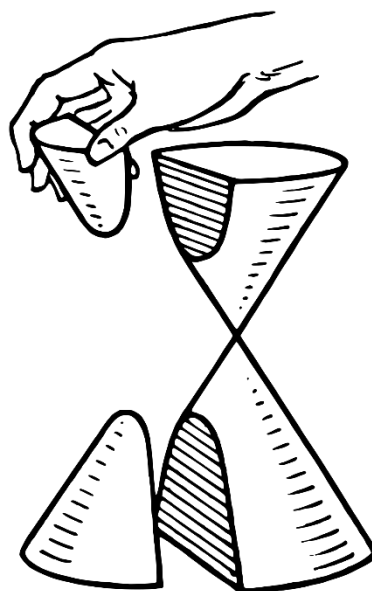
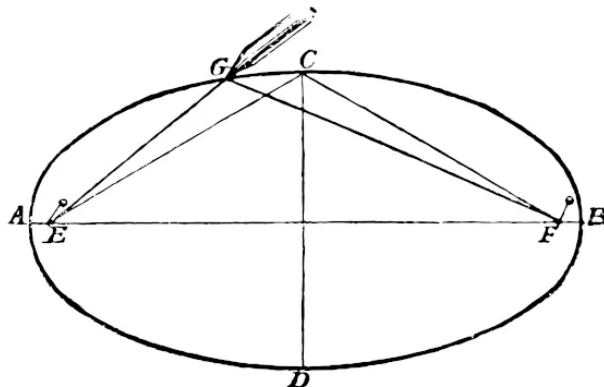
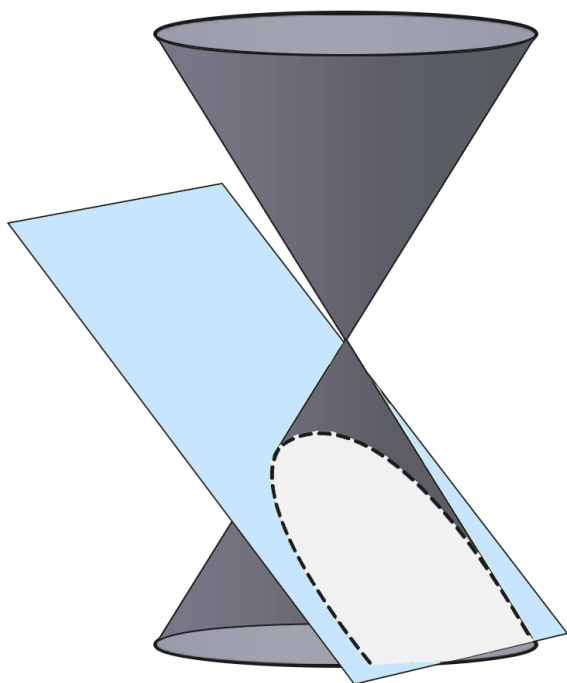


4 ΜΑΡΤΙΟΥ 2024



ΠΑΡΑΒΟΛΗ- ΕΛΛΕΙΨΗ- ΥΠΕΡΒΟΛΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ
ΛΥΚΕΙΟ ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑΣ
Μεσοποταμία-Καστοριάς

Τράπεζα Θεμάτων

Παραβολή

1. (18242) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C . (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της $M(4,4)$. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε). (Μονάδες 9)

2. (18701) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x^2$ (1).

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $A(2,2)$. (Μονάδες 10)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της παραβολής. (Μονάδες 9)

3. (20235) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο

σημείο της $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία

$$\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0. \quad (\text{Μονάδες } 15)$$

4. (21248) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται το σημείο $E(2,0)$, η ευθεία $\delta_1: x = -2$ και τυχαίο σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου.

α) i. Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου $M(x, y)$ από το $E(2,0)$ ως συνάρτηση των x, y . (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την απόσταση $d(M, \delta)$ του σημείου M από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x, y . (Μονάδες 8)

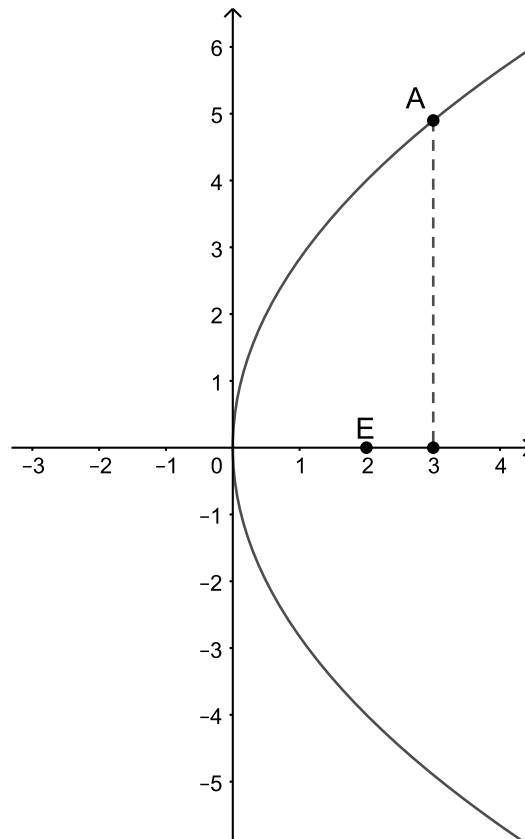
β) Αν ισχύει $(ME) = d(M, \delta)$ να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$. (Μονάδες 9)

5. (21306) ΘΕΜΑ 2 Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x' , κορυφή $O(0,0)$ και εστία $E(2,0)$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της. (Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο A . (Μονάδες 09)



6. (21307) ΘΕΜΑ 2 Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0, 3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία $A(6,3)$ και $B(-6,3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$.

(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) .

(Μονάδες 05)

7. (22190) ΘΕΜΑ 2 : Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x$ (1)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ). (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1, -1)$ είναι σημείο της παραβολής. (Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της $A(1, -1)$. (Μονάδες 08)

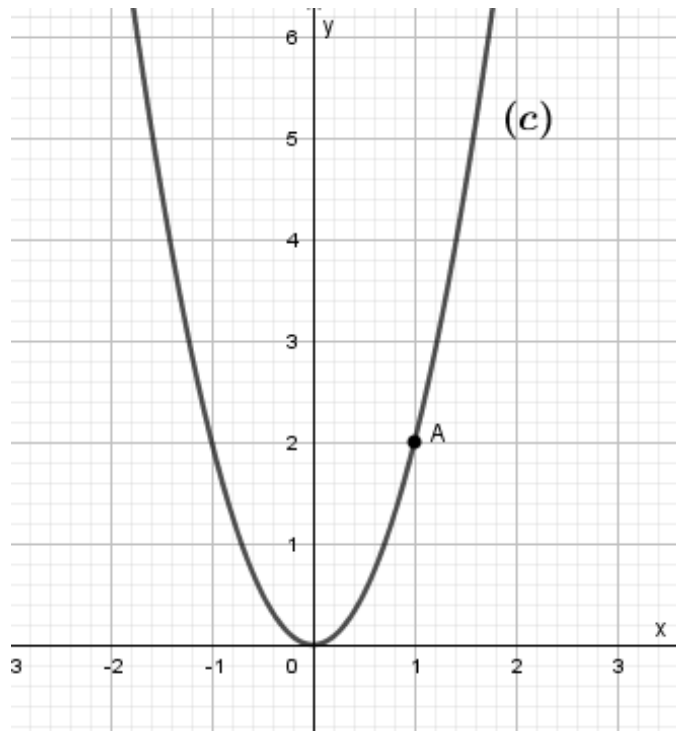
8. (22267) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση : «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της E , έχει συντεταγμένες $E(\dots, \dots)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση». (Μονάδες 09)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο $A(1, -2)$. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ϵ με τον άξονα $x'x$ είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδες 08)

9. (20866) ΘΕΜΑ 3 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής. (Μονάδες 04)

γ) i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$. (Μονάδες 08)

ii) Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε. (Μονάδες 07)

10. (15394) ΘΕΜΑ 4 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M(1, 2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία $t't$ παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο H .

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, H, E.

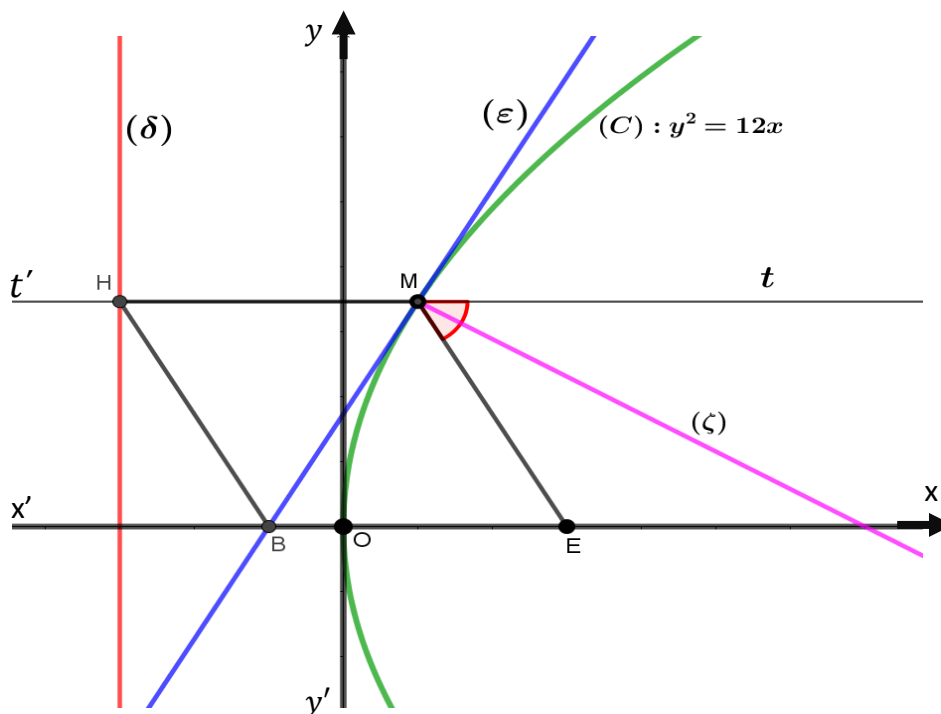
(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο MEBH είναι ρόμβος.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $E\hat{M}t$.

(Μονάδες 6)



11. (18245) ΘΕΜΑ 4 Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ . (Μονάδες 6)

δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ . Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E . (Μονάδες 7)

12. (18372) ΘΕΜΑ 4 Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 09)

β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB . (Μονάδες 08)

γ) Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 08)

13. (18570) ΘΕΜΑ 4 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία (ε): $3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 05)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B

i) Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$. (Μονάδες 07)

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 04)

iii) Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB .

(Μονάδες 09)

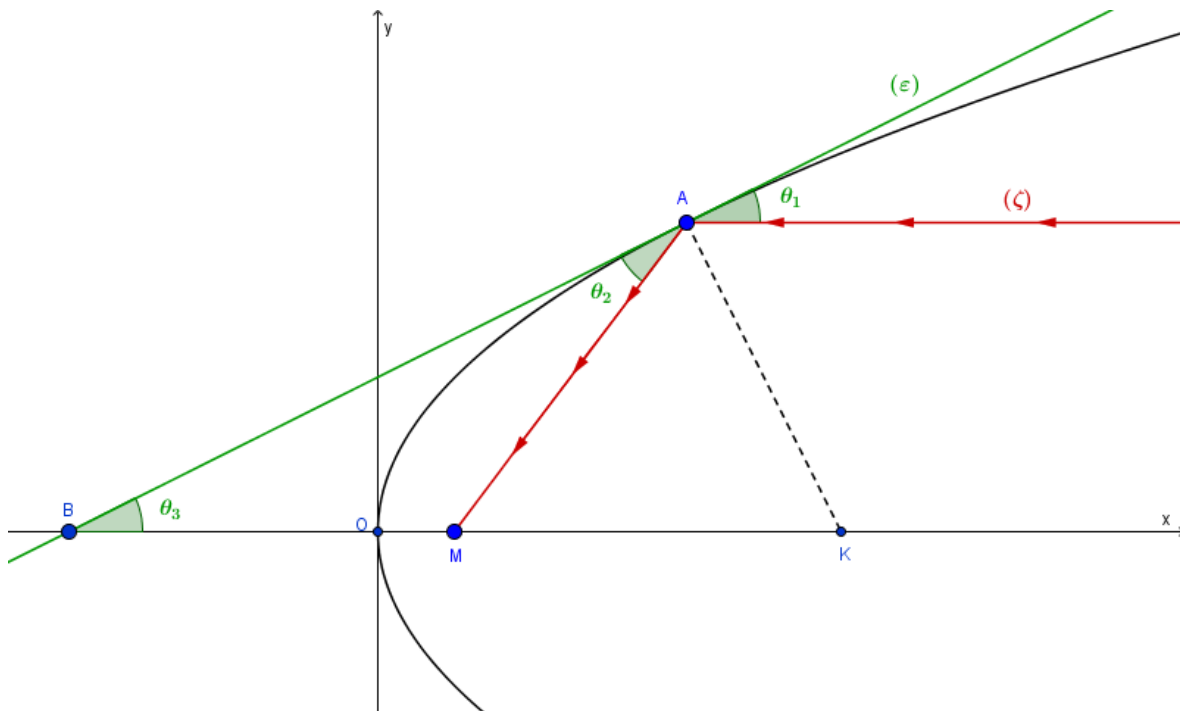
14. (18870) ΘΕΜΑ 4 Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4,4)$ και η AK κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M . Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές. (Μονάδες 07)

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής. (Μονάδες 06)



15. (19047) ΘΕΜΑ 4 Στην Golden Gate γέφυρα του San Francisco, το κεντρικό καλώδιο θεωρούμε προσεγγιστικά ότι αποτελεί τμήμα παραβολής. Οι δύο βασικοί πυλώνες απέχουν μεταξύ τους 1280 m , ενώ το ύψος του κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας είναι 160 m . Γνωρίζουμε ότι το κατώτερο σημείο του παραβολικού καλωδίου αγγίζει τη γέφυρα στο μέσο της απόστασης των δύο πυλώνων. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, όπως στο σχήμα.

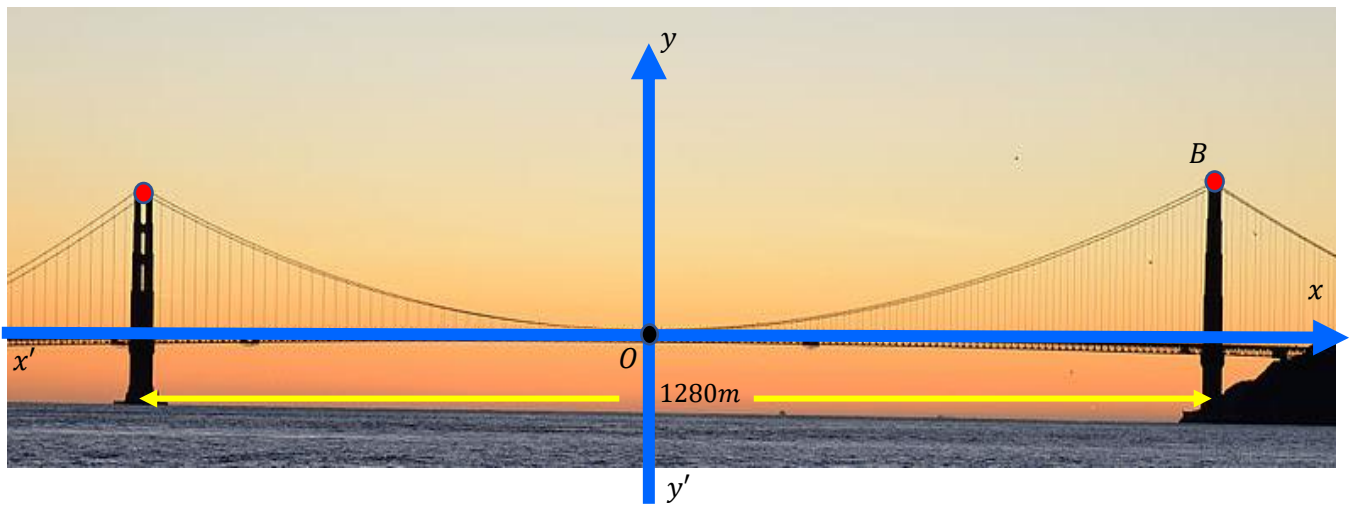
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής του κεντρικού καλωδίου σ' αυτό το σύστημα των αξόνων είναι $x^2 = 2560y$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $B(640,160)$

τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι $E\Delta = EB$.
(Μονάδες 8)



16. (20090) ΘΕΜΑ 4 Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και $M(x_0, y_0)$, $y_0 > 0$, ένα σημείο της.

α) Αν A είναι η προβολή του M στη διευθετούσα της παραβολής,

i) Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων M και A συναρτήσει της τεταγμένης y_0 του σημείου M.

(Μονάδες 05)

ii) Αν E είναι η εστία της παραβολής, να βρείτε το σημείο M για το οποίο $(MAE) = \frac{5}{8}$ τ.μ.

(Μονάδες 12)

β) Αν $M(\frac{1}{4}, 1)$ και ε η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο M, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AMEM' είναι ρόμβος, όπου E είναι η εστία της παραβολής και M' το σημείο που η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 08)

17. (20092) ΘΕΜΑ 4 Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση $\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

α) i) Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου M από την ε . (Μονάδες 07)

ii) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$ τ.μ. (Μονάδες 05)

β) i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που εφάπτεται της παραβολής και είναι παράλληλη στην ευθεία ε . (Μονάδες 08)

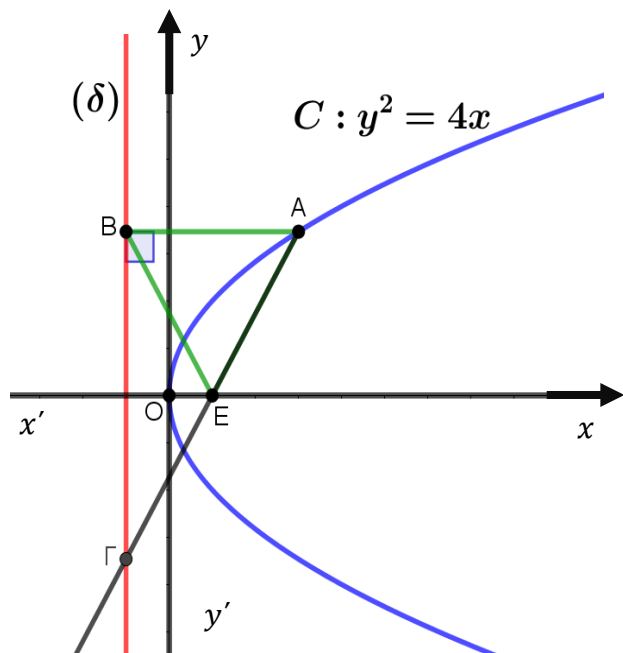
ii) Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε ; (Μονάδες 05)

18. (20684) ΘΕΜΑ 4 Ένα σημείο $A(x_A, y_A)$ της παραβολής $C: y^2 = 4x$ με $x_A > 0$, $y_A > 0$, έχει την εξής ιδιότητα: η ημιευθεία AE τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Γ , έτσι όμως ώστε η εστία E της παραβολής C , να είναι το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. Επίσης, από το σημείο A φέρνουμε κάθετη στην διευθετούσα (δ) και έστω B το σημείο τομής, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $x_A = 3$ και $y_A = 2\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)



19. (20862) ΘΕΜΑ 4 Δίνονται τα σημεία

$M(-2, 2), E\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση $y = \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εξίσωση, που εκφράζει το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία (ζ).

(Μονάδες 06)

γ) i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (n) της καμπύλης $C: x^2 + 2y = 0$, που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_1), με εξίσωση $y = x + 4$. (Μονάδες 07)

ii) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της καμπύλης C και των ευθειών (ε_1) και (n) . Με τη βοήθεια του σχήματος (ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο) να αποδείξετε ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων της C από την ευθεία (ε_1) είναι $\frac{7\sqrt{2}}{4}$. (Μονάδες 07)

20. (21653) ΘΕΜΑ 4 Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, το 1ο τεταρτημόριο αντιστοιχεί σε μια θαλάσσια περιοχή και τα υπόλοιπα τεταρτημόρια σε στεριά. Οι ημιάξονες Ox, Oy οριοθετούν ένα λιμάνι. Ένα πλοίο ρυμουλκείται στο λιμάνι, δεμένο με δύο συρματόσχοινα στο ίδιο σημείο $\Pi(\kappa, \lambda)$ του πλοίου. Το ένα από τα δύο ρυμουλκά είναι σταθερό στο σημείο $E(2,0)$ και το άλλο κινείται ώστε η θέση να περιγράφεται από το σημείο $P(-2, \lambda)$. Η ρυμούλκηση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης να ισχύει $(\Pi E) = (\Pi P)$.

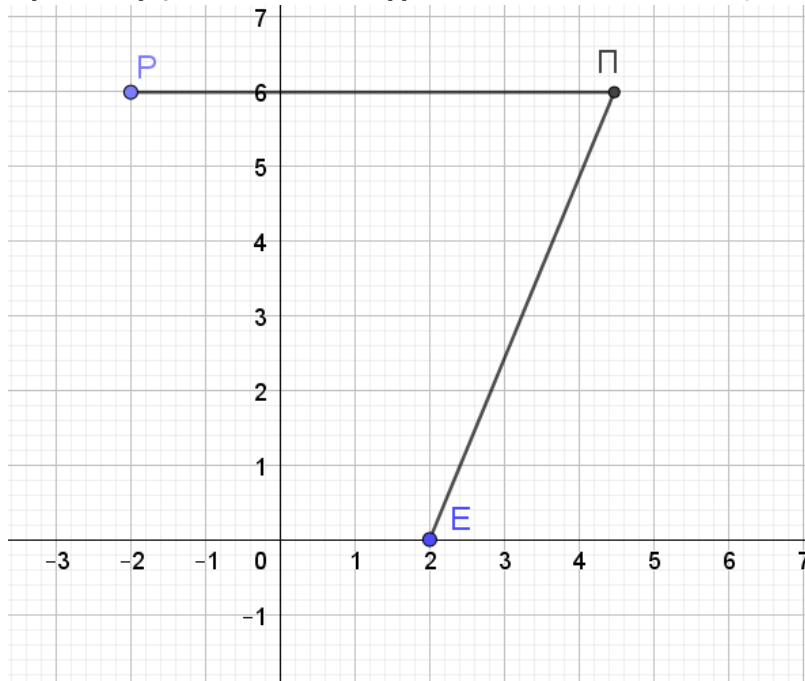
α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $P(-2, \lambda)$ κινείται σε σταθερή ευθεία (δ) της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 5)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί κάθε χρονική στιγμή της ρυμούλκησης είναι $\Pi P \perp (\delta)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η πορεία του $\Pi(\kappa, \lambda)$ είναι παραβολή C της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 7)

δ) Αν $y^2 = 8x$ η εξίσωση της παραβολής C να αποδείξετε

ότι κάθε χρονική στιγμή η μεσοκάθετος του EP εφάπτεται της παραβολής C στο σημείο Π . (Μονάδες 8)



21. (21690) ΘΕΜΑ 4 Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 3x$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 10 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία και να τις σχεδιάσετε. (Μονάδες 8)

β) Έστω $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η απόστασή του $d(M, \varepsilon)$ από την ευθεία είναι $d(M, \varepsilon) = \frac{(y_0+2)^2+6}{5}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο της παραβολής που είναι το πιο κοντινό στην ευθεία. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα γ) είναι παράλληλη στην ευθεία ε . (Μονάδες 4)

22. (21883) ΘΕΜΑ 4 Δίνεται η παραβολή $C: x^2 = 4y$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x - 2$.

α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ε . (Μονάδες 8)

γ) Αν $M(x, y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από την ευθεία ε είναι $d(M, \varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$ (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία ε καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία. (Μονάδες 6)

23. (22275) ΘΕΜΑ 4 Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ . (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

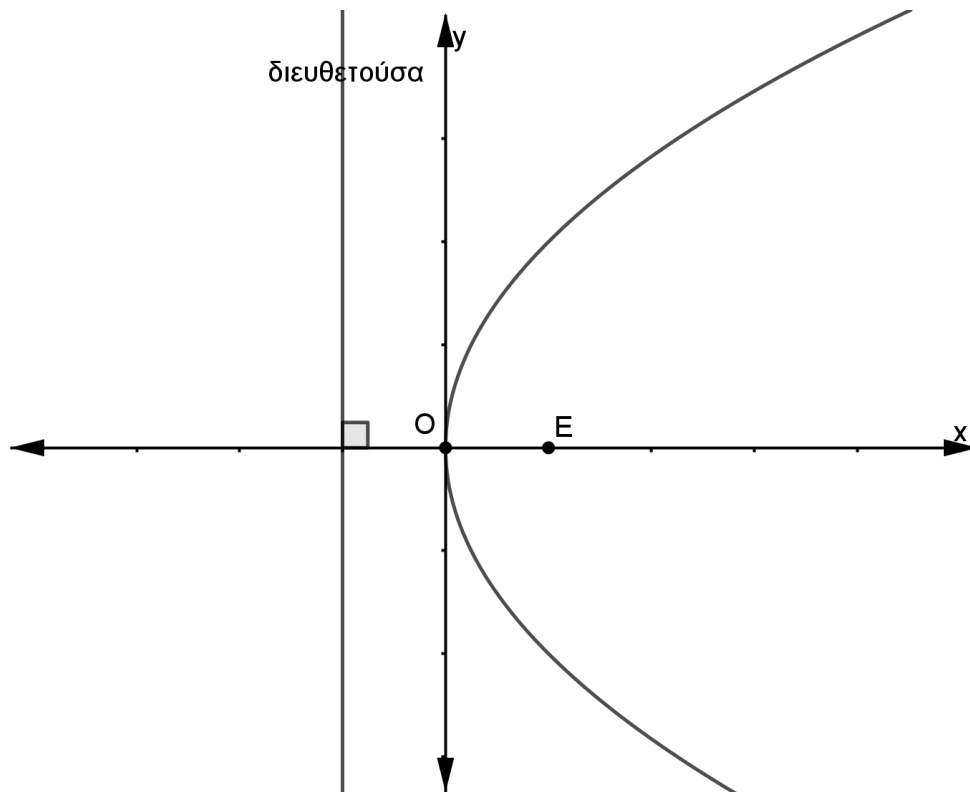
24. (22465) ΘΕΜΑ 4 Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση

φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2,0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x=-2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2,4)$ είναι η $\epsilon: y=x+2$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2,4)$. (Μονάδες 7)



Έλλειψη**25. (20658) ΘΕΜΑ 2** Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

α) Να δικαιολογήσετε ότι $a = 4$, $b = 2$ και $\gamma = 2\sqrt{3}$.
(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης (c).
(Μονάδες 08)

γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη (c) και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 09)

26. (20718) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

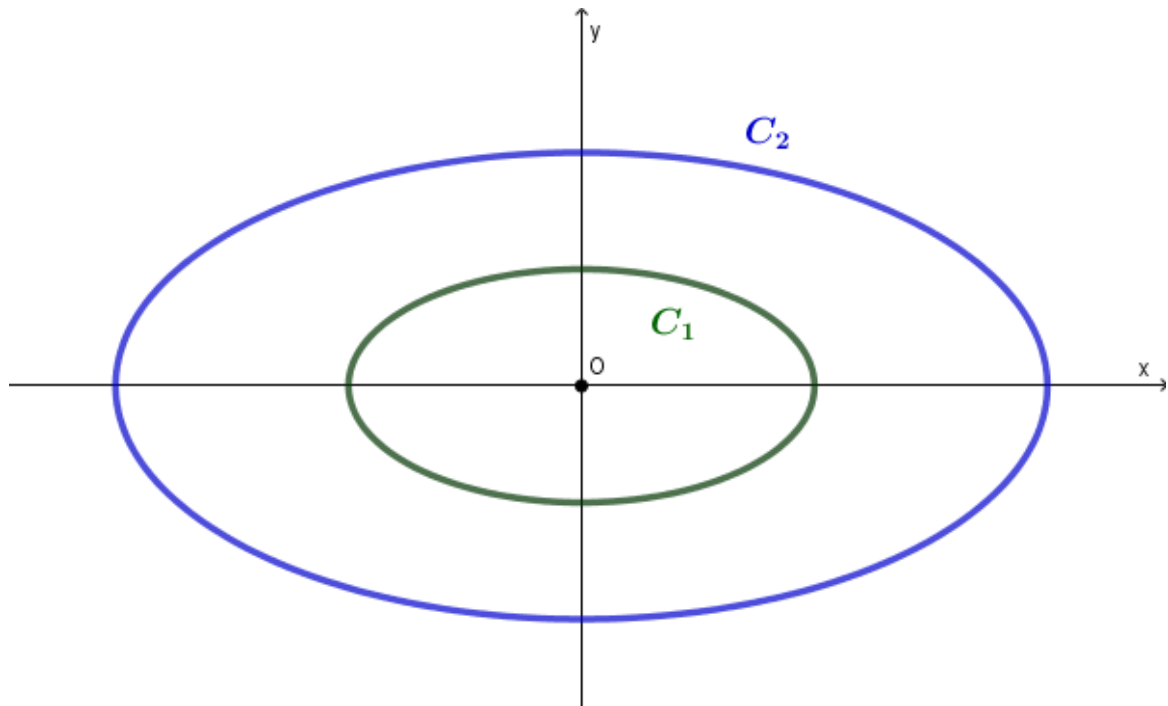
α) Να βρείτε τις εστίες της. (Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 9)

27. (20865) ΘΕΜΑ 2 Δίνονται οι ελλείψεις

$C_1: x^2 + 4y^2 = 4$, $C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ και οι γραφικές τους παραστάσεις στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων. (Μονάδες 14)

β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές. (Μονάδες 11)

28. **(20883) ΘΕΜΑ 2** Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης C:
 $16x^2 + 25y^2 = 400$.

α) Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E'. (Μονάδες 12)

β) Αν $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. (Μονάδες 13)

29. **(21308) ΘΕΜΑ 2** Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

- α) Τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους. (Μονάδες 09)
- β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης. (Μονάδες 08)
- γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της έλλειψης στο σημείο της $B(0,4)$. (Μονάδες 08)
- (21647) ΘΕΜΑ 2 Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4,0)$, $E'(-4,0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:
- α) την εξίσωση της C . (Μονάδες 10)
- β) την εκκεντρότητά της C . (Μονάδες 7)
- γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{9}{5})$. (Μονάδες 8)

30. (21648) ΘΕΜΑ 2 Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3,0)$, $E'(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, \frac{12}{5})$.

- α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της C . (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{12}{5})$. (Μονάδες 7)

Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$

31. (22168) ΘΕΜΑ 2

Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

- α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, να βρείτε:

- i) Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)
 ii) Την εστία E της παραβολής. (Μονάδες 05)
 β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O, αν η μια εστία της είναι το σημείο E(1,0) και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4. (Μονάδες 10)

32. (22192) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1 \quad (1)$$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B(0,9) είναι σημείο της έλλειψης. (Μονάδες 05)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της B(0,9). (Μονάδες 10)

33. (22268) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

- α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση : «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Οι εστίες της E και E', έχουν συντεταγμένες E(.....,) και E'(.....,) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με και η εκκεντρότητα της είναι ίση με». (Μονάδες 15)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της B(0,-2). (Μονάδες 10)

34. (22556) ΘΕΜΑ 2 Η έλλειψη του παρακάτω

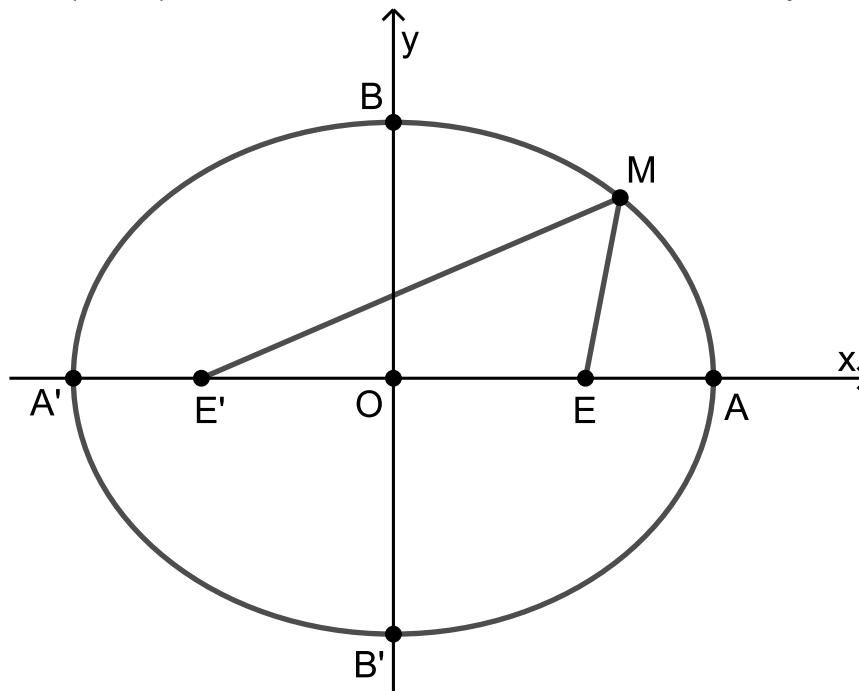
σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5, 0)$, $A(5, 0)$, $B'(0, -4)$ και $B(0, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A) = 10$ και $(B'B) = 8$. (Μονάδες 10)

ii) Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$. (Μονάδες 10)

β) Έστω M ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι $(ME') + (ME) = 10$. (Μονάδες 5)



35. (22558) ΘΕΜΑ 2 Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2, 0)$ και $E(2, 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A) = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση

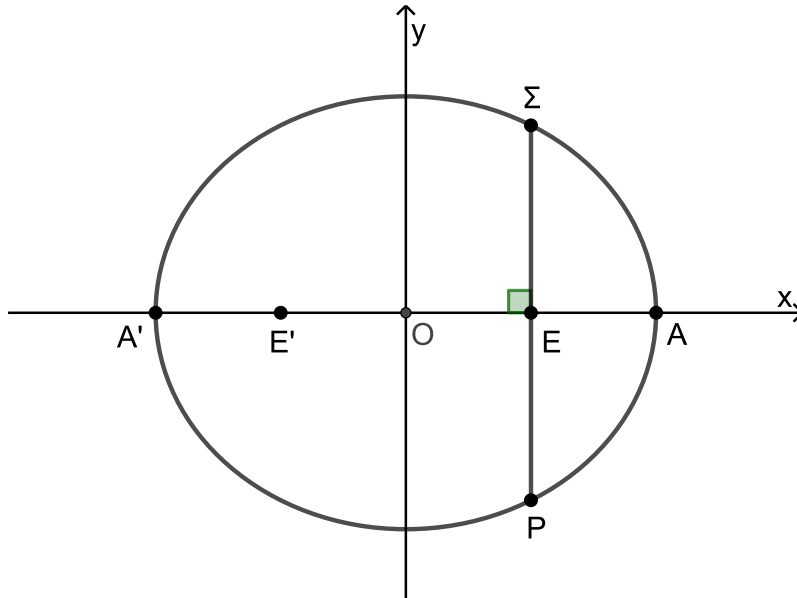
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1. \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

β) Έστω Σ και P τα σημεία της έλλειψης που έχουν την

ίδια τετμημένη με την εστία $E(2, 0)$. Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το P αρνητική τεταγμένη.

i) Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2, 3)$ και $P(2, -3)$. (Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣP . (Μονάδες 5)



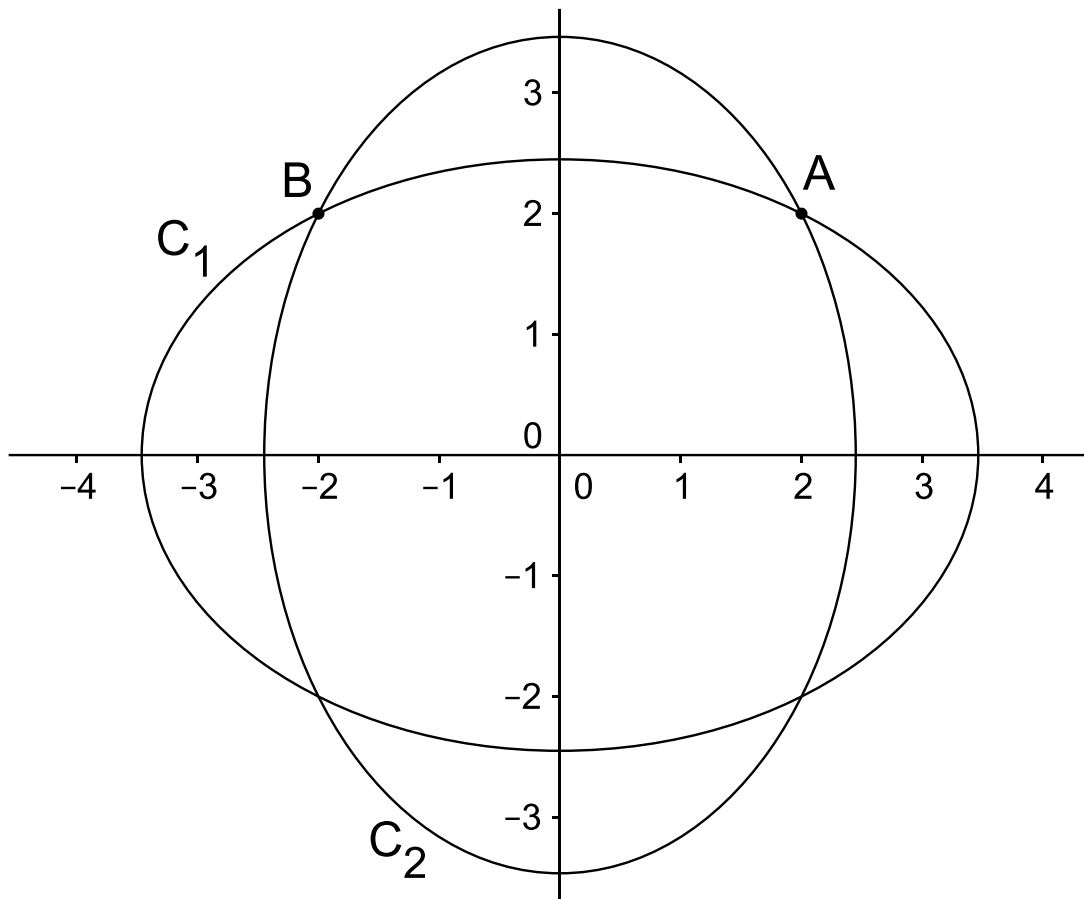
36. (22564)ΘΕΜΑ 2 Δίνονται οι ελλείψεις

$$C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1 \text{ και } C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

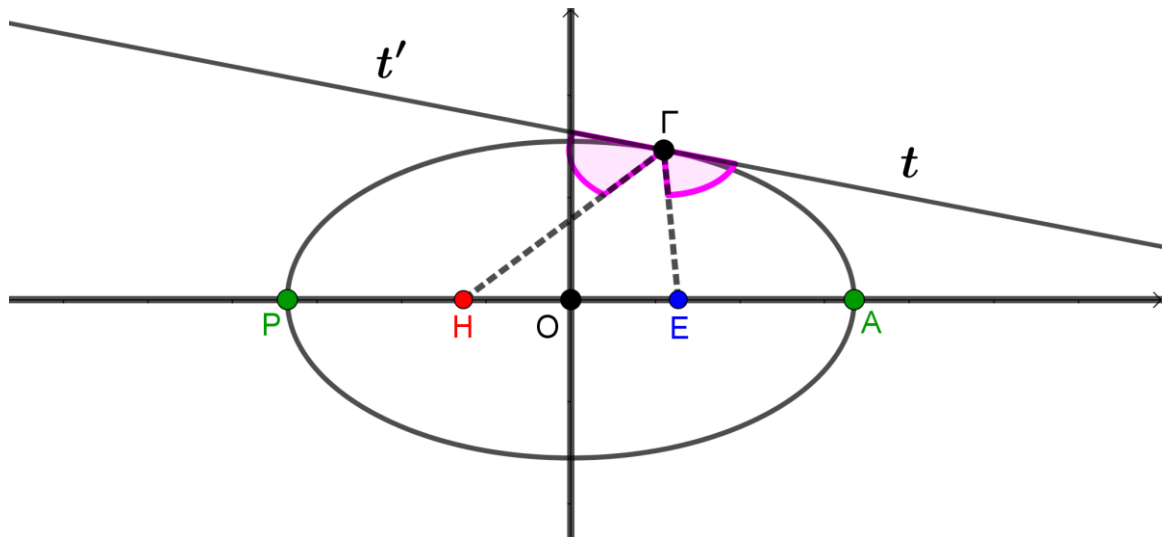
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο A και η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο B είναι αντίστοιχα $x + 2y - 6 = 0$ και $-2x + y - 6 = 0$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες. (Μονάδες 5)



37. (20666) ΘΕΜΑ 4 Η τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι μια έλλειψη με μία εστία τον Ήλιο. Η ελάχιστη απόσταση του κέντρου της Γης από το κέντρο του Ήλιου είναι $PH = 147,5$ εκατομμύρια Km και η μέγιστη $AH = 152,5$ εκατομμύρια Km . Στο σχήμα θεωρούμε ότι τα σημεία H και Γ είναι τα κέντρα του Ήλιου και της Γης αντίστοιχα. Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το μέσο του HE και $x'x$ τον μεγάλο άξονα της έλλειψης, ενώ ο άξονας $y'y$ είναι η μεσοκάθετος του HE .



α) Να αποδείξετε $(PA) = 300$ εκατομμύρια Km , $(HE) = 5$ εκατομμύρια Km και ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{1}{60}$. (Μονάδες 10)

β) Για μια τυχαία θέση της Γης πάνω στην ελλειπτική τροχιά, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου HGE . (Μονάδες 8)

γ) Αν ονομάσουμε $t't$ την εφαπτομένη ευθεία της έλλειψης στο Γ , να αποδείξετε ότι οι γωνίες $t'\hat{\Gamma}H$ και $t\hat{\Gamma}E$ είναι ίσες. (Μονάδες 7)

38. (20722) ΘΕΜΑ 4 Έστω $K(x, y)$ μεταβλητό σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $(KE) + (KE') = 10$, όπου $E(3, 0)$ και $E'(-3, 0)$.

α) Να βρείτε το είδος της καμπύλης C πάνω στην οποία κινείται το σημείο K και να γράψετε την εξίσωσή της, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

Έστω $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και $(\varepsilon): 3x + 5y = 25$.

β) Να αποδείξετε ότι C και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό

σημείο M και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M .
(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β) και να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα την έλλειψη C και την ευθεία ε .

(Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη διχοτόμο της γωνίας $E\hat{M}E'$ και να βρείτε την εξίσωσή της.
(Μονάδες 6)

39. (20762) ΘΕΜΑ 4 Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E' . Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη C όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).

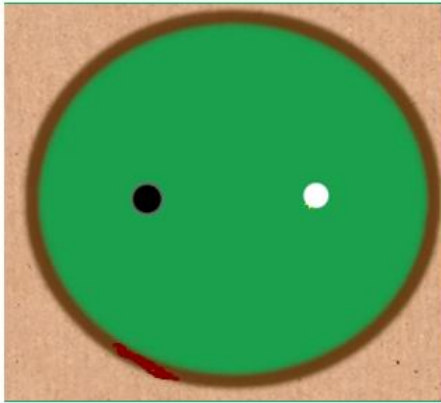
α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C .
(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της.
(Μονάδες 5)

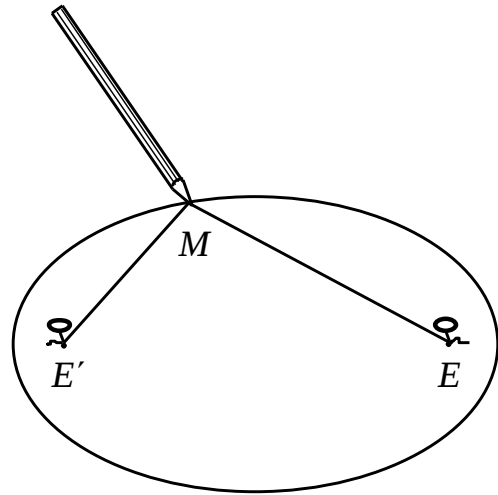
γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο E . Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

- 1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα
- 2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα
- 3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα
- 4) σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσες αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

40. (21655) ΘΕΜΑ 4 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η έλλειψη c με κέντρο το $O(0,0)$, εστίες τα σημεία E, E' και κορυφές τα σημεία $A(5,0), A'(-5,0), B, B'$. Αν είναι γνωστό ότι το τετράπλευρο $BE B' E'$ είναι τετράγωνο, να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των σημείων B, B', E, E' .

(Μονάδες 8)

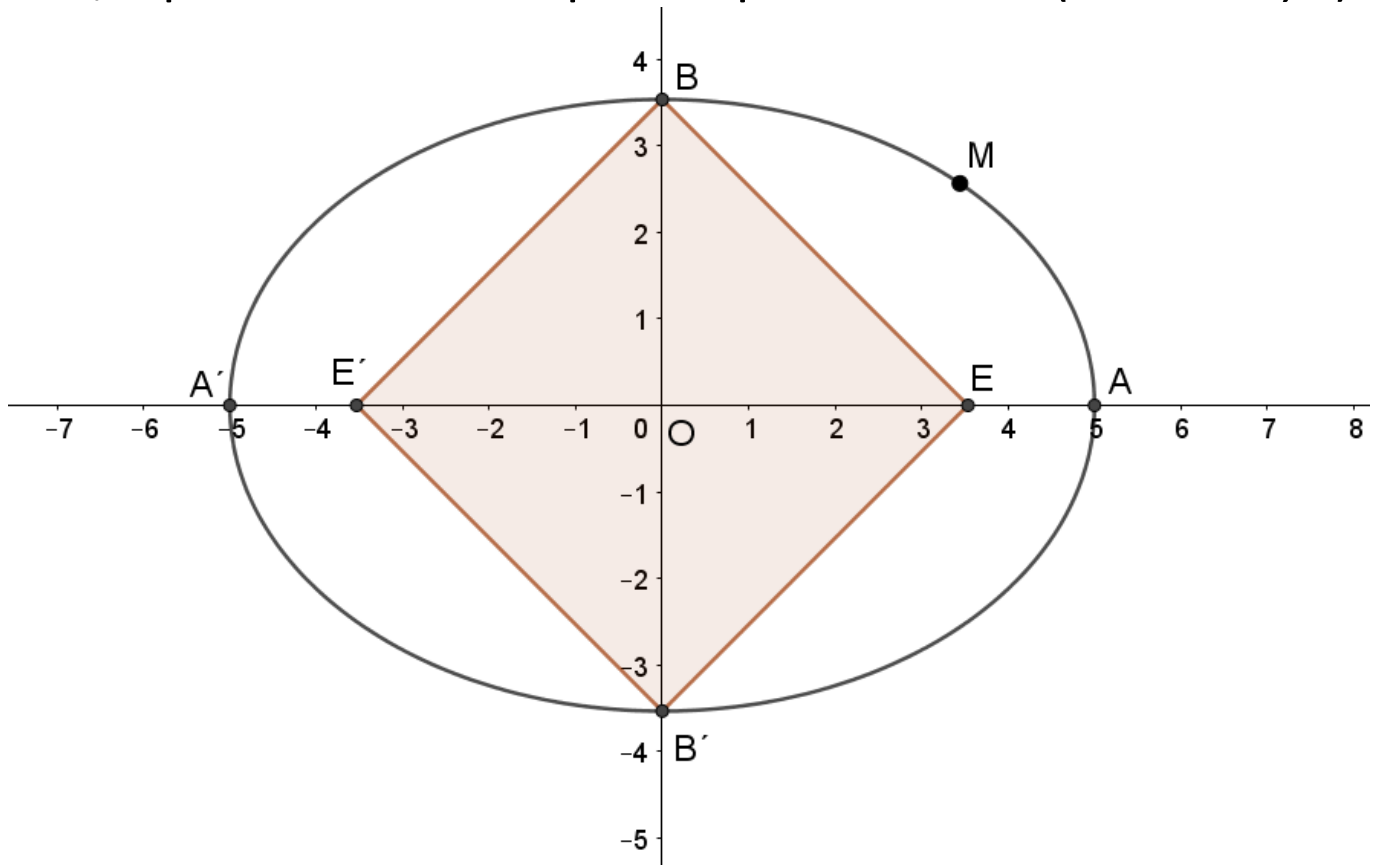
β) την εξίσωση της έλλειψης C .

(Μονάδες 7)

γ) Έστω M τυχαίο σημείο της C , που δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα A, A' .

ι. να αποδείξετε ότι όλα τα τρίγωνα EME' έχουν την ίδια περίμετρο την οποία να προσδιορίσετε. (Μονάδες 5)

ii. να βρείτε τις συντεταγμένες του M για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου EME' παίρνει τη μέγιστη τιμή του, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 5)



41. (22273) ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (1).$$

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i) Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii) Των εστιών E και E' της έλλειψης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 4)$ και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

Υπερβολή**42. (16128) ΘΕΜΑ 2** Δίνεται η υπερβολή

$$(C): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E .

(Μονάδες 10)

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C) , να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$. (Μονάδες 5)γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C) . (Μονάδες 10)**43. (17972) ΘΕΜΑ 2** Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση

$$(C) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

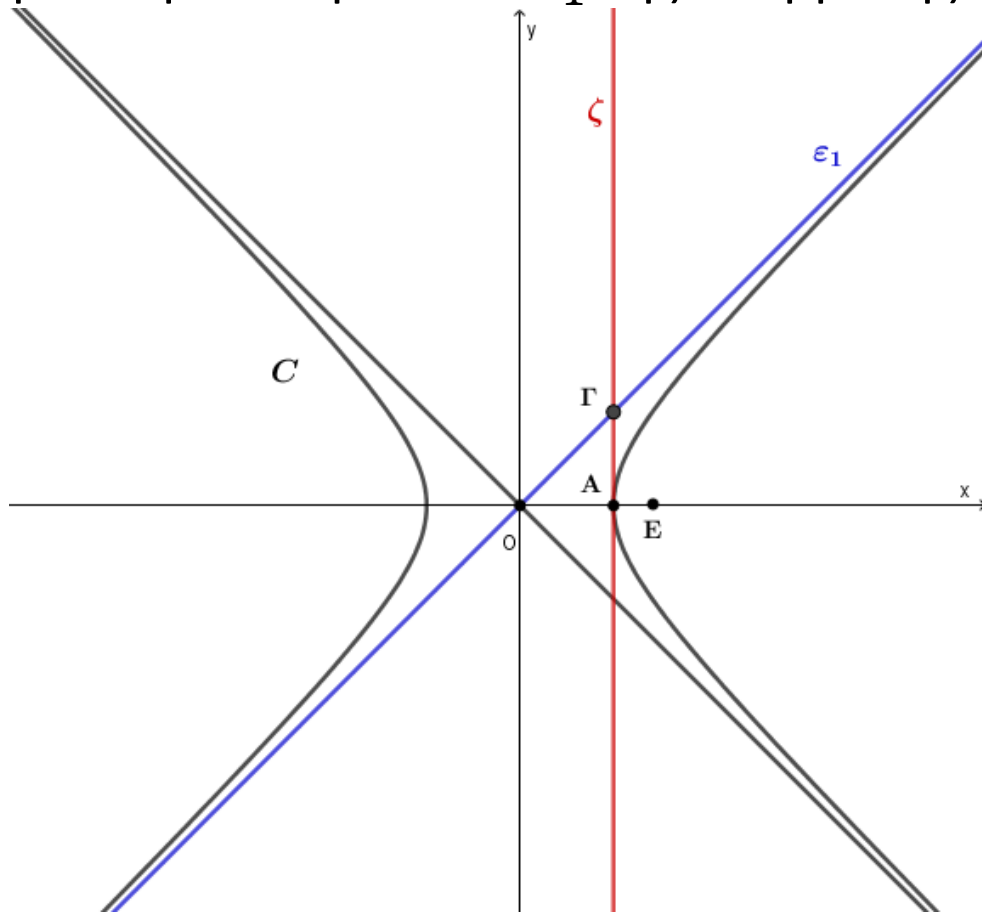
α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της. (Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1, 2022)$ μπορεί να ανήκει στην (C) . (Μονάδες 13)**44. (20721) ΘΕΜΑ 2** Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

α) Να βρείτε τις εστίες της C . (Μονάδες 8)β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C . (Μονάδες 8)γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 9)**45. (20869) ΘΕΜΑ 2** Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$, η εστία της E , η εφαπτομένη

της ζ στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.



α) Να βρείτε τις εστίες E' , E και τις ασύμπτωτες ε_1 , ε_2 της υπερβολής. (Μονάδες 10)

β) i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ . (Μονάδες 07)

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$. (Μονάδες 08)

46. (21218) ΘΕΜΑ 2 Δίνονται οι υπερβολές

$$(C_1): x^2 - y^2 = 1, (C_2): y^2 - x^2 = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1 είναι οι $E_1(\sqrt{2}, 0)$, $E'_1(-\sqrt{2}, 0)$. (Μονάδες 12)

β) Αν E_2, E'_2 οι εστίες της C_2 τότε να αποδείξετε ότι το $E_1 E_2 E'_1 E'_2$ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 13)

47. (21649) ΘΕΜΑ 2 Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C . (Μονάδες 10)

β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C .

(Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 7)

48. (21651) ΘΕΜΑ 2 Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$.

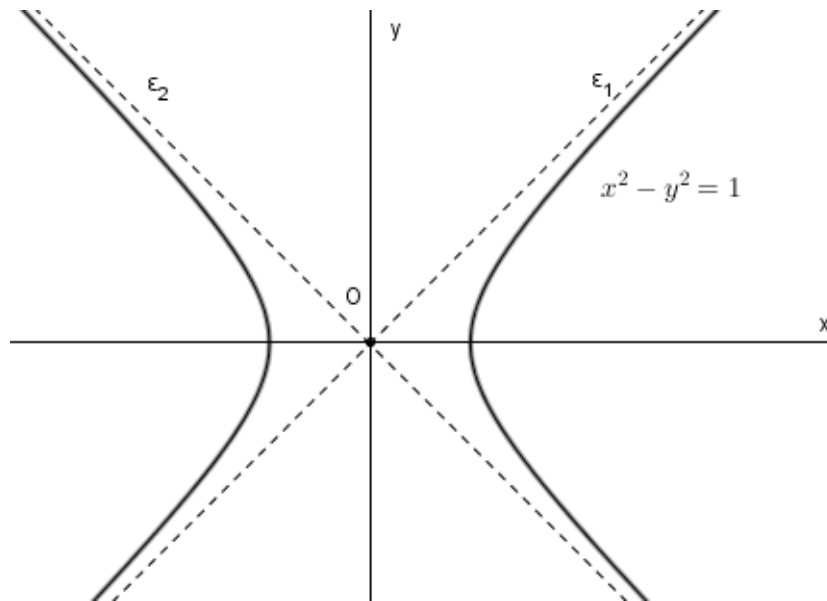
α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 7)

49. (22051) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της υπερβολής ότι:



α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του $1^{\text{ου}}$ και $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου και την διχοτόμο του $2^{\text{ου}}$ και $4^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου, αντίστοιχα. (Μονάδες 13)

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους. (Μονάδες 12)

50. (22169) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της Α και Α' είναι 8.

α) i) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

ii) Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 10)

51. (22196) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2 - y^2 = 25$ (1)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε'.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1) , (ε_2) της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1) , (ε_2) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)**52. (22269) ΘΕΜΑ 2** Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση :

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \quad (1).$$

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας

i) Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii) Την εκκεντρότητά της.

iii) Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

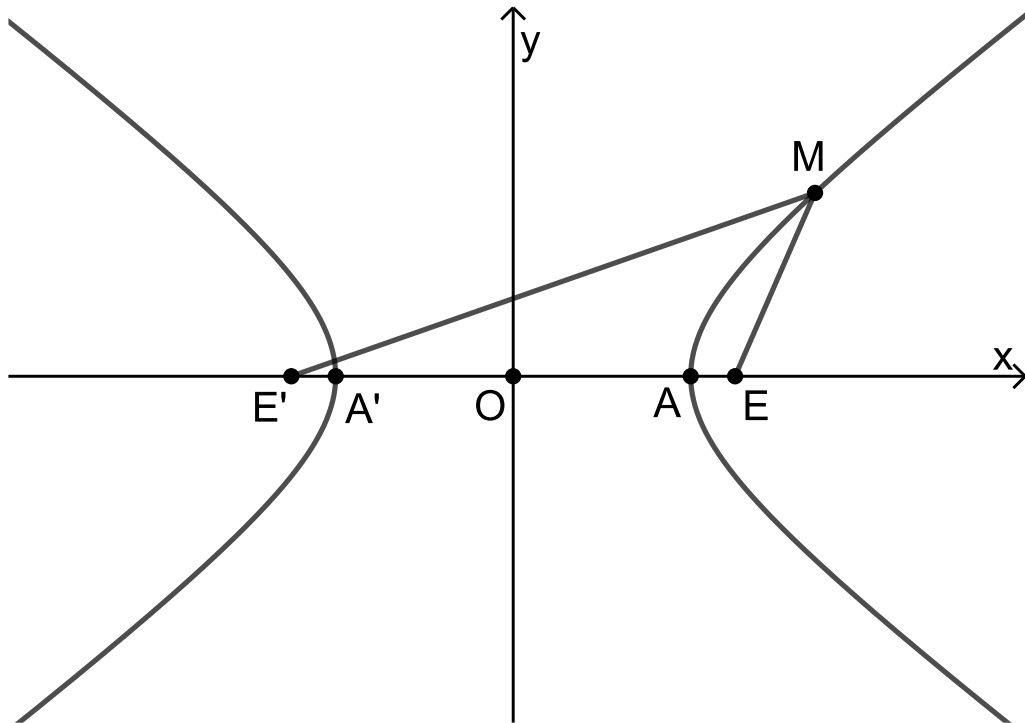
(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$. (Μονάδες 10)**53. (22559) ΘΕΜΑ 2** Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10, 0)$ και $E(10, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8, 0)$ και $A(8, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1. \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.i) Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$. (Μονάδες 8)ii) Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E' . (Μονάδες 5)



54. (22561) ΘΕΜΑ 2 Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5, 4)$.

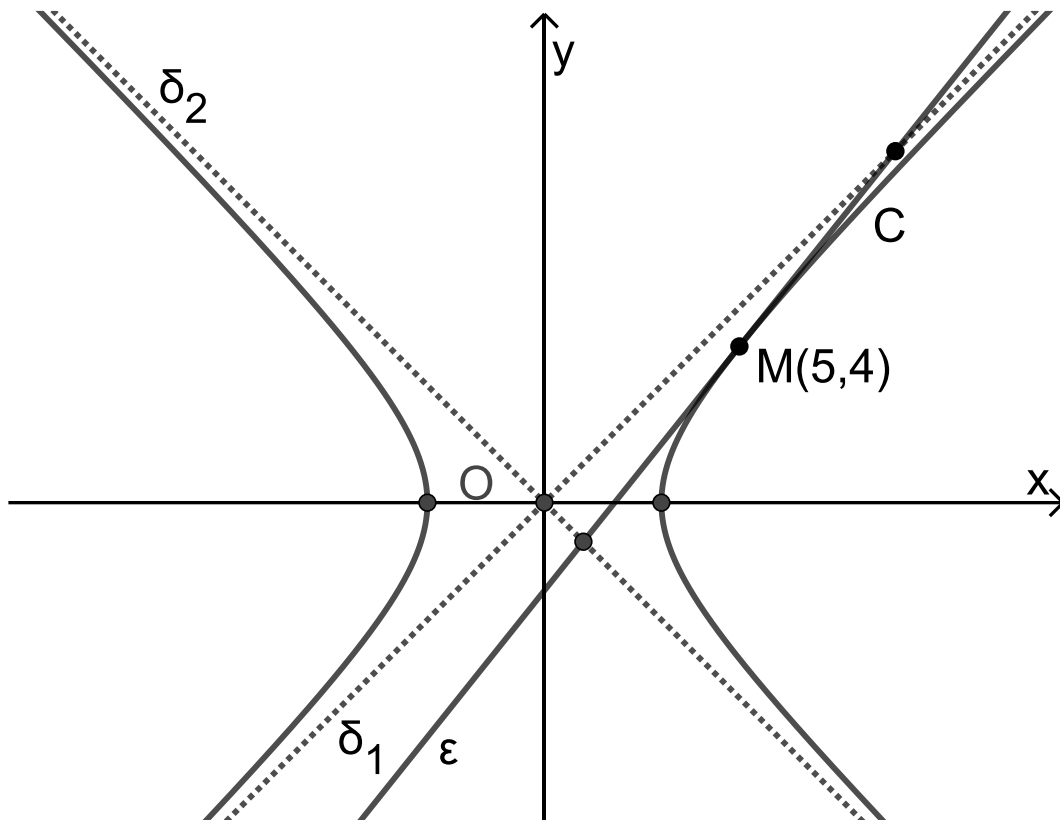
α) Να αποδείξετε ότι:

i) Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$. (Μονάδες 8)

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $\varepsilon: 5x - 4y = 9$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2 .

(Μονάδες 9)



55. (22566) ΘΕΜΑ 2 Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$ (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$ (Μονάδες 8)

56. (22567) ΘΕΜΑ 2 Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η

υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-4, 0)$ και $A(4, 0)$ και έχει ασύμπτωτες τις

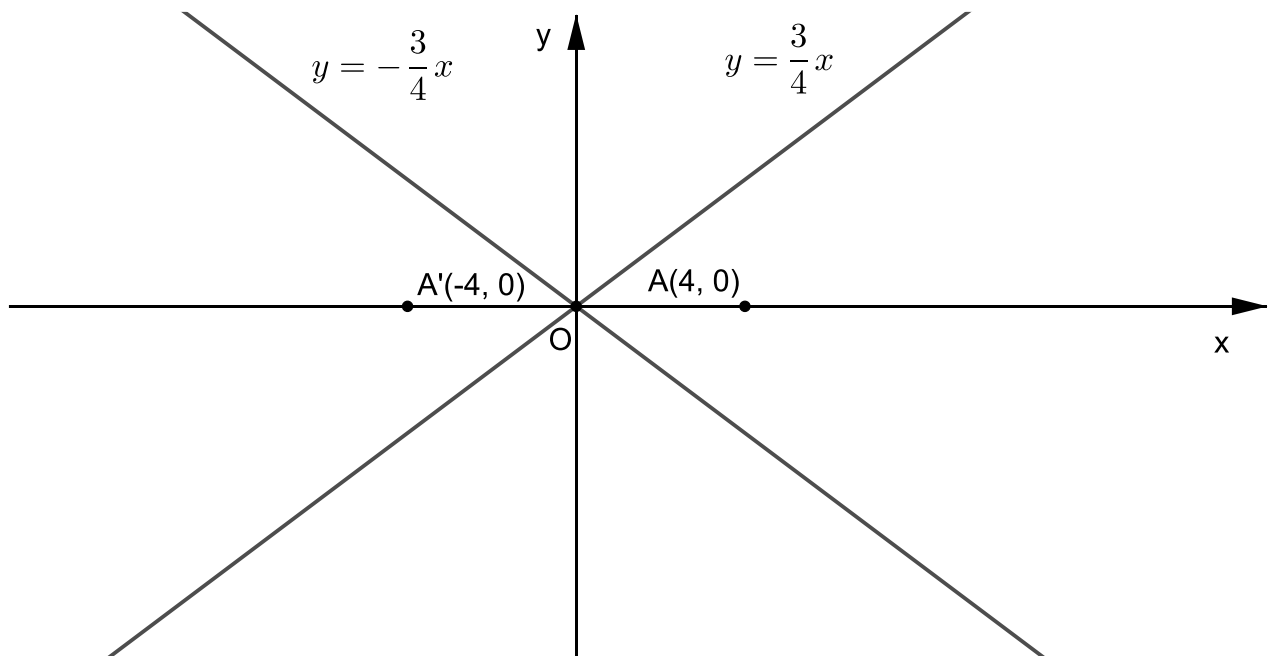
ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = 4$ και $\beta = 3$, (Μονάδες 10)

ii) οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$.
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C . (Μονάδες 5)



57. (17944) ΘΕΜΑ 3 Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής $(C): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, εστιακή απόσταση

$EE' = 2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

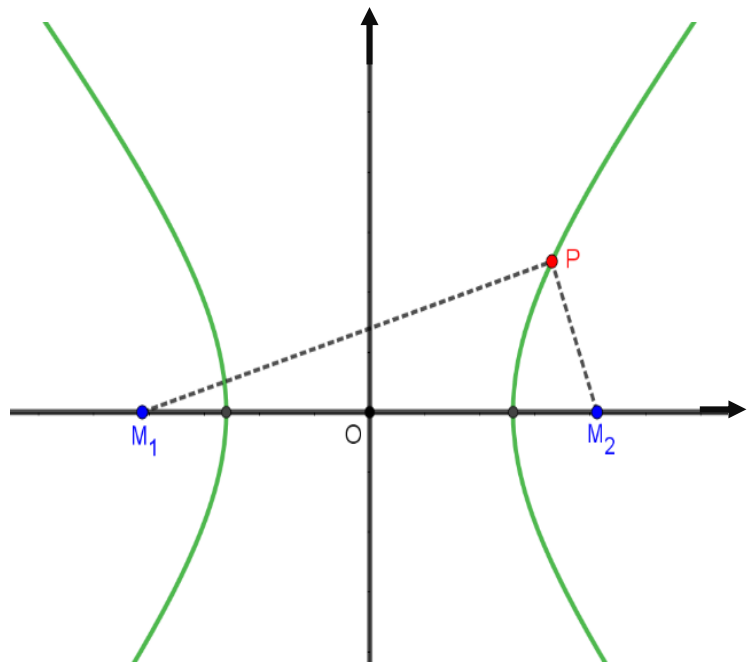
β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής (C) .

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C). (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της. (Μονάδες 9)

58. (20653) ΘΕΜΑ 4 Κατά τη διάρκεια μιας

επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο



παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκπυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2 .

α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι $(PM_1) - (PM_2) = 1360 \text{ m}$. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει

σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 . (Μονάδες 8)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση $(M_1 M_2)$ είναι 1378 m , να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση

$\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία $M_1 M_2$ και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2 = 1369$. (Μονάδες 9)

59. (21656) ΘΕΜΑ 4 Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4,0)$, $A'(-4,0)$.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής C .

(Μονάδες 3)

ii) την εξίσωση της υπερβολής C .

(Μονάδες 3)

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή C , τις ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C .

(Μονάδες 9)

γ) Αν M τυχαίο σημείο της C , να βρείτε την τιμή της

παράστασης $60(ME) - (ME')$.

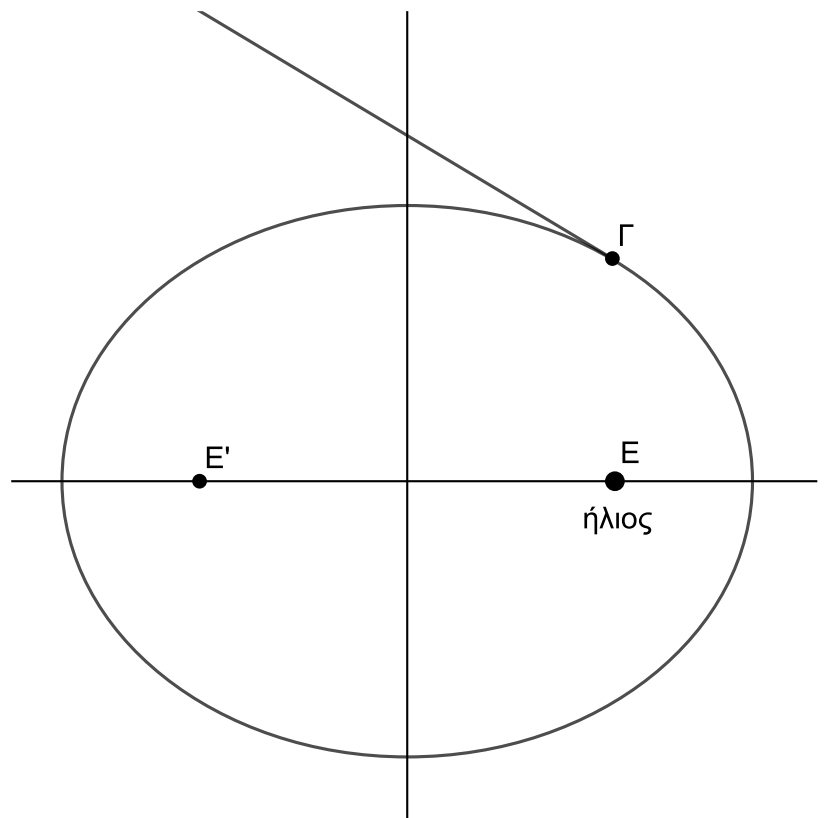
(Μονάδες 5)

δ) Αν $M(\sqrt{80}, 6)$ σημείο της C , να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E\hat{M}E'$.

(Μονάδες 5)

60. (22174) ΘΕΜΑ 4

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης $E(\gamma, 0)$, ενώ η άλλη εστία είναι στο $E'(-\gamma, 0)$. Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.



α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

(Μονάδες 09)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

i) Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο

$\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy . Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0, 5)$.

(Μονάδες 09)

ii) Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ με $x > 0$. Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

(Μονάδες 07)

61. (32206) ΘΕΜΑ 4 Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(5, \frac{9}{4})$.

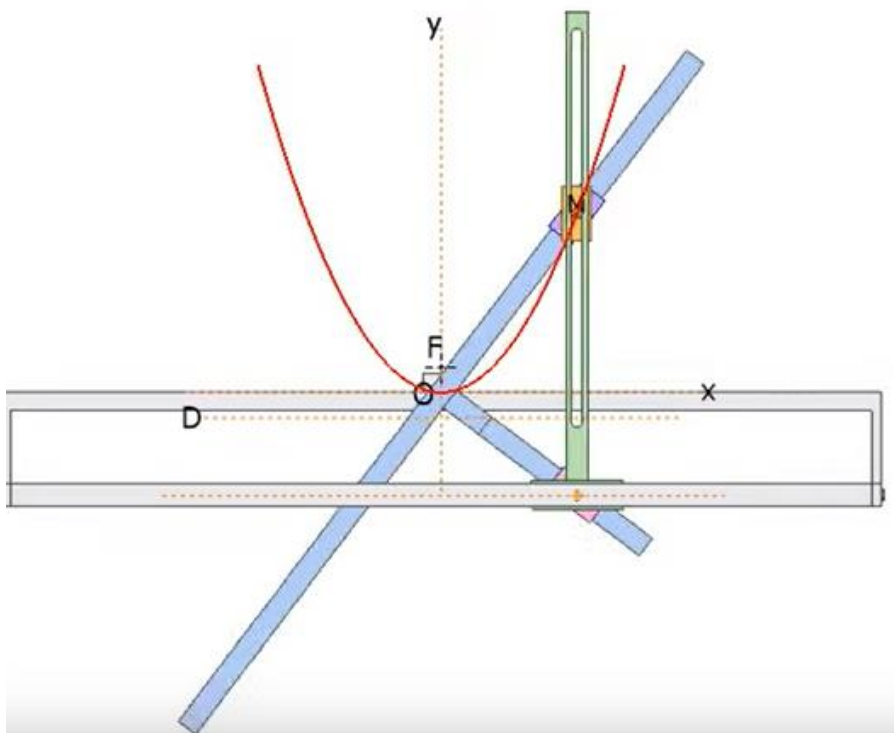
- α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε την εξίσωση της C . (Μονάδες 6)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E\hat{M}E'$. (Μονάδες 6)
δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της. (Μονάδες 6)

Δίνεται ότι $\sqrt{1681} = 41$.

Παράγραφος 3.5

62. (21657) ΘΕΜΑ 4 Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0,0)$, εστίες πάνω στον άξονα x της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

- α) Να βρείτε:
i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C . (Μονάδες 6)
ii. την εκκεντρότητα της C . (Μονάδες 6)
β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασυμπτωτων της C (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),
i. να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C . (Μονάδες 8)
ii. είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της C ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



Λύκειο Μεσοποταμίας
Σχολικό έτος 2023-2024
Βοηθητικό Υλικό της Β' Λυκείου