

## ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γνωρίζουμε ότι  $3 \cdot 3 = 3^2$ ,  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ .

Γενικά αν  $a$  είναι φυσικός αριθμός και  $n$  είναι φυσικός αριθμός διάφορος του μηδέν, τότε ορίζουμε ως **νιοστή δύναμη του  $a$**  και συμβολίζουμε με  $a^n$  το γινόμενο που αποτελείται από  $n$  παράγοντες ίσους με  $a$ .

Δηλαδή:  $a^n = a \cdot a \cdot a \dots \cdot a$ ,  $n \neq 0$ .

Ο αριθμός  $a$  λέγεται **βάση** της δύναμης και ο  $n$  **εκθέτης**.

- Αν  $n = 2$ , τότε έχουμε τη δύναμη  $a^2$  και διαβάζουμε τετράγωνο του  $a$  ή  $a$  στο τετράγωνο.
- Αν  $n = 3$ , τότε έχουμε τη δύναμη  $a^3$  και διαβάζουμε κύβος του  $a$  ή  $a$  στο κύβο.
- Αν  $n = 1$ , τότε  $a^1 = a$ .
- Αν  $a = 1$ , τότε  $1^n = 1$
- Αν  $a = 0$ , τότε  $0^n = 0$

## Αριθμητική παράσταση – προτεραιότητα πράξεων

- **Αριθμητική παράσταση** λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.
- Η σειρά με την οποία πρέπει να κάνουμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση (**προτεραιότητα πράξεων**) είναι η εξής:

1. Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
2. Κάνουμε όλους τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
3. Κάνουμε όλες τις προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν στη παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις, τότε εκτελούμε **πρώτα** τις πράξεις στις παρενθέσεις με την προηγούμενη σειρά.

## Ασκήσεις

1. Συμπλήρωσε στον πίνακα τα τετράγωνα και τους κύβους των αριθμών:

| $a$   | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 25 |
|-------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $a^2$ |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| $a^3$ |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |

Λύση

| $a$   | 8   | 9   | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 25    |
|-------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $a^2$ | 64  | 81  | 100  | 121  | 144  | 169  | 196  | 225  | 256  | 289  | 324  | 361  | 400  | 625   |
| $a^3$ | 512 | 729 | 1000 | 1331 | 1728 | 2197 | 2744 | 3375 | 4096 | 4913 | 5832 | 6859 | 8000 | 15625 |

2. Να γράψετε με τη μορφή δυνάμεων τα παρακάτω γινόμενα:

α)  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

β)  $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

γ)  $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

δ)  $a \cdot a \cdot a \cdot a$

ε)  $x \cdot x \cdot x$

στ)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a$

Λύση

$$\alpha) \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ φορές}} = 5^6$$

$$\beta) \underbrace{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}_{6 \text{ φορές}} \cdot \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6}_{3 \text{ φορές}} = 8^6 \cdot 6^3$$

$$\gamma) \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}_{6 \text{ φορές}} = 1^6$$

$$\delta) \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^4$$

$$\epsilon) x \cdot x \cdot x = x^3$$

$$\sigma\tau) 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = 2^4 \cdot \alpha^3$$

**3. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:  $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$ .**

Λύση

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

$$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

$$2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$$

$$2^9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 512$$

$$2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$$

**4. Να βρείτε τα τετράγωνα των αριθμών: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 και 90.**

Λύση

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$20^2 = 20 \cdot 20 = 400$$

$$30^2 = 30 \cdot 30 = 900$$

$$40^2 = 40 \cdot 40 = 1600$$

$$50^2 = 50 \cdot 50 = 2500$$

$$60^2 = 60 \cdot 60 = 3600$$

$$70^2 = 70 \cdot 70 = 4900$$

$$80^2 = 80 \cdot 80 = 6400$$

$$90^2 = 90 \cdot 90 = 8100$$

**5. Βρες τους κύβους των αριθμών: 10, 20, 30, 40, 50.**

Λύση

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

$$20^3 = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$$

$$30^3 = 30 \cdot 30 \cdot 30 = 27.000$$

$$40^3 = 40 \cdot 40 \cdot 40 = 64.000$$

$$50^3 = 50 \cdot 50 \cdot 50 = 125.000$$

**6. Κάνε τις πράξεις:**

|                             |                               |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| <b>α)</b> $3 \cdot 5^2$     | <b>β)</b> $3 \cdot 5^2 + 2$   | <b>γ)</b> $3 \cdot 5^2 + 2^2$ |
| <b>δ)</b> $3 \cdot 5 + 2^2$ | <b>ε)</b> $3 \cdot (5 + 2)^2$ |                               |

Λύση

$$\alpha) 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$$

$$\beta) 3 \cdot 5^2 + 2 = 3 \cdot 25 + 2 = 75 + 2 = 77$$

$$\gamma) 3 \cdot 5^2 + 2^2 = 3 \cdot 25 + 4 = 75 + 4 = 79$$

$$\delta) 3 \cdot 5 + 2^2 = 3 \cdot 5 + 4 = 15 + 4 = 19$$

$$\epsilon) 3 \cdot (5 + 2)^2 = 3 \cdot 7^2 = 3 \cdot 49 = 147$$

7. Κάνε τις πράξεις: α)  $3^2 + 3^3 + 2^3 + 2^4$

β)  $(13 - 2)^4 + 5 \cdot 3^2$

Λύση

$$\alpha) 3^2 + 3^3 + 2^3 + 2^4 = 9 + 27 + 8 + 16 = 60$$

$$\beta) (13 - 2)^4 + 5 \cdot 3^2 = 11^4 + 5 \cdot 9 = 14.641 + 45 = 14.686$$

8. Βρες τις τιμές των παραστάσεων:

α)  $(6 + 5)^2$  και  $6^2 + 5^2$

β)  $(3 + 6)^2$  και  $3^2 + 6^2$ . Τι παρατηρείς;

Λύση

$$\alpha) (6 + 5)^2 = 11^2 = 11 \cdot 11 = 121 \text{ και } 6^2 + 5^2 = 6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 = 36 + 25 = 61$$

$$\beta) (3 + 6)^2 = 9^2 = 81 \text{ και } 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$$

Παρατηρούμε ότι το τετράγωνο του αθροίσματος και το άθροισμα των τετραγώνων είναι δύο διαφορετικοί αριθμοί.

9. Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:

α)  $\alpha + \alpha + \alpha$

β)  $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$

γ)  $x + x + x + x$

δ)  $x \cdot x \cdot x \cdot x$

Λύση

$$\alpha) \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$$

$$\beta) \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$$

$$\gamma) x + x + x + x = 4x$$

$$\delta) x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$$

10. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε ανεπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10.

α) 34.720

β) 123.654

γ) 890.650

Λύση

$$\alpha) 34.720 = 30.000 + 4.000 + 700 + 20 = 3 \cdot 10.000 + 4 \cdot 1.000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 = 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1$$

$$\beta) 123.564 = 100.000 + 20.000 + 3.000 + 500 + 60 + 4 = 100.000 + 2 \cdot 10.000 + 3 \cdot 1.000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

$$\gamma) 890.650 = 800.000 + 90.000 + 600 + 50 = 8 \cdot 100.000 + 9 \cdot 10.000 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 = 8 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1$$

11. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα με το εξαγόμενο των πράξεων κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.

|                           |    |
|---------------------------|----|
| $(1+2) \cdot (3+4)$       | 20 |
| $1 \cdot (2+3 \cdot 4)$   | 21 |
| $(1 \cdot 2 + 3) \cdot 4$ | 9  |
| $1 + (2+3) \cdot 4$       | 14 |

Λύση

$$\begin{aligned} (1+2) \cdot (3+4) &= 3 \cdot 7 = 21 \\ 1 \cdot (2+3 \cdot 4) &= 1 \cdot (2+12) = 1 \cdot 14 = 14 \\ (1 \cdot 2 + 3) \cdot 4 &= (2+3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20 \\ 1 + (2+3) \cdot 4 &= 1 + 5 \cdot 4 = 1 + 20 = 21 \end{aligned}$$

12. Αντιστοίχισε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στο δεύτερο πίνακα με την αριθμητική παράσταση κάθε γραμμής του πρώτου πίνακα.

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| $2 + 2 \cdot 2$                 | 150 |
| $3 + 3 \cdot 3$                 | 68  |
| $4 + 4 \cdot 4 \cdot 4$         | 16  |
| $5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5$     | 6   |
| $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5$ | 12  |
| $4 + 4 \cdot 4 - 4$             | 55  |

Λύση

$$\begin{aligned} 2 + 2 \cdot 2 &= 2 + 4 = 6 \\ 3 + 3 \cdot 3 &= 3 + 9 = 12 \\ 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 &= 4 + 16 \cdot 4 = 4 + 64 = 68 \\ 5 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 &= 5 + 25 + 25 = 55 \\ 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 &= 25 + 25 \cdot 5 = 25 + 125 = 150 \\ 4 + 4 \cdot 4 - 4 &= 16 \end{aligned}$$

13. Να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

α)  $2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10}$

β)  $2 \cdot 3^2 + 4$

γ)  $2 \cdot (3^2 + 4)$

δ)  $(2 \cdot 3)^2 + 4$

ε)  $2 \cdot 3^3 + (3^2 - 2^3) \cdot 6^2$

Λύση

α) Είναι  $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ ,  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ ,  $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$   
 $2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$  και  $2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$ , άρα  
 $2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{10} = 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 = 1364$

β)  $2 \cdot 3^2 + 4 =$  (προηγούνται οι δυνάμεις)  
 $2 \cdot 9 + 4 =$  (μετά τις δυνάμεις προηγούνται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις)

$$18 + 4 = 20 \quad (\text{στο τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις})$$

$$\gamma) 2 \cdot (3^2 + 4) = \quad (\text{προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις όπου θα βρούμε πρώτα τις δυνάμεις})$$

$$2(9 + 4) = \quad (\text{προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις})$$

$$2 \cdot 13 = 26$$

$$\delta) (2 \cdot 3)^2 + 4 = \quad (\text{προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις})$$

$$6^2 + 4 = \quad (\text{προηγούνται οι δυνάμεις})$$

$$36 + 4 \quad (\text{στο τέλος κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις})$$

$$\epsilon) 2 \cdot 3^3 + (3^2 - 2^3) \cdot 6^2 = \quad (\text{προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις όπου θα υπολογίσουμε πρώτα τις δυνάμεις})$$

$$2 \cdot 3^3 + (9 - 8) \cdot 6^2 = \quad (\text{προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις})$$

$$2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 6^2 = \quad (\text{προηγούνται οι δυνάμεις})$$

$$2 \cdot 27 + 1 \cdot 36 = \quad (\text{μετά τις δυνάμεις προηγούνται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις})$$

$$54 + 36 = 90$$

## ΕΞΑΣΚΗΣΗ

14. Να γράψετε με τη μορφή δυνάμεων τα γινόμενα:  
 α)  $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$       β)  $k \cdot k$       γ)  $13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$       δ)  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot y \cdot y \cdot y$
15. Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τα γινόμενα:  
 α)  $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3$       β)  $x^2 \cdot x^3$       γ)  $\alpha \cdot \alpha^2 \cdot \alpha \cdot \alpha^5$
16. Να βρείτε ποια δύναμη του 10 είναι οι αριθμοί:  
 α) 100      β) 10.000      γ) 1.000.000
17. Γράψε με τη μορφή δυνάμεων τους αριθμούς:  
 α) 9      β) 25      γ) 100      δ) 27      ε) 125
18. Υπολόγισε:  
 α) τη διαφορά του διπλάσιου του 2,5 από το τετράγωνο του 2,5  
 β) τη διαφορά του κύβου 0,5 από το τριπλάσιο του 0,5.
19. Να βρείτε τη τιμή της παράστασης  $5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 4$
20. Να κάνετε τις πράξεις:  
 α)  $2 \cdot 4^2$       β)  $2 \cdot 4^2 + 7$       γ)  $2 \cdot (4^2 + 7)$       δ)  $2 \cdot 4^2 + 7^2$       ε)  $2 \cdot (4^2 + 7^2)$
21. Να βρείτε τη τιμή των παρακάτω παραστάσεων:  
 α)  $(3+4)^2$  και  $3^2 + 4^2$       β)  $(5-2)^2$  και  $5^2 - 2^2$
22. Να κάνετε τις πράξεις:  
 α)  $(2^5 - 3^3) \cdot [2(4 \cdot 9 - 6^2) + 3 \cdot 1^{111}]$       β)  $2 \cdot (3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 5) + 3(4^3 - 6 \cdot 3^2)$
23. Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς σε ανεπτυγμένη μορφή με χρήση των δυνάμεων του 10.  
 α) 4923      β) 40207
24. Να κάνετε τις πράξεις:  
 α)  $(5 \cdot 14) : 7$       β)  $(4^3 - 3^3) : 37$       γ)  $(91 : 13) : (5^2 - 3 \cdot 2^3)$   
 δ)  $(2^4 - 4^2) : 1821$       ε)  $[48 : (4 \cdot 7 - 2^4)] \cdot (10^2 - 9^2)$
25. Αν  $x = 2^6 - (7^2 + 3^2)$  και  $y = 3^4 - 4 \cdot 2^4 - [(3^2 + 1^{2015}) + 5]$ , να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης  $A = x^2 (y^4 - x) - x^2 : y$ .

Στέλιος Μιχαήλογλου