

Τράπεζα Θεμάτων ΙΕΠ Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

Διανύσματα



Λύκειο Άργους Ορεστικού

Γεώργιος Ε. Καραφέρης

«Τα θέματα προέρχονται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)».

Τράπεζα Θεμάτων : Κεφάλαιο 1° (7/7/2024)**Παράγραφοι 1.1-1.2****1. ΘΕΜΑ 2 (21165)**

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$.
Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$.

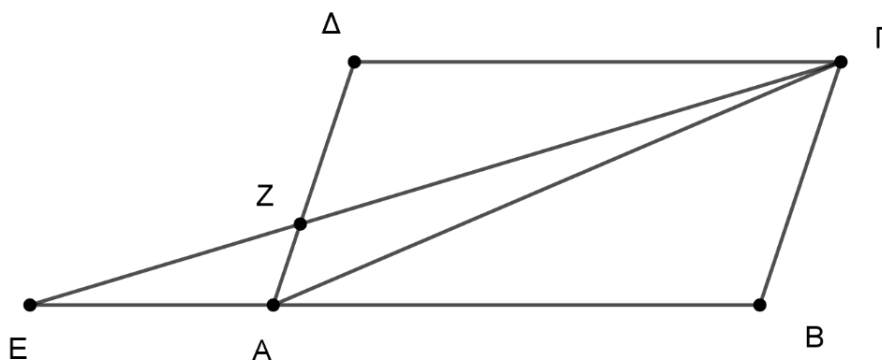
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$.

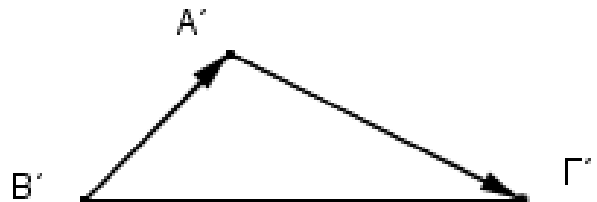
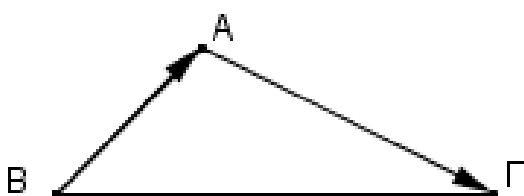
(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Z , E και Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 6)

**2. ΘΕΜΑ 2 (22055)**

Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$.



α) Να εξηγήσετε γιατί:

(i) το μήκος της πλευράς BA είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'A'$ και
(Μονάδες 3)

(ii) το μήκος της πλευράς AG είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $A'\Gamma'$.

(Μονάδες 3)

β) i. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$. (Μονάδες 10)

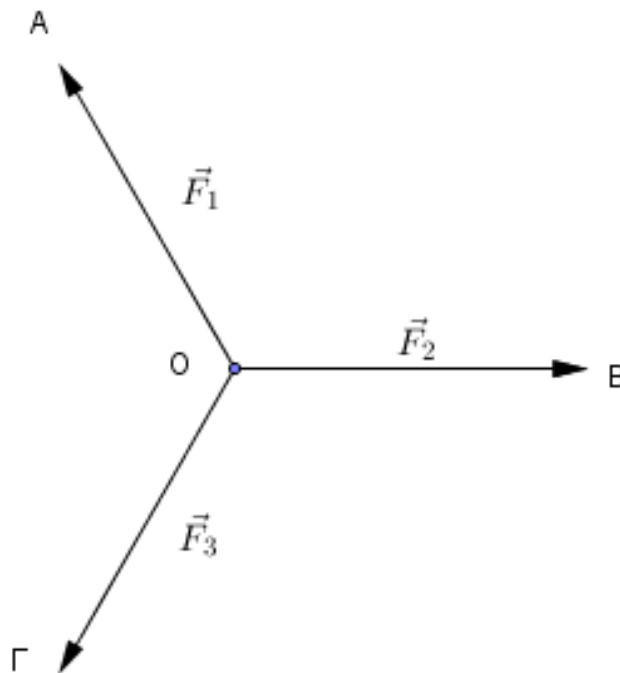
ii. Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'\Gamma'$. (Μονάδες 3)

γ) Θα μπορούσε η ακόλουθη πρόταση να ήταν κριτήριο ισότητας τριγώνων;

«Αν για δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα». Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

3. ΘΕΜΑ 4 (22068)

Σε ένα υλικό σημείο O εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120° , έτσι ώστε το υλικό σημείο O να ισορροπεί.



α) Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας; (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ είναι αντίθετα. (Μονάδες 5)

γ) Αν A, B, Γ, Δ είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ και $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, αντίστοιχα (θεωρούμενων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο O), τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{AO\Delta} = \widehat{BO\Delta} = 60^\circ$. (Μονάδες 5)

ii. $\widehat{O\Delta B} = 60^\circ$. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$. (Μονάδες 5)

Παράγραφος 1.3

4. ΘΕΜΑ 2 (15010)

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A, B, Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\Gamma E}$ τέτοια ώστε $\vec{B\Delta} = \vec{BA} + \vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma E} = \vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}$.

α) i. Να δείξετε ότι $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta}$. (Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{A\Gamma}$ είναι αντίθετα. (Μονάδες 8)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

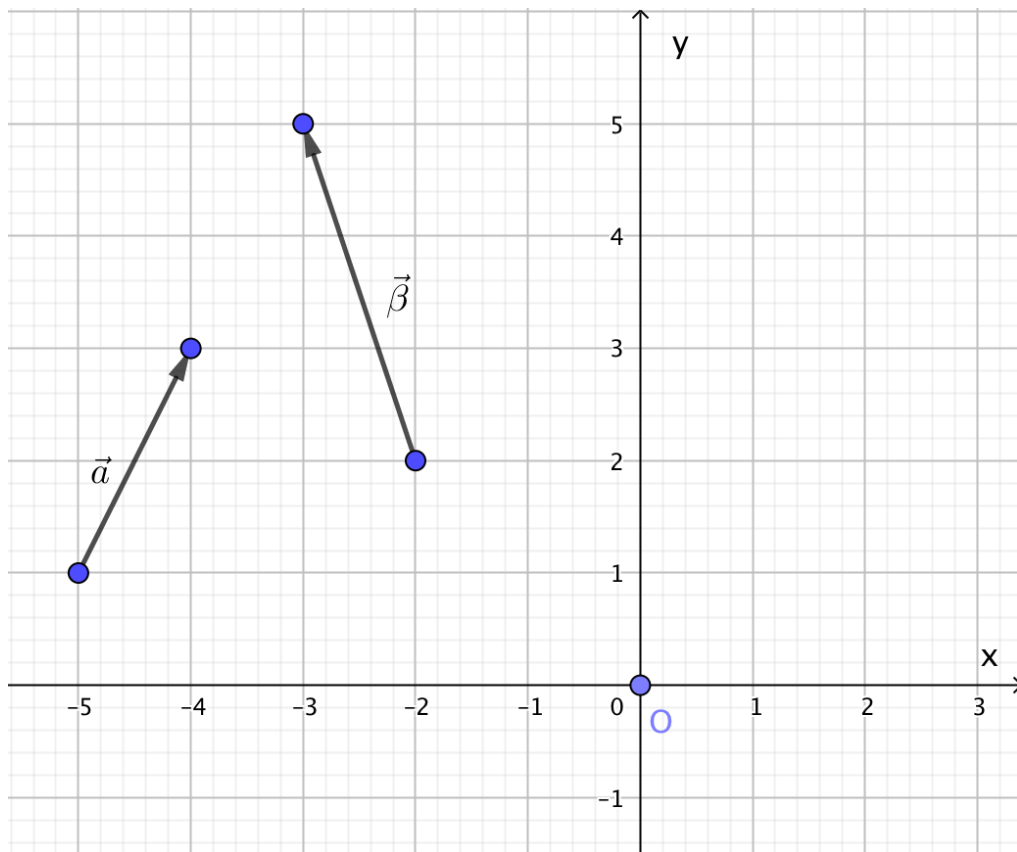
5. ΘΕΜΑ 2 (20914)

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

α) Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}, \vec{OB} = \vec{\beta}$ όπου O η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)

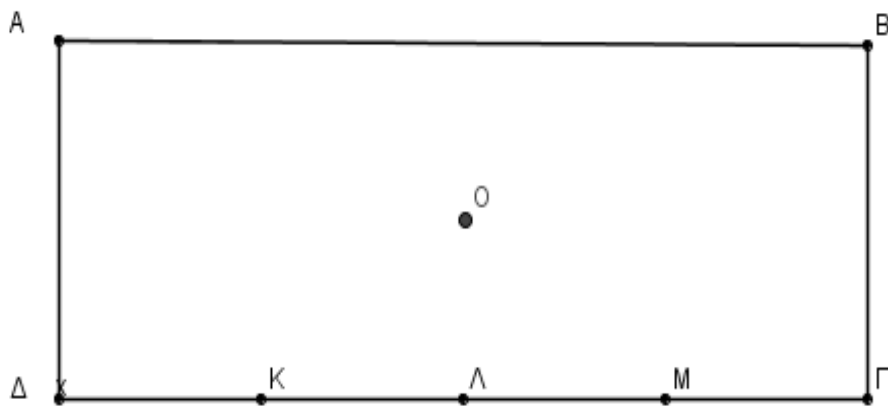
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{OA} = \vec{\alpha}, \vec{OB} = \vec{\beta}$ και $\vec{AB}$. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 08)



6. ΘΕΜΑ 2 (22042)

Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Τα σημεία Κ, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα.



Αν $\overrightarrow{DK} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{DA} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) $\overrightarrow{DG}$

(Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{MA}$

(Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{OD}$

(Μονάδες 9)

7. ΘΕΜΑ 4 (21885)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E σημεία εσωτερικά των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{AE}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

β) i) Αν $\kappa = \lambda$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \parallel \overrightarrow{DE}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \kappa |\overrightarrow{DE}|$. (Μονάδες 10)

ii) Αν $\kappa = \lambda = 2$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 7)

Παράγραφος 1.4

8. ΘΕΜΑ 2 (14666)

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K, Λ , και M αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 7)

9. ΘΕΜΑ 2 (15002)

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3, 1)$.

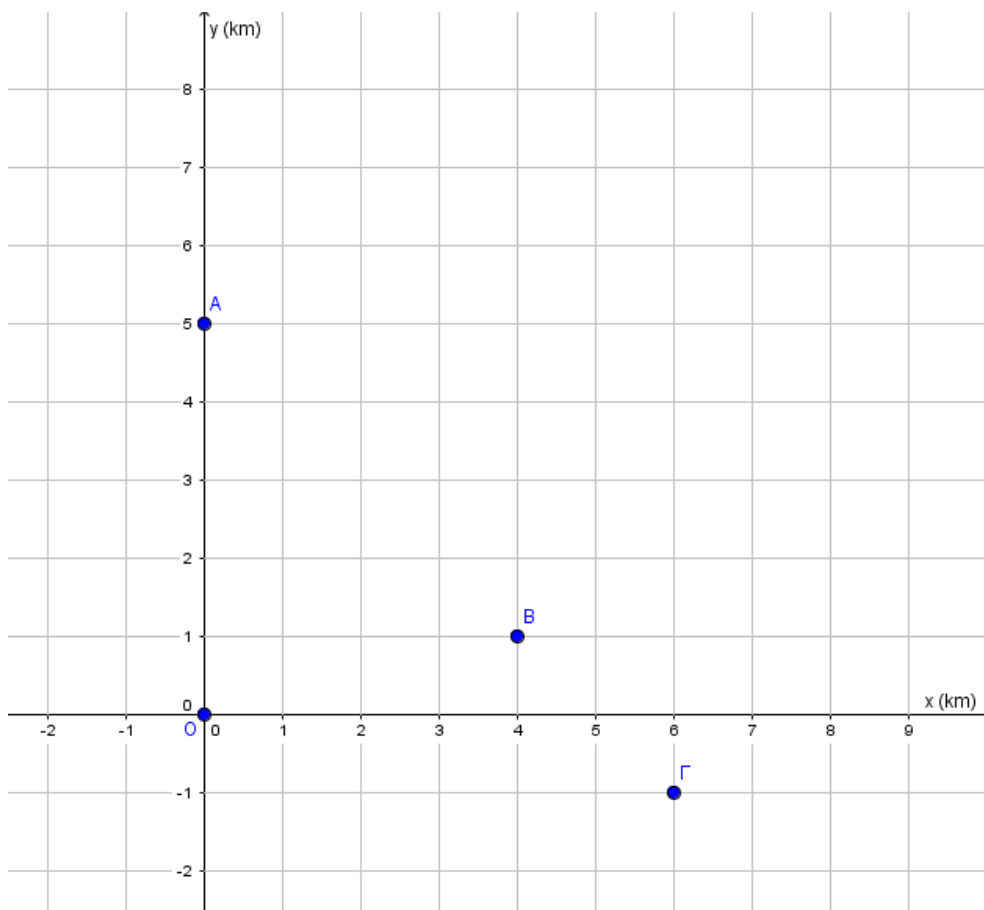
α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

(Μονάδες 11)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 6)ii) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 8)

10. ΘΕΜΑ 2 (15043)

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.

α) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 06)

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ .
(Μονάδες 12)

11. ΘΕΜΑ 2 (15854)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.
(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$.
(Μονάδες 8)

12. ΘΕΜΑ 2 (16147)

Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.
(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox .
(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 06)

13. ΘΕΜΑ 2 (16151)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.
(Μονάδες 09)

14. ΘΕΜΑ 2 (16597)

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(6, 7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 07)

β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα. (Μονάδες 10)

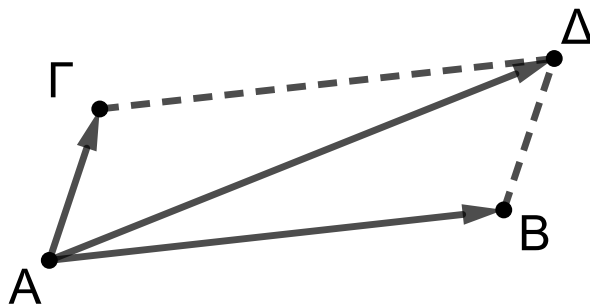
15. ΘΕΜΑ 2 (16580)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11,5)$, $\Gamma(3,7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 08)

γ) του σημείου Δ . (Μονάδες 05)



16. ΘΕΜΑ 2 (16581)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 07)

17. ΘΕΜΑ 2 (17070)

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A , B , Γ και Δ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

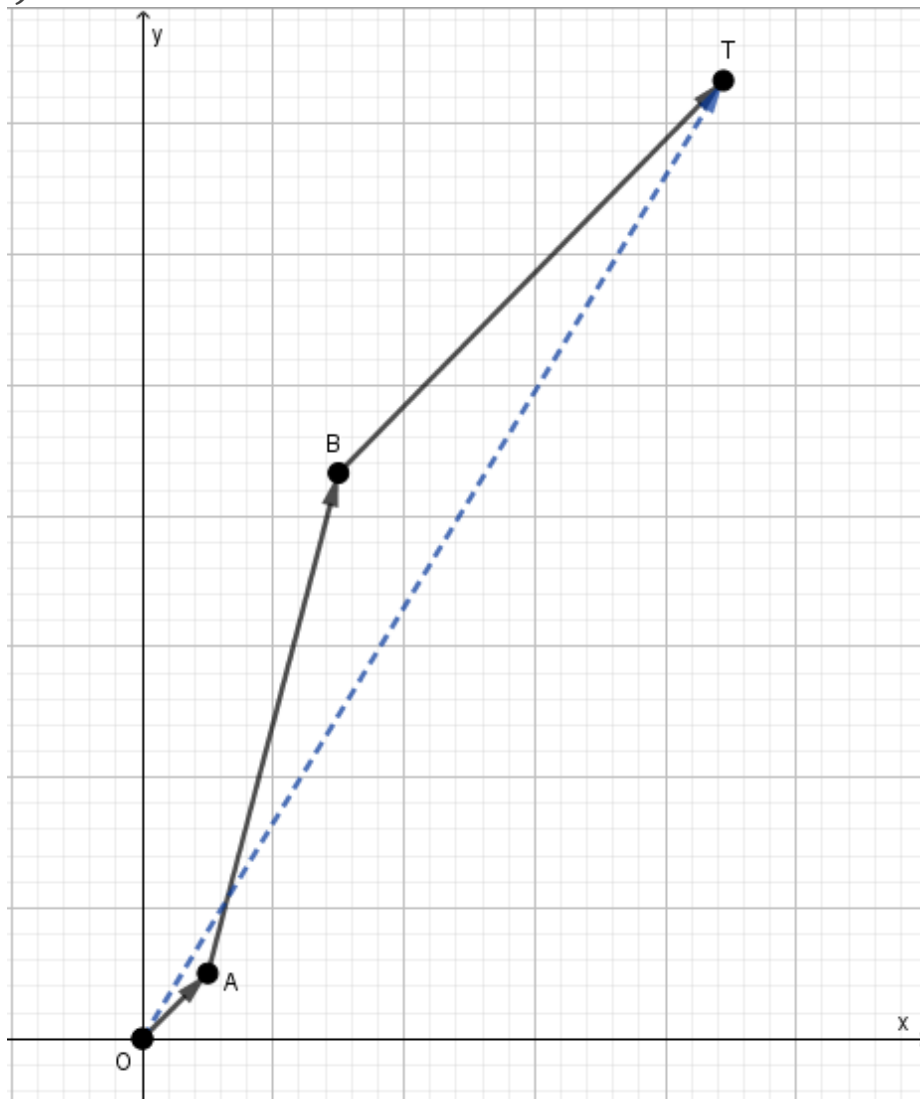
(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

18. ΘΕΜΑ 2 (18878)

Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρεις μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A , στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο T . Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα $\overrightarrow{OA} = (1, 1)$, $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$, $\overrightarrow{BT} = (2, 5\sqrt{3} - 5)$, όπως φαίνονται στο σχήμα:



Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT} = (5, 5\sqrt{3})$. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας. (Μονάδες 12)

19. ΘΕΜΑ 2 (19038)

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-1,1)$ και $\vec{\gamma} = (-5,-5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

20. ΘΕΜΑ 2 (21681)

Θεωρούμε τα σημεία $A(1,2)$, $B(-3,4)$, $\Gamma(2,5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 7)

21. ΘΕΜΑ 2 (22038)

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7. (Μονάδες 13)

22. ΘΕΜΑ 2 (22044)

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία A , B , Γ . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

23. ΘΕΜΑ 2 (22052)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 5)$ και $\vec{\beta} = (1, -3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\nu} = (8, -21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

24. ΘΕΜΑ 2 (22060)

Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(6, 2)$ και $\Delta(3, 4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{B\Delta}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$;

(Μονάδες 13)

25. ΘΕΜΑ 2 (22557)

Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma$ και ύψος AO . Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού

ημιάξονα Oy και οι κορυφές

B και Γ είναι σημεία του

άξονα $x'x$, όπως φαίνεται

στο παρακάτω σχήμα. Έστω

$(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και M

το μέσο της πλευράς $A\Gamma$.

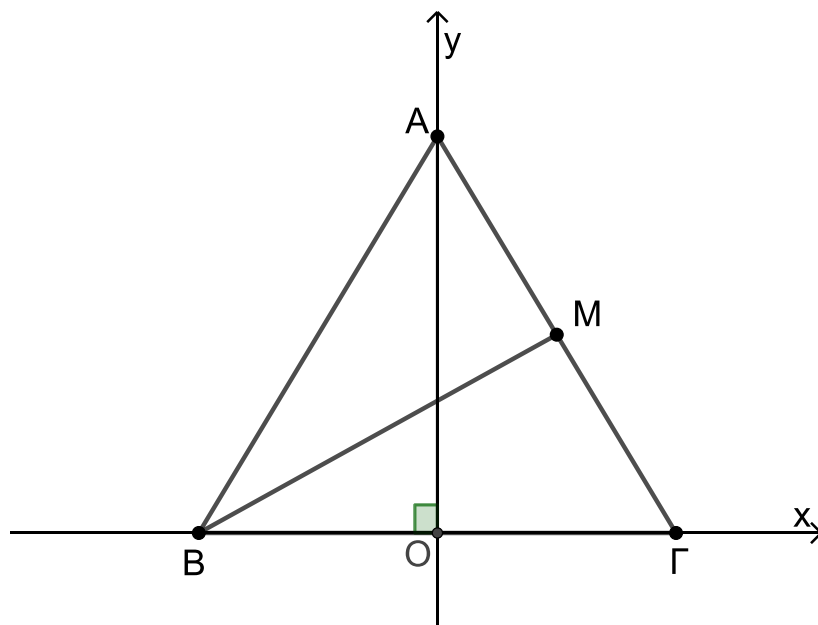
α) Να αποδείξετε ότι:

i) $A(0, 8)$, $B(-6, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$. (Μονάδες 9)

ii) $M(3, 4)$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM .

(Μονάδες 7)



26. ΘΕΜΑ 4 (17076)

Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$.
(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4$.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

27. ΘΕΜΑ 4 (17077)

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB} = (\lambda+1)\vec{i} + (\lambda+3)\vec{j}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda-1)\vec{i} + 3\vec{j}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ .
(Μονάδες 7)

γ) Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5;
(Μονάδες 7)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

28. ΘΕΜΑ 4 (20938)

Θεωρούμε τρίγωνο OAB , με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = (6, 8)$. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, |\vec{\alpha}| - 2)$

α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο $ΟΑΓΒ$ να αποτελεί παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά $ΟΑ$ με τη διαγώνιο $ΑΒ$ του παραλληλογράμμου $ΟΑΓΒ$. (Μονάδες 07)

Παράγραφος 1.5

29. ΘΕΜΑ 2 (14586)

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(5,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΑΓ}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{ΑΜ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{ΒΓ}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΜ}$. (Μονάδες 8)

30. ΘΕΜΑ 2 (14953)

Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $A(-2, 5)$, $B(7, 8)$, $\Gamma(1, -4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΑΓ}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 5)

31. ΘΕΜΑ 2 (15038)

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$. (Μονάδες 10)

32. ΘΕΜΑ 2 (15073)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$. (Μονάδες 9)

33. ΘΕΜΑ 2 (15186)

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$. (Μονάδες 8)
- β) $\overrightarrow{MN} = (1, -2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$. (Μονάδες 8)
- γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

34. ΘΕΜΑ 2 (15252)

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2,1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3,-1)$.

- α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1, -2)$. (Μονάδες 8)
- β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την AG . (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

35. ΘΕΜΑ 2 (15317)

Δίνονται τα διανύσματα

$$\vec{v} = (3,0) \text{ και } \vec{w} = (-3,4).$$

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

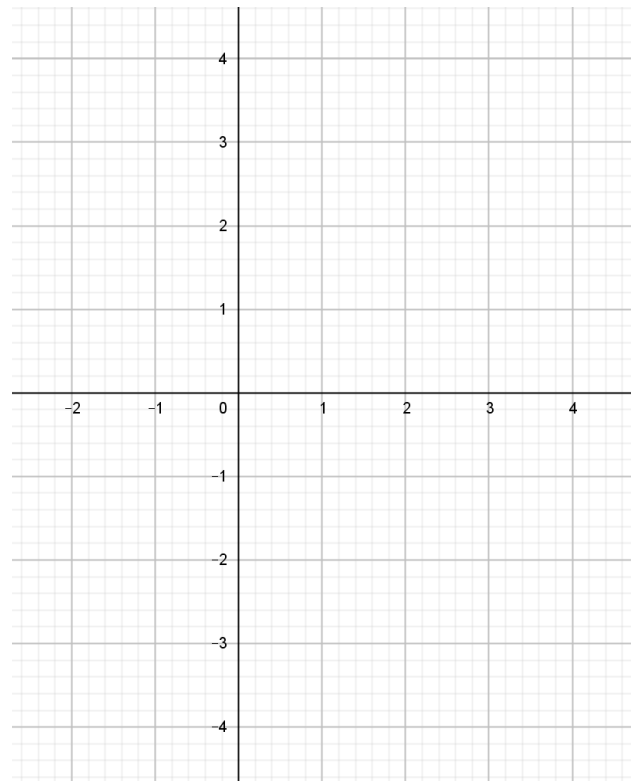
(Μονάδες 12)

β) i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.

(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

(Μονάδες 3)



36. ΘΕΜΑ 2 (15379)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (3,-1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(Μονάδες 12)

37. ΘΕΜΑ 2 (15463)

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2,1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1,-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BG}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BG}|$.

(Μονάδες 8)

38. ΘΕΜΑ 2 (15825)

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και

το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\gamma})$.

(Μονάδες 7)

39. ΘΕΜΑ 2 (15852)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,2)$, $\vec{\beta} = (-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

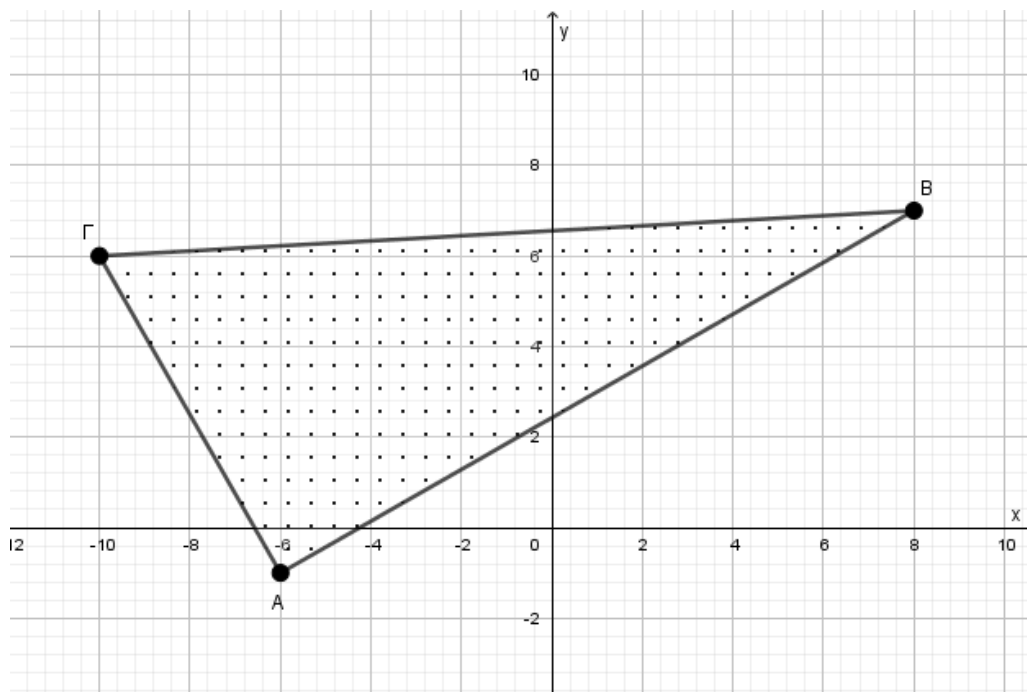
(Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$.

(Μονάδες 12)

40. ΘΕΜΑ 2 (15996)

Δίνονται τα σημεία $A(-6, -1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού. (Μονάδες 15)

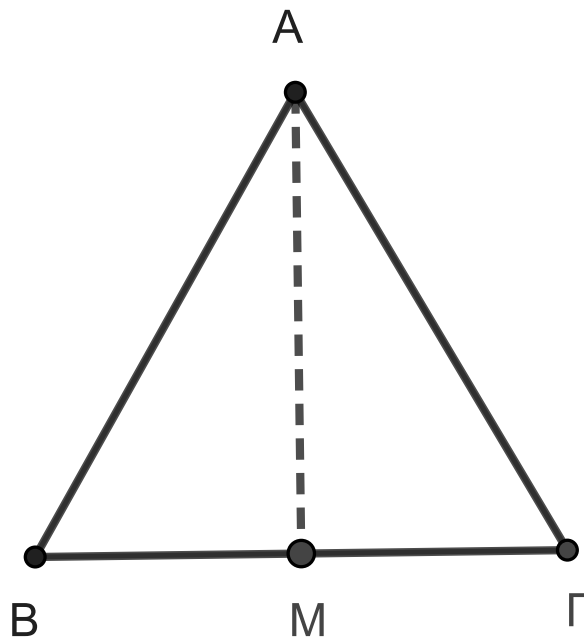
41. ΘΕΜΑ 2 (16141)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

- i. $(\widehat{AB, AG})$
- ii. $(\widehat{AM, BG})$
- iii. $(\widehat{AM, GA})$
- iv. $(\widehat{BM, GM})$
- v. $(\widehat{GM, GB})$

(Μονάδες 10)



β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

- i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BG}$
- ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GA}$
- iii. $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GB}$

(Μονάδες 15)

42. ΘΕΜΑ 2 (16144)

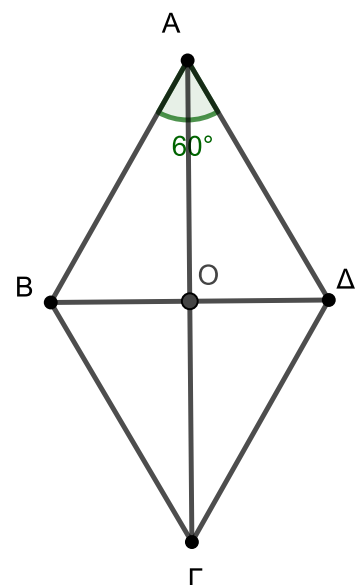
Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

- α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- β) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$
- γ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO}$
- δ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$
- ε) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GD}$

(Μονάδες 25)

43. ΘΕΜΑ 2 (16426)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.



α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$.
(Μονάδες 15)

44. ΘΕΜΑ 2 (16527)

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 13)

45. ΘΕΜΑ 2 (16428)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

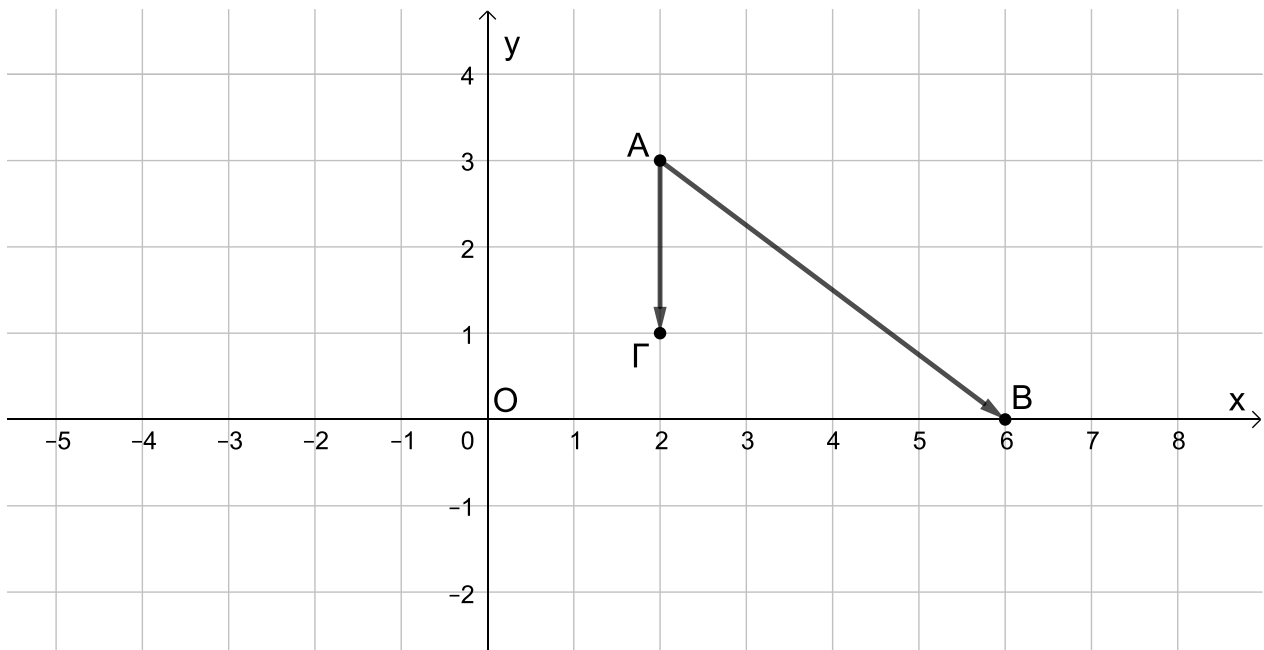
β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
(Μονάδες 10)

46. ΘΕΜΑ 2 (17075)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (0, -2)$.
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.
(Μονάδες 13)



47. ΘΕΜΑ 2 (20685)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{w} = (-10,2)$ και τα σημεία $A(-1,2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 7)

48. ΘΕΜΑ 2 (20732)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}| = 4|\vec{\alpha}|$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$. (Μονάδες 7)

49. ΘΕΜΑ 2 (20733)

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

- α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$.
(Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 10)
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ είναι κάθετα.
(Μονάδες 05)

50. ΘΕΜΑ 2 (20773)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$

- α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (Μονάδες 08)
- β) Αν $\vec{u} = (4, -1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, \kappa)$. (Μονάδες 09)
- γ) Για $\kappa = 4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος. (Μονάδες 08)

51. ΘΕΜΑ 2 (20888)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)
- β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 15)

52. ΘΕΜΑ 2 (21682)

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2)$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-5, -10)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.
(Μονάδες 14)
- β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$. (Μονάδες 11)

53. ΘΕΜΑ 2 (22040)

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-4, 3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

(Μονάδες 13)

54. ΘΕΜΑ 2 (22170)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$ και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

(Μονάδες 09)

55. ΘΕΜΑ 2 (22554)

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$, $y'y$ τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$. Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε $\vec{OM} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} - \vec{OB})$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$,

(Μονάδες 8)

ii. $\vec{OM} = \vec{j}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$.

(Μονάδες 9)

56. ΘΕΜΑ 3 18243)

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|$, $|\vec{\delta}|$

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma} \wedge \vec{\delta})$. (Μονάδες 5)

57. ΘΕΜΑ 4 (15320)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $|\overrightarrow{OG}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$. (Μονάδες 9)

ii. $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$. (Μονάδες 9)

β) Αν $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$, να δείξετε ότι το $OAGB$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

58. ΘΕΜΑ 4 (18520)

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

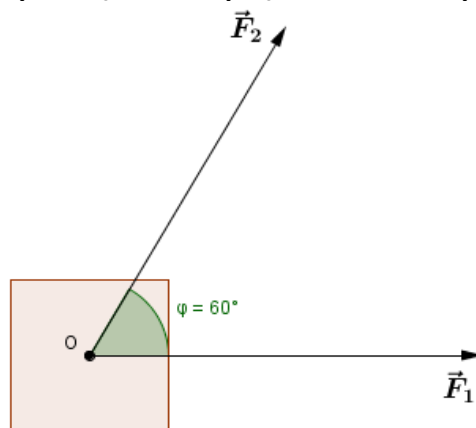
$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (1) \quad (\text{Μονάδες } 06)$$

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο $OAGB$ με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

i) Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (Μονάδες 05)

ii) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1). (Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10 N (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° . Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



(Μονάδες 10)

59. ΘΕΜΑ 4 (18547)

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda-2, \lambda-3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i) Τα σημεία A , B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)

β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

i) Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 4)

ii) Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 6)

60. ΘΕΜΑ 4 (22063)

α) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι:

i) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

ii) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν ότι:

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$. (Μονάδες 5)

ii) $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

iii) $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$. (Μονάδες 5)

61. ΘΕΜΑ 4 (22064)

α) Αν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι τρία διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$

και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$: i) είναι αριθμοί ή

διανύσματα; ii) μπορούν να

συγκριθούν; (Μονάδες 5)

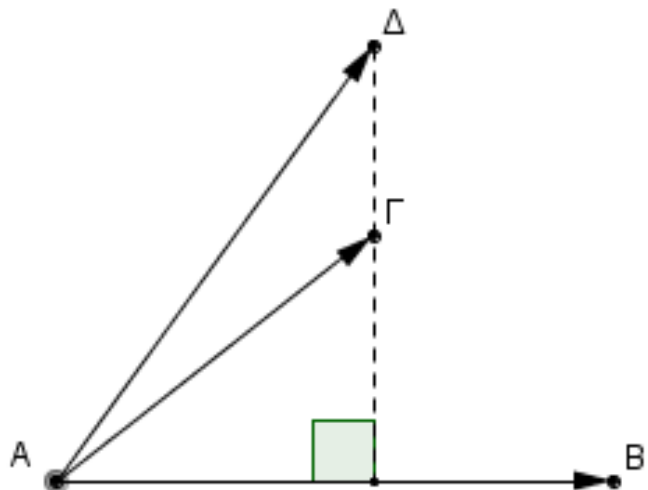
β) Για τα διανύσματα του

παρακάτω σχήματος να

επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} > \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$

ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} < \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$



iii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ (Μονάδες 10)

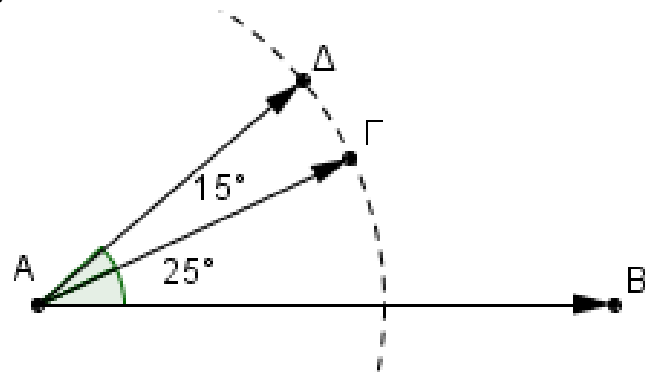
γ) Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος (η διακεκομμένη γραμμή είναι τμήμα κύκλου με κέντρο Α) να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} > \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} < \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

iii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ (Μονάδες 10)

Σε όλα τα ερωτήματα, να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



«Τα θέματα προέρχεται και αντλήθηκαν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)».



Βοηθητικό Υλικό: Β ' Λυκείου
Λύκειο Άργους Ορεστικού
Σχολικό έτος : 2024-2025