



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ **Α' ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΛΙΠΟΡΔΕΖΗΣ ΣΑΚΗΣ

ΣΟΥΛΤΑΝΙΔΟΥ ΚΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΕΙ

ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΤΡΙΓΩΝΑ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

- Το σημείο, η ημιευθεία, το επίπεδο
- Το 'ανήκει' ή το 'βρίσκεται'
- Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος
- Το μέτρο της γωνίας

Ένα σημείο δεν έχει διαστάσεις, το παριστάνουμε στο σχήμα με μια τελεία και το συμβολίζουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα.

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Επιφάνεια ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σύνολο των σημείων τα οποία το χωρίζουν από το περιβάλλον του. (επίπεδο).

ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Επίπεδα σχήματα λέγονται τα σχήματα όπου όλα τα σημεία του βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

ΕΥΘΕΙΑ

Από δύο διαφορετικά σημεία Α και Β διέρχεται μοναδική ευθεία.

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

- Δύο ευθείες που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο λέγονται τεμνόμενες, και το κοινό τους σημείο λέγεται τομή των ευθειών.
- Δύο ευθείες που δεν έχουν κοινά σημεία λέγονται παράλληλες.
- Δύο ευθείες που έχουν δύο ή περισσότερα κοινά σημεία ταυτίζονται.

ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

Έστω μια ευθεία $\chi\chi'$ και σημείο A , τότε το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε $A\chi$ και $A\chi'$ και τα ονομάζουμε ημιευθείες με αρχή το A

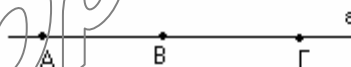
Οι ημιευθείες αυτές λέγονται αντικείμενες ημιευθείες.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ

Σε ευθεία ε θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία A και B . ευθύγραμμο τμήμα AB ή BA λέγεται το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία A , B και τα σημεία της ευθείας ε που βρίσκονται μεταξύ τους.

- Τα A και B λέγονται άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.
- Η ευθεία ε λέγεται φορέας του τμήματος.
- Τα σημεία ενός ευθυγράμμου τμήματος, εκτός των άκρων του λέγονται εσωτερικά σημεία του τμήματος.

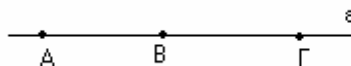
ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ



- Τα A και Γ βρίσκονται εκατέρωθεν του B
- Τα B και Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του A

ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

Δύο τμήματα που έχουν κοινό ένα άκρο και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία λέγονται διαδοχικά. Δηλαδή : τα τμήματα AB και $B\Gamma$ είναι διαδοχικά



ΙΣΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ίσα, όταν με κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν.

ΜΕΣΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

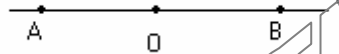
Μέσο ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται ένα εσωτερικό σημείο M τέτοιο ώστε $AM=MB$.

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

Έστω δύο σημεία A και B . Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB λέγεται απόσταση των σημείων A και B .

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Το σημείο B λέγεται συμμετρικό του A ως προς το O αν ισχύει $AO=OB$

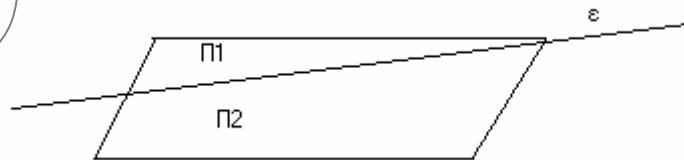


Τα σημεία A και B λέγονται συμμετρικά σημεία και το O λέγεται κέντρο συμμετρίας

ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΑ

Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου Π χωρίζει το επίπεδο αυτό σε δύο μέρη Π_1 , Π_2 τα οποία βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.

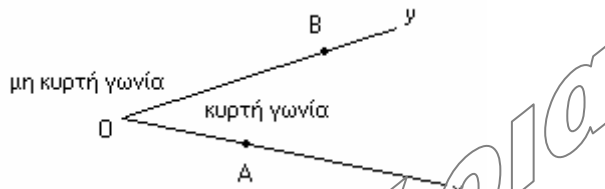
Τα σημεία του Π_1 μαζί με την ευθεία ε αποτελούν ένα σχήμα που λέγεται ημιεπίπεδο.



Αν δύο σημεία του επιπέδου βρίσκονται εκατέρωθεν μιας ευθείας ε , τότε η ευθεία ε τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα δύο σημεία.

ΓΩΝΙΑ

Έστω σημεία A και B των ημιευθειών Ox και Oy αντίστοιχα. Το σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία των ημιεπιπέδων (Ox, B) και (Oy, A) λέγεται κυρτή γωνία με κορυφή O .



Στην περίπτωση που οι ημιευθείες Ox και Oy έχουν ίδιο φορέα

- Αν οι ημιευθείες Ox και Oy ταυτίζονται τότε ορίζουν μια μηδενική γωνία, ενώ η μη κυρτή γωνία που ορίζουν είναι μια πλήρης γωνία
- Αν οι ημιευθείες Ox και Oy είναι αντικείμενες τότε ορίζουν μια ευθεία γωνία

ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ

Διχοτόμος μιας γωνίας λέγεται η ημιευθεία που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας και την χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΗ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

Από κάθε σημείο ευθείας άγεται μια μόνο κάθετος σε αυτή.

ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Η ευθεία ε που είναι κάθετη σε ένα ευθύγραμμο τμήμα και διέρχεται από το μέσο του λέγεται μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος.

Τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος λέγονται συμμετρικά ως προς την ε και η ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας.

ΕΦΕΞΗΣ - ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Δύο γωνίες λέγονται εφεξής ή διαδοχικές αν έχουν κοινή κορυφή, μια κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημείο.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μια ορθή γωνία (90°)

Κάθε μια από αυτές λέγεται και συμπλήρωμα της άλλης

ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία (180°)

Κάθε μια από αυτές λέγεται και παραπλήρωμα της άλλης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΝ ΓΩΝΙΕΣ

Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μιας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

ΕΝΝΟΙΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

ΚΥΚΛΟΣ

Κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ ονομάζουμε το σχήμα του επιπέδου του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το K απόσταση ίση με ρ και συμβολίζεται (K, ρ) .

ΧΟΡΔΗ

Χορδή κύκλου ονομάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο τυχαία σημεία του κύκλου.

ΑΠΟΣΤΗΜΑ

Απόστημα ονομάζεται το μοναδικό κάθετο τμήμα που άγεται από το κέντρο του κύκλου προς μια χορδή

ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ

Διάμετρο κύκλου ονομάζουμε την χορδή του κύκλου που διέρχεται από την κορυφή του κύκλου.

Τα άκρα της διαμέτρου λέγονται αντιδιαμετρικά.

ΤΟΞΟ

Τόξο λέγεται το μέρος του κύκλου που βρίσκεται ανάμεσα στα άκρα μιας χορδής.

ΗΜΙΚΥΚΛΙΑ

Ημικύκλια είναι τα τόξα που δημιουργεί η διάμετρος.

ΟΜΟΚΕΝΤΡΟΙ

Δύο ή περισσότεροι κύκλοι που έχουν κοινό κέντρο λέγονται ομόκεντροι.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ

Γεωμετρικός χώρος λέγεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα.

ΘΕΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Τα σημεία που βρίσκονται εντός του κύκλου λέγονται εσωτερικά, ενώ αυτά που βρίσκονται εκτός του κύκλου λέγονται εξωτερικά.

ΙΣΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

Δύο κύκλοι λέγονται ίσοι, όταν ο ένας με κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζεται με τον άλλον.

ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ

Μια γωνία ονομάζεται επίκεντρη όταν η κορυφή της είναι το κέντρο του κύκλου.

ΙΣΑ ΤΟΞΑ

Δύο τόξα του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων λέγονται ίσα όταν με κατάλληλη μετατόπιση το ένα ταυτίζεται με το άλλο.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρεί σε δύο ίσα τόξα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δύο κάθετες διάμετρος ενός κύκλου τον διαιρούν σε τέσσερα ίσα τόξα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι άνισα, όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες σε αυτά είναι ομοιοτρόπως άνισες.

ΜΕΣΟ ΤΟΞΟΥ

Μέσο ενός τόξου ονομάζουμε το εσωτερικό σημείο του, το οποίο χωρίζει το τόξο σε δύο ίσα τόξα

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΗ - ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

Ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα τα οποία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

ΠΟΛΥΓΩΝΟ

Μια απλή τεθλασμένη γραμμή της οποίας τα άκρα συμπίπτουν λέγεται πολύγωνο.

ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Διαγώνιος πολύγωνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο απέναντι κορυφές του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε μία ευθεία ε δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Πόσες ημιευθείες με αρχή τα σημεία αυτά ορίζονται;
Α:4 Β:6 Γ:8 Δ:5 Ε:10
2. Δίνονται πέντε σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε που ανά τρία είναι συνευθεία. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται;
Α:45 Β:10 Γ:4 Δ:6 Ε:12
3. Αν οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών είναι κάθετες, τότε οι γωνίες είναι:
Α:ίσες Β:κατακόρυφες
Γ:συμπληρωματικές Δ:παραπληρωματικές
4. Αν μία γωνία είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ της ορθής, τότε η διαφορά συμπληρωματικής της από την παραπληρωματική της είναι:
Α: $\frac{1}{2}$ ορθής Β:μηδενική Γ:1 ορθή Δ: $\frac{3}{5}$
5. Αν το άθροισμα δύο εφεξής γωνιών είναι ίσο με τα $\frac{3}{7}$ ορθής τότε οι διχοτόμοι τους σχηματίζουν γωνία ίση με:
Α: $\frac{3}{14}$ ορθής Β: $\frac{4}{7}$ ορθής Γ: $\frac{11}{7}$ ορθής Δ: $\frac{6}{7}$ ορθής
6. Το άθροισμα των μέτρων της συμπληρωματικής και της παραπληρωματικής γωνίας ω είναι 200° . Το μέτρο της γωνίας ω είναι:
Α: 20° Β: 60° Γ: 45° Δ: 35° Ε: 100°
7. Ερωτήσεις Σωστού, Λάθους
 - i. Δύο γωνίες με κοινή κορυφή είναι κατακορυφές. Σ ή Λ
 - ii Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα με μέτρο μικρότερο από την ευθεία γωνία, τότε είναι οξείες. Σ ή Λ

iii Οι μη κοινές πλευρές δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες. Σ ή Λ

iv Δύο οξείες γωνίες δεν μπορεί να είναι παραπληρωματικές. Σ ή Λ

v Μια κυρτή γωνία είναι μικρότερη από την ευθεία γωνία. Σ ή Λ

vi Δύο εφεξής γωνίες είναι παραπληρωματικές. Σ ή Λ

vii Αν δύο γωνίες έχουν ίσες συμπληρωματικές γωνίες τότε είναι ίσες. Σ ή Λ

viii Οι διχοτόμοι δύο εφεξής γωνιών είναι κάθετες. Σ ή Λ

ix Αν δύο τόξα δύο κύκλων έχουν ίσα μέτρα, τότε είναι ίσα. Σ ή Λ

8. Αν Μ είναι το μέσο τμήματος ΑΒ και Ο σημείο της ημιευθείας ΜΑ, να αποδείξετε ότι:

α) Αν το Ο δεν ανήκει στο ΑΜ, είναι $OM = \frac{OA + OB}{2}$

β) Αν το Ο ανήκει στο ΑΜ, είναι $OM = \frac{OA - OB}{2}$

9. Έστω Μ σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν είναι θετικοί αριθμοί και Ο σημείο της ημιευθείας ΜΑ. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το Ο δεν ανήκει στο ΑΜ, είναι $OM = \frac{\nu \cdot OA + \mu \cdot OB}{\mu + \nu}$

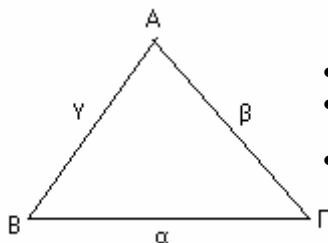
β) Αν το Ο ανήκει στο ΑΜ, είναι $OM = \frac{\mu \cdot OB - \nu \cdot OA}{\mu + \nu}$

10. Σε ευθεία ε θεωρούμε δύο σημεία A και B και σημείο M του ευθυγράμμου τμήματος AB τέτοιο, ώστε $MA = \frac{5}{3} MB$. Αν Σ σημείο της αντικείμενης ημιευθείας της BA τέτοιο, ώστε $\Sigma A = \frac{5}{3} \Sigma B$, να αποδείξετε ότι: $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AS}$.
11. Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα OA , AB & $B\Gamma$. Αν M το μέσο του AB και N σημείο του $M\Gamma$ τέτοιο, ώστε $NG = 2MN$, να αποδείξετε ότι: $3 \cdot ON = OA + OB + O\Gamma$.
12. Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά τμήματα AB , $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Αν M σημείο του AB και N σημείο του $\Gamma\Delta$ τέτοια, ώστε $AM = \lambda \cdot AB$ και $\Delta N = \lambda \cdot \Gamma\Delta$, όπου $\lambda > 0$ να αποδειχθεί ότι: $MN = \lambda \cdot B\Gamma + (1 - \lambda) A\Delta$.
13. Θεωρούμε ημιευθεία OA , η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\chi O \gamma$ και είναι τέτοια, ώστε $\hat{\chi O A} = \frac{3}{5} \hat{\gamma O A}$. Αν η ημιευθεία OB είναι εξωτερική της $\hat{\chi O A}$ και βρίσκεται προς το μέρος της $O\chi$, να αποδείξετε ότι $\hat{A O B} = \frac{5}{8} \hat{\chi O B} + \frac{3}{8} \hat{\gamma O B}$.
14. Έστω $\hat{A O B}$ και $\hat{B O \Gamma}$ δύο εφεξής γωνίες με $\hat{A O B} > \hat{B O \Gamma}$ και OD , OE αντίστοιχα οι διχοτόμοι τους. Αν $O\chi$ και $O\gamma$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\Delta O E}$ και $\hat{A O \Gamma}$ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι η $O\chi$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B O \gamma}$.

15. Να υπολογίσετε τα μέτρα των διαδοχικών τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{BG}$, $\widehat{GD}$ και $\widehat{DA}$ ενός κύκλου, αν γνωρίζετε ότι αυτά είναι ανάλογα με τους αριθμούς 3,4,5 και 6 αντίστοιχα.
16. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας φ , αν γνωρίζετε ότι το άθροισμα των μέτρων της συμπληρωματικής και της παραπληρωματικής γωνίας της φ είναι ίσο με το εφταπλάσιο του μέτρου της γωνίας φ .
17. Να υπολογίσετε μία οξεία γωνία, αν γνωρίζετε ότι η συμπληρωματική της είναι ίση με το $\frac{1}{6}$ της παραπληρωματικής της.
18. Από σημείο O ευθείας AB φέρνουμε προς το ίδιο μέρος της AB ημιευθείες OG και OD τέτοιες ώστε, οι γωνίες $\widehat{AOG}$, $\widehat{GOD}$ και $\widehat{DOB}$ να είναι εφεξής. Αν OE , OZ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{AOG}$ και $\widehat{DOB}$ αντίστοιχα και $\widehat{EOZ} = 120^\circ$, να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{GOD}$.
19. Από ένα σημείο O μιας ευθείας AB φέρουμε προς το ίδιο μέρος της AB ημιευθείες OG και OD τέτοιες, ώστε οι γωνίες $\widehat{AOG}$, $\widehat{GOD}$ και $\widehat{DOB}$ να είναι εφεξής.
Αν $\widehat{AOG} = \frac{1}{2} \widehat{GOD} = \frac{1}{3} \widehat{DOB}$ να αποδειχθεί ότι $OD \perp AB$

ΤΡΙΓΩΝΑ

ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ



- Κορυφές A, B, Γ
- Πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ ή γ, α, β
- Γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$

ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥΣ

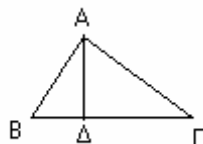
- Σκαληνό, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες
- Ισοσκελές, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες
- Ισόπλευρο, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες

ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΤΟΥΣ

- Οξυγώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες
- Ορθογώνιο, όταν έχει μια γωνία ορθή. Η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται υποτείνουσα και οι άλλες πλευρές κάθετες
- Αμβλυγώνιο, όταν έχει μια γωνία αμβλεία

ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

- Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς
- Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευράς
- Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς



- Το σημείο Δ λέγεται προβολή του Α πάνω στην ΒΓ
- Το Δ λέγεται το ίχνος της

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

- Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία
- Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα

ΘΕΩΡΗΜΑ (1^ο Κριτήριο-ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Οι γωνίες ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες

ΠΟΡΙΣΜΑ III

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες

ΘΕΩΡΗΜΑ (2^ο Κριτήριο- ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες μια προς μια, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (3^ο Κριτήριο-ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές ίσες μια προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

ΠΟΡΙΣΜΑ III

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μεγαλύτερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΘΕΤΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ II

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

ΘΕΩΡΗΜΑ III

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματα τους είναι ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Ένα σύνολο από σημεία του επιπέδου, που μόνο αυτά έχουν μια κοινή ιδιότητα, ονομάζεται γεωμετρικός τόπος.

Τους γεωμετρικούς τόπους τους χρησιμοποιούμε για τον προσδιορισμό σημείων τα οποία έχουν κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

- Ο κύκλος είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.
- Η μεσοκάθετος ενός τμήματος είναι επίσης ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
- Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

- ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Δύο σχήματα Σ και Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο O αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το O και αντίστροφα

Το σημείο O λέγεται κέντρο συμμετρίας

- ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Δύο σχήματα Σ και Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς μια ευθεία ε αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα

Η ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι η μεγαλύτερη από κάθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180°

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου
- Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές
Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο

ΘΕΩΡΗΜΑ (τριγωνική ανισότητα)

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την διαφορά του

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.

ΚΑΘΕΤΕΣ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε και τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:

- Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο
- Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιότροπως άνισες και αντίστροφα.

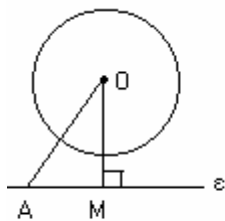
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

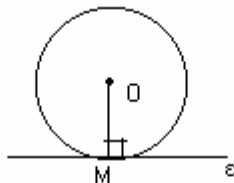
- Το τμήμα $A\Delta$ είναι διάμεσος
- Το τμήμα $A\Delta$ είναι διχοτόμος
- Το τμήμα $A\Delta$ είναι ύψος

Τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$.

ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ



σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3

ΣΧΗΜΑ 1:

Η ευθεία ε λέγεται εξωτερική ευθεία ενός κύκλου, διότι δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο.

Αυτό συμβαίνει όταν η απόσταση ενός σημείου της ευθείας από το κέντρο του κύκλου είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου $OM > r$.

ΣΧΗΜΑ 2:

Η ευθεία ε λέγεται εφαπτομένη ενός κύκλου, διότι έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο. Το κοινό σημείο της εφαπτομένης και του κύκλου λέγεται σημείο επαφής.

Αυτό συμβαίνει όταν η απόσταση ενός σημείου της ευθείας από το κέντρο του κύκλου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου $OM = r$.

ΣΧΗΜΑ 3:

Η ευθεία ε λέγεται εσωτερική ευθεία ενός κύκλου, διότι έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.

Αυτό συμβαίνει όταν η απόσταση ενός σημείου της ευθείας από το κέντρο του κύκλου είναι μικρότερη από την ακτίνα του κύκλου $OM < r$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

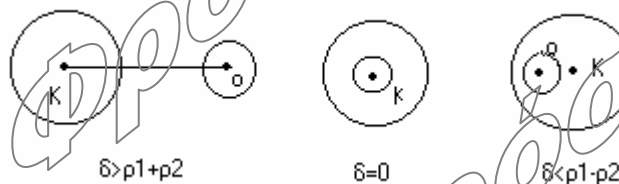
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

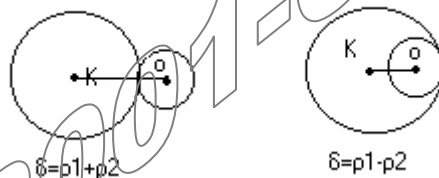
- Είναι η μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής
- Διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτινών που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

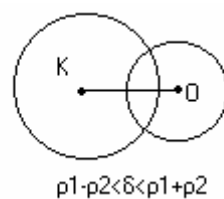
Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία



Εφαπτόμενοι κύκλοι



Τεμνόμενοι κύκλοι



ΔΙΑΚΕΝΤΡΟΣ

Διάκεντρος δύο κύκλων ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα κέντρα των κύκλων και συμβολίζεται με d

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι η μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

Παρατήρηση

Αν οι τεμνόμενοι κύκλοι είναι ίσοι τότε η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

- α) Τι λέγεται διάμεσος τριγώνου;
- β) Τι λέγεται διχοτόμος τριγώνου;
- γ) Τι λέγεται περίμετρος τριγώνου;
- δ) Τι λέγεται εξωτερική γωνία τριγώνου;

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

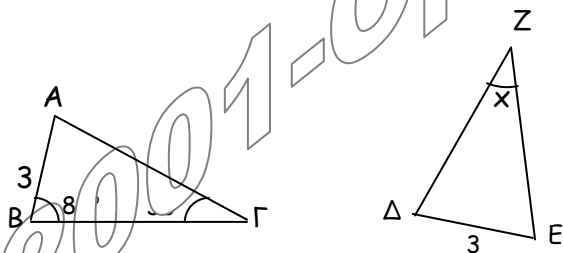
- α) Πότε ένα τρίγωνο λέγεται οξυγώνιο, πότε αμβλυγώνιο και πότε ορθογώνιο;
- β) Πότε ένα τρίγωνο λέγεται ισόπλευρο, πότε ισοσκελές και πότε σκαληνό;

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η AD είναι η εσωτερική και η AE είναι η εξωτερική του διχοτόμος. Το μέτρο της γωνίας $\widehat{EAD}$ είναι:
 $A : 60^\circ \quad B : 30^\circ \quad \Gamma : 120^\circ \quad \Delta : 90^\circ \quad E : 45^\circ$

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ του σχήματος είναι ίσα. Η τιμή της γωνίας x είναι:
 $A : 70^\circ \quad B : 80^\circ \quad \Gamma : 45^\circ \quad \Delta : 60^\circ \quad E : 30^\circ$



ΑΣΚΗΣΗ 5^η

- α) Δύο ισοσκελή τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα.
 $\Sigma \quad \Lambda$
- β) Ένα σκαληνό τρίγωνο έχει όλες τις γωνίες του άνισες.
 $\Sigma \quad \Lambda$

γ) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα.

Σ Λ

δ) Όλες οι γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι άνισες.

Σ Λ

ε) Αν σε δύο κύκλους οι χορδές ΑΒ και ΓΔ αυτών είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα.

Σ Λ

στ) Η διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ίσα τρίγωνα.

Σ Λ

ζ) Η διχοτόμος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισογώνια τρίγωνα.

Σ Λ

η) Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν δύο πλευρές και μια γωνία του ενός είναι ίσες με δύο πλευρές και μια γωνία του άλλου.

Σ Λ

ΑΣΚΗΣΗ 6^η

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και στον φορέα της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$ τα σημεία Δ, Ε εκατέρωθεν του Α τέτοια, ώστε $AD = AB$ και $AE = AG$. Να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 7^η

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Αν Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε $AD = AB$ και ΑΕ η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 8^η

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και τα σημεία Δ, Ε των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $BD = GE$. Αν Μ είναι το μέσο της ΔΕ, να αποδειχθεί ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

β) η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9^η

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του δύο ημιευθείες Ax, Ay , έτσι ώστε $\hat{B}\hat{A}x = \hat{\Gamma}\hat{A}y$ και οι γωνίες $\hat{B}\hat{A}x, \hat{B}\hat{A}\Gamma, \hat{\Gamma}\hat{A}y$ να είναι διαδοχικές. Αν Δ, E σημεία των Ax, Ay αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AD = AB$ και $AE = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 10^η

Στην ημιευθεία AD της διχοτόμου τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία E και Z , έτσι ώστε $AB = AE$ και $A\Gamma = AZ$. Να αποδείξετε ότι $BZ = \Gamma E$.

ΑΣΚΗΣΗ 11^η

Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και σημείο Σ εκτός αυτού. Αν οι πλευρές Σx και Σy γωνίας $x\hat{\Sigma}y$ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα και η $O\Sigma$ είναι διχοτόμος της $x\hat{\Sigma}y$, να αποδειχθεί ότι $AB = \Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 12^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Δ το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$ και της μεσοκάθετης της πλευράς $B\Gamma$. Από το Δ φέρω κάθετες στις πλευρές AB και $A\Gamma$ που τέμνουν αυτές στα E, H αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma H$.

ΑΣΚΗΣΗ 13^η

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διάμεσος του AM και Δ ένα σημείο της διαμέσου. Προεκτείνουμε τη διάμεσο προς το μέρος του M κατά τμήμα $ME = M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα
- β) Από τις κορυφές B, Γ φέρουμε τις κάθετες προς τη διάμεσο που την τέμνουν στα Z, H αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι i) $BZ = \Gamma H$ ii) $\Delta Z = HE$.

ΑΣΚΗΣΗ 14^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του παίρνουμε τμήματα $B\Delta \neq \Gamma E$. Αν AK είναι το ύψος του $\triangle AB\Gamma$, να δειχθεί ότι το τρίγωνο $K\Delta E$ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 15^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και στις προεκτάσεις των πλευρών AB και AG προς το μέρος του A παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Θ και H τέτοια ώστε $A\Theta = AH$. Αν M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Να δειχθεί ότι:

i) $\Theta M = HM$ ii) τα τρίγωνα $MB\Theta$ και $M\Gamma H$ είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΗ 16^η

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και φέρουμε τη διχοτόμο BK . Αν $KH \perp B\Gamma$ και η KH την τέμνει την AB στο Θ , να δειχθεί ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Theta$ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 17^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρουμε τις ημιευθείες $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$ έτσι ώστε κάθε μια από τις γωνίες $\angle xAB$ και $\angle yAG$ να είναι εφεξής με την $\hat{A}$. Στις Ax , Ay παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = AG$ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι: $BE = \Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 18^η

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ προς το μέρος του B παίρνοντας τμήμα $B\Delta = AB$ και προς το μέρος του Γ παίρνοντας τμήμα $\Gamma E = AG$. Στη συνέχεια φέρουμε τις διχοτόμους των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ οι οποίες τέμνουν τις $A\Delta$ και AE στα K και Λ αντίστοιχα. Αν οι διχοτόμοι τέμνονται στο σημείο M να αποδείξετε ότι:

α) BK και $\Gamma\Lambda$ μεσοκάθετες των τμημάτων $A\Delta$ και AE αντίστοιχα

- β) το τρίγωνο $ΑΔΜ$ είναι ισοσκελές
 γ) το τρίγωνο $ΔΜΕ$ είναι ισοσκελές
 δ) η $ΑΜ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου $ΑΒΓ$..

ΑΣΚΗΣΗ 19^η

Έστω ισοσκελές $ΑΒΓ$ ($ΑΒ=ΑΓ$) και τα σημεία $Δ, Ε$ των πλευρών του $ΑΒ, ΑΓ$ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΒΔ=ΓΕ$. Αν $Μ$ το μέσο της $ΔΕ$, να αποδειχθεί ότι:

- α) το τρίγωνο $ΜΒΓ$ είναι ισοσκελές β) η $ΑΜ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

ΑΣΚΗΣΗ 20^η

Έστω ισοσκελές $ΑΒΓ$ ($ΑΒ=ΑΓ$) και φέρουμε τις ημιευθείες $Αχ \perp ΑΒ$ και $Αγ \perp ΑΓ$ έτσι ώστε κάθε μια από τις γωνίες $\hat{ΒΑ}γ$ και $\hat{ΓΑ}χ$ να είναι εφεξής με την γωνία $\hat{ΒΑΓ}$. Πάνω στις ημιευθείες $Αχ, Αγ$ παίρνουμε σημεία $Ε$ και $Δ$ αντίστοιχα ώστε $ΑΔ=ΑΕ$. Να δειχθεί ότι:

- α) $ΓΔ=ΒΕ$
 β) αν $ΑΜ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $ΑΒΓ$ τότε να δειχθεί ότι $ΑΜ \perp ΔΕ$.

ΑΣΚΗΣΗ 21^η

Δίνεται γωνία $\hat{χολ}$ και σημείο $Μ$ στη διχοτόμο της. Αν φέρουμε από το $Μ$ κάθετη στη διχοτόμο που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία $Κ$ και $Λ$, να δειχθεί ότι $ΟΚ=ΟΛ$ και $ΜΚ=ΜΛ$.

ΑΣΚΗΣΗ 22^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ=ΑΓ$), $ΑΔ$ το ύψος του και παίρνουμε τυχαίο σημείο $Ο$ στη $ΑΔ$.

- α) Να δειχθεί ότι το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές.
 β) Αν $Ε, Ζ$ είναι τα μέσα των $ΟΒ$ και $ΟΓ$ αντίστοιχα να δειχθεί ότι $ΑΕ=ΑΖ$.

ΑΣΚΗΣΗ 23^η

Δίνεται ισοσκελές $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$) με $B\Gamma < AB$. Προεκτείνουμε την $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=AB-B\Gamma$ και την AB κατά τμήμα $BE \neq \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι: α) $B\Delta=AB$ β) $\triangle A\Delta E$ ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 24^η

Αν τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle HEZ$ έχουν $AG = HE$, $\hat{A} = \hat{E}$ και $A\Delta = E\Theta$ όπου $A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$ του $\triangle AB\Gamma$ και $E\Theta$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}$ του τριγώνου $\triangle HEZ$, να αποδείξετε ότι: $\triangle AB\Gamma = \triangle HEZ$.

ΑΣΚΗΣΗ 25^η

Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB < AG$ και η διχοτόμος AE . Φέρουμε $B\Delta \perp AE$ και η προέκταση της $B\Delta$ τέμνει την AG στο Z . Να αποδείξετε ότι: α) $\triangle ABZ$ ισοσκελές
β) $Z\Gamma = AG - AB$

ΑΣΚΗΣΗ 26^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$) και M, N μέσα των AB, AG αντίστοιχα. Φέρουμε $MP \perp B\Gamma$ και $NE \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι: α) $MP = NE$
β) $PN = EM$
γ) AE διχοτόμος της $\hat{B}\hat{E}Z$

ΑΣΚΗΣΗ 27^η

Δίνεται τμήμα AB και μια τυχαία ευθεία διέρχεται από το μέσο του τμήματος. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B ισαπέχουν από την ευθεία.

ΑΣΚΗΣΗ 28^η

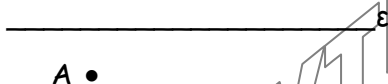
Τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB < AG$. Να βρεθεί σημείο της πλευράς AG που ισαπέχει από τα σημεία B, Γ και σημείο της ευθείας AB που ισαπέχει από τα σημεία B, Γ .
(Δικαιολογήστε την απάντησή σας)

ΑΣΚΗΣΗ 29^η

Δίνεται γωνία $\angle xOy$, η διχοτόμος της OZ και M σημείο της διχοτόμου. Φέρουμε $MA \perp Ox$, η προέκταση της οποίας τέμνει την Oy στο B και $MG \perp Oy$, η προέκταση της οποίας τέμνει την Ox στο Δ . Να αποδείξετε ότι:

- i) να δικαιολογήσετε ότι $AM = MG$ ii) $AO = OG$ iii) $AB = \Gamma\Delta$ iv) $\triangle AMO = \triangle GMB$

ΑΣΚΗΣΗ 30^η



Δίνεται ευθεία (ε) και σημεία A, B εκτός αυτής.

Να βρεθεί σημείο της ευθείας (ε) που να ισαπέχει από τα A, B .

ΑΣΚΗΣΗ 31^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και M μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Delta = AM$.

- α) Να βρεθούν ποια τρίγωνα είναι ίσα.
β) Τι τρίγωνα πρέπει να είναι το $AB\Gamma$ έτσι ώστε τα τρίγωνα $ABM, AM\Gamma, M\Gamma\Delta, \Delta MB$ να είναι ίσα:
Α. ισοσκελές Β. σκαληνό Γ. τίποτα από τα παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΗ 32^η

Δίνεται γωνία $\angle xOy$, σημεία A, Γ της Ox και B, Δ της Oy τέτοια ώστε $OA=OB$ και $OG=OD$. Αν E, Z μέσα των $B\Gamma$ και ΔA αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι

- i) $B\Gamma = A\Delta$
ii) $\angle ZO\Delta = \angle EO\Gamma$ iii) η διχοτόμος της $\angle EOZ$ συμπίπτει με την διχοτόμο της γωνίας $\angle xOy$.

ΑΣΚΗΣΗ 33^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Να αποδειχθεί ότι

i) $AB = BE$ ii) $\hat{A}B\Gamma = \hat{E}B\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 34^η

Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$).

Φέρνουμε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$ έτσι ώστε η γωνία $x \hat{A} y$ να είναι αμβλεία. Θεωρούμε τα σημεία Δ, E στις ημιευθείες Ax, Ay αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδειχθεί ότι i) $BE = \Gamma\Delta$ ii) η διχοτόμος AZ του τριγώνου $AB\Gamma$ αν τέμνει την ΔE στο Θ , τότε $A\Theta$ είναι ύψος του τριγώνου $A\Delta E$.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

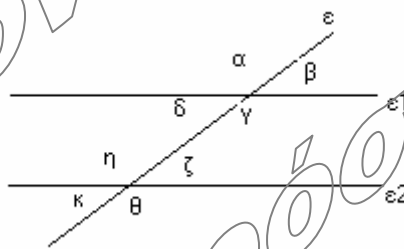
ΕΥΘΕΙΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ

Δύο ευθείες λέγονται παράλληλες όταν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και δεν τέμνονται και τις συμβολίζουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

- Να ταυτίζονται
- Να τέμνονται
- Να είναι παράλληλες

ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΚΑΙ ΜΙΑ ΤΕΜΝΟΜΕΝΗ



ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

Π.χ. : η, γ

ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ

ΠΡΟΤΙΣΜΑ

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μια τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες ή δύο εντός επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

Π.χ. : α) α, η β) δ, η

ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν δύο ευθείες είναι κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν δύο διαφορετικές ευθείες είναι παράλληλες σε μια τρίτη, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μια τρίτη ευθεία τέμνει τη μία από αυτές τότε θα τέμνει και την άλλη.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μια προς μια, είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μια γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

- ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Περιγεγραμμένος ονομάζεται ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές οποιουδήποτε τριγώνου

Το κέντρο του ονομάζεται περίκεντρο και είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

- ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Εγγεγραμμένος ονομάζεται ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό οποιουδήποτε τριγώνου και εφάπτεται στις πλευρές του

Το κέντρο του ονομάζεται έγκεντρο και είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι τρεις διχοτόμοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο κύκλου που εφάπτεται στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

• ΠΑΡΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Παραγγεγραμμένος ονομάζεται ο κύκλος που εφάπτεται σε μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων

Το κέντρο του ονομάζεται παράκεντρο και είναι το σημείο τομής δύο εξωτερικών διχοτόμων και μιας εσωτερικής διχοτόμου του τριγώνου

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μια προς μια, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες
- Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές
- Κάθε γωνία ισοπλεύρου τριγώνου είναι 60°

ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΚΑΘΕΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- Δυο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες
- Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μια είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΚΥΡΤΟΥ Ν-ΓΩΝΟΥ

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2n-4$ ορθές

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν η ευθεία ΒΑΓ είναι μια τέμνουσα των δύο κύκλων, να αποδείξετε ότι $KB \parallel \Lambda\Gamma$.

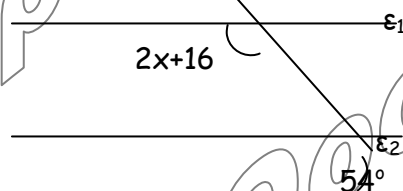
ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διαμέσους ΒΜ και ΓΝ και τις προεκτείνουμε κατά τμήμα $BM=MD$ και $NE=GN$. Να αποδειχθεί ότι: α) $AD \parallel B\Gamma$, β) $EA \parallel B\Gamma$ γ) τα σημεία Ε, Α, Δ είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Αν $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ τότε το x είναι ίσο με:

Α: 55° Β: 19° Γ: 82° Δ: 37°



ΑΣΚΗΣΗ 4^η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΕ ύψος. Φέρουμε $Ax \perp AG$ και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AD=AB$ και τα σημεία Δ, Β να είναι εκατέρωθεν της ΑΓ. Να αποδειχθεί ότι:

α) $BE \parallel AD$ β) η ΒΔ διχοτόμος της $\hat{A}BE$.

ΑΣΚΗΣΗ 5^η

Να βρεθεί η γωνία $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ σε κάθε μια από

τις παρακάτω περιπτώσεις: α) $\hat{A} = 38^\circ$ και $\hat{B} = 74^\circ$.

β) $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = 48^\circ$ γ) $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{\Gamma} + \hat{B} = 130^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 6^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$, $A\Gamma = 2AB$ και Δ μέσο της $A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι: α) Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο
β) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές γ) $\hat{A\Delta\Gamma} = 90^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 7^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος AD και στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε τμήμα $DE = BD$.

Να αποδειχθεί ότι:

α) είναι ισοσκελή τα τρίγωνα:

i) ABE ii) AEG .

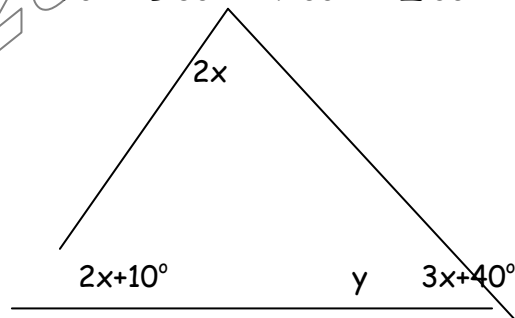
β) αν M είναι μέσο της $A\Gamma$, τότε η EM είναι μεσοκάθετη στην $A\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 8^η

Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = x + 15$, $\hat{B} = x + 3$, $\hat{\Gamma} = 5x - 6$, τότε σωστή είναι η σχέση: $A : A\Gamma > B\Gamma$ $B : A\Gamma > AB$ $\Gamma : B\Gamma > AB$ $\Delta : AB > B\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 9^η

Στο παρακάτω σχήμα η γωνία $\hat{\gamma}$ είναι ίση με: $A : 70^\circ$ $B : 50^\circ$ $\Gamma : 60^\circ$ $\Delta : 30^\circ$



ΑΣΚΗΣΗ 10^η

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήματα $B\Delta = AB$ και $\Gamma E = A\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι: α) $\hat{E}\hat{A}\hat{\Delta} = 135^\circ$
β) $\hat{x} + \hat{y} = 270^\circ$ όπου $\hat{x} = \hat{A}\hat{\Gamma}E$ και $\hat{y} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$.

ΑΣΚΗΣΗ 11^η

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Αν Δ είναι το σημείο τομής της μεσοκάθετης της $B\Gamma$ με την $A\Gamma$, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 12^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του $B\Delta$. Αν η κάθετη ευθεία ΔE στην πλευρά AB τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο Z να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΔBZ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 13^η

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ κυρτού τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται στο O , να αποδειχθεί ότι $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \frac{\hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 14^η

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η ευθεία της διχοτόμου της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{B}$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{E}$.

β) Να αποδειχθεί ότι: $\hat{E} = \hat{\Delta} = 45^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 15^η

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ με $\hat{B} < 90^\circ$. Φέρουμε το ύψος AD και στην προέκταση της AB παίρνουμε τμήμα $BE=BD$. Να αποδειχθεί ότι:

- α) $\hat{B} = 2\hat{B}\hat{A}\hat{E}$
- β) Το τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές όπου M σημείο τομής των ED και $A\Gamma$.
- γ) $M\hat{\Delta}A = M\hat{A}\Delta$
- δ) Το M είναι μέσο του $A\Gamma$,

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

Παραλληλόγραμμο ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Ιδιότητες παραλληλογράμμων:

- i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες
- ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες
- iii) Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.

Κριτήρια παραλληλογράμμων

(δηλαδή πως αποδεικνύουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο)

- i) Οι απέναντι πλευρές του ανά δύο είναι ίσες
- ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες
- iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες
- iv) Οι διαγώνιοι διχοτομούνται

Επίσης αν αποδείξουμε ότι οι πλευρές του ανά δύο είναι παράλληλες τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο

ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

• ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή.

Ιδιότητες ορθογωνίων:

- ο Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Επίσης και ότι ισχύει και στο παραλληλόγραμμο

Κριτήρια ορθογωνίων

(δηλαδή πως αποδεικνύουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο)

- i) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία
- ii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι του είναι ίσες
- iii) Έχει τρεις γωνίες ορθές
- iv) Όλες οι γωνίες του είναι ίσες

• ΡΟΜΒΟΣ

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Προκύπτει ότι έχει και όλες τις πλευρές τους ίσες.

Ιδιότητες ρόμβων:

- ο Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- ο Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

Κριτήρια ρόμβων

(δηλαδή πως αποδεικνύουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος)

- i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες
- ii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες
- iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα
- iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μια διαγώνιος του διχοτομεί μια γωνία του

• ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος

Ιδιότητες τετραγώνων:

- Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- Όλες οι πλευρές του είναι ίσες
- Όλες οι γωνίες του είναι ορθές
- Οι διχοτόμοι του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του

Κριτήρια τετραγώνων

(δηλαδή πως αποδεικνύουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο)

Αποδεικνύεται ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις

- i) Μια γωνία του είναι ορθή και οι διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες
- ii) Μια γωνία του είναι ορθή και μια διαγώνιος του διχοτομεί μια γωνία του
- iii) Μια γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοι του κάθετες
- iv) Οι διαγώνιοι του είναι ίσες και οι δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες
- v) Οι διαγώνιοι του είναι ίσες και η μια διχοτομεί μια γωνία του
- vi) Οι διαγώνιοι του είναι ίσες και κάθετες

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

ΘΕΩΡΗΜΑ II

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς.

ΘΕΩΡΗΜΑ III

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

ΜΕΣΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μια ευθεία ε παράλληλη προς την ε_1 και ε_2 , η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.

Η ευθεία ε λέγεται μεσοπαράλληλος των ε_1 και ε_2 .

ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχεται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου ονομάζεται βαρύκεντρο

ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ

ΛΗΜΜΑ

Οι παράλληλες που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το σημείο τομής των υψών ενός τριγώνου ονομάζεται ορθόκεντρο.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Οι κορυφές A, B, Γ τριγώνου $AB\Gamma$ και το ορθόκεντρο του H αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα

ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Τραπεζίο ονομάζεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Η διάμεσος τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων του και τα τμήμα που σχηματίζεται από τα μέσα αυτά είναι παράλληλο προς τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Ισοσκελές τραπεζίο ονομάζεται το τραπεζίο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.

Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου:

- i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες
- ii) Οι διαγώνιοι του είναι ίσες

Κριτήρια για να είναι ένα τραπεζίο ισοσκελές

- i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες
- ii) Οι διαγώνιοι του είναι ίσες

Επίσης αν οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

- i) Οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου χωρίζουν το παραλληλόγραμμο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα. Σ Λ
- ii) Οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες. Σ Λ
- iii) Οι απέναντι γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές. Σ Λ
- iv) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο όταν έχει δύο από τις απέναντι πλευρές του ίσες. Σ Λ
- v) Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες τις πλευρές του ίσες και μια γωνία ορθή, τότε είναι τετράγωνο. Σ Λ
- vi) Το τετράγωνο είναι πάντα ρόμβος. Σ Λ
- vii) Ο ρόμβος είναι πάντα τετράγωνο. Σ Λ
- viii) Οι διαγώνιες ενός τετραγώνου σχηματίζουν τέσσερα ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα. Σ Λ
- ix) Αν ένας ρόμβος έχει όλες τις γωνίες του ίσες τότε είναι τετράγωνο. Σ Λ
- x) Οι διαγώνιες ενός τετραγώνου είναι και διχοτόμοι των γωνιών του. Σ Λ
- xi) Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ τότε $ΑΟ = ΒΔ/2$. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Να συμπληρωθούν οι παρακάτω προτάσεις, ώστε να προκύψουν αληθείς ισχυρισμοί.

- α) Ένα τετράπλευρο με όλες τις γωνίες του ορθές είναι ή
- β) Όταν οι διαγώνιες ενός παραλληλόγραμμου διχοτομούνται και είναι κάθετες τότε το παραλληλόγραμμο είναι ή
- γ) Ο ρόμβος έχει όλες τις ιδιότητες των και επιπλέον ισχύουν:
- i) ii) iii)

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Να γίνει η αντιστοίχιση της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β.

Στήλη Α

Τετράπλευρο

α) ορθογώνιο
παράλληλόγραμμο

β) ρόμβος

γ) τετράγωνο

Στήλη Β

Ιδιότητες

i) Οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

ii) Οι διαγώνιες είναι ίσες και
τέμνονται κάθετα.

iii) Οι διαγώνιες είναι ίσες.

iv) Δύο απέναντι πλευρές είναι
ίσες και παράλληλες

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

Α. Να σημειωθεί η σωστή απάντηση:

i) Σε ρόμβο ΑΒΓΔ ο αριθμός των ισοσκελών τριγώνων που σχηματίζονται είναι:

Α: 2 Β: 3 Γ: 4 Δ: 6

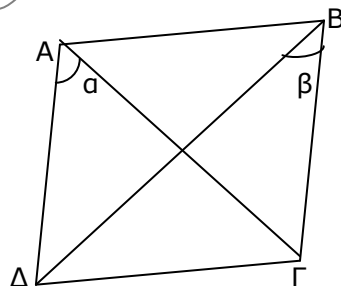
ii) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ το Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Αν είναι ΔΟ=5, τότε η ΑΓ είναι:

Α: 5 Β: 10 Γ: 15 Δ: απροσδιόριστη, γιατί δεν έχουμε επαρκή στοιχεία.

iii) Αν ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ίσες τις τέσσερις πλευρές του και επιπλέον ισχύει ΑΓ=ΒΔ, τότε το ΑΒΓΔ είναι: Α: ορθογώνιο Β: ρόμβος Γ: τετράγωνο Δ: δεν μπορούμε να εξαγάγουμε συμπέρασμα.

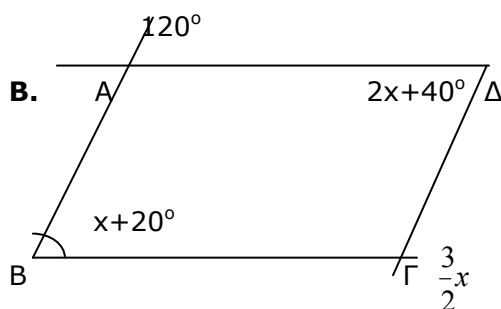
iv)



Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ρόμβος.

Αν $\hat{\alpha} = 3x - 2^\circ$ και $\hat{\beta} = 2x + 7^\circ$, τότε το x είναι ίσο με:

Α: 7 Β: 17 Γ: 9 Δ: 10



Να εξεταστεί αν το

τετράπλευρο ΑΒΓΔ

ΑΣΚΗΣΗ 5^η

Πάνω στη διαγώνιο ΒΔ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τμήμα ΒΕ=ΒΓ. α) Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\Delta \Gamma E}$. β) Αν Ο είναι κέντρο του τετραγώνου, να αποδειχθεί ότι η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta A O}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6^η

Στο εξωτερικό ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΒΑΔΗ και ΑΓΖΘ. Να αποδειχθεί ότι:

- α) Τα σημεία Η, Α και Ζ είναι συνευθειακά.
- β) Το τρίγωνο ΔΖΒ είναι ισοσκελές.

γ) Η ευθεία ΖΗ είναι μεσοκάθετη της διαγωνίου ΔΒ.

ΑΣΚΗΣΗ 7^η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Αν $DE \parallel AB$ και $EZ \parallel BG$ να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) $AG = BZ + EG$ και $AB = AE + AZ$.

ΑΣΚΗΣΗ 8^η

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $AG = 2BD$. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΟΑ και ΟΓ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι:

- α) Το Ο είναι μέσο του ΕΖ
- β) $EZ = DB$
- γ) Το ΒΕΔΖ είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 9^η

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και στις προεκτάσεις των διαμέσων του AM και BN τα σημεία Δ και E , έτσι ώστε $M\Delta=MA$ και $NE=NB$. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta=\Gamma E$ και ότι τα σημεία Γ , Δ , E είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΗ 10^η

Σ' ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A}=60^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά $\Gamma\Delta$ στο E .

- Να υπολογιστεί το μέτρο της γωνίας $B\hat{E}\Delta$
- Τι είδους τρίγωνο είναι το $B\Gamma E$;

ΑΣΚΗΣΗ 11^η

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ το E είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Αν η ΔE τέμνει την προέκταση της AB στο Z τότε

- Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $\Delta E\Gamma$ και $B E Z$
- Να αποδείξετε ότι $AZ=2AB$.

ΑΣΚΗΣΗ 12^η

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB>AD$ η AE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές
- Να υπολογιστεί το άθροισμα $B\Gamma+\Gamma E$.

ΑΣΚΗΣΗ 13^η

Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ ενός ρόμβου $B\Gamma\Lambda K$ παίρνουμε τα σημεία A και Δ με $BA=B\Gamma=\Gamma\Delta$. Να αποδειχθεί ότι $AK \perp \Lambda\Delta$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

στις εφαρμογές των ιδιοτήτων παραλληλογράμμου στα τρίγωνα και στα τραπέζια.

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Να σημειωθεί Σ ή Λ στις παρακάτω ερωτήσεις.

- i) Αν για τα σημεία Ε και Δ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $AE = EB$ και $AD = DG$ τότε είναι $ED \parallel BG$. Σ Λ
- ii) Το ίχνος της διαμέσου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου. Σ Λ
- iii) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΒΜ διάμεσός του ισχύει $BM = AG/2$. Σ Λ
- iv) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$ η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα δημιουργεί δύο ισόπλευρα τρίγωνα. Σ Λ
- v) Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο κάθε ευθεία που είναι παράλληλη στη βάση τριγώνου και τέμνει τις ίσες πλευρές του σχηματίζει ισοσκελές τραπέζιο. Σ Λ
- vi) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel GD$) είναι $AB = 2x$, $GD = 4x$, $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ τότε το ύψος του τραπέζιου είναι ίσο με x. Σ Λ
- vii) Αν σε ένα τραπέζιο δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές. Σ Λ
- viii) Ένα τραπέζιο που έχει δύο γωνίες ίσες έχει και τις διαγώνιες ίσες. Σ Λ
- ix) Σε κάθε τραπέζιο η ευθεία που ενώνει τα μέσα των βάσεων είναι κάθετη σ' αυτές. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Στις παρακάτω ερωτήσεις να σημειωθεί η σωστή απάντηση:

i) Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.

α) Αν είναι $ΚΛ+ΛΜ+ΚΜ=a+b$, τότε το άθροισμα $ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ$ ισούται με:

$$Α : a+b \quad Β : \frac{a+b}{2} \quad Γ : 2(a+b) \quad Δ : a+2b.$$

β) Αν είναι $ΒΓ=4a+10$ και $ΚΛ=a+35$ τότε το ΚΛ ισούται με:

$$Α : 30 \quad Β : 50 \quad Γ : 60 \quad Δ : 65$$

ii) Δίνεται τρίγωνο ΚΛΜ με $\hat{Κ} = 90^\circ$, $ΚΔ \perp ΜΛ$ και Ε, Ζ μέσα των πλευρών ΚΛ και ΜΚ αντίστοιχα.

α) Η περίμετρος του τετραπλεύρου ΚΕΔΖ είναι ίση με:

$$Α : ΚΛ+ΜΛ \quad Β : ΚΜ+ΜΛ \quad Γ : ΚΛ+ΚΜ \quad Δ : ΚΛ+ΚΜ+ΜΛ$$

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΖΔΕ είναι ίση με:

$$Α : \frac{ΚΛ + ΚΜ}{2} \quad Β : \frac{ΚΛ + ΛΜ}{2}$$

$$Γ : ΚΛ+ΛΜ+ΜΚ \quad Δ : \frac{1}{2} (ΚΛ+ΛΜ+ΚΜ)$$

iii) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^\circ$) είναι ΑΔ το ύψος του και ΑΜ η διάμέσός του. Αν $\hat{Β} = 70^\circ$, τότε το μέτρο της γωνίας $\hat{ΔΑΜ}$ είναι:

$$Α : 30^\circ \quad Β : 45^\circ \quad Γ : 60^\circ \quad Δ : 50^\circ \quad Ε : 20^\circ.$$

iv) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^\circ$) είναι $\hat{Β} = 5\hat{Γ}$. Αν ΑΔ το ύψος του, τότε:

$$Α : 2ΑΔ=ΒΓ \quad Β : 2ΒΓ=3ΑΔ \quad Γ : 4ΑΔ=ΒΓ$$

$$Δ : 3ΑΔ=ΒΓ \quad Ε : ΑΔ>ΒΓ.$$

v) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ ($ΑΒ // ΓΔ$) είναι $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^\circ$ και $\hat{Β} = 60^\circ$. Αν $ΓΔ=20$ και $ΒΓ=80$, η διάμεσος ΕΖ του τραpezίου ισούται με:

$$Α : 30 \quad Β : 40 \quad Γ : 50 \quad Δ : 60 \quad Ε : 70$$

vi) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ ($ΑΒ // ΓΔ$) είναι $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^\circ$, $ΑΒ=2x$ και $ΔΓ=8x$

α) Η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου είναι ίση με:

Α: $3x$ Β: $4x$ Γ: $5x$ Δ: $6x$

β) Αν επιπλέον η $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ τότε το ύψος του τραπεζίου ΑΒΖΕ είναι:

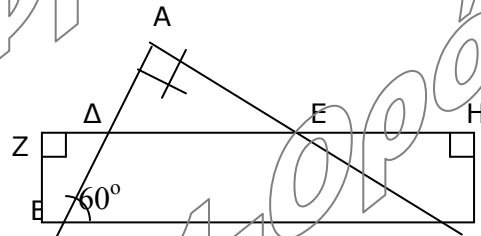
Α: 16 Β: $12x$ Γ: $8x$ Δ: $\sqrt{3}x$ Ε: $2\sqrt{3}x$

vii) Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τα Κ, Λ χωρίζουν την πλευρά ΑΔ σε τρία ίσα τμήματα και τα Μ, Ν την πλευρά ΒΓ σε τρία ίσα τμήματα αντίστοιχα.

Αν ΚΜ = 20 και ΛΝ = 30, ΑΒ = γ, ΓΔ = x τότε το άθροισμα x + γ είναι ίσο με

Α: 10 Β: 40 Γ: 50 Δ: 100.

ΑΣΚΗΣΗ 3^η



Στο παραπάνω σχήμα το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$ τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα και το ΒΖΗΓ είναι ορθογώνιο.

Δίνονται $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $B\Gamma = 2$ $A\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Να αντιστοιχίσετε το κάθε τμήμα της στήλης Α με το μήκος του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α

Τμήμα

α) ΔΕ

β) ΒΔ

γ) ΖΔ

δ) ΕΗ

ε) ΖΒ

Στήλη Β

Μήκος

i) $\frac{1}{4}$

ii) $\sqrt{3}/4$

iii) 1

iv) $\frac{1}{2}$

v) $\frac{3}{4}$

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Ε είναι το μέσο του τμήματος ΔΓ και τα Κ, Λ είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα. Αν η ΚΛ τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ στα Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $AN = MK = \frac{1}{4} AB$.

ΑΣΚΗΣΗ 5^η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ($AB < AG$) είναι ΑΗ ύψος και ΑΜ διάμεσος. Προεκτείνουμε τις ΑΜ και ΑΗ έτσι ώστε ΜΔ=ΑΜ και ΗΕ=ΑΗ. Αν οι ΒΔ, ΓΕ τέμνονται στο Κ, να αποδείξετε ότι: i) $\triangle A\Gamma E$ ισοσκελές ii) $\triangle B\hat{K}\Gamma$ ισοσκελές iii) $ED // B\Gamma$ iv) $\triangle K\hat{E}\Delta$ ισοσκελές v) ΒΓΔΕ ισοσκελές τραπέζιο.

ΑΣΚΗΣΗ 6^η

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AG = BG/2$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Αν η κάθετη από την κορυφή A προς την διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E , τότε:

- i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AGE είναι ισοσκελές
- ii) Να υπολογιστεί η $\hat{AEG}$
- iii) Να αποδείξετε ότι $AE = AB$.

ΑΣΚΗΣΗ 7^η

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), AD ύψος και E, Z είναι τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε

ότι: α) $\hat{EZD} = 90^\circ$

β) Αν M είναι το μέσο της EZ τότε $DM = BG/4$.

ΑΣΚΗΣΗ 8^η

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB < \Gamma\Delta$, η διχοτόμος της $\hat{B}$ τέμνει την διάμεσο MN του τραπεζίου στο E . Να αποδείξετε ότι $\hat{BEG} = 90^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 9^η

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = \frac{3}{2} \Delta\Gamma$ και τα σημεία

E, Z και H είναι τα μέσα των $\Delta\Gamma, EB, A\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το $\Delta\Gamma ZH$ είναι παραλληλόγραμμο
- β) $\Theta B = AB - \Delta\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των ΓZ και AB .

ΑΣΚΗΣΗ 10^η

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AD=AB+\Gamma\Delta$. Αν η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την $B\Gamma$ στο E να αποδειχθεί ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.

ΑΣΚΗΣΗ 11^η

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του $B\Delta$, ΓE που τέμνονται στο H και τα μέσα M , N των $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι: $MN \perp \Delta E$.

ΑΣΚΗΣΗ 12^η

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την AB στο μέσο της E . Να αποδειχθεί ότι:
 α) $AB=2A\Delta$
 β) $\Delta E=2AZ$, όπου AZ η απόσταση του A από τη $\Gamma\Delta$
 γ) $\hat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ$

ΑΣΚΗΣΗ 13^η

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία B είναι οξεία και ισχύει $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, N το μέσο της $A\Gamma$ και $A\Delta$ το ύψος από την κορυφή A ,
 να αποδείξετε ότι:
 α) Τα τμήματα NM και $M\Delta$ είναι ίσα
 β) Η πλευρά AB είναι διπλάσια του τμήματος $M\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 14^η

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB=2B\Gamma$. Φέρνουμε την κάθετη $A\Gamma$ στην $B\Gamma$ και παίρνουμε τα μέσα M και N των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι
 α) $\hat{M\epsilon N} = \hat{N\epsilon \Gamma}$ β) $\hat{\Delta N\epsilon} = 3\hat{N\epsilon \Gamma}$.

ΑΣΚΗΣΗ 15^η

Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{A}$ ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθές. Αν K και Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $K\Lambda \perp B\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 16^η

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, η μεσοκάθετη της υποτείνουσας $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο Δ . Να αποδειχθεί ότι:

α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B

β) $\Delta M = \frac{A\Gamma}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 17^η

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 135^\circ$. Αν EZ η διάμεσός του και ΔH το ύψος του, να αποδειχθεί ότι $EZ + \Delta H = AB$.

ΑΣΚΗΣΗ 18^η

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και έστω M το συμμετρικό του Γ ως προς την AB . Αν O είναι το σημείο τομής των $M\Delta$ και AB να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 19^η

Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Από το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ φέρνουμε την παράλληλη προς την $A\Delta$, η οποία τέμνει την ευθεία $\Gamma\Delta$ στο σημείο Z . Να αποδειχθεί ότι $B\hat{Z}\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 20^η

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) οι ευθείες των πλευρών ΑΔ και ΒΓ τέμνονται κάθετα στο σημείο Ο. Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι:

α) Τα σημεία Ο, Κ και Λ είναι συνευθειακά

β) $ΚΛ = \frac{|ΑΒ - ΓΔ|}{2}$,

γ) Αν Σ και Ρ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, τότε το τετράπλευρο ΚΣΛΡ είναι ορθογώνιο.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

- **ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ**

Αν η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται επίκεντρη

- **ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ**

Αν η κορυφή είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές τέμνουσες του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται εγγεγραμμένη

- **ΥΠΟ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ**

Αν η κορυφή είναι σημείο του κύκλου, η μια της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου τότε η γωνία λέγεται γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης

ΣΧΕΣΗ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΕΝΤΡΗΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα

ΓΩΝΙΑ ΥΠΟ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

Παρατήρηση:

Τα τόξα που περιέχονται μεταξύ δύο παραλλήλων χορδών είναι ίσα και αντίστροφα.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου

Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Ο, R)$, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

- Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές
- Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

ΕΓΓΡΑΨΙΜΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγραψίμο σε κύκλο, όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγραψίμο σε κύκλο $(Ο, R)$, αν ισχύει μια από τις ακόλουθες προτάσεις.

- Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές
- Μια πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες
- Μια εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που η κάθε μία βαίνει στο τόξο το οποίο δέχεται την άλλη είναι παραπληρωματικές

Σ ή Λ

2. Αν A, B και Γ τρία σημεία του κύκλου (O, ρ) τέτοια ώστε $\hat{AB} = \hat{B\Gamma} = 60^\circ$ τότε $\hat{AB\Gamma} = 60^\circ$

Σ ή Λ

3. Αν δύο κύκλοι (O, ρ) και (O, ρ') τέμνονται στα σημεία A και B , τότε οι ευθείες AB και OO' είναι κάθετες

Σ ή Λ

4. Αν δύο κύκλοι (O, ρ) και (O, ρ') τέμνονται στα σημεία A και B , τότε το τετράπλευρο $AOBO'$ είναι ρόμβος

Σ ή Λ

5. Το τόξο στο οποίο βαίνει μια εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο διπλάσιο από το μέτρο της γωνίας

Σ ή Λ

6. Αν A, B και Γ τρία σημεία του κύκλου (O, ρ) τέτοια ώστε

$$\hat{AB} = 2\hat{B\Gamma} \text{ τότε α) } \hat{AOB} = 2\hat{BO\Gamma} \quad \Sigma \quad \text{ή} \quad \Lambda$$

$$\beta) \hat{AB} = 2\hat{B\Gamma} \quad \Sigma \quad \text{ή} \quad \Lambda$$

7. Θεωρούμε διάμετρο AB και σημείο M κύκλου (O, ρ) . Αν

$$\hat{AM} = 3\chi - 10^\circ, \hat{MB} = \chi + 30^\circ \text{ τότε}$$

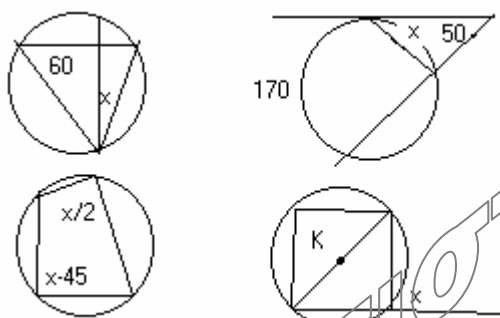
- α) το μέτρο της επίκεντρης γωνίας $\hat{AOM}$ είναι

$$A 90^\circ \quad B 110^\circ \quad \Gamma 100^\circ \quad \Delta 40^\circ \quad E 80^\circ$$

- β) το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας $\hat{MAB}$ είναι

$$A 40^\circ \quad B 20^\circ \quad \Gamma 55^\circ \quad \Delta 45^\circ \quad E 35^\circ$$

8. Να υπολογιστεί το χ στα παρακάτω σχήματα



9. Σε εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με

$$\hat{A} = \frac{2}{3}\chi \text{ και } \hat{\Gamma} = \chi - 45^\circ$$

α) Να υπολογιστεί το χ

β) Αν η ακτίνα του κύκλου έχει μήκος 2cm τότε η διαγώνιος $B\Delta$ του τετραγώνου έχει μήκος

A: 2cm B 4cm Γ 1cm

10. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι

α) $\hat{E}B\Delta = \hat{\Delta}\Gamma E$

β) $\hat{A}\Delta E = \hat{B}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$. Φέρουμε $BZ \perp A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Ναδειχθεί ότι: τα τρίγωνα $B\hat{A}E$ και $B\hat{\Delta}E$ είναι ισοσκελή.

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και Δ, E μέσα των AB, AG αντίστοιχα. Φέρουμε $\Delta P \perp B\Gamma$ και $ES \perp B\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι: $E\hat{P}S = \Delta\hat{P}S$.

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο Σ εκτός αυτού. Αν οι πλευρές $\Sigma x, \Sigma y$ γωνίας $x \hat{\Sigma} y$ τέμνουν τον κύκλο στα A, B και Γ, Δ αντίστοιχα και η $O\Sigma$ είναι διχοτόμος της $x \hat{\Sigma} y$ να αποδείξετε ότι $AB=\Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AG > AB$ πάνω στην πλευρά AG θεωρώ σημείο E ώστε $AE=AB$. Αν $A\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}$ τότε
 α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Delta}E$
 β) Να αποδείξετε ότι $B\hat{E}\zeta = \Delta\hat{E}\Gamma$ γ) $B\Delta < \Delta\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 5^η

Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha=8, \beta=6$ μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η πλευρά γ ;

ΑΣΚΗΣΗ 6^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E μέσα των ίσων πλευρών του AB, AG αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι:

- i) Τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα
- ii) $BE=\Gamma\Delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 7^η

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Η κάθετη από το A στην $B\Delta$ τέμνει την $B\Delta$ στο E και η κάθετη από το Γ στην $B\Delta$ τέμνει την $B\Delta$ στο Z . Αν H, Θ είναι τα μέσα των $AD, B\Gamma$ αντίστοιχα τότε αποδείξτε: i) Το τετράπλευρο $B\Theta\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο ii) $BZ=ED$ iii) Αν $H\Theta$ και $B\Delta$ τέμνονται στο I τότε $ZI=IE$.

ΑΣΚΗΣΗ 8^η

Δίνονται δύο διαδοχικές γωνίες $\hat{xOz} = 20^\circ$ και $\hat{zOy} = 35^\circ$. Παίρνουμε τα σημεία A, B στις πλευρές της γωνίας Ox, Oz αντίστοιχα έτσι ώστε $OA=OB$ και η κάθετη από το B στην Oy τέμνει την Oy στο E . Αν M, N είναι τα μέσα των OB, AB τότε αποδείξτε ότι: i) $ME=OB/2$
ii) $MN \parallel OA$
iii) Το τρίγωνο MEN είναι ισοσκελές
iv) Η γωνία $\hat{NME}$ είναι ορθή.

ΑΣΚΗΣΗ 9^η

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με μεγάλη βάση $5x$ και η μη παράλληλη πλευρά $3x$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Τότε η περίμετρος του τραπεζίου είναι: $A: 11x \quad B: 12x \quad \Gamma: 14x \quad \Delta: 13x$
(Δικαιολογήστε την απάντησή σας).

ΑΣΚΗΣΗ 10^η

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 30^\circ$ φέρουμε την μεσοκάθετη της $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ . Αποδείξτε ότι $B\Delta$ διχοτόμος της $\hat{B}$.

ΑΣΚΗΣΗ 11^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, $A\chi$ διχοτόμος της $\hat{A}$. Φέρουμε $BE \perp A\chi$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο H και $\Gamma Z \perp A\chi$ που τέμνει την AB στο Θ . Αποδείξτε ότι:

- i) Τα τρίγωνα ABH και $A\Gamma\Theta$ είναι ισοσκελή
- ii) $H\Gamma = B\Theta$
- iii) Το τετράπλευρο $BH\Gamma\Theta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο
- iv) Αν O μέσο της $B\Gamma$ τότε ZOE ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 12^η

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ διέρχεται από το μέσο M της AB . Αποδείξτε ότι:

- i) Το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές
- ii) $AB = 2A\Delta$
- iii) Φέρουμε $AZ \perp \Delta\Gamma$ να δείξετε ότι: $\Delta Z = \frac{1}{4} AB$
- iv) Το τρίγωνο $B\Gamma M$ ισοσκελές
- v) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 13^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $AB > B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = AB - B\Gamma$ και την πλευρά AB κατά τμήμα $BE = \Gamma\Delta$. Αποδείξτε ότι: i) $B\Delta = AB = A\Gamma$

ii) Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

$$\text{iii) } \hat{\Gamma\epsilon\xi} = 90^\circ + \frac{\hat{B\Delta\Gamma}}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 14^η

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, AK ύψος και Λ, M, N τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα

α) Αποδείξτε ότι $AK = MN$

β) Τι τετράπλευρο είναι το $K\Lambda MN$ και γιατί

γ) Αν $\hat{B} = 50^\circ$ να υπολογιστούν οι γωνίες του τετραπλεύρου $K\Lambda MN$.

ΑΣΚΗΣΗ 15^η

Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$, η διχοτόμος της Οδ και τα σημεία Α, Β των ημιευθειών Οχ και Ογ αντίστοιχα, έτσι ώστε $OA=OB$

α) Αν Μ σημείο της διχοτόμου Οδ να αποδείξετε ότι $AM=MB$

β) Αν $\hat{AMB}=120^\circ$ τότε η γωνία $\hat{AMO}$ είναι:

Α: 60° Β: 30° Γ: 45° Δ: 90°

γ) Φέρουμε την ΑΝ κάθετη στη διχοτόμο Οδ. Να αποδειχθεί ότι $MN = \frac{1}{2} AM$.

ΑΣΚΗΣΗ 16^η

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), στο οποίο: $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$,

$\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στη ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 135^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

β) Αν Μ σημείο τομής των ΒΕ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι το Μ είναι μέσο της ΒΕ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές

δ) Να αποδείξετε ότι $AE=BD$ και ότι η ΑΕ είναι κάθετη στη ΒΔ

ε) Αν Ν είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΒΔ να αποδείξετε ότι $NM = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 17^η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, $\hat{A} = 90^\circ$, ΑΔ ύψος, Μ, Ν μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΝ είναι το μισό της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ.

ΑΣΚΗΣΗ 18^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$) με $\hat{A} = 100^\circ$ και Δ σημείο της προέκτασης ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε $AD=BG$

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 40^\circ$

β) Αν Ε σημείο της ΒΓ, τέτοιο ώστε $BE=BD$ να υπολογίσετε την γωνία $\hat{BED}$ και να αποδειχθεί ότι $GA=GE$

γ) φέρνουμε την ΕΖ κάθετη στην ΑΒ και την ΓΜ κάθετη στην ΑΕ. Να συγκριθούν τα τρίγωνα ΖΕΔ και ΜΕΓ.

ΑΣΚΗΣΗ 19^η

Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = x$, $\hat{B} = 2x$, $\hat{\Gamma} = 3x$, $\hat{\Delta} = 4x$. Να βρεθεί το x . Είναι το τετράπλευρο τραπέζιο; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας).

ΑΣΚΗΣΗ 20^η

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$) όπου οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ι με $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{I} = 120^\circ$. Είναι το τρίγωνο ΑΒΓ ισόπλευρο; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ 21^η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρω ΒΔ διάμεσο, Ε μέσο της ΒΔ και στην προέκταση του ΑΕ θεωρώ σημείο Ζ ώστε $EZ=AE$. Αποδείξτε ότι: α) Τα τετράπλευρα ΑΒΖΔ και ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμα.

β) Αν Θ σημείο τομής των ΑΖ και ΒΓ τότε δείξτε ότι Θ κέντρο βάρους του $\triangle B\hat{Z}\Delta$

γ) $Z\Theta = \frac{1}{2} A\Theta$.

ΑΣΚΗΣΗ 22^η

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$. Αν Ε, Ζ μέσα των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα και $\Gamma B = 8a$, $\Delta\Gamma = 2a$ όπου a : γνωστό τμήμα τότε

α) Να βρεθεί η ΑΒ

β) Να αποδειχθεί ότι $EZ = 4a$

γ) Να αποδειχθεί ότι η μικρότερη απόσταση από το Γ στην ΕΒ είναι το ΓΕ.

ΑΣΚΗΣΗ 23^η

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=20$ και $\Gamma\Delta=40$. Αν M, Λ, E είναι τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα να βρεθούν τα μήκη των $M\Lambda, ME$.

ΑΣΚΗΣΗ 24^η

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = 120^\circ$ και $B\Delta=12$. Να βρεθεί η περίμετρος του.

ΑΣΚΗΣΗ 25^η

Τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha > \gamma$. Αν την διάμεσο $B\Delta = \mu_\beta$ την προεκτείνω κατά τμήμα $\Delta E = B\Delta$, να αποδείξετε ότι

α) $AB\Gamma E$ παραλληλόγραμμο

β) $\alpha - \gamma < 2\mu_\beta < \alpha + \gamma$

γ) $\hat{A}B\Delta > \hat{\Gamma}B\Delta$ δ) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha + \beta + \gamma$.

ΑΣΚΗΣΗ 26^η

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} < 90^\circ$, $AB=2A\Delta$, και φέρω $AK \perp B\Gamma$. Αν M, N είναι μέσα των $\Gamma\Delta$ και AK αντίστοιχα και η MN τέμνει την AB στο E να αποδείξετε ότι

α) το $\triangle MAK$ είναι ισοσκελές

β) $KM\Delta = 3MK\Gamma$

γ) Το τετράπλευρο $KEM\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΑΣΚΗΣΗ 27^η

Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$ ($AB < \Gamma\Delta$), EZ διάμεσος και $\Gamma H \perp AB$. Να αποδείξετε ότι

α) το τετράπλευρο $AEZH$ είναι παραλληλόγραμμο

β) $BH = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$

γ) $AG > \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 28^η

Τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και K, Λ μέσα των $B\Delta, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι α) $K\Lambda \perp A\Gamma$ β) Αν η διχοτόμος της $\hat{K}\hat{B}$ τέμνει την $B\Gamma$ στο E τότε δείξτε ότι το $\Delta K\epsilon\Gamma$ είναι τραπέζιο.

ΑΣΚΗΣΗ 29^η

Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο με $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2AD$. Αν E μέσο της AB να αποδείξετε ότι

- α) Η ΔE είναι διχοτόμος της $\hat{A}$
 β) $\hat{A}\hat{\Gamma}B = 90^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 30^η

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$

- α) Αν Z, H μέσα των $AD, B\Gamma$ να αποδείξετε ότι $ZH = \frac{3AB}{2}$
 β) Αν E μέσο της $\Gamma\Delta$ να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο
 γ) Αν η ZH τέμνει τις AE, BE στα Θ, I αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $\Theta I = \frac{AB}{2}$.



STYLING: JESSICA WATSON
Rogier Johnston
www.rogiernjohnston.com