

Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του a με όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Πολλαπλάσια του a είναι: $0, a, 2a, 3a, \dots$

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
- Αν ένας φυσικός αριθμός β διαιρείται από τον φυσικό αριθμό a , τότε ο β είναι πολλαπλάσιο του a .
- Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλο, τότε θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.
- Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που δεν είναι μηδέν το ονομάζουμε **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.
- Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού a λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.
- Κάθε αριθμός a έχει διαιρέτες του αριθμούς **1 και a** .
- Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το **1** λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.
- Δύο φυσικοί αριθμοί a και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** των a και β και συμβολίζεται **ΜΚΔ(a, β)**.
- Δύο αριθμοί a και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι **ΜΚΔ(a, β) = 1**.

Κριτήρια Διαιρετότητας

Κριτήρια Διαιρετότητας με **2, 3, 4, 5, 9, 10** ή **25** λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10** αν το τελευταίο του ψηφίο είναι το **0**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι **0, 2, 4, 6, 8**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5**, αν το τελευταίο ψηφίο είναι **0 ή 5**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το **3** ή το **9** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το **4** ή και το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία του** είναι μηδέν.

Ασκήσεις

1. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά

- α) Ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 8 είναι ο αριθμός και το $\text{ΕΚΠ}(5, 8) = \dots\dots\dots$
- β) Αν το $\text{ΕΚΠ}(\alpha, \beta) = \beta$, ο β είναι του α .
- γ) Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που και σύνθετοι λέγονται οι αριθμοί που
- δ) Δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους όταν

Λύση

- α) Ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 8 είναι ο αριθμός **40** και το $\text{ΕΚΠ}(5, 8) = \mathbf{40}$.
- β) Αν το $\text{ΕΚΠ}(\alpha, \beta) = \beta$, ο β είναι **πολλαπλάσιο** του α .
- γ) Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που **διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και το ένα** και σύνθετοι λέγονται οι αριθμοί που **δεν είναι πρώτοι**.
- δ) Δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους όταν **ο ΜΚΔ τους είναι το 1**.

2. Να συμπληρώσετε το κενό με το κατάλληλο ψηφίο ώστε, ο αριθμός που θα σχηματιστεί να διαιρείται με το 9:

- α) 6 4 β) 95 4 γ) 601

Λύση

- α) Γνωρίζουμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 9, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9. Επειδή $6 + 4 = 10$, και από το 10 έως το 20 ο μόνος αριθμός που διαιρείται με το 9 είναι το $18 = 10 + 8$, το ζητούμενο ψηφίο είναι το 8, οπότε ο αριθμός είναι ο **684**.
- β) Είναι $9 + 5 + 4 = 18$. Επειδή το ψηφίο που λείπει είναι αριθμός από το 0 έως το 9, το συνολικό άθροισμα των ψηφίων του αριθμού θα είναι από 18 έως και 27. Ένας αριθμός όμως διαιρείται με το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9, οπότε το ψηφίο που λείπει θα είναι το 0 ή το 9 και ο αριθμός είναι ο **9504** ή ο **9594**.
- γ) Είναι $6 + 0 + 1 = 7$. Επειδή το ψηφίο που λείπει είναι αριθμός από το 0 έως το 9, το συνολικό άθροισμα των ψηφίων του αριθμού θα είναι από 7 έως και 16. Από τους αριθμούς αυτούς όμως ο μόνος που διαιρείται με το 9 είναι το 9, άρα το ψηφίο που λείπει είναι το 2 και ο αριθμός είναι ο **6012**.

3. Τοποθετήστε ένα «x» στην αντίστοιχη θέση.

α) ΕΚΠ (3, 5)	8 ☐	9 ☐	15 ☐	30 ☐
β) ΕΚΠ (11, 6)	17 ☐	36 ☐	66 ☐	132 ☐
γ) ΕΚΠ (5, 10)	10 ☐	15 ☐	45 ☐	50 ☐
δ) ΕΚΠ (3, 2, 5)	15 ☐	20 ☐	30 ☐	60 ☐
ε) ΕΚΠ (3, 6, 9)	9 ☐	18 ☐	36 ☐	27 ☐
στ) ΕΚΠ (8, 12, 15)	15 ☐	30 ☐	60 ☐	120 ☐

Λύση

- α) Επειδή οι αριθμοί 3 και 5 είναι πρώτοι μεταξύ τους, είναι: $\text{ΕΚΠ}(3, 5) = 3 \cdot 5 = 15$.

- β) Επειδή οι αριθμοί 11 και 6 είναι πρώτοι μεταξύ τους, είναι: $EKP(11,6)=11 \cdot 6=66$.
- γ) Είναι $10=5 \cdot 2$ και $5=5 \cdot 1$, οπότε $EKP(5,10)=5 \cdot 2=10$.
- δ) Επειδή οι αριθμοί 3, 2 και 5 είναι πρώτοι μεταξύ τους, είναι: $EKP(3,2,5)=3 \cdot 2 \cdot 5=30$
- ε) Είναι $3=3 \cdot 1$, $6=3 \cdot 2$ και $9=3 \cdot 3$ άρα $EKP(3,6,9)=3 \cdot 2 \cdot 3=18$.
- στ) Είναι $8=2^3$, $12=2^2 \cdot 3$ και $15=3 \cdot 5$, άρα $EKP(8,12,15)=2^3 \cdot 3 \cdot 5=120$.

4. Η εταιρεία Α βγάζει νέο μοντέλο αυτοκινήτου κάθε 2 χρόνια ενώ η εταιρεία Β κάθε 3 χρόνια και η εταιρεία Γ κάθε 5 χρόνια. Αν το 2001 έβγαλαν και οι τρεις εταιρείες νέα μοντέλα, πότε θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο;

Λύση

Επειδή $EKP(2, 3, 5) = 30$, θα ξαναβγάλουν και οι τρεις μαζί νέο μοντέλο μετά από 30 χρόνια, δηλαδή το 2031.

5. Ένας γυμναστής παρατήρησε ότι όταν τοποθετεί τους μαθητές της Α΄ γυμνασίου ανά 3, ανά 5 και ανά 7 δεν περισσεύει κανένας. Πόσοι είναι οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου στο σχολείο αυτό, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος τους είναι μεταξύ 100 και 200;

Λύση

Επειδή, αν τοποθετηθούν οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ανά 3, ανά 5 ή ανά 7 δεν περισσεύει κανένας, το πλήθος τους είναι αριθμός πολλαπλάσιος του $EKP(3,5,7)$.

Επειδή οι αριθμοί 3,5 και 7 είναι πρώτοι μεταξύ τους, ισχύει ότι: $EKP(3,5,7)=3 \cdot 5 \cdot 7=105$.

Επειδή το πλήθος των μαθητών είναι μεταξύ του 100 και του 200 και είναι πολλαπλάσιο του 105, τελικά οι μαθητές είναι 105.

6. Ο Γιάννης πηγαίνει στον κινηματογράφο κάθε 10 ημέρες και ο Νίκος κάθε 12 ημέρες. Αν συναντήθηκαν στις 10 Μαρτίου στον κινηματογράφο, πότε θα ξανασυναντηθούν; Στο διάστημα μεταξύ δύο συναντήσεων τους, πόσες φορές έχει πάει ο καθένας τους χωριστά στον κινηματογράφο;

Λύση

Είναι $10=5 \cdot 2$ και $12=3 \cdot 2^2$. $EKP(10,12)=5 \cdot 3 \cdot 2^2=60$.

Ο Γιάννης και ο Νίκος θα ξανασυναντηθούν μετά από 60 ημέρες.

Από 10 Μαρτίου έως 10 Απριλίου είναι 31 ημέρες και από 11 Απριλίου έως 9 Μαΐου είναι 29 ημέρες, άρα θα ξανασυναντηθούν στις 9 Μαΐου.

Επειδή $60 : 10 = 6$ και $60 : 12 = 5$, ο Γιάννης μεταξύ των δύο συναντήσεων θα έχει πάει 5 φορές και ο Νίκος 4.

7. Τοποθετήστε ένα «x» στην αντίστοιχη θέση.

α) ΜΚΔ (5, 8)	1 ☐	5 ☐	8 ☐	40 ☐
β) ΜΚΔ (16, 24)	4 ☐	8 ☐	16 ☐	24 ☐
γ) ΜΚΔ (30, 15)	3 ☐	5 ☐	15 ☐	30 ☐
δ) ΜΚΔ (10, 30, 60)	5 ☐	10 ☐	30 ☐	60 ☐
ε) ΜΚΔ (22, 32, 50)	2 ☐	11 ☐	72 ☐	82 ☐

Λύση

α) Επειδή οι αριθμοί 5 και 8 είναι πρώτοι μεταξύ τους, ισχύει ότι: $\text{ΜΚΔ}(5,8) = 1$.

β) Επειδή $16 = 2^4$ και $24 = 2^3 \cdot 3$, είναι $\text{ΜΚΔ}(16,24) = 2^3 = 8$.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

γ) Επειδή $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ και $15 = 3 \cdot 5$, είναι $\text{ΜΚΔ}(30,15) = 3 \cdot 5 = 15$

δ) Επειδή $10 = 2 \cdot 5$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ και $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, είναι $\text{ΜΚΔ}(10,30,60) = 2 \cdot 5 = 10$

ε) Επειδή $22 = 2 \cdot 11$, $32 = 2^5$ και $50 = 2 \cdot 5^2$, είναι $\text{ΜΚΔ}(22,32,50) = 2$

4

8. Δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 24. Να δικαιολογήσετε γιατί έχουν και άλλους κοινούς διαιρέτες διαφορετικούς από τη μονάδα.

Λύση

Επειδή οι δύο αριθμοί έχουν ΜΚΔ το 24, θα είναι πολλαπλάσια του 24. Γνωρίζουμε ότι αν ένας αριθμός διαιρεί έναν άλλο, τότε θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του. Επειδή οι αριθμοί 2, 3, 4, 6, 8, 12 είναι διαιρέτες του 24, θα διαιρούν και τους δύο αριθμούς.

9. Βρείτε τους διαιρέτες των αριθμών: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Ποιοι από τους αριθμούς αυτούς είναι πρώτοι; Ποιοι είναι σύνθετοι;

Λύση

Επειδή $10 = 2 \cdot 5 = 1 \cdot 10$, διαιρέτες του 10 είναι οι αριθμοί: 1, 2, 5, 10.
 Επειδή $11 = 1 \cdot 11$, διαιρέτες του 11 είναι οι αριθμοί: 1, 11.
 Επειδή $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, διαιρέτες του 12 είναι οι αριθμοί: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
 Επειδή $13 = 1 \cdot 13$, διαιρέτες του 13 είναι οι αριθμοί 1, 13.
 Επειδή $14 = 1 \cdot 14 = 2 \cdot 7$, διαιρέτες του 14 είναι οι αριθμοί 1, 2, 7, 14.
 Επειδή $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$, διαιρέτες του 15 είναι οι αριθμοί 1, 3, 5, 15.
 Επειδή $16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$, διαιρέτες του 16 είναι οι αριθμοί 1, 2, 4, 8, 16.
 Επειδή $17 = 1 \cdot 17$, διαιρέτες του 17 είναι οι αριθμοί 1, 17.
 Επειδή $18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$, διαιρέτες του 18 είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 6, 9, 18.
 Επειδή $19 = 1 \cdot 19$, διαιρέτες του 19 είναι οι αριθμοί 1, 19.
 Επειδή $20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$, διαιρέτες του 20 είναι οι αριθμοί 1, 2, 4, 5, 10, 20.
 Οι αριθμοί 11, 13, 17, 19 διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και με τη μονάδα οπότε είναι πρώτοι. Όλοι οι άλλοι είναι σύνθετοι.

10. Το διπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος αριθμός ή σύνθετος και γιατί;

Λύση

Έστω α ο πρώτος αριθμός.
 Τότε ο α θα διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και με τη μονάδα.
 Το διπλάσιο του α είναι το 2α που διαιρείται με τους 1, α, 2,
 οπότε δεν είναι πρώτος και είναι σύνθετος αριθμός.

11. Να βρείτε όλους τους διαιρέτες των παρακάτω αριθμών:

α) 28 β) 82 γ) 95 δ) 105 ε) 124 στ) 345 ζ) 1232 η) 3999

Λύση

- α) Επειδή $28 = 1 \cdot 28 = 2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$, διαιρέτες του 28 είναι οι αριθμοί 1, 28, 2, 14, 4, 7.
- β) Επειδή $82 = 1 \cdot 82 = 2 \cdot 41$, διαιρέτες του 82 είναι οι αριθμοί 1, 82, 2, 41.
- γ) Επειδή $95 = 1 \cdot 95 = 5 \cdot 19$, διαιρέτες του 95 είναι οι αριθμοί 1, 95, 5, 19.
- δ) Επειδή $105 = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$, διαιρέτες του 105 είναι οι αριθμοί 1, 105, 3, 35, 5, 21, 7, 15.
- ε) Επειδή $124 = 1 \cdot 124 = 2 \cdot 62 = 4 \cdot 31$, διαιρέτες του 124 είναι οι αριθμοί 1, 124, 2, 62, 4, 31.
- στ) Επειδή $345 = 1 \cdot 345 = 3 \cdot 115 = 5 \cdot 69 = 15 \cdot 23$, διαιρέτες του 345 είναι οι αριθμοί 1, 345, 5, 69, 15, 23.
- ζ) Επειδή $1232 = 2^4 \cdot 7 \cdot 11$, είναι
 $1232 = 1 \cdot 1232 = 2 \cdot 616 = 4 \cdot 308 = 7 \cdot 176 = 8 \cdot 154 = 11 \cdot 112 = 14 \cdot 88 = 16 \cdot 77 = 22 \cdot 56 = 28 \cdot 44$
 οπότε διαιρέτες του 1232 είναι οι αριθμοί 1, 1232, 2, 616, 4, 308, 7, 176, 8, 154, 11, 112, 14, 88, 16, 77, 22, 56, 28, 44.
- η) Είναι $3.999 = 3 \cdot 31 \cdot 43$, είναι $3.999 = 3 \cdot 1.333 = 31 \cdot 129 = 43 \cdot 93$, οπότε διαιρέτες του 3.999 είναι οι αριθμοί 1, 3.999, 3, 1.333, 31, 129, 43, 93.

12. Να αναλυθούν οι παρακάτω αριθμοί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

α) 78

β) 348

γ) 1.210

δ) 2.344

Λύση

α)
$$\begin{array}{r|l} 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \quad 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

β)
$$\begin{array}{r|l} 348 & 2 \\ 174 & 2 \\ 87 & 3 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array} \quad 348 = 2^2 \cdot 3 \cdot 29$$

γ)
$$\begin{array}{r|l} 1210 & 2 \\ 605 & 5 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad 1.210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$$

δ)
$$\begin{array}{r|l} 2344 & 2 \\ 1172 & 2 \\ 586 & 2 \\ 293 & 293 \\ 1 & \end{array} \quad 2.344 = 2^3 \cdot 293$$

Εξάσκηση

13. Να βρείτε τους κοινούς διαιρέτες και τον ΜΚΔ των αριθμών:
α) 6 και 9 β) 22 και 44
14. Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των αριθμών 36 και 70.
15. Να γράψετε από τους αριθμούς 1245, 108, 715, 1420, 23706, αυτούς που διαιρούνται:
α) με το 2 β) με το 5 γ) με το 3 δ) με το 9.
16. Τοποθετήστε στα κενά τα κατάλληλα ψηφία στους παρακάτω αριθμούς.
α) $21 \square 7$ ώστε να διαιρείται με το 3.
β) $2 \square 3 \square$ ώστε να διαιρείται με το 5 και το 9.
γ) $1 \square 4 \square$ ώστε να διαιρείται με το 2 και το 9.
17. Να βρείτε το ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών:
α) 24 και 36 β) 16 και 40 γ) 9 και 32 δ) 22, 32, 50
18. Να βρείτε το ΕΚΠ των παρακάτω αριθμών:
α) 3 και 10 β) 3, 6, 10 γ) 16, 12 δ) 18, 30
19. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 108 και 420.
20. Ποιο ψηφίο πρέπει να τοποθετηθεί στη θέση του α στον 32α1α, ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να είναι διαιρετός;
α) με το 3 β) με το 9
21. Ένας αριθμός διαιρείται με το 3. Αν αλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του, ο αριθμός που θα προκύψει θα διαιρείται με το 3;
22. Το γινόμενο δύο πρώτων αριθμών είναι πρώτος ή σύνθετος; Δικαιολογείστε την απάντησή σας και δώστε ένα κατάλληλο παράδειγμα.
23. Τρία λεωφορεία με αφετηρία την ίδια πλατεία εκτελούν τη συγκοινωνία σε 3 διαφορετικά σημεία της πόλης. Το πρώτο εκτελεί μία διαδρομή σε 18min, το δεύτερο σε 24min και το τρίτο σε 36min. Αν στις 12 ακριβώς ξεκινήσουν μαζί, ύστερα από πόσο χρόνο θα ξεκινήσουν και πάλι μαζί και πόσες διαδρομές θα έχει κάνει το καθένα στον ενδιάμεσο χρόνο;
24. Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορούμε να σχηματίσουμε από 48 τριαντάφυλλα, 80 γαρύφαλλα και 112 τουλίπες; Πόσα άνθη από κάθε είδος θα περιλαμβάνει κάθε ανθοδέσμη;
25. Ένας βοσκός μετρώντας τα πρόβατά του τα έβρισκε πάντα κάπου ανάμεσα στα 118 και 127. Τα μετρούσε σε οκτάδες, δεκάδες ή δωδεκάδες χωρίς να του περισσεύει κανένα κάθε φορά. Πόσα πρόβατα είχε ο βοσκός;
26. Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι προς διαφορετικές κατευθύνσεις και όταν επιστρέφουν ξαναφεύγουν αμέσως. Το ταξίδι του ενός διαρκεί 4 ημέρες και του άλλου 6 ημέρες. Μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί τα δύο πλοία να αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα;