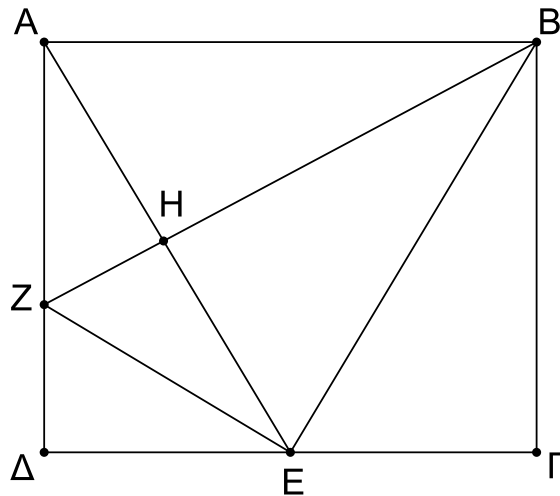
α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \frac{5}{4}AB$. (Μονάδες 6)

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $BE^2 = \frac{5}{4}AB^2$ και $ZE^2 = \frac{5}{16}AB^2$, (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 8)



85. ΘΕΜΑ 4 (22375)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Κ ώστε $KB = 2ΚΓ$ και στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΚ παίρνουμε σημείο Λ ώστε $ΛΑ = 2ΛΚ$. Έστω E_1 , E_2 , E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων ΑΛΓ, ΓΛΚ, ΒΛΚ και ΑΛΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

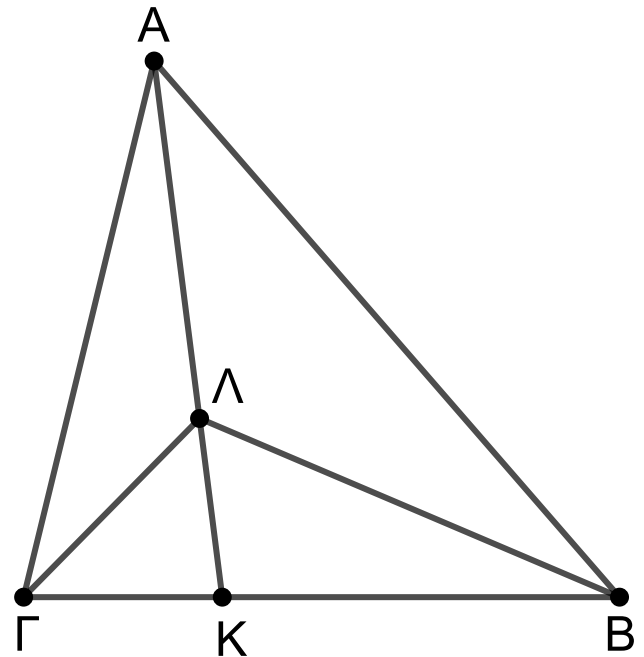
i. $\frac{E_1}{E_2} = 2$ και $\frac{E_4}{E_3} = 2$.

(Μονάδες 10)

ii. $E_1 = E_3$ (Μονάδες 8)

β) Αν $E_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)



86. ΘΕΜΑ 4 (22380)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 16$, $\Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω Κ η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία ΓΔ και Λ η προβολή του σημείου Β πάνω στη ευθεία ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $K\Delta = 12$,

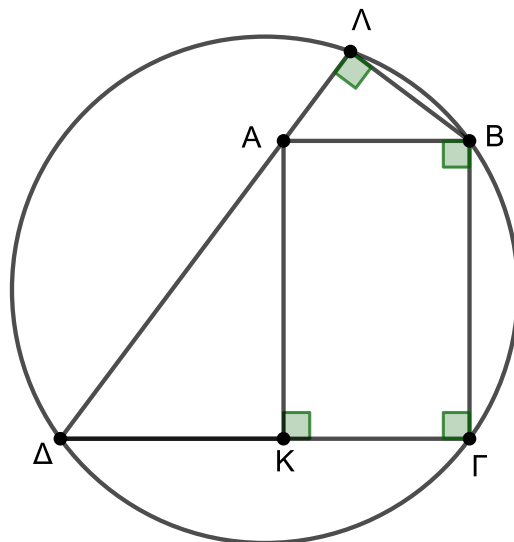
(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΔ είναι 96.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΛΑ. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ. (Μονάδες 5)



87. ΘΕΜΑ 4 (22404)

Το σημείο Μ διαιρεί εσωτερικά την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο $\frac{MB}{MG}$ και το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ σε λόγο $\frac{NA}{NM}$.

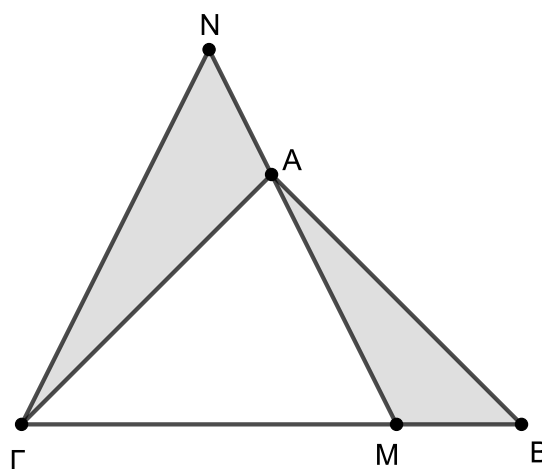
α) Έστω $\frac{MB}{MG} = \frac{1}{3}$ και $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{(AMB)}{(AMΓ)} = \frac{1}{3}$ (Μονάδες 7)

ii. $\frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 6)

iii. $(AMB) = (ANΓ)$. (Μονάδες 6)

β) Έστω $\frac{MB}{MG} = 1$ και $(AMB) = (ANΓ)$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{NA}{NM}$ στον οποίο το σημείο Ν διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ. (Μονάδες 6)



88. ΘΕΜΑ 4 (22406)

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και επίσης είναι $BΓ = 2AB$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Delta$. (Μονάδες 6)

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $AB = 12$ και

$$\eta\mu B = \frac{3}{4}.$$

ι. Να αποδείξετε ότι το

εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 108.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων $\Delta B\Gamma$ και $AB\Delta$.

(Μονάδες 6)

89. ΘΕΜΑ 4 (22407)

Στο παρακάτω σχήμα η $A\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η AK είναι η προβολή της πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην ευθεία AB . Δίνονται $AB = 10$, $A\Gamma = 15$ και $AK = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma K = 12$ και $(AB\Gamma) = 60$.

(Μονάδες 8)

ii. $(A\Delta B) = 24$ και $(A\Delta \Gamma) = 36$.

(Μονάδες 10)

β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία AB .

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} = \frac{2}{5}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{\Lambda B}{\Lambda K}$ στον οποίο το σημείο Λ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα BK .

(Μονάδες 4)

