ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Αθανάσιος Βελέντζας, Ευστράτιος Καπότης,
Αλέξανδρος Π. Κατέρης, Βασίλειος Νούσης, Αργύριος Πάσχος,
Γεώργιος Πολυζώης, Παύλος Γ. Τζαμαλής

Φυσική

Α΄ Λυκείου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Φυσική

Α΄ Λυκείου

Επιστημονική Επιτροπή Αξιολόγησης

Συντονιστής / Αξιολογητής	**Καρακασίδης Θεόδωρος** Εν ενεργεία μέλος Διδακτικού Ερευνητικού Προσωπικού Πανεπιστημίου
Αξιολογητής	**Καράογλου Γεώργιος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Αξιολογητής	**Μαρμαρινός Ανάργυρος** Εν ενεργεία Εκπαιδευτικός
Τεχνικός Εμπειρογνώμονας	**Κολεγά Ευαγγελία** Πτυχιούχος Πληροφορικής
Επικουρικός Εμπειρογνώμονας	**Στάθη Ευθυμία** Διπλωματούχος τεχνολογίας γραφικών τεχνών
Υπεύθυνη του μαθήματος/γνωστικού αντικειμένου στο πλαίσιο της Πράξη	**Ευαγγελία Χρυσοβέργη** Σύμβουλος Β΄ ΙΕΠ, Μέλος της Επιστημονικής Ομάδας Έργου (ΕΟΕ) της Πράξης

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή, Αξιολόγηση και Ένταξη διδακτικών βιβλίων στο Μητρώο Διδακτικών Βιβλίων και στην Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Διδακτικών Βιβλίων» με κωδικό ΟΠΣ 6010165 στο Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή» 2021-2027

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σπυρίδων Δουκάκης

Πρόεδρος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης

Πολυξένη Μπίλλα

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προϊσταμένη Τμήματος Β΄ Προγραμμάτων Σπουδών και Εκπαιδευτικού Υλικού

Αναπληρώτρια Υπεύθυνη Πράξης

Άννα-Αικατερίνη Λυκούρη

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

«Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης»

και το Πρόγραμμα «Ανθρώπινο Δυναμικό και Κοινωνική Συνοχή»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Αθανάσιος Βελέντζας, Ευστράτιος Καπότης,
Αλέξανδρος Π. Κατέρης, Βασίλειος Νούσης, Αργύριος Πάσχος,
Γεώργιος Πολυζώης, Παύλος Γ. Τζαμαλής

Φυσική

Α΄ Λυκείου

ΕΛΛΗΝΟ ΕΚΔΟΤΙΚΗ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Συγγραφική ομάδα:

Αθανάσιος Βελέντζας, Φυσικός, Δρ. ΕΚΠΑ, ΕΔΙΠ – ΕΜΠ

Ευστράτιος Καπότης, Φυσικός, Δρ. ΕΚΠΑ

Αλέξανδρος Π. Κατέρης, Σύμβουλος Εκπαίδευσης, Δρ ΕΚΠΑ

Βασίλειος Νούσης, Φυσικός, Υπ. ΕΚΦΕ Θεσπρωτίας

Αργύριος Πάσχος, Διευθυντής Λυκείου, Δρ. ΕΚΠΑ

Γεώργιος Πολυζώης, Διευθυντής Λυκείου, Δρ. Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Παύλος Γ. Τζαμαλής, ΕΔΙΠ, Εργαστήριο Φυσικής, Τμήμα Βιοτεχνολογίας, ΓΠΑ

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον συνάδελφο Ηλία Σιτσανλή για τη συνεισφορά του στους ιστοτόπους των Ψ.Μ.Α.

Επιμέλεια:

Νίκος Χατζόπουλος

Γιάννης Χριστοδούλου

Εικονογράφηση:

Freepik

Wikimedia

Αρχεία συγγραφέων

Προεκτυπωτικές εργασίες: ΕΛΛΗΝΟ ΕΚΔΟΤΙΚΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Αγαπητές και αγαπητοί εκπαιδευτικοί

Αναγνωρίζουμε το σπουδαίο έργο που επιτελείτε. Εσείς εξασφαλίζετε όχι μόνο τη μάθηση του περιεχομένου, αλλά και την εμπέδωση του ορθολογισμού στους νέους ανθρώπους και μελλοντικούς ενεργούς πολίτες. Ο ρόλος σας είναι κρίσιμος για την ανάπτυξη των δεξιοτήτων και των ικανοτήτων των μαθητριών και των μαθητών και ελπίζουμε ότι αυτό το βιβλίο θα σας βοηθήσει να επιτύχετε τους εκπαιδευτικούς σας στόχους.

Το βιβλίο είναι ευθυγραμμισμένο με τη φυσιογνωμία, τη διδακτική πλαισίωση και τους τρόπους αξιολόγησης του ΠΣ Φυσικής Γενικής Παιδείας.

Υιοθετεί μια πολυτροπική προσέγγιση, ικανή να προσφέρει στην καθηγήτρια και τον καθηγητή της Α΄ Λυκείου μια ποικιλία διδακτικών μέσων, (κείμενα, εικόνες, διαγράμματα, βίντεο, διαδραστικά στοιχεία), που επιτρέπει την αξιοποίηση πολλαπλών εργαλείων για την προσέγγιση των εννοιών της Φυσικής, καθιστώντας τη διδασκαλία πιο ενδιαφέρουσα και προσιτή και τη μάθηση διαφοροποιημένη και ως εκ τούτου πιο αποτελεσματική.

Οι δραστηριότητες και τα παραδείγματα του βιβλίου έχουν σχεδιαστεί έτσι, ώστε να καλλιεργούν την κριτική σκέψη των μαθητριών και των μαθητών και να ενισχύουν την ενεργή συμμετοχή τους στη διαδικασία της μάθησης, ενθαρρύνοντάς τες/τους να διατυπώνουν υποθέσεις, να πειραματίζονται και να αξιολογούν τα αποτελέσματα.

Τέλος, οι εκπαιδευτικοί που θα επιλέξουν να χρησιμοποιήσουν το βιβλίο αυτό μπορούν να είναι βέβαιοι για την ποιότητα και την πρακτική αξία των προτεινόμενων πειραμάτων και των πρακτικών δραστηριοτήτων (ρεαλιστικός πειραματισμός), καθώς έχουν προηγουμένως δοκιμαστεί και χρησιμοποιηθεί σε πραγματικά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα και έχουν αποδειχθεί χρήσιμα και αποτελεσματικά για την κατανόηση της ύλης από τις μαθήτριες και τους μαθητές.

Με εκτίμηση,

Η συγγραφική ομάδα

Αγαπητή μαθήτρια / Αγαπητέ μαθητή

Το βιβλίο αυτό έχει δημιουργηθεί για να σε καθοδηγήσει και να σε υποστηρίξει στην πορεία της μάθησής σου, παρέχοντάς σου τα εργαλεία, τις γνώσεις, αλλά και τη μεθοδολογία που χρειάζεσαι για να επιτύχεις.

Σε αυτό το εκπαιδευτικό ταξίδι θα έχεις την ευκαιρία να εξοικειωθείς με την επιστημονική μεθοδολογία και τον επιστημονικό συλλογισμό και να αναπτύξεις δεξιότητες και ικανότητες τόσο μέσω παραδοσιακών τρόπων όπως η χρήση μολυβιού και χαρτιού όσο και μέσω σύγχρονων τεχνολογιών. Οι δυνατότητες που προσφέρουν τα ψηφιακά εργαλεία είναι απεριόριστες και αυτά που έχουν επιλεγεί για το βιβλίο αυτό στοχεύουν στη συλλογή δεδομένων, τον πειραματισμό, τις εφαρμογές, την επικοινωνία και τη συνεργασία, ενισχύοντας την επιστημονική/εκπαιδευτική διαδικασία μέσω διερεύνησης και δημιουργικής επίλυσης προβλημάτων.

Μέσα από τη μελέτη αυτού του βιβλίου θα καλλιεργήσεις την ορθολογική σκέψη και θα αναπτύξεις την ικανότητα να σκέφτεσαι κριτικά, αντί να αποστηθίζεις απλώς πληροφορίες. Θα μάθεις να εντάσσεις τον πειραματισμό στη μελέτη σου, εξοικειώνοντας τον εαυτό σου με επιστημονικές πρακτικές. Η Φυσική δεν είναι απλώς μια συλλογή θεωριών και εξισώσεων, αλλά ένας τρόπος να κατανοείς τον κόσμο γύρω σου μέσω της πειραματικής διαδικασίας, της επιστημονικής ανάλυσης και του αναστοχασμού.

Θα αναπτύξεις επίσης μια διερευνητική στάση ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό που θα επιλέξεις στις επόμενες τάξεις του Λυκείου, αλλά και τον επιστημονικό κλάδο που θα αποφασίσεις να ακολουθήσεις. Αυτή η στάση δεν περιορίζεται μόνο σε ακαδημαϊκά ερωτήματα, αλλά επεκτείνεται και στην ικανότητα διατύπωσης ευρύτερων ερωτημάτων και αναζήτησης απαντήσεων και λύσεων σε αυτά. Στόχος μας είναι να σε βοηθήσουμε να γίνεις ενεργός μαθητής και αργότερα ένας ενεργός πολίτης που θα αναζητά και θα δημιουργεί γνώσεις.

Η κατανόηση των φαινομένων της φύσης μέσω της Φυσικής και η εφαρμογή του επιστημονικού τρόπου σκέψης θα σου επιτρέψουν να προσεγγίζεις τα προβλήματα της καθημερινότητας με έναν πιο μεθοδικό και ορθολογικό τρόπο, θα σε βοηθήσουν να ανακαλύπτεις και να κατανοείς όχι μόνο τη φύση, αλλά και κάθε πτυχή του κόσμου που σε περιβάλλει, καλλιεργώντας πολύτιμες δεξιότητες και αναπτύσσοντας τις ικανότητές σου.

Το βιβλίο αυτό σου παρέχει επίσης κίνητρα, για να διαφοροποιήσεις τους τρόπους με τους οποίους μαθαίνεις και για να αντιμετωπίσεις τυχόν μαθησιακές δυσκολίες, προλαμβάνοντας έτσι τη σχολική αποτυχία. Κάθε ενότητα και κάθε δραστηριότητα έχουν σχεδιαστεί με στόχο να κάνουν τη μάθηση ενδιαφέρουσα και αποδοτική για εσένα ανεξαρτήτως του επιπέδου ή του ρυθμού μάθησής σου.

Με τη βοήθεια αυτού του βιβλίου ευελπιστούμε να ανακαλύψεις την ομορφιά της Φυσικής και να αναπτύξεις δεξιότητες, ικανότητες και γνώσεις που θα σε συνοδεύουν σε όλη σου τη ζωή.

Σου ευχόμαστε καλή μελέτη και καλή επιτυχία!

Με εκτίμηση,

Η συγγραφική ομάδα

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Βασική μονάδα του βιβλίου είναι η θεματική ενότητα που αποτελείται από επιμέρους παραγράφους. Οι θεματικές ενότητες σχηματίζουν τα θεματικά πεδία.

Κάθε θεματική ενότητα ξεκινά με μια αρχική σελίδα που αναφέρει το θεματικό πεδίο στο οποίο ανήκει, αποτελείται δε από κάποιες φωτογραφίες και ένα εισαγωγικό κείμενο που όλα τους επιχειρούν να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών-τριών. Επίσης, στην αρχική αυτή σελίδα συνοψίζονται και οι επιμέρους παράγραφοι της θεματικής ενότητας, δίνοντας στον/στη μαθητή/-τρια ένα συνοπτικό περίγραμμα.

Χρωματικός κώδικας που χρησιμοποιείται για αναγνώριση του θεματικού πεδίου.

Σχήματα και εικόνες με αρίθμηση που συμπληρώνουν το κείμενο ή χωρίς αρίθμηση για την αισθητική του βιβλίου.

Κωδικός QR με τίτλο μπλε χρώματος που αντιστοιχεί σε επέκταση θεωρίας ή σε πρόσθετες πληροφορίες.

Κωδικός QR με τίτλο μαύρου χρώματος που αντιστοιχεί σε δραστηριότητα (προσομοίωση ή πείραμα).

Κυρίως κείμενο όπου οι όροι επισημαίνονται με διαφορετικό χρώμα και οι σχέσεις αριθμούνται.

ΘΕΜΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΔΥΝΑΜΗ

2. Νόμος του Hooke – Μέτρηση δυνάμεων

Τα ελατήρια που χρησιμοποιούμε για να κατασκευάσουμε αναπαυτικά καθίσματα συσπειρώνονται, όταν δέχονται μια δύναμη κατάλληλης φοράς. Όταν αυτή η δύναμη μηδενιστεί, το ελατήριο επανέρχεται στο αρχικό του σχήμα. Ονομάζουμε την ιδιότητα αυτήν ελαστικότητα.

Η συσπείρωση ενός ελατηρίου εξαρτάται από το μέτρο της εφαρμοζόμενης δύναμης, αλλά και από το πόσο σκληρό είναι το ελατήριο. Έτσι, μια δύναμη μικρού μέτρου (απλούστερα: μια μικρή δύναμη) θα προκαλέσει μικρότερη παραμόρφωση σε συγκεκριμένο ελατήριο από αυτήν μιας μεγάλης δύναμης. Αναφερόμαστε γενικότερα σε παραμόρφωση και όχι ειδικά σε συσπείρωση, αφού μια δύναμη κατάλληλης φοράς μπορεί να επιμηκύνει ένα ελατήριο.

Το 1678, ο Άγγλος φυσικός Robert Hooke μελετώντας την ελαστικότητα των ελατηρίων διατύπωσε την πρόταση: «όπως η επιμήκυνση έτσι και η δύναμη». Είναι μια πρόταση που συνδέει τη δύναμη που ασκείται σε ένα ελατήριο με τη μεταβολή μήκους που του προκαλεί· ωστόσο, τι σημαίνει ακριβώς;

Η διατύπωση του Hooke με σημερινή ορολογία ισοδυναμεί με το συμπέρασμα ότι η παραμόρφωση x ενός ελατηρίου είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης δύναμης F. Ο συντελεστής αναλογίας συνήθως συμβολίζεται με k. Σε μαθηματικό συμβολισμό εκφράζουμε την αναλογία αυτήν ως εξής:

$$F = k \cdot x \qquad (1.1)$$

Από τη **σχέση 1.1** προκύπτει ότι η μονάδα της σταθεράς k στο SI είναι το 1 N/m.

Λύνοντάς την ως προς x έχουμε:

$$x = \frac{F}{k}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ασκώντας δυνάμεις ίσων μέτρων σε δύο διαφορετικά ελατήρια, η παραμόρφωση θα είναι μικρότερη σε εκείνο που έχει k μεγαλύτερης τιμής. Με το σκεπτικό αυτό, η k ονομάζεται σταθερά δυσκαμψίας. Εφαρμόζοντας αντίστροφη λογική, μεγαλύτερη παραμόρφωση θα υποστεί το ελατήριο με τη μικρότερη σταθερά k. Συνεπώς, είναι εξίσου σωστή και η εναλλακτική ονομασία της k ως σταθερά ελαστικότητας.

Η γραφική παράσταση της **σχέσης 1.1** δίνεται στο **σχήμα 1.1** (τμήμα ΟΑ).

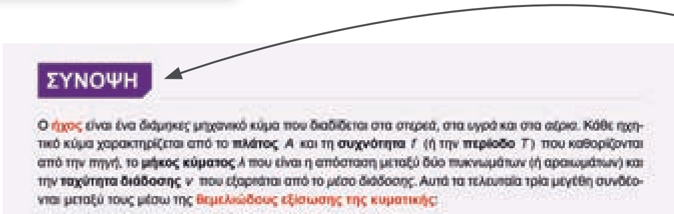
Εκμεταλλευόμενοι την αναλογία δύναμης και ελαστικής παραμόρφωσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ελατήριο για τη μέτρηση δυνάμεων. Κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση γνωστών δυνάμεων με την επιμήκυνση που προκαλούν. Έτσι, όταν ασκήσουμε μια άγνωστη δύναμη στο ελατήριο, θα μετρήσουμε την

Εικόνα 1.3 Οι πολυθρόνες, οι καναπέδες, τα στρώματα των κρεβατιών έχουν στο εσωτερικό τους ελατήρια, τα οποία συσπειρώνονται υπό την επίδραση μιας δύναμης που τα παραμορφώνει, καθιστώντας έτσι τις επιφάνειες των επίπλων καταλληλότερες για ξεκούραση, αφού το σώμα μας, όταν έρχεται σε (μακροσκοπική) επαφή με μια επιφάνεια, παραμορφώνεται. Γι' αυτό, αν καθίσουμε για αρκετή ώρα σε ένα ξύλινο παγκάκι, θα νιώσουμε μια δυσάρεστη αίσθηση μουδιάσματος ή ακόμη και πόνο. Αντίθετα, ένα μαλακό κάθισμα προσαρμόζεται στην επιφάνεια του σώματός μας, οπότε μας ξεκουράζει καλύτερα.

Πείραμα

Γραφικές παραστάσεις στα πειράματα της Φυσικής

Προσδιορισμός της μάζας βαριδίου με εφαρμογή του νόμου του Hooke



ΣΥΝΟΨΗ

Ο ήχος είναι ένα διάμηκες μηχανικό κύμα που διαδίδεται στα στερεά, στα υγρά και στα αέρια. Κάθε ηχητικό κύμα χαρακτηρίζεται από το **πλάτος** A και τη **συχνότητα** f (ή την **περίοδο** T) που καθορίζονται από την πηγή, το **μήκος κύματος** λ που είναι η απόσταση μεταξύ δύο πυκνωμάτων (ή αραιωμάτων) και την **ταχύτητα διάδοσης** v που εξαρτάται από το μέσο διάδοσης. Αυτά τα τελευταία τρία μεγέθη συνδέονται μεταξύ τους μέσω της θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής:

$$v = \lambda f$$

Στο τέλος κάθε θεματικής ενότητας υπάρχει σύνοψη που λειτουργεί επιπλέον ως τυπολόγιο, αλλά και ως λεξιλόγιο των νέων όρων.

Τα λυμένα παραδείγματα είναι συγκεντρωμένα (κατά το πλείστον) στο τέλος κάθε παραγράφου της θεματικής ενότητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.5

1. Έστω ότι σε μια ζυγαριά έχουμε ζυγίσει ένα σώμα, οπότε οι βραχίονές της είναι οριζόντιοι. Ασκούμε πρόσθετη ροπή στη ζυγαριά φέρνοντας τον βραχίονά της σε τέτοια θέση, ώστε να σχηματίζει τυχαία γωνία $\varphi \neq 0$ με την οριζόντια διεύθυνση και τον ακινητοποιούμε στη θέση αυτή. Μετά τον αφήνουμε ελεύθερο.

Ο βραχίονας:

A) θα επανέλθει στην οριζόντια διεύθυνση.

B) θα παραμείνει στη θέση που τον εκτρέψαμε.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Η παρέμβαση στη ζυγαριά δεν προκαλεί αλλαγή στο σώμα και στα σταθμά. Όπως φαίνεται από το σχήμα, μετά την εκτροπή της ζυγαριάς από την οριζόντια διεύθυνση, η ροπή κάθε βάρους θα ισούται με $wd\sigma\upsilon\nu\varphi$. Δηλαδή, οι ροπές θα αλληλοεξουδετερώνονται και πάλι, άρα ο βραχίονας θα παραμείνει στη θέση που τον εκτρέψαμε.

2. Έστω ότι χρησιμοποιούμε μια ζυγαριά ισορροπίας τοποθετώντας τα σταθμά στο δεξιό τάσι και το προς ζύγιση σώμα στο αριστερό. Η ζυγαριά συνοδεύεται από τρία σταθμά με μάζες: 1 g, 2 g, 5 g αντίστοιχα. Να περιγράψετε τη διαδικασία ζύγισης οποιασδήποτε ακέραιας μάζας στο διάστημα [1 g, 8 g].

Λύση

Οι περισσότερες περιπτώσεις είναι απλές, αφού είναι εύκολο να σκεφτούμε ότι θα συνδυάσουμε τα σταθμά προσθετικά. Όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα, η περίπτωση των 4 g απαιτεί αφαιρετικό συνδυασμό των σταθμών.

Προτάσεις για τη διερευνητική διδασκαλία συγκεκριμένων παραγράφων θεματικών ενοτήτων.

1ο ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

1.4 Το πρότυπο του άκαμπτου σώματος υπό την επίδραση δυνάμεων

Στο μάθημα της Φυσικής υιοθετούμε επιστημονικές πρακτικές και συναφείς με αυτές δεξιότητες (καταγραφή παρατηρήσεων, αναζήτηση και αξιολόγηση διάφορων πηγών πληροφόρησης, λήψη μετρήσεων, εξαγωγή και παρουσίαση της πληροφορίας μέσω διάφορων αναπαραστάσεων, αξιολόγηση και επαναδιατύπωση επιστημονικών ευρημάτων), τις οποίες ταξινομούμε σε ένα τριμερές σχήμα. Το σχήμα αυτό περιλαμβάνει:

α. την προετοιμασία της πρακτικής, γι' αυτό χαρακτηρίζεται ως στρατηγική,

β. την υλοποίησή της στο εργαστήριο ή την τάξη και

γ. την παρουσίασή της και τον αναστοχασμό σχετικά με αυτήν.

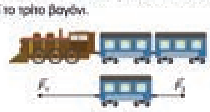
Στο τμήμα αυτό του βιβλίου:

I. Θα εργαστείτε με την επιστημονική/εκπαιδευτική μέθοδο της διερεύνησης, η οποία έχει προτυποποιηθεί για διδακτικούς λόγους σε πέντε βήματα, που, όμως, περιέχουν πλήθος δυνατοτήτων και μπορείτε να τα αξιοποιήσετε σύμφωνα με τις ανάγκες και τις επιλογές σας.

Σε κάθε επιμέρους παράγραφο της θεματικής ενότητας υπάρχει σειρά από Ερωτήσεις και Ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας στο τμήμα της Αξιολόγησης – Αποτίμησης.

Ασκήσεις

1. Για να κινηθεί με επιθυμητό τρόπο το δεύτερο βαγόνι του τρένου του σχήματος, χρειάζεται να δεχθεί συνισταμένη δύναμη μέτρου $1{,}8\cdot10^{5}$ N προς την κατεύθυνση της κίνησης του τρένου, δηλαδή προς τα εμπρός. Αν από τη μηχανή ασκείται στο δεύτερο βαγόνι δύναμη μέτρου $F_1 = 3{,}7\cdot10^{5}$ N, να υπολογίσετε το μέτρο F_2 της δύναμης που του ασκεί το τρίτο βαγόνι.



2. Δύο δυνάμεις, F_1 και F_2, δρουν σε ένα κιβώτιο σχηματίζοντας ορθή γωνία μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η συνισταμένη των δυνάμεων έχει μέτρο 41 N.

...νολική δύναμη μέτρου $F = 97{,}0$ N. Αν τα σκοινιά είναι μεταξύ τους κάθετα και το ΟΚ σχηματίζει γωνία 30° με τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$, να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί κάθε σκοινί στο κουτί.

Οι απαντήσεις να δοθούν με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.

5. Δίνεται ότι η συνισταμένη των τριών δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα είναι κατακόρυφη.

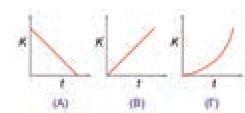
α) Να προσδιορίσετε τη συνιστώσα της δύναμης με μέτρο 200 N στον x-άξονα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Μια σφαίρα μάζας m επαρκώς μικρών διαστάσεων, ώστε να θεωρείται σημειακή, κρέμεται από την οροφή ανελκυστήρα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να γράψετε την εξίσωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας της σφαίρας (χρησιμοποιώντας την m, στοιχεία από το σχήμα και την επιτάχυνση της βαρύτητας g) της σφαίρας, αν το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας βρίσκεται:

α) Σε οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη σφαίρα



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Ένα παιδί εκτοξεύει με τη σφεντόνα του μια πέτρα κατακόρυφα προς τα πάνω, η οποία επιστρέφει στο έδαφος, συγκρούεται με αυτό και ακινητοποιείται. Να αναφέρετε τις ενεργειακές μετατροπές που συμβαίνουν από τη στιγμή που το παιδί αρχίζει να τεντώνει τη σφεντόνα ως τη στιγμή που η πέτρα ακινητοποιείται στο έδαφος.

Πριν από τα επαναληπτικά προβλήματα της θεματικής ενότητας υπάρχει μια όσο το δυνατόν ευρύτερη Στρατηγική Επίλυσης Προβλημάτων, που η μελέτη της μπορεί να βοηθήσει τους/τις μαθητές/-ήτριες να αντιμετωπίζουν τις ασκήσεις και τα προβλήματα με έναν συστηματικό τρόπο.

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΠΕ2)

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1. Μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων ισορροπίας

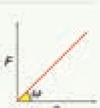
Στα προβλήματα ισορροπίας που θα αντιμετωπίσουμε στην ενότητα αυτήν, μπορούμε να διακρίνουμε ορισμένα βασικά βήματα που καλό είναι να ακολουθούμε κατά την επίλυση. Τα βήματα αυτά είναι τα εξής:

I) Κάνουμε ένα πρόχειρο σχήμα για το φαινόμενο που περιγράφεται στο πρόβλημα, στο οποίο μπορούμε να εισαγάγουμε και τις απαραίτητες απλοποιήσεις, όπως για παράδειγμα ότι τα σώματα είναι υλικά σημεία.

II) Επιλέγουμε το σώμα με το οποίο θα ασχοληθούμε και το οποίο ισορροπεί.

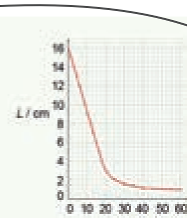
Προβλήματα

1. Ο γνωστός Νόμος του Hooke για το μέτρο F μιας δύναμης που εφαρμόζεται σε ένα δυναμόμετρο και για την επιμήκυνση x του ελατηρίου του δυναμομέτρου αναπαρίσταται στο διπλανό διάγραμμα.



Η Αγγελική παρατηρώντας το διάγραμμα αναφέρει ότι: «Με βάση τον Νόμο του Hooke, η σταθερά του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση k = εφω».

Με βάση το παραπάνω συμπέρασμα, μια άλλη μαθήτρια, παρατηρώντας τις πειραματικές ευθείες των δύο επόμενων διαγραμμάτων, διατυπώνει



α) Για ποιο εύρος τιμών του μήκους του ελατηρίου μπορεί να περιγραφεί η συμπεριφορά του από τον Νόμο του Hooke; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

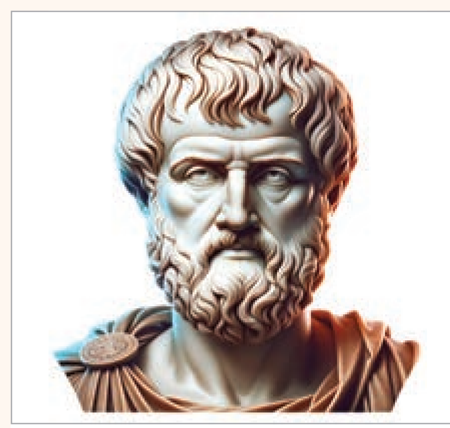
Στο τέλος της θεματικής ενότητας υπάρχουν Προβλήματα που αναφέρονται σε όλη την ύλη, ενώ είναι πιθανόν να απαιτούν και γνώσεις από προηγούμενα θεματικά πεδία.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 0

Επιστήμη της Φυσικής – Επιστημονικές πρακτικές

Οι έννοιες του χώρου, του χρόνου και της ύλης, οι οποίες για αιώνες αποτέλεσαν και αποτελούν αντικείμενο φιλοσοφικής αναζήτησης κορυφαίων φιλοσόφων, χρησιμοποιήθηκαν και χρησιμοποιούνται με συνεπή τρόπο από την επιστήμη της Φυσικής. Ο συνεπής και συστηματικός τρόπος της Φυσικής διαφέρει από τον αξιωματικό τρόπο των Μαθηματικών, γιατί οι θεωρίες που παράγει υπόκεινται σε πειραματική επαλήθευση και παραμένουν αξιόπιστες ή αλλάζουν (ολικά ή μερικά).

Ο κύριος στόχος της Φυσικής επιστήμης, ο οποίος εξυπηρετείται με πολύ μεγάλη επιτυχία με την παρατήρηση των φυσικών φαινομένων –όπως το μπλε του ουρανού– και με την αναζήτηση μοτίβων και αρχών για την εξήγηση αυτών των φαινομένων, είναι η ενοποίηση των θεωριών για το σύμπαν. Η *συστημική* αυτή προσέγγιση της Φυσικής επιστήμης θεωρεί πολλαπλά δομικά μέρη (υποσυστήματα) τα οποία, αν και είναι δυνατόν να μελετηθούν αυτόνομα, δεν παραβλέπεται ότι αλληλεπιδρούν και μεταξύ τους. Το δίκτυο αυτό των υποσυστημάτων/δομικών μερών αλληλεπιδρά με το εκάστοτε οριζόμενο «περιβάλλον» του, παράγοντας υψηλότερης περιεκτικότητας υποσυστήματα. Παρ' όλη την πολυπλοκότητα των περιγραφών, των ιδεών και των θεωριών, οι μέθοδοι που προτείνει η Φυσική επιστήμη για να οικειοποιηθούμε τους νόμους της φύσης και τη «λειτουργία» τους δεν είναι αυθαίρετες, αλλά στηρίζονται σταθερά σε επιστημονικές πρακτικές (όπως τα πειράματα, τα μοντέλα και οι μετρήσεις).



Εικόνα 1 Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.)

Εικόνα 2 Albert Einstein (1879-1955)

Στον αντίποδα της μεγάλης συστημικής εικόνας πρέπει να τονιστεί ότι η Φυσική επιστήμη είναι *μια ανθρώπινη προσπάθεια*. Τα περιεχόμενα της Φυσικής επιστήμης δεν βρέθηκαν κάπου στο σύμπαν ούτε μεταφέρθηκαν από εξωγήινους, αλλά ανακαλύφθηκαν και ερευνήθηκαν από πραγματικούς ανθρώπους, τους επιστήμονες, που ασχολούνται με έναν εργώδη τρόπο με τα συμβαίνοντα στη φύση.

Φυσικά μεγέθη – Διεθνές σύστημα μονάδων

Η αναφορά στις έννοιες του χώρου, του χρόνου και της ύλης στην αρχή της ενότητας κάθε άλλο παρά τυχαία είναι. Έγινε για να δείξει την ανάγκη κάθε επιστήμης να στηριχτεί σε κάποια πρωταρχικά μεγέθη και με τη βοήθειά τους να ορίσει άλλα παράγωγα.

Στη Φυσική τα χρησιμοποιούμενα μεγέθη ονομάζονται **φυσικά μεγέθη** και τα πρωταρχικά μεγέθη ονομάζονται **θεμελιώδη φυσικά μεγέθη**.

Θεμελιώδη φυσικά μεγέθη που θα συζητηθούν στην ύλη της Α΄ Λυκείου είναι τα εξής:

μήκος, μάζα και χρόνος

Παράγωγα φυσικά μεγέθη είναι εκείνα τα οποία ορίζονται με τη βοήθεια των θεμελιωδών φυσικών μεγεθών μέσω μαθηματικών σχέσεων που διατυπώνουν συγκεκριμένους νόμους ή ορισμούς της Φυσικής. Ο ορισμός τους περιέχει και τον μηχανισμό του πειραματικού υπολογισμού τους.

Παραδείγματα φυσικών μεγεθών που θα εξετάσουμε είναι:

χρόνος, μάζα, ταχύτητα, απόσταση, δύναμη

Κάθε φυσικό μέγεθος έχει το δικό του σύμβολο

Για τα παραπάνω φυσικά μεγέθη τα σύμβολα είναι:

t, m, v, s ή d, F

Κάθε φυσικό μέγεθος μετράται στις δικές του μονάδες

Για τα παραπάνω φυσικά μεγέθη οι μονάδες αντίστοιχα είναι:

δευτερόλεπτο (s), χιλιόγραμμο (kg),
μέτρο ανά δευτερόλεπτο (m/s), μέτρο (m), νιούτον (N)

ή

ώρα (h), λίβρα (lb), μίλι ανά ώρα ή μαω (mph),
πόδι (ft), πάουντ (lbf)

ή

έτος (y), γραμμάριο (g), χιλιόμετρο ανά ώρα (km/h),
εκατοστό (cm), κιλονιούτον (kN)

- Εξισώσεις διαστάσεων
- Διανύσματα
- Κλίση και Εμβαδόν σε διαγράμματα
- Πειράματα στο σχολικό εργαστήριο

Πώς επιλέγουμε ποια μονάδα να χρησιμοποιήσουμε;

Το Διεθνές Γραφείο Μέτρων και Σταθμών, για τη μέτρηση των φυσικών μεγεθών έχει οργανώσει το **Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI** – Système International d' unités). Τα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη στο SI έχουν τις εξής μονάδες:

- Μήκος: 1 μέτρο → 1 m
- Μάζα: 1 χιλιόγραμμο → 1 kg
- Χρόνος: 1 δευτερόλεπτο → 1 s

Για να μετρήσουμε την απόσταση Αθήνα-Θεσσαλονίκη, δεν εξυπηρετεί να χρησιμοποιήσουμε ως μονάδα το 1 m, αλλά το 1 km που είναι πολλαπλάσιο του μέτρου. Επίσης, για να μετρήσουμε το πάχος ενός σχολικού βιβλίου, χρησιμοποιούμε το 1 mm που είναι μια υποδιαίρεση ή υποπολλαπλάσιο του 1 m. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπροστά από τις μονάδες του SI τοποθετούμε σύμβολα («προθέματα») όπως k, m, p κ.λπ.

Πολλαπλάσια και υποδιαιρέσεις (SI)

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
deca	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1

Δύναμη

Η δύναμη είναι το φυσικό μέγεθος που έχει κυριαρχικό ρόλο στις μεταβολές που παρατηρούμε στο περιβάλλον μας, αλλά και σε όσες δεν μπορούμε να αντιληφθούμε ή να συνειδητοποιήσουμε, διότι συμβαίνουν σε πολύ μικρή ή υπερβολικά μεγάλη κλίμακα στον χώρο με πολύ αργό ρυθμό ή ραγδαία στον χρόνο.

Για παράδειγμα, στη διάρκεια μιας μετακόμισης οι άνθρωποι ασκούν δυνάμεις στα έπιπλα και στα υπόλοιπα αντικείμενα του νοικοκυριού, για να τα μετακινήσουν και να τα φορτώσουν στο όχημα του μεταφορέα. Σε όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς τους η καρδιά τους ασκεί δυνάμεις, ώστε το αίμα να κινηθεί ταχύτερα, προκειμένου να ανταποκριθούν τα σώματά τους στην επίπονη προσπάθεια που απαιτείται. Μετά την ολοκλήρωση της φόρτωσης, για να ξεκινήσει το παρκαρισμένο όχημα, χρειάζεται να ασκηθεί σε αυτό κάποια δύναμη. Ο οδηγός και οι συνεπιβάτες ανοίγουν τα παράθυρα για να δροσιστούν και δέχονται δυνάμεις που τους ανακατεύουν τα μαλλιά. Μέχρι να φτάσουν στον προορισμό τους, συζητούν, οπότε ο θώρακάς τους ασκεί δύναμη στον αέρα των πνευμόνων τους, για να ξεκινήσει η παραγωγή της φωνής τους, η οποία θα ασκήσει δυνάμεις στα τύμπανα των αυτιών των συνομιλητών τους.

1.1 Η έννοια της δύναμης

1. Παραδείγματα δυνάμεων

Παρατηρήστε την **εικόνα 1.1**. Είναι δύσκολο να φανταστούμε ότι ο κατασκευαστής της βιβλιοθήκης έφτιαξε ένα στραβό ξύλινο ράφι. Ποια είναι η αιτία της αλλαγής του σχήματος, της μεταβολής της μορφής, δηλαδή της παραμόρφωσης του ραφιού;

Εικόνα 1.1 Βιβλία στο ράφι

Η εμπειρία μάς καθοδηγεί να σκεφτούμε ότι την έννοια της δύναμης τη χρησιμοποιούμε επίσης, για να αναφερθούμε σε μια ενότητα φαινομένων όπως αυτά που αναφέρονται στις εκφράσεις: «Πέτρα εκτοξεύεται προς τα πάνω…», «Αυτοκίνητο που ηρεμεί αρχίζει να επιταχύνεται…», «Αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα 10 m/s αρχίζει να επιβραδύνεται…». Φυσικά, εύκολα φανταζόμαστε ότι κάποιος πέταξε την πέτρα προς τα πάνω, η μηχανή επιταχύνει το αυτοκίνητο, η τριβή ανάμεσα στα λάστιχα και το έδαφος το επιβραδύνει και η προηγούμενη γνώση μάς επιτρέπει να δηλώσουμε σε όλες αυτές τις περιπτώσεις ότι στο σώμα ασκήθηκε μια δύναμη· προφανώς, από κάποιο άλλο σώμα.

Με βάση αυτά και άλλα παραδείγματα, που μπορείτε να σκεφτείτε από την καθημερινότητά σας, προκύπτει ότι:

Δύναμη είναι η αιτία:
- **i)** της μεταβολής της κινητικής κατάστασης ενός σώματος ή/και
- **ii)** της παραμόρφωσης ενός σώματος.

Κινητική κατάσταση

Στη συνέχεια, θα επιχειρήσουμε να διευκρινίσουμε και να συστηματοποιήσουμε κατά τρόπο επιστημονικό την περιγραφή του φυσικού μεγέθους που ορίζεται ως δύναμη.

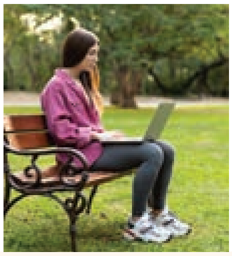
Κάθε φυσικό μέγεθος υπόκειται σε ποσοτική περιγραφή, συνεπώς πρέπει να είναι δυνατόν να μετρηθεί. Η μονάδα μέτρησης της δύναμης στο SI είναι το 1 N (newton). Το 1 N είναι παράγωγη μονάδα και η μεθοδολογία που περιγράφει την εισαγωγή και τον ορισμό του θα δοθεί σε επόμενη ενότητα.

Εικόνα 1.2 Για παράδειγμα, ας φανταστούμε έναν εργάτη που σπρώχνει (ωθεί) ή τραβά (έλκει) ένα κιβώτιο που βρίσκεται στο έδαφος. Στην περίπτωση αυτήν, εντολέας είναι ο άνθρωπος που ασκεί τη δύναμη και αποδέκτης είναι το κιβώτιο στο οποίο ασκείται η δύναμη.

Αν προσέξουμε τις προηγούμενες περιγραφές, θα παρατηρήσουμε ότι έχουμε διακρίνει τα σώματα σε δύο κατηγορίες: σ' αυτά που ασκείται η δύναμη και σ' αυτά που ασκούν τη δύναμη. Θα λέμε λοιπόν ότι μία δύναμη ασκείται (πηγάζει) πάντοτε από έναν *εντολέα προς έναν αποδέκτη* (**Εικόνα 1.2**).

Μεθοδολογικά, θα μπορούμε να προσδιορίζουμε τον εντολέα και τον αποδέκτη απλώς με την απάντηση στα ερωτήματα: «Από ποιον ασκείται η δύναμη;» και «Σε ποιον ασκείται η δύναμη;» αντίστοιχα.

2. Νόμος του Hooke – Μέτρηση δυνάμεων



Εικόνα 1.3 Οι πολυθρόνες, οι καναπέδες, τα στρώματα των κρεβατιών έχουν στο εσωτερικό τους ελατήρια, τα οποία συσπειρώνονται υπό την επίδραση μιας δύναμης που τα παραμορφώνει, καθιστώντας έτσι τις επιφάνειες των επίπλων καταλληλότερες για ξεκούραση, αφού το σώμα μας, όταν έρχεται σε (μακροσκοπική) επαφή με μια επιφάνεια, παραμορφώνεται. Γι' αυτό, αν καθίσουμε για αρκετή ώρα σε ένα ξύλινο παγκάκι, θα νιώσουμε μια δυσάρεστη αίσθηση μουδιάσματος ή ακόμη και πόνο. Αντίθετα, ένα μαλακό κάθισμα προσαρμόζεται στην επιφάνεια του σώματός μας, οπότε μας ξεκουράζει καλύτερα.

Πείραμα

Γραφικές παραστάσεις στα πειράματα της Φυσικής

Προσδιορισμός της μάζας βαριδίου με εφαρμογή του νόμου του Hooke

Τα ελατήρια που χρησιμοποιούμε για να κατασκευάσουμε αναπαυτικά καθίσματα συσπειρώνονται, όταν δέχονται μια δύναμη κατάλληλης φοράς. Όταν αυτή η δύναμη μηδενιστεί, το ελατήριο επανέρχεται στο αρχικό του σχήμα. Ονομάζουμε την ιδιότητα αυτήν **ελαστικότητα**.

Η συσπείρωση ενός ελατηρίου εξαρτάται από το μέτρο της εφαρμοζόμενης δύναμης, αλλά και από το πόσο σκληρό είναι το ελατήριο. Έτσι, μια δύναμη μικρού μέτρου (απλούστερα: μια μικρή δύναμη) θα προκαλέσει μικρότερη *παραμόρφωση* σε συγκεκριμένο ελατήριο από αυτήν μιας μεγάλης δύναμης. Αναφερόμαστε γενικότερα σε παραμόρφωση και όχι ειδικά σε συσπείρωση, αφού μια δύναμη κατάλληλης φοράς μπορεί να επιμηκύνει ένα ελατήριο.

Το 1678, ο Άγγλος φυσικός Robert Hooke μελετώντας την ελαστικότητα των ελατηρίων διατύπωσε την πρόταση: «όπως η επιμήκυνση έτσι και η δύναμη». Είναι μια πρόταση που συνδέει τη δύναμη που ασκείται σε ένα ελατήριο με τη *μεταβολή μήκους* που του προκαλεί· ωστόσο, τι σημαίνει ακριβώς;

Η διατύπωση του Hooke με σημερινή ορολογία ισοδυναμεί με το συμπέρασμα ότι η *παραμόρφωση* x ενός ελατηρίου είναι *ανάλογη* της *εφαρμοζόμενης δύναμης* F. Ο συντελεστής αναλογίας συνήθως συμβολίζεται με k. Σε μαθηματικό συμβολισμό εκφράζουμε την αναλογία αυτήν ως εξής:

$$F = k \cdot x \qquad \textbf{(1.1)}$$

Από τη **σχέση 1.1** προκύπτει ότι η μονάδα της σταθεράς k στο SI είναι το 1 N/m.

Λύνοντας την ως προς x έχουμε:

$$x = \frac{F}{k}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ασκώντας δυνάμεις ίσων μέτρων σε δύο διαφορετικά ελατήρια, η παραμόρφωση θα είναι μικρότερη σε εκείνο που έχει k μεγαλύτερης τιμής. Με το σκεπτικό αυτό, η k ονομάζεται **σταθερά δυσκαμψίας**. Εφαρμόζοντας αντίστροφη λογική, μεγαλύτερη παραμόρφωση θα υποστεί το ελατήριο με τη μικρότερη σταθερά k. Συνεπώς, είναι εξίσου σωστή και η εναλλακτική ονομασία της k ως **σταθερά ελαστικότητας** ή απλά **σταθερά ελατηρίου**.

Η γραφική παράσταση της **σχέσης 1.1** δίνεται στο **σχήμα 1.1** (τμήμα ΟΑ).

Εκμεταλλευόμενοι την αναλογία δύναμης και ελαστικής παραμόρφωσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ελατήριο για τη μέτρηση δυνάμεων. Κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση γνωστών δυνάμεων με την επιμήκυνση που προκαλούν. Έτσι, όταν ασκήσουμε μια άγνωστη δύναμη στο ελατήριο, θα μετρήσουμε την επιμήκυνσή του ΔL και από τη γραφική παράσταση (ή μέσω της σταθεράς του ελατηρίου) θα βρούμε τη δύναμη σε N.

3. Ο διανυσματικός χαρακτήρας της δύναμης

Σε αυτήν την εισαγωγική φάση της μελέτης μας για τη δύναμη, αξιοποιούμε την καθημερινότητα και περιγράφουμε γνωστές δυνάμεις (**Σχήμα 1.2**) με τα ονόματα: βάρος, κάθετη δύναμη στην επιφάνεια επαφής (δύναμη στήριξης), τριβή, άνωση· τις σχεδιάζουμε με ένα βέλος και χρησιμοποιούμε τα σύμβολα: w, N, T, A αντίστοιχα.

Για να ολοκληρώσουμε την πρώτη μας προσέγγιση για τη δύναμη, αρκεί να φανταστούμε τις διαφορετικές κατευθύνσεις που θα κινηθεί η μπάλα του **σχήματος 1.2**, όταν την κλοτσήσουμε με διαφορετικούς τρόπους. Έτσι, αντιλαμβανόμαστε ακόμη καλύτερα τον λόγο για τον οποίο στην αναπαράσταση/σχεδιασμό των δυνάμεων αξιοποιούμε βέλη.

Τηλεόραση σε έπιπλο. Βάρος $\vec{w}$ και κάθετη δύναμη από την επιφάνεια επαφής $\vec{N}$.	Τριβή $\vec{T}$ σε μπάλα που κυλάει στο έδαφος.	Άνωση $\vec{A}$ σε κολυμβητή.

Σχήμα 1.2 Γνωστές δυνάμεις και ο συμβολισμός τους

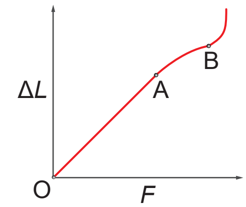
Τα βέλη που αξιοποιήσαμε στα παραπάνω παραδείγματα για να σχεδιάσουμε τις δυνάμεις αντιπροσωπεύουν τη γνωστή μαθηματική έννοια που ονομάζεται **διάνυσμα**. Αυτός είναι ένας συνοπτικός τρόπος, για να απεικονίζουμε όλες τις πληροφορίες που σχετίζονται με μια δύναμη.

Ο διανυσματικός χαρακτήρας της δύναμης συμβολίζεται με την αναπαράσταση των διανυσμάτων ως εξής: $\vec{F}$.

4. Ο 3ος Νόμος του Νεύτωνα (Νόμος Δράσης-Αντίδρασης)

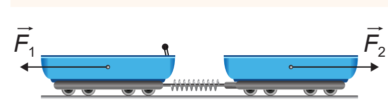
Ένα αμαξίδιο φέρει έμβολο συνδεδεμένο με συμπιεσμένο ελατήριο και είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο τραπέζι. Φέρνουμε ένα δεύτερο αμαξίδιο σε επαφή με το πρώτο (**Σχήμα 1.3**). Αν ελευθερώσουμε απότομα το συμπιεσμένο ελατήριο, τα δύο αμαξίδια κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Πειράματα όπως το παραπάνω οδηγούν στην *υπόθεση* ότι κατά την αλληλεπίδραση δύο σωμάτων αναπτύσσονται δύο δυνάμεις με



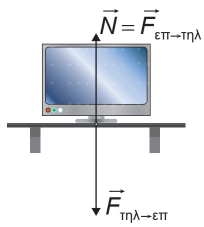
Σχήμα 1.1 Αν τεντώσουμε πολύ ένα ελατήριο, υπάρχει το ενδεχόμενο να μην επανέλθει στο φυσικό του μήκος ή αν η επιμήκυνση είναι πολύ μεγάλη, να διατηρήσει το μήκος που απέκτησε. Η παραμόρφωση δεν είναι πλέον ελαστική, αλλά έχει μετατραπεί σε *πλαστική* ή *μόνιμη παραμόρφωση*. Υπάρχει λοιπόν ένα όριο ελαστικότητας. **Όριο ελαστικότητας** είναι η μέγιστη τιμή μιας δύναμης που μπορεί να ασκηθεί σε ένα ελατήριο προκαλώντας του ελαστική παραμόρφωση. Αν η τιμή της δύναμης υπερβεί αυτήν την τιμή, τότε η ελαστική παραμόρφωση μετατρέπεται σε πλαστική ή μόνιμη.

Η συμπεριφορά αυτή, αν και περιγράφηκε στο ελατήριο, απαντάται σε πολύ μεγαλύτερη περιοχή φαινομένων. Για παράδειγμα, όταν αναπηδά η μπάλα του μπάσκετ στο πάτωμα, παραμορφώνεται ελαστικά και η μπάλα και το πάτωμα, (στην μπάλα η παραμόρφωση είναι ορατή, αλλά στο πάτωμα, χρειάζεται ειδικός εξοπλισμός για να μετρηθεί), δηλαδή μόλις πάψει η επαφή και τα δύο σώματα θα επανέλθουν στην αρχική τους μορφή. Αντίθετα, αν χτυπήσετε το πάτωμα με ένα σφυρί, το πάτωμα θα παραμορφωθεί μόνιμα, ενώ το μέταλλο του σφυριού θα υποστεί μάλλον ελαστική παραμόρφωση.



Σχήμα 1.3 Δυνάμεις στον διαχωρισμό ενός συστήματος αμαξιδίων

αντίθετες φορές, μία σε κάθε σώμα. Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα μέτρα αυτών των δυνάμεων;



Σχήμα 1.4 Νόμος Δράσης-Αντίδρασης

Από τα δύο σώματα (τηλεόραση, έπιπλο) του **σχήματος 1.4** που βρίσκονται σε επαφή, το έπιπλο ασκεί μια δύναμη $\vec{N}$ στην τηλεόραση, ενώ δέχεται ταυτόχρονα μια δύναμη *ίση κατά μέτρο, αλλά αντίθετης κατεύθυνσης* από αυτήν. Το συμπέρασμα αυτό διατυπώνεται καθολικά στη φράση: «οι δυνάμεις στο σύμπαν εμφανίζονται κατά ζεύγη δράσης-αντίδρασης» και είναι γνωστό στη Φυσική ως **3ος Νόμος του Νεύτωνα** ή **Νόμος Δράσης-Αντίδρασης**. Στο **σχήμα 1.4** έχει σχεδιαστεί η δύναμη $\vec{F}_{επ\to τηλ}$ που ασκεί το έπιπλο στην τηλεόραση, αλλά και η δύναμη $\vec{F}_{τηλ\to επ}$, (προσοχή δεν είναι το βάρος!), που ασκεί η τηλεόραση στο έπιπλο.

Ο 3ος Νόμος του Νεύτωνα

Αν αξιοποιήσουμε τους ορισμούς των διανυσμάτων, οι δυνάμεις $\vec{F}_{Δράση}$ και $\vec{F}_{Αντίδραση}$ ονομάζονται **αντίθετες** και ο 3ος Νόμος του Νεύτωνα λαμβάνει την παρακάτω μαθηματική μορφή:

$$\vec{F}_{Δράση} = -\vec{F}_{Αντίδραση} \tag{1.2}$$

Πρέπει να τονιστεί ότι καμία από τις δύο δυνάμεις δεν έχει προνομιακό χαρακτήρα σε σχέση με την άλλη. Εμφανίζονται ταυτόχρονα, αν, όποτε και όσο μεταβληθεί η μία, μεταβάλλεται ισόποσα και η άλλη και όταν πάψει να ασκείται η μία, εξαλείφεται και η άλλη.

Η διανυσματική έκφραση του Νόμου του Hooke

Επιστρέφοντας στην ορολογία εντολέα-αποδέκτη που καθιερώσαμε νωρίτερα, συνειδητοποιούμε ότι ο 3ος Νόμος μάς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι ρόλοι του εντολέα και του αποδέκτη είναι εναλλασσόμενοι. Κατά τη διάρκεια μιας αλληλεπίδρασης, κάθε σώμα είναι ταυτόχρονα εντολέας (της δράσης του) και αποδέκτης της αντίδρασης που αυτή προκαλεί. Έτσι, η Γη δέχεται μια ελκτική δύναμη από τον Ήλιο (δράση) και ασκεί ταυτόχρονα μια αντίθετη δύναμη (αντίδραση) σε αυτόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.1

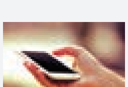
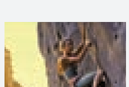
1. Για καθεμία από τις περιπτώσεις που εικονίζονται παρακάτω, να ονομάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται:

α) στο κινητό τηλέφωνο,

β) στον άνθρωπο,

γ) στη βάρκα,

δ) στο κόκκινο βιβλίο.

Απάντηση

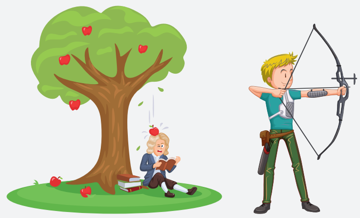
α) Δύναμη από το χέρι του ανθρώπου (από επαφή) – Βάρος (από απόσταση).

β) Δύναμη από το σχοινί (από επαφή) – Δύναμη από τον βράχο (από επαφή) – Βάρος (από απόσταση).

γ) Βάρος (από απόσταση) – Άνωση από το νερό (από επαφή).

δ) Δύναμη από το πάνω βιβλίο (από επαφή) – Δύναμη από το κάτω βιβλίο (από επαφή) – Βάρος (από απόσταση).

2. Στα στιγμιότυπα της εικόνας να αναφέρετε τις δυνάμεις που προκαλούν αλλαγή της κινητικής κατάστασης ή παραμόρφωση.



Απάντηση

Το βάρος στο μήλο που πέφτει προκαλεί μεταβολή της κινητικής του κατάστασης. Ένα μήλο που είναι ακόμη στο δέντρο ασκεί δύναμη στο κλαδί και το παραμορφώνει.

Η δύναμη που ασκεί ο τοξοβόλος παραμορφώνει το τόξο. Αν ο τοξοβόλος αφήσει τη χορδή, τότε η δύναμη της χορδής που ασκείται στο βέλος θα μεταβάλλει την κινητική κατάσταση του βέλους.

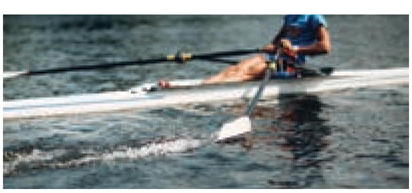
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. α) Να υπολογίσετε τη σταθερά ενός ελατηρίου το οποίο συσπειρώνεται κατά 2 mm με μια δύναμη μέτρου 4 N.

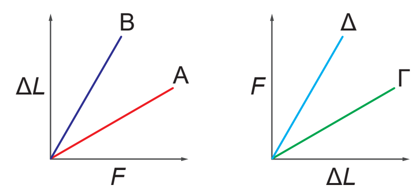
β) Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που μπορεί να προκαλέσει στο ίδιο ελατήριο επιμήκυνση 5 mm;

2. Το 2020, στους Ολυμπιακούς Αγώνες του Τόκιο, ο Στέφανος Ντούσκος κατέκτησε το χρυσό μετάλλιο στο μονό σκιφ, (μικρό σκάφος), στην κωπηλασία. Να εξηγήσετε ποια δύναμη προκαλεί την κίνηση του μικρού σκάφους.



3. Στο σχήμα (α), στο ίδιο σύστημα αξόνων, αναπαρίσταται η παραμόρφωση ΔL δύο ελατηρίων Α και Β σε συνάρτηση με το μέτρο F της δύναμης που τους ασκείται. Κατά τη γνώμη σας, πιο δύσκαμπτο είναι το ελατήριο Α ή το Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

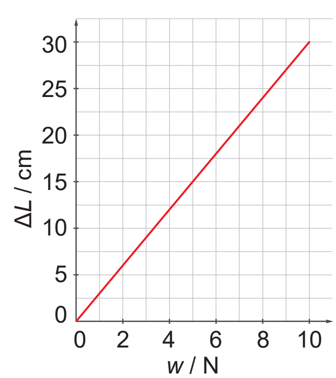
Στο σχήμα (β), στο ίδιο σύστημα αξόνων, αναπαρίσταται το μέτρο F της δύναμης που ασκείται σε δύο ελατήρια Γ και Δ σε συνάρτηση με την παραμόρφωση ΔL που τους προκαλεί. Κατά τη γνώμη σας, πιο δύσκαμπτο είναι το ελατήριο Γ ή το Δ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(α) (β)

Ασκήσεις

1. Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου βαθμονόμησαν ένα ελατήριο έτσι, ώστε να το χρησιμοποιούν ως δυναμόμετρο με βάση τον Νόμο του Hooke και δημιούργησαν το διπλανό διάγραμμα, ώστε, μετρώντας την επιμήκυνση του ελατηρίου με μια μετροταινία, να μπορούν να υπολογίζουν άγνωστα βάρη.



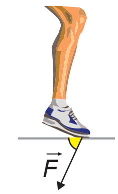
Ένας μαθητής κρέμασε από το ελατήριο μια σφαίρα άγνωστου βάρους και μέτρησε την επιμήκυνση του ελατηρίου που ήταν 33 cm. Μπορείτε με αυτήν την πληροφορία να υπολογίσετε την τιμή του βάρους της σφαίρας;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Ένα ελατήριο έχει μήκος 80 cm, όταν κρέμεται από αυτό βάρος 100 N σε ηρεμία. Όταν προστεθούν επιπλέον 20 N, το ελατήριο έχει μήκος 81,25 cm.

α) Να υπολογίσετε τη σταθερά του ελατηρίου.

β) Να υπολογίσετε το αρχικό μήκος του ελατηρίου.

3. Ένας δρομέας προπονείται στον στίβο. Στην εικόνα φαίνεται το πόδι του δρομέα που βρίσκεται σε επαφή με το ταρτάν σε μια στιγμή όπου αυτός ασκεί στο ταρτάν δύναμη μέτρου 600 N που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία 60°.



Να σχεδιάσετε τη δύναμη που ασκεί το ταρτάν στον δρομέα και να υπολογίσετε το μέτρο της.

1.2 Σύνθεση και ανάλυση δυνάμεων

1. Συνισταμένη δυνάμεων που ασκούνται σε υλικό σημείο

Συνήθως, στην καθημερινή ζωή, το σώμα μας αλλά και τα περισσότερα από τα αντικείμενα που υπάρχουν γύρω μας βρίσκονται υπό την επίδραση περισσότερων της μίας δυνάμεων, (πολλοί εντολείς ασκούν δύναμη). Έτσι, για παράδειγμα, τη στιγμή που κάθεστε και διαβάζετε αυτό το βιβλίο, η Γη σας έλκει προς τα κάτω, ενώ η καρέκλα σάς ασκεί επίσης μια δύναμη. Το ερώτημα είναι πώς μπορούμε να *αντικαταστήσουμε* όλες τις επιμέρους δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$ που ασκούνται σε ένα σώμα με μία δύναμη έτσι, ώστε αυτή να προκαλεί τα *ίδια αποτελέσματα* με τις δυνάμεις αυτές.

Εικόνα 1.4 Μια μαθήτρια που κάθεται σε μια καρέκλα δέχεται περισσότερες από μία δυνάμεις. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις δυνάμεις αυτές με μία δύναμη που να προκαλεί τα ίδια αποτελέσματα;

Υλικό σημείο λέμε ένα σώμα όταν θεωρηθεί ότι όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο έτσι, ώστε οι διαστάσεις του σώματος να μην υπεισέρχονται στη μελέτη του.

Όταν αναφερόμαστε σε υλικό σημείο, οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό μπορούν να προκαλέσουν μόνο αλλαγή της κινητικής του κατάστασης και όχι παραμόρφωση. Κάτω από αυτήν τη συνθήκη, η απάντηση στο ερώτημα που θέσαμε παραπάνω είναι καταφατική. Πράγματι, είναι εφικτό να αντικαταστήσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα υλικό σημείο με μία δύναμη που θα ασκείται επίσης σε αυτό το υλικό σημείο, η οποία ονομάζεται **συνισταμένη δύναμη** και συμβολίζεται με $\Sigma\vec{F}$. Οι επιμέρους δυνάμεις που αντικαθιστά η συνισταμένη δύναμη ονομάζονται **συνιστώσες** και η διαδικασία με την οποία προσδιορίζουμε τη συνισταμένη δύναμη ονομάζεται **σύνθεση δυνάμεων**.

Επισημάνσεις για τη συνισταμένη δύναμη

2. Σύνθεση συγγραμμικών δυνάμεων

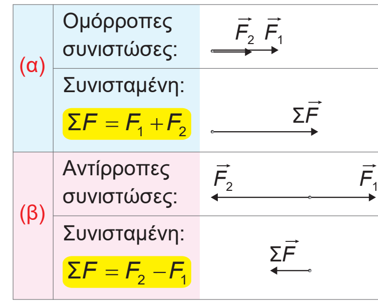
Αρχικά, θα μελετήσουμε απλές περιπτώσεις σύνθεσης δυνάμεων όπως τον υπολογισμό της συνισταμένης δύο (ή περισσότερων) **συγγραμμικών δυνάμεων**. Αυτό σημαίνει ότι για δύο δυνάμεις τέτοιου είδους διακρίνουμε μόνο δύο περιπτώσεις:

1. Οι δυνάμεις να έχουν την ίδια κατεύθυνση (**ομόρροπες**), οπότε στην περίπτωση αυτήν η συνισταμένη έχει μέτρο το άθροισμα των μέτρων των δύο δυνάμεων και κοινή κατεύθυνση με αυτές, όπως φαίνεται στο **σχήμα 1.5α**. Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι:

$$\Sigma F = F_1 + F_2 \qquad \textbf{(1.3)}$$

2. Οι δυνάμεις να έχουν αντίθετες κατευθύνσεις (**αντίρροπες**), οπότε στην περίπτωση αυτήν η συνισταμένη έχει μέτρο που είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων των δύο δυνάμεων και κατεύθυνση την κατεύθυνση της δύναμης με το μεγαλύτερο μέτρο, όπως φαίνεται στο **σχήμα 1.5β**. Αυτό σημαίνει ότι:

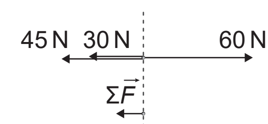
$$\Sigma F = |F_1 - F_2| \qquad \textbf{(1.4)}$$



Σχήμα 1.5 Ο προσδιορισμός της συνισταμένης στις περιπτώσεις: (α) ομόρροπων δυνάμεων, (β) αντίρροπων δυνάμεων

Όταν στο σώμα ασκούνται περισσότερες από δύο δυνάμεις που είναι όλες συγγραμμικές, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια θετική φορά κατά μήκος της ευθείας που δρουν οι δυνάμεις έτσι, ώστε να τη μετατρέψουμε σε άξονα και στη συνέχεια να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό της συνισταμένης από τις επιμέρους συνιστώσες.

Υπολογίζουμε και σχεδιάζουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων που απεικονίζονται στο **σχήμα 1.6**.



Σχήμα 1.6 Τρεις δυνάμεις που δρουν σε ένα υλικό σημείο και η συνισταμένη τους.

Ορίζοντας ως θετική τη φορά προς τα δεξιά, θα έχουμε για τη συνισταμένη:

$$\Sigma F = 60\ \text{N} - 30\ \text{N} - 45\ \text{N} = -15\ \text{N}$$

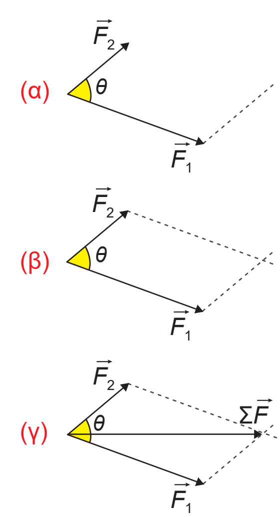
που σημαίνει ότι η συνισταμένη δύναμη έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά.

3. Σύνθεση δύο κάθετων δυνάμεων

Θα μελετήσουμε τη γενικότερη περίπτωση σύνθεσης δύο δυνάμεων που δεν είναι συγγραμμικές, αλλά σχηματίζουν γωνία θ που είναι διαφορετική από 0° (ομόρροπες) ή 180° (αντίρροπες).

Σε αυτήν τη γενικότερη περίπτωση, ακολουθούμε τον γραφικό προσδιορισμό της συνισταμένης δύναμης βασιζόμενοι στον **κανόνα του παραλληλογράμμου**, ο οποίος απεικονίζεται στο **σχήμα 1.7**.

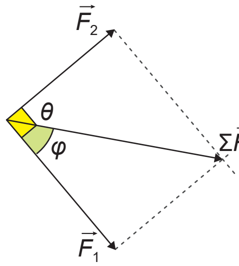
(α) Αφού τοποθετήσουμε τις δύο δυνάμεις που θέλουμε να συνθέσουμε έτσι, ώστε να έχουν κοινή αρχή, φέρνουμε από το πέρας της πρώτης μια παράλληλη προς τη δεύτερη δύναμη. **(β)** Από το πέρας της δεύτερης δύναμης φέρνουμε παράλληλη προς την πρώτη. Στο σημείο τομής ολοκληρώνεται ένα παραλληλόγραμμο. **(γ)** Η διαγώνιος του παραλληλογράμμου, που ξεκινά από την κοινή αρχή των δυνάμεων, είναι η συνισταμένη δύναμη.



Σχήμα 1.7 Γραφικός προσδιορισμός της συνισταμένης δύο μη συγγραμμικών δυνάμεων

Σύνθεση δυνάμεων

Μια ειδική περίπτωση εφαρμογής του κανόνα του παραλληλογράμμου είναι αυτή όπου οι (διανυσματικές) συνιστώσες δυνάμεις



Σχήμα 1.8 Εφαρμογή του κανόνα του παραλληλογράμμου στην περίπτωση της σύνθεσης δύο κάθετων δυνάμεων

Ειδική περίπτωση σύνθεσης δυνάμεων στο ελατήριο

σχηματίζουν γωνία $\theta = 90°$, δηλαδή είναι κάθετες μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο **σχήμα 1.8**. Στην περίπτωση αυτήν, το παραλληλόγραμμο που προκύπτει είναι *ορθογώνιο*, συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα για να προσδιορίσουμε τη διαγώνιο. Επομένως, θα είναι $(\Sigma F)^2 = F_1^2 + F_2^2$, οπότε προκύπτει:

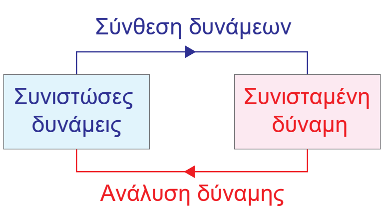
$$\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \qquad \textbf{(1.5)}$$

Εκτός από το μέτρο της συνισταμένης δύναμης, η οποία είναι διανυσματικό μέγεθος, θα πρέπει να προσδιορίσουμε και την κατεύθυνσή της, η οποία καθορίζεται από την (οξεία) γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της δύναμης $\Sigma\vec{F}$ με οποιοδήποτε από τα διανύσματα των συνιστωσών δυνάμεων $\vec{F}_1$ ή $\vec{F}_2$. Έτσι, αν, για παράδειγμα, υποθέσουμε ότι επιχειρούμε να βρούμε τη γωνία φ που σχηματίζει η $\Sigma\vec{F}$ με την $\vec{F}_1$, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει πλευρές τις δυνάμεις αυτές θα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{F_2}{F_1} \qquad \textbf{(1.6)}$$

Κλείνοντας την παράγραφο απαντάμε σε ένα βασικό ερώτημα: «Μπορούμε πάντα να αντικαθιστούμε τις δυνάμεις με μια συνισταμένη δύναμη;»

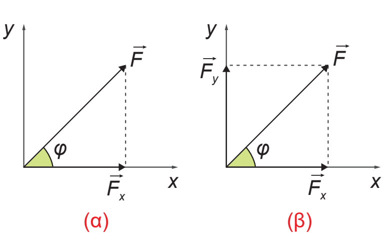
4. Ανάλυση δύναμης σε δύο κάθετες συνιστώσες



Σχήμα 1.9 Οι διαδικασίες της σύνθεσης και της ανάλυσης δυνάμεων

Μέχρι αυτό το σημείο έχουμε ασχοληθεί με τον προσδιορισμό της συνισταμένης δύο ή περισσότερων δυνάμεων μέσω της διαδικασίας της σύνθεσης. Πολλές φορές, όμως, είναι απαραίτητο να προχωράμε στην αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή στην αντικατάσταση μιας δύναμης από κάποιες άλλες δυνάμεις. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **ανάλυση μιας δύναμης σε συνιστώσες** και είναι αντίστροφη της διαδικασίας της σύνθεσης, όπως φαίνεται στο **σχήμα 1.9**.

Στην ενότητα αυτήν αλλά και σε όλο το βιβλίο θα ασχοληθούμε με την ανάλυση μιας δύναμης αποκλειστικά σε δύο κάθετους άξονες, οι οποίοι είτε θα ορίζονται είτε η επιλογή τους θα επιβάλλεται από το εκάστοτε πρόβλημα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε μια δύναμη $\vec{F}$ και δύο άξονες που είναι κάθετοι μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο **σχήμα 1.10**.



Σχήμα 1.10 (α) Από το άκρο της δύναμης $\vec{F}$, που θέλουμε να αναλύσουμε, φέρνουμε κάθετη προς τον *x*-άξονα, οπότε στο σημείο τομής έχουμε τη (διανυσματική) συνιστώσα $\vec{F}_x$. (β) Από το άκρο της δύναμης $\vec{F}$ φέρνουμε κάθετη στον *y*-άξονα, οπότε με τον τρόπο αυτόν προκύπτει η συνιστώσα $\vec{F}_y$.

Η διαδικασία της ανάλυσης παρουσιάζεται στο εισαγωγικό κεφάλαιο (διανύσματα) και περιγράφεται συνοπτικά στο **σχήμα 1.10**.

Γνωρίζοντας το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$, καθώς και την οξεία γωνία φ που σχηματίζει με έναν από τους άξονες, έστω τον άξονα *x*, από το ορθογώνιο τρίγωνο που έχει ως πλευρές τις δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{F}_x$ ισχύουν:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{F_x}{F} \quad \text{και} \quad \eta\mu\varphi = \frac{F_y}{F}$$

Επομένως:

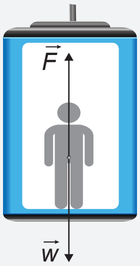
$$F_x = F\text{συν}\varphi \quad \textbf{(1.7α)}$$

$$F_y = F\text{ημ}\varphi \quad \textbf{(1.7β)}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση μιας δύναμης σε συνιστώσες σε συνδυασμό με την εύρεση της συνισταμένης δύο κάθετων δυνάμεων για να υπολογίσουμε τη συνισταμένη πολλών δυνάμεων που σχηματίζουν τυχαίες γωνίες μεταξύ τους, παρακάμπτοντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου της Ενότητας 1.2 (3). Ο αλγόριθμος, για να πετύχουμε κάτι τέτοιο, περιγράφεται στις «Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων» της θεματικής ενότητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.2

1. Άνθρωπος βάρους 800 N είναι μέσα σε ένα ασανσέρ. Όταν το ασανσέρ ξεκινά προς τα πάνω, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον άνθρωπο προς τα πάνω είναι ίση με το 10% του βάρους του.



Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί το δάπεδο του ασανσέρ στον άνθρωπο;

Λύση

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον άνθρωπο προς τα πάνω έχει μέτρο:

$$\Sigma F = \frac{10}{100} \cdot 800\ \text{N} = 80\ \text{N}$$

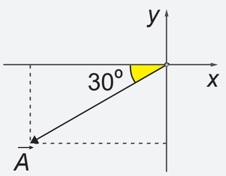
Η συνισταμένη έχει μέτρο τη διαφορά των μέτρων της δύναμης $\vec{F}$ που ασκεί το δάπεδο του ασανσέρ στον άνθρωπο και του βάρους $\vec{w}$ του ανθρώπου, άρα:

$$\Sigma F = F - w \quad \text{ή} \quad F = \Sigma F + w$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$F = 80\ \text{N} + 800\ \text{N} = 880\ \text{N}$$

2. Στο σχήμα η δύναμη $\vec{A}$ έχει μέτρο 100 N.



Να υπολογίσετε τις τιμές των συνιστωσών της $\vec{A}$ στους x και y-άξονες.

Λύση

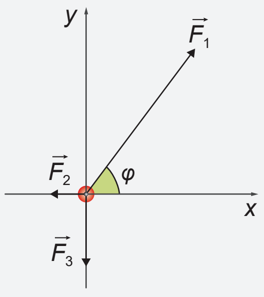
Οι συνιστώσες της δύναμης $\vec{A}$ κατά άξονα είναι:

$$A_x = -A\text{συν}30° = -86{,}6\ \text{N}$$

$$A_y = -A\text{ημ}30° = -50\ \text{N}$$

3. Σε ένα μπαλάκι ασκούνται τρεις δυνάμεις που παριστάνονται στο σχήμα (α).

Τα μέτρα των δυνάμεων είναι: $F_1 = 200$ N, $F_2 = 40$ N, $F_3 = 80$ N και για τη γωνία φ δίνονται: ημ$\varphi = 0{,}8$ και συν$\varphi = 0{,}6$.

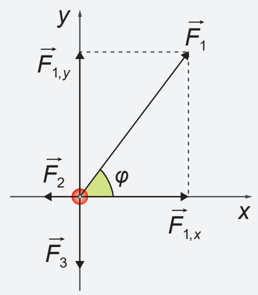


(α)

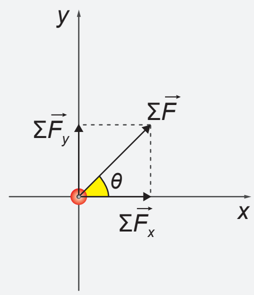
Να υπολογίσετε τη συνισταμένη των τριών δυνάμεων.

Λύση

Αναλύουμε τη δύναμη $\vec{F}_1$ όπως στο σχήμα (β). Οι άλλες δύο δυνάμεις ταυτίζονται με τους άξονες και συνεπώς δεν τις αναλύουμε.



(β)



(γ)

Οι συνιστώσες των δυνάμεων κατά άξονα είναι:

Άξονας x: $F_{1,x} = F_1 συνφ = 120\ \text{N}$,

$F_{2,x} = -F_2 = -40\ \text{N}$ και $F_{3,x} = 0\ \text{N}$

Άξονας y: $F_{1,y} = F_1 ημφ = 160\ \text{N}$,

$F_{2,y} = 0\ \text{N}$ και $F_{3,y} = -F_3 = -80\ \text{N}$

Οι συνιστώσες της $\Sigma\vec{F}$ (**σχήμα γ**) είναι:

$\Sigma F_x = F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} = 120\ \text{N} - 40\ \text{N} + 0\ \text{N} = 80\ \text{N}$

$\Sigma F_y = F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 160\ \text{N} + 0\ \text{N} - 80\ \text{N} = 80\ \text{N}$

Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης είναι:

$$\Sigma F = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} = 80\sqrt{2}\ \text{N} \approx 113\ \text{N}$$

Η γωνία θ που σχηματίζει η συνισταμένη δύναμη με τον x-άξονα είναι:

$$εφ\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = 1,$$

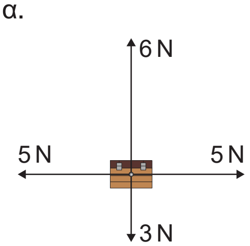
άρα $\theta = 45°$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Δύο δυνάμεις ίδιου μέτρου F εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο ενός σώματος και σχηματίζουν μεταξύ τους μια μικρή οξεία γωνία. Αν η γωνία μεγαλώνει συνεχώς έως τις 180°, χωρίς να αλλάζει το μέτρο των δυνάμεων, τότε το μέτρο της συνισταμένης θα αυξάνεται, θα μειώνεται ή θα παραμένει σταθερό; Να δώσετε τις απαραίτητες εξηγήσεις. Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, μπορείτε να εξαγάγετε ένα συμπέρασμα για την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο της συνισταμένης δύο δυνάμεων ίδιου μέτρου;

2. Σε ένα κουτί ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα.

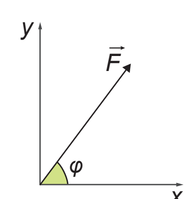


α) Να βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης.

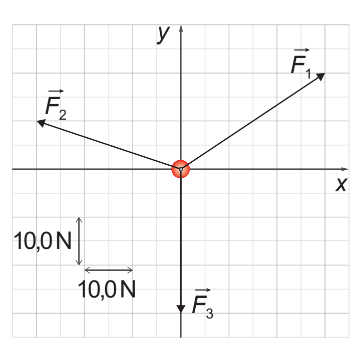
β) Να βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιπλέον δύναμης που πρέπει να ασκηθεί στο κουτί έτσι, ώστε η συνισταμένη δύναμη να μηδενιστεί.

3. Η τιμή της δύναμης του σχήματος είναι 100 N. Να υπολογίσετε τις συνιστώσες της δύναμης στον x-άξονα και στον y-άξονα.

Δίνονται: $ημφ = 0{,}8$, $συνφ = 0{,}6$.

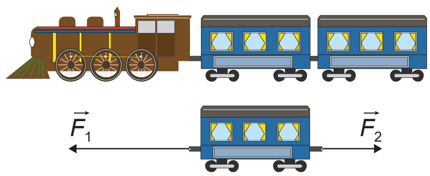


4. Να βρείτε τη συνισταμένη των τριών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα μπαλάκι, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ανάλυσης δυνάμεων και αντλώντας πληροφορίες από το σχήμα.

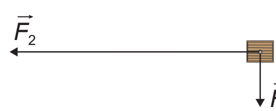


Ασκήσεις

1. Για να κινηθεί με επιθυμητό τρόπο το δεύτερο βαγόνι του τρένου του σχήματος, χρειάζεται να δεχθεί συνισταμένη δύναμη μέτρου $1{,}8 \cdot 10^5$ N προς την κατεύθυνση της κίνησης του τρένου, δηλαδή προς τα εμπρός. Αν από τη μηχανή ασκείται στο δεύτερο βαγόνι δύναμη μέτρου $F_1 = 3{,}7 \cdot 10^5$ N, να υπολογίσετε το μέτρο F_2 της δύναμης που του ασκεί το τρίτο βαγόνι.



2. Δύο δυνάμεις, $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, δρουν σε ένα κιβώτιο σχηματίζοντας ορθή γωνία μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η συνισταμένη των δυνάμεων έχει μέτρο 41 N.



α) Δεδομένου ότι το μέτρο της μίας είναι 9 N, να υπολογίσετε το μέτρο της άλλης.

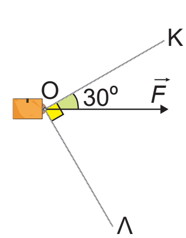
β) Να προσδιορίσετε τη γωνία της συνισταμένης δύναμης με την $\vec{F}_2$.

3. Να χρησιμοποιήσετε τις γνώσεις σας από τη Γεωμετρία και ειδικότερα από τα ισόπλευρα τρίγωνα, προκειμένου να αποδείξετε ότι:

α) Δύο δυνάμεις ίδιου μέτρου που σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 120° έχουν συνισταμένη της οποίας το μέτρο είναι ίσο με το μέτρο καθεμίας από αυτές.

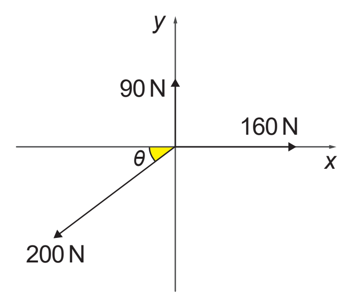
β) Τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις ίδιου μέτρου που ανά δύο σχηματίζουν γωνία 120° έχουν μηδενική συνισταμένη.

4. Δύο παιδιά θέλουν να σύρουν με τα σκοινιά ΟΚ και ΟΛ ένα κουτί, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για να κινηθεί το κουτί όπως επιθυμούν τα παιδιά απαιτείται να του ασκήσουν συνολική δύναμη μέτρου $F = 97{,}0$ N. Αν τα σκοινιά είναι μεταξύ τους κάθετα και το ΟΚ σχηματίζει γωνία 30° με τη διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$, να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί κάθε σκοινί στο κουτί.



Οι απαντήσεις να δοθούν με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.

5. Δίνεται ότι η συνισταμένη των τριών δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα είναι κατακόρυφη.

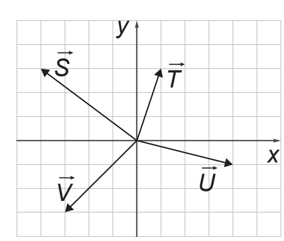


α) Να προσδιορίσετε τη συνιστώσα της δύναμης με μέτρο 200 N στον *x*-άξονα.

β) Να προσδιορίσετε τη συνιστώσα της δύναμης με μέτρο 200 N στον *y*-άξονα.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της συνισταμένης των τριών δυνάμεων.

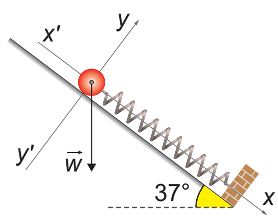
6. Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του σχήματος η κλίμακα αντιστοιχίας είναι: «κάθε υποδιαίρεση μήκους αντιστοιχεί σε δύναμη 4 N».



Να συμπληρώσετε τον πίνακα (σε N):

Δύναμη	Συνιστώσα στον άξονα		Μέτρο δύναμης	ΣF_x	ΣF_y	ΣF
	x	*y*				
T						
S						
V						
U						

7. Ένα μπαλάκι με βάρος μέτρου 1 N βρίσκεται ακίνητο στο λείο κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος, που σχηματίζει γωνία 37° με την οριζόντια διεύθυνση.



Το μπαλάκι ισορροπεί με τη βοήθεια αβαρούς (ιδανικού) ελατηρίου, το ένα άκρο του οποίου ακουμπά στο μπαλάκι, ενώ το άλλο του άκρο είναι προσδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το ελατήριο είναι ελαστικά συσπειρωμένο κατά 10 mm.

α) Να αναλύσετε τη δύναμη του βάρους σε συνιστώσες και να υπολογίσετε το μέτρο της συνιστώσας που βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

β) Αν η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα $x'x$ είναι μηδέν, να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς του ελατηρίου σε N/mm και σε N/m.

Δίνεται ημ37° = 0,6.

1.3 Είδη δυνάμεων

1. Δυνάμεις από επαφή και από απόσταση

Οι δυνάμεις διακρίνονται σε:

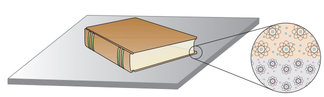
I. Δυνάμεις από επαφή

Στην περίπτωση αυτήν, ο εντολέας που ασκεί τη δύναμη έρχεται σε επαφή με τον αποδέκτη στον οποίο ασκείται η δύναμη. Έτσι, η δύναμη υπάρχει μόνο κατά την επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων (εντολέα και αποδέκτη). Για παράδειγμα, αν θέλουμε να μετακινήσουμε μια καρέκλα, πρέπει πρώτα να την ακουμπήσουμε. Άλλα παραδείγματα δυνάμεων επαφής είναι: η άνωση, η τάση του νήματος, η τριβή κ.λπ.

II. Δυνάμεις από απόσταση

Ένας εντολέας μπορεί να ασκήσει δύναμη στον αποδέκτη, χωρίς να βρίσκονται υποχρεωτικά σε **μακροσκοπική επαφή**. Για παράδειγμα, ο Ήλιος ασκεί δύναμη στη Γη υποχρεώνοντάς την να κινείται γύρω του, αν και η μέση απόστασή τους είναι περίπου 150.000.000 km! Άρα, η άσκηση δύναμης δεν απαιτεί επαφή μεταξύ των δύο σωμάτων (εντολέα και αποδέκτη). Αν αφήσουμε ελεύθερη μια πέτρα, αυτή θα πέσει προς το έδαφος, διότι την «τραβάει» (έλκει) η Γη, έστω και αν η πέτρα δεν βρίσκεται σε επαφή με τη Γη. Με παρόμοιο τρόπο, ένας μαγνήτης μπορεί να τραβήξει ή να σπρώξει (έλξει ή απωθήσει) έναν άλλο μαγνήτη, χωρίς να βρίσκονται οι δύο τους σε επαφή. Παραδείγματα δυνάμεων από απόσταση είναι: το βάρος, η μαγνητική δύναμη, η ηλεκτρική δύναμη κ.λπ.

Ο παραπάνω διαχωρισμός σε δύο κατηγορίες είναι συμβατικός, διότι σε *μικροσκοπικό επίπεδο* όλες οι αλληλεπιδράσεις θεωρούνται *δυνάμεις από απόσταση* (**Σχήμα 1.11**).



Σχήμα 1.11 Μακροσκοπικά, μπορούμε να αναφερόμαστε σε *δυνάμεις από επαφή* αποκλειστικά και μόνο για λόγους απαλλαγής της περιγραφής μας από λεπτομέρειες που δεν επηρεάζουν το φυσικό φαινόμενο που μελετάμε.

Στο βιβλίο του σχήματος η δύναμη που ασκείται από το δάπεδο θεωρείται (μακροσκοπικά) δύναμη από επαφή. Αν, όμως, θέλουμε να αντιληφθούμε λεπτομερέστερα τη φύση αυτής της δύναμης, οφείλουμε να συμπεριλάβουμε στην περιγραφή μας τις απωστικές δυνάμεις μεταξύ των εγγύτερων (πλησιέστερων) μορίων του βιβλίου και του δαπέδου.

Μικροσκοπικά, λαμβάνουμε υπόψη τη δομή των ατόμων. Σε αυτό το επίπεδο μελέτης δεν υπάρχει επαφή.

Μετά από αυτές τις διευκρινίσεις, θα δώσουμε μια περιληπτική περιγραφή για κάθε δύναμη από τις περιπτώσεις στις οποίες έχουμε ήδη αναφερθεί, ώστε να παραθέσουμε συγκεντρωτικά όλα τα χαρακτηριστικά τους.

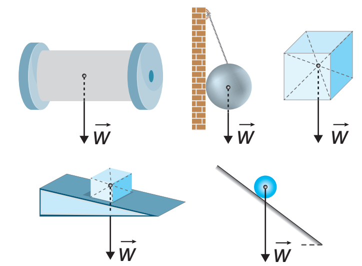
I. Βάρος

Βάρος είναι η ελκτική δύναμη που ασκεί ο πλανήτης Γη στα σώματα. Το βάρος έχει:

- *Σημείο εφαρμογής*: το κέντρο βάρους των σωμάτων. (Στα ομογενή και συμμετρικά σώματα αυτό ταυτίζεται με το κέντρο συμμετρίας τους, όπως θα αναλύσουμε στην υποενότητα 1.4).
- *Διεύθυνση*: την κατακόρυφη, (παρατηρήστε τα σχήματα).
- *Φορά*: προς το κέντρο της Γης.

Το βάρος *συμβολίζεται* με $\vec{w}$.

Στο **σχήμα 1.12** είναι σχεδιασμένο το βάρος διάφορων σωμάτων.



Σχήμα 1.12 Το βάρος διάφορων σωμάτων

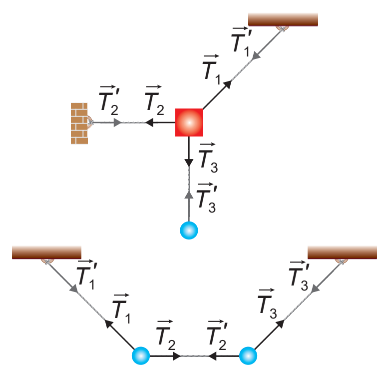
II. Δύναμη (τάση) σκοινιού

Τάση ονομάζουμε τη δύναμη που μεταδίδεται, χωρίς να αλλάζει η τιμή της, σε όλο το μήκος ενός τεντωμένου σκοινιού με την προϋπόθεση ότι το σκοινί είναι αβαρές, (αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το βάρος του σκοινιού είναι αμελητέο, αν συγκριθεί με το βάρος των σωμάτων που είναι προσδεδεμένα σ' αυτό).

Η δύναμη που ασκεί το τεντωμένο σκοινί στο σώμα έχει:

- *Σημείο εφαρμογής*: το σημείο που είναι δεμένο το σκοινί.
- *Διεύθυνση*: κατά μήκος του σκοινιού.
- *Φορά*: όπως φαίνεται στο **σχήμα 1.13**.
- *Μέτρο*: μεταβλητό που εξαρτάται από τις άλλες δυνάμεις που ασκούνται στο προσδεδεμένο σώμα. Λαμβάνει:
  - *Μέγιστη τιμή* που ονομάζεται **όριο θραύσης**. Αυτό σημαίνει ότι αν στο σκοινί ασκηθεί δύναμη μεγαλύτερη από το όριο θραύσης, τότε το σκοινί θα σπάσει. Το όριο θραύσης εξαρτάται από το υλικό που είναι κατασκευασμένο το σκοινί και είναι ανάλογο του εμβαδού της διατομής του.
  - *Ελάχιστη τιμή* τη μηδενική, (όταν το σκοινί δεν είναι τεντωμένο ή όταν σπάει).

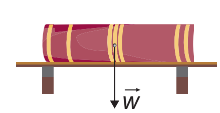
  Η τάση συμβολίζεται συνήθως με $\vec{T}$.



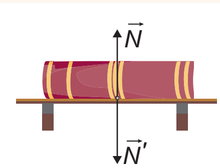
Σχήμα 1.13 Η τάση του σκοινιού σε διάφορες περιπτώσεις

2. Κάθετη δύναμη επαφής και τριβή

Ας φανταστούμε τώρα ένα βιβλίο πάνω σε ένα τραπέζι. Γνωρίζουμε πως το βιβλίο δέχεται τη δύναμη του βάρους του, η οποία τείνει να το κινήσει προς το κέντρο της Γης (**Εικόνα 1.5**). Το βιβλίο όμως δεν κινείται προς το κέντρο της Γης, διότι το εμποδίζει το τραπέζι. Αυτό σημαίνει ότι ασκείται μια δύναμη από το τραπέζι στο βιβλίο



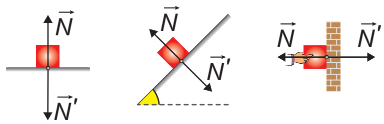
Εικόνα 1.5 Το βάρος ασκείται στο βιβλίο.



Εικόνα 1.6 Το τραπέζι ασκεί κάθετη δύναμη επαφής στο βιβλίο και το βιβλίο ασκεί κάθετη δύναμη επαφής στο τραπέζι.

που εμποδίζει το ένα να εισχωρήσει στο άλλο. Τη δύναμη αυτήν την ονομάζουμε **κάθετη δύναμη επαφής** και συνήθως τη συμβολίζουμε με $\vec{N}$.

Φυσικά, λόγω του 3ου Νόμου του Νεύτωνα, και το βιβλίο ασκεί δύναμη στο τραπέζι (αντίδραση). Η δύναμη αυτή ονομάζεται επίσης κάθετη δύναμη επαφής και είναι ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης από την κάθετη δύναμη επαφής που ασκείται στο βιβλίο (**Εικόνα 1.6**). Αν η δύναμη από το τραπέζι στο βιβλίο συμβολίζεται με $\vec{N}$, η δύναμη από το βιβλίο στο τραπέζι συμβολίζεται με $\vec{N}'$.



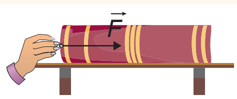
Σχήμα 1.14 Κάθετες δυνάμεις επαφής

Συμπερασματικά:

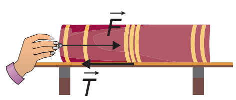
Κάθετη δύναμη επαφής είναι η δύναμη που ασκείται ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σώματα που βρίσκονται σε επαφή (**Σχήμα 1.14**).

Η επαφή πραγματοποιείται στο κοινό εφαπτόμενο επίπεδο των δύο σωμάτων. Θεωρητικά, η επαφή δύο σωμάτων μπορεί να γίνει και σε ένα μόνο σημείο. Στην πράξη, όμως, υπάρχει πάντοτε περιοχή/επιφάνεια επαφής και όχι σημείο επαφής. Η περιοχή/επιφάνεια επαφής ανήκει στο εφαπτόμενο επίπεδο.

Το σημείο εφαρμογής της κάθετης δύναμης επαφής βρίσκεται στην επιφάνεια επαφής. Για ευκολία, σχεδιάζουμε το διάνυσμα της κάθετης δύναμης επαφής στο κέντρο της επιφάνειας επαφής.



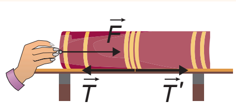
Εικόνα 1.7 Σπρώχνουμε το βιβλίο.



Εικόνα 1.8 Το τραπέζι δυσκολεύει την κίνηση του βιβλίου.

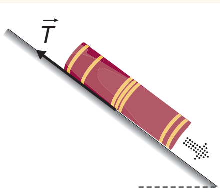
Τι γίνεται αν σπρώξουμε το βιβλίο;

- Το βιβλίο θα δεχτεί μια δύναμη από το χέρι μας προς τα δεξιά (**Εικόνα 1.7**).
- Το τραπέζι έχει σχετικά τραχιά (μη λεία) επιφάνεια και δυσκολεύει την κίνηση του βιβλίου, ασκώντας μια οριζόντια δύναμη αντίστασης, αντίθετης κατεύθυνσης, η οποία ονομάζεται **τριβή** και συμβολίζεται με $\vec{T}$ (**Εικόνα 1.8**).
- Το βιβλίο σπρώχνει το τραπέζι προς τα εμπρός, λόγω του 3ου Νόμου του Νεύτωνα, με μια τριβή $\vec{T}'$ ίσου μέτρου (**Εικόνα 1.9**).



Εικόνα 1.9 Το βιβλίο ασκεί εξίσου δύναμη τριβής στο τραπέζι.

Η τριβή λοιπόν εμφανίζεται *κατά την κίνηση* ενός σώματος πάνω σε μια επιφάνεια.

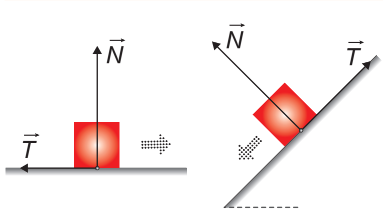


Εικόνα 1.10 Η τριβή ασκείται και όταν το σώμα δεν κινείται, αλλά έχει την τάση να κινηθεί.

Όμως, η τριβή εμφανίζεται και όταν ένα σώμα έχει *την τάση να κινηθεί*. Στην **εικόνα 1.10** το βιβλίο παραμένει ακίνητο παρά την τάση που έχει να γλιστρήσει (ολισθήσει) προς τα κάτω. Εδώ, του ασκείται τριβή από την επιφάνεια στην οποία βρίσκεται και το εμποδίζει να κινηθεί.

Συμπερασματικά:

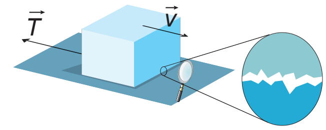
Τριβή $\vec{T}$ είναι η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση (ή στην τάση για κίνηση) και έχει φορά αντίθετη από τη φορά κίνησης (ή από τη φορά της τάσης προς κίνηση) του σώματος (**Σχήμα 1.15**).



Σχήμα 1.15 Τριβή και κάθετη δύναμη επαφής

Η τριβή εμφανίζεται πάντοτε όπου υπάρχει επαφή μεταξύ σωμάτων και οφείλεται στο ότι οι επιφάνειες που έρχονται σε επαφή δεν είναι ποτέ πραγματικά λείες (**Σχήμα 1.16**), αλλά και στην αλληλεπίδραση των επιφανειών.

Έτσι, η μία επιφάνεια εμποδίζει τη μετακίνηση της άλλης και αυτό γίνεται αισθητό από εμάς ως τριβή. Όταν οι επιφάνειες είναι περισσότερο λείες, η τριβή είναι *μικρότερη*. Για παράδειγμα, κατά την κίνηση σε πάγο υπάρχει μικρότερη τριβή από αυτήν κατά την κίνηση σε τσιμέντο.



Σχήμα 1.16 Εξήγηση της τριβής

Πολλές φορές στη Φυσική χρησιμοποιούμε την έκφραση «λείο επίπεδο». Αυτό σημαίνει πως η τριβή θεωρείται πολύ μικρή, γι' αυτό δεν τη λαμβάνουμε υπόψη σε υπολογισμούς.

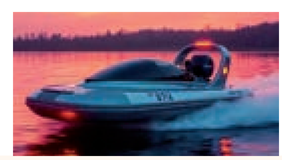
Η τριβή σε κάποιες περιπτώσεις είναι χρήσιμη και σε άλλες είναι ανεπιθύμητη και μας δυσκολεύει.

Εικόνα 1.11 Το λιπαντικό προστίθεται στη μηχανή για να μειώσει τις τριβές των μερών της.

Από τη μια χωρίς την τριβή θα ήταν αδύνατο να πιάσουμε τα αντικείμενα, διότι θα γλιστρούσαν από τα χέρια μας. Επίσης, θα ήταν αδύνατο να περπατήσουμε, διότι τα παπούτσια μας θα γλιστρούσαν στο έδαφος. Γενικά, τα αντικείμενα θα ολίσθαιναν το ένα σε σχέση με το άλλο. Από την άλλη στο εσωτερικό του κινητήρα ενός αυτοκινήτου, (είτε ηλεκτρικού είτε παλαιάς τεχνολογίας), όσο μεγαλύτερη είναι η τριβή τόσο δυσκολότερη είναι η κίνηση των τμημάτων του κινητήρα, αλλά και τόσο μεγαλύτερη είναι η απώλεια ενέργειας. Η προσπάθεια μείωσης της τριβής έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη των λιπαντικών (**Εικόνες 1.11** και **1.12**).

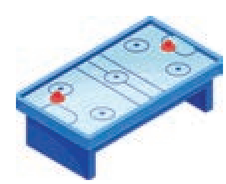
Εικόνα 1.12 Υπάρχουν πολλά είδη λιπαντικών για διάφορες εφαρμογές.

Μια άλλη διαδικασία που μειώνει την τριβή είναι η δημιουργία στρώματος αέρα. Αυτό εφαρμόζεται στα αερόστρωμνα θαλάσσια σκάφη, γνωστά ως χόβερκραφτ, (**Εικόνα 1.13**). Τα αερόστρωμνα μπορούν να κινηθούν τόσο στη θάλασσα όσο και στη στεριά. Το στρώμα αέρα χρησιμοποιείται επίσης στο γνωστό παιχνίδι Air Hockey όπου ένας μικρός δίσκος μετακινείται χωρίς τριβή σε ένα στρώμα αέρα πάνω στο τραπέζι Air Hockey (**Εικόνα 1.14**).



Εικόνα 1.13 Επιβατηγό αερόστρωμνο

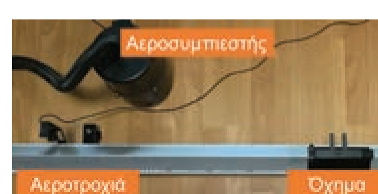
Σε ένα σχολικό εργαστήριο Φυσικής συναντάμε πολλές φορές την αεροτροχιά (**Εικόνα 1.15**). Είναι ένας ευθύς αλουμινένιος σωλήνας με σταθερή διατομή και με πολλές μικρές τρύπες, ώστε μέσα από αυτές να διέρχεται σταθερό ρεύμα αέρα. Έτσι, ένα σώμα μπορεί να κινείται σε στρώμα αέρα, που παράγει η ίδια η συσκευή μέσω αεροσυμπιεστή (κομπρεσέρ). Η τριβή σχεδόν μηδενίζεται και το σώμα κινείται σχεδόν ανεμπόδιστα.



Εικόνα 1.14 Τραπέζι Air Hockey

3. Στατική τριβή και τριβή ολίσθησης

Όπως αναφέραμε, η τριβή εξαρτάται από το πόσο λεία είναι η επιφάνεια στην οποία κινείται ένα σώμα και από το πόσο λείο είναι το ίδιο το σώμα.



Εικόνα 1.15 Αεροτροχιά εργαστηρίου Φυσικής

Αν δοκιμάσουμε να τραβήξουμε ένα πολύ βαρύ αντικείμενο, π.χ. ένα κρεβάτι, θα διαπιστώσουμε ότι στην αρχή φαίνεται ότι το κρεβάτι είναι κολλημένο στο πάτωμα και δεν μετακινείται. Καθώς προσπαθούμε περισσότερο, αυξάνοντας τη δύναμη που ασκούμε, κάποια στιγμή μάς δίνεται η εντύπωση ότι το κρεβάτι ξεκολλάει και μετακινείται πλέον πιο εύκολα, δηλαδή με δύναμη *μικρότερη* από αυτήν

Πείραμα στη στατική τριβή

που χρειάστηκε για να τεθεί σε κίνηση. Η εμφανιζόμενη τριβή που εμποδίζει το σώμα να κινηθεί, παρά την προσπάθειά μας, ονομάζεται **στατική τριβή** (**Εικόνα 1.16**).

Εικόνα 1.16 Τραβώντας ένα αντικείμενο σε οριζόντιο επίπεδο

Το μέτρο της στατικής τριβής αλλάζει (αυξάνεται) ακριβώς τόσο όσο αλλάζει (αυξάνεται) η τιμή της δύναμης που ασκούμε με αποτέλεσμα το αντικείμενο να μένει ακίνητο. Κάποια στιγμή, το μέτρο της τριβής φτάνει στη μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει, η οποία ονομάζεται **οριακή τριβή**. Αν η δύναμη που ασκούμε αυξηθεί έστω και κατ' ελάχιστον μετά από την οριακή τιμή, τότε διαταράσσεται η ισορροπία και το σώμα *μόλις αρχίζει να κινείται*. Στην πράξη, θεωρούμε ότι η κίνηση ξεκινά, όταν οι δύο δυνάμεις λάβουν τιμή ίση με την οριακή τριβή.

Όταν το σώμα αρχίζει να κινείται, η τριβή αποκτά νέο μέτρο (μικρότερο από το μέτρο της οριακής τιμής), το οποίο παραμένει πλέον σταθερό σε όλη τη διάρκεια της κίνησης. Η τριβή, όταν το σώμα κινείται, ονομάζεται **τριβή ολίσθησης**.

4. Παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται η τριβή ολίσθησης

Οι παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται η τριβή ολίσθησης υπολογίζονται πειραματικά.

I. Η τριβή ολίσθησης εξαρτάται από το πόσο λείες είναι οι επιφάνειες επαφής. Το πόσο λεία είναι μια επιφάνεια καθορίζεται από τον **συντελεστή τριβής** μ, ο οποίος υπολογίζεται μόνο πειραματικά (**Πίνακας 1.1**). Ο συντελεστής τριβής μ είναι ένας καθαρός αριθμός (δεν έχει μονάδες) και είναι τόσο μικρότερος όσο πιο λείες είναι οι δύο επιφάνειες.

II. Η τριβή ολίσθησης εξαρτάται από την κάθετη δύναμη επαφής. Όσο μεγαλύτερη είναι η δύναμη επαφής τόσο πιο πολύ οι δύο επιφάνειες, (π.χ. το βιβλίο πάνω στο τραπέζι), πιέζονται μεταξύ τους και αυξάνεται η τριβή.

Η τριβή ολίσθησης *δεν* εξαρτάται από το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής των δύο σωμάτων *ούτε* από την ταχύτητα ολίσθησης για σχετικά μικρές ταχύτητες.

Ο **Νόμος της Τριβής** γράφεται μαθηματικά:

$$T = \mu N \qquad \textbf{(1.8)}$$

όπου $\vec{N}$ είναι η κάθετη δύναμη επαφής στο σώμα από την επιφάνεια επαφής και μ είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.

Πίνακας 1.1
Παραδείγματα τιμών του συντελεστή τριβής ολίσθησης μ

Υλικό επιφάνειας 1	Υλικό επιφάνειας 2	μ
Γυαλί	Γυαλί	0,40
Πάγος	Ατσάλι	0,01
Σίδηρος	Ξύλο οξιάς	0,30-0,50
Σίδηρος	Σίδηρος	0,15
Σίδηρος με λιπαντικό	Σίδηρος με λιπαντικό	0,06-0,10

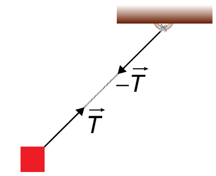
5. Σχεδιάζοντας τις δυνάμεις σε ένα σώμα

Αρχικά, υπενθυμίζουμε τις δυνάμεις που χρησιμοποιούμε συνήθως.

1. Βάρος $\vec{w}$
2. Τάση νήματος $\vec{T}$ (**Σχήμα 1.17**)
3. Κάθετη δύναμη επαφής $\vec{N}$
4. Τριβή $\vec{T}$
5. Δύναμη από ελατήριο $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$
6. Άνωση $\vec{A}$: είναι η δύναμη που ασκείται από υγρό σε σώμα που είναι βυθισμένο σε αυτό (**Σχήμα 1.18**).
7. Άντωση $\vec{F}_L$: είναι η δύναμη που ασκείται από τον αέρα σε αεροπλάνο που πετάει και εξουδετερώνει το βάρος (**Σχήμα 1.19**).
8. Κινητήρια δύναμη $\vec{F}_T$ (αυτοκινήτου, αεροπλάνου): είναι η δύναμη που κινεί ένα όχημα. Αποδίδεται έμμεσα στη μηχανή (**Σχήμα 1.19**).
9. Αντίσταση του αέρα και του νερού $\vec{F}_D$: είναι η δύναμη που ασκείται σε κάθε σώμα που κινείται σε ένα **ρευστό** (υγρό ή αέριο) (**Σχήμα 1.19**).
10. Μαγνητική δύναμη: είναι η δύναμη που ασκείται ανάμεσα σε μαγνήτες ή ανάμεσα σε έναν μαγνήτη και σε ένα σώμα από σιδηρομαγνητικό υλικό, (π.χ. σιδερένιο).
11. Ηλεκτρική δύναμη: είναι η δύναμη που ασκείται ανάμεσα σε ηλεκτρικά φορτισμένα σώματα.

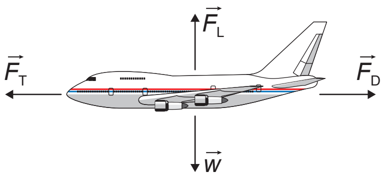
Υπάρχουν επιπλέον πολλά είδη δυνάμεων.

Για να προβλέψουμε την ακινησία ή την κίνηση ενός σώματος πρέπει να σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό. Η διαδικασία περιγράφεται παρακάτω στην παράγραφο «Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων» της θεματικής ενότητας.



Σχήμα 1.17 Τάση νήματος

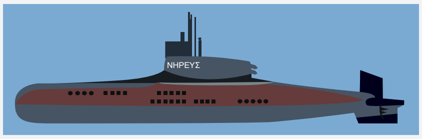
Σχήμα 1.18 Άνωση



Σχήμα 1.19 Οι δυνάμεις σε αεροπλάνο που πετάει.

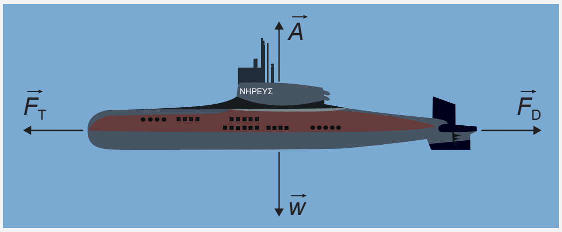
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.3

1. Να σχεδιάσετε και να ονομάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κινούμενο προς τα αριστερά υποβρύχιο.

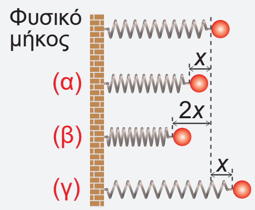


Απάντηση

Στο υποβρύχιο ασκούνται: το βάρος του $\vec{w}$ και η άνωση $\vec{A}$ από το νερό. Εφόσον το υποβρύχιο κινείται, δέχεται αντίσταση $\vec{F}_D$ από το νερό, και για να συνεχίσει την κίνησή του χρειάζεται κινητήρια δύναμη $\vec{F}_T$ κατ' ελάχιστον ίση με την αντίσταση.

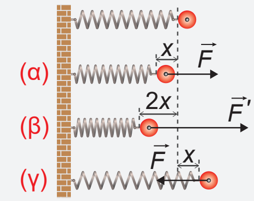


2. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται από το ελατήριο στη σφαίρα που είναι προσδεδεμένη στο ένα άκρο του, για τις περιπτώσεις του σχήματος.



Απάντηση

Σε κάθε περίπτωση, το ελατήριο δρα στη σφαίρα έτσι, ώστε να επανέρχεται στο φυσικό του μήκος.

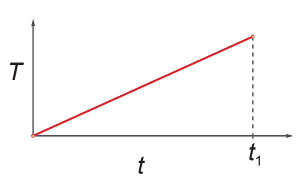


Όσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση του ελατηρίου τόσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο F της δύναμης που ασκείται στη σφαίρα· συνεπώς, εξίσου μεγαλύτερο είναι και το μήκος του διανύσματος της δύναμης.

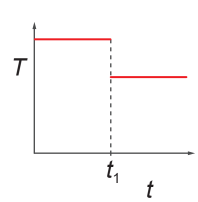
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Ένα βαρύ κιβώτιο βρίσκεται αρχικά ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ ως τη στιγμή t_1 ασκείται σε αυτό οριζόντια δύναμη σταθερής κατεύθυνσης, αλλά μεταβλητού μέτρου. Στο διάγραμμα απεικονίζεται το μέτρο της τριβής που ασκείται στο κιβώτιο από το δάπεδο στο παραπάνω χρονικό διάστημα. Να εξηγήσετε αν το κιβώτιο ολισθαίνει έως τη χρονική στιγμή t_1 πάνω στο δάπεδο.



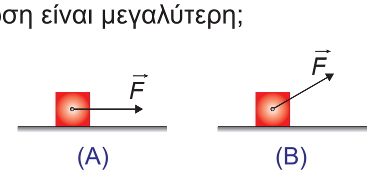
2. Κατά τη διάρκεια μιας μετακόμισης ο Χρήστος σπρώχνει ένα κιβώτιο ασκώντας του οριζόντια δύναμη. Έτσι, αφού διανύσει κάποια μέτρα στον διάδρομο, συνεχίζει στο σαλόνι του σπιτιού του. Στο διάγραμμα παριστάνεται το μέτρο της τριβής που ασκείται στο κιβώτιο κατά την ολίσθησή του στον διάδρομο και στη συνέχεια, μετά τη χρονική στιγμή t_1, στο σαλόνι.



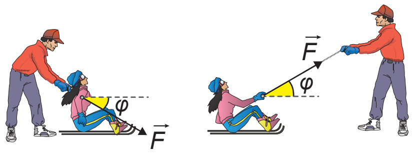
Να εξηγήσετε σε ποιο από τα δύο πατώματα (διαδρόμου – σαλονιού) το κιβώτιο παρουσιάζει μικρότερο συντελεστή τριβής;

3. Μια μαθήτρια, προκειμένου να μεταφέρει τα βιβλία της σε άλλο δωμάτιο του σπιτιού της, τα βάζει σε ένα χαρτόκουτο και αρχίζει να το σπρώχνει, ώστε αυτό να γλιστρά πάνω στο πάτωμα. Όταν η μαθήτρια αφαίρεσε μερικά βιβλία από το κουτί, διαπίστωσε ότι το μετακινεί ευκολότερα. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

4. Ένας εργάτης πρόκειται να σύρει ένα βαρύ έπιπλο πάνω στο πάτωμα μιας αποθήκης με τη βοήθεια σκοινιού. Η δύναμη που θα ασκήσει στο έπιπλο μπορεί να είναι (Α) οριζόντια ή (Β) πλάγια προς τα πάνω, όπως φαίνεται στην εικόνα. Σε ποια περίπτωση το έπιπλο έχει καλύτερη πρόσφυση με το πάτωμα; Είναι η τριβή ολίσθησης η ίδια και στις δύο περιπτώσεις; Αν όχι, τότε σε ποια περίπτωση είναι μεγαλύτερη;



5. Ένας πατέρας έχει βγει βόλτα σε κάποιο χιονισμένο βουνό με τη μικρή του κόρη για να παίξουν με ένα έλκηθρο. Επιλέγουν μια επίπεδη περιοχή και ο πατέρας αρχίζει να κινεί το έλκηθρο πάνω στο οποίο βρίσκεται η κόρη του. Αρχικά, σπρώχνει το έλκηθρο (εικόνα Α) και μετά το έλκει με σκοινί (εικόνα Β).

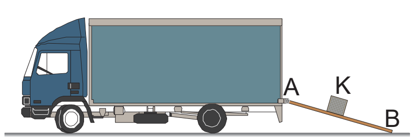


(A) (B)

Σε ποια περίπτωση θεωρείτε ότι το έλκηθρο έχει καλύτερη πρόσφυση με την επιφάνεια του χιονιού; Σε ποια περίπτωση θα είναι μεγαλύτερη η τριβή; Να σχεδιάσετε κατάλληλα διαγράμματα δυνάμεων, θεωρώντας το έλκηθρο μαζί με το παιδί ως υλικό σημείο στην αρχή συστήματος συντεταγμένων xOy με τον άξονα x οριζόντιο. Να αναλύσετε στους άξονες οποιαδήποτε δύναμη δεν ταυτίζεται με κάποιον από αυτούς.

Ασκήσεις

1. Κατά την εκφόρτωση κιβωτίων από ένα φορτηγό, οι εργάτες χρησιμοποιούν τη ράμπα ΑΒ, όπως παριστάνεται στην εικόνα. Αφήνουν από το σημείο Α ένα κιβώτιο Κ το οποίο γλιστρά έως το σημείο Β. Η κλίση της ράμπας είναι τέτοια, ώστε η κάθετη δύναμη επαφής να ισούται με το 80% του βάρους του κιβωτίου. Επίσης, οι επιφάνειες της ράμπας και του κιβωτίου είναι τέτοιες, ώστε η τριβή να ισούται με το 16% του βάρους του κιβωτίου.

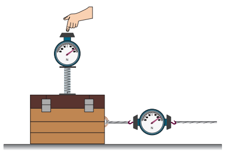


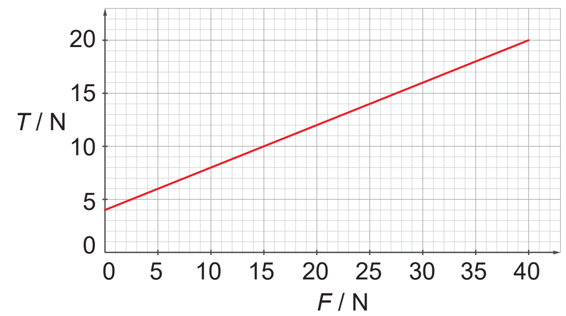
Να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ ράμπας και κιβωτίου.

2. (Αποτελεί συνέχεια της άσκησης 3 της υποενότητας 1.1 που αναφέρεται στον δρομέα που προπονείται σε στίβο.)

Να υπολογίσετε το μέτρο της οριζόντιας συνιστώσας αυτής της δύναμης, δηλαδή της στατικής τριβής που ασκείται στον δρομέα κατά την επαφή του με το ταρτάν και να τη σχεδιάσετε.

3. Σε ένα πείραμα υπολογισμού της τριβής ολίσθησης μπορούμε να αυξάνουμε την κάθετη δύναμη επαφής πιέζοντας κατακόρυφα με το χέρι μας. Το μέτρο F της δύναμης που ασκούμε με το χέρι υπολογίζεται από ειδικό δυναμόμετρο, όπως φαίνεται στην εικόνα. Για διάφορες τιμές του μέτρου F της ασκούμενης δύναμης μετρήθηκε πειραματικά το μέτρο T της τριβής ολίσθησης και προέκυψε το αντίστοιχο διάγραμμα.



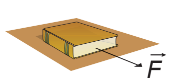


Με βάση το διάγραμμα, να υπολογίσετε:

α) τον συντελεστή τριβής ολίσθησης και

β) την τιμή της κάθετης δύναμης επαφής πριν πιέσουμε επιπρόσθετα με το χέρι.

4. Ένα βιβλίο βάρους 10 N σύρεται και ολισθαίνει πάνω σε ένα ράφι με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του βιβλίου και του ραφιού είναι 0,5.



α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις: του βάρους, της κάθετης δύναμης επαφής και της τριβής που ασκούνται στο βιβλίο.

β) Αν η κάθετη δύναμη επαφής έχει το ίδιο μέτρο με το βάρος, να βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της συνισταμένης της κάθετης δύναμης επαφής και της τριβής, η οποία είναι η συνολική δύναμη που ασκείται από το ράφι στο βιβλίο κατά την ολίσθηση.

1ο ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

(Προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας: 2)

1.4 Το πρότυπο του άκαμπτου σώματος υπό την επίδραση δυνάμεων

Στο μάθημα της Φυσικής υιοθετούμε επιστημονικές πρακτικές και συναφείς με αυτές δεξιότητες (καταγραφή παρατηρήσεων, αναζήτηση και αξιολόγηση διάφορων πηγών πληροφόρησης, λήψη μετρήσεων, εξαγωγή και παρουσίαση της πληροφορίας μέσω διάφορων αναπαραστάσεων, αξιολόγηση και επαναδιατύπωση επιστημονικών ευρημάτων), τις οποίες ταξινομούμε σε ένα τριμερές σχήμα. Το σχήμα αυτό περιλαμβάνει:

α. την προετοιμασία της πρακτικής, γι' αυτό χαρακτηρίζεται ως *στρατηγική*,

β. την *υλοποίησή* της στο εργαστήριο ή την τάξη και

γ. την *παρουσίασή* της και τον *αναστοχασμό* σχετικά με αυτήν.

Στο τμήμα αυτό του βιβλίου:

I. Θα εργαστείτε με την *επιστημονική/εκπαιδευτική μέθοδο της διερεύνησης*, η οποία έχει προτυποποιηθεί για διδακτικούς λόγους σε *πέντε βήματα*, που, όμως, περιέχουν πλήθος δυνατοτήτων και μπορείτε να τα αξιοποιήσετε σύμφωνα με τις ανάγκες και τις επιλογές σας.

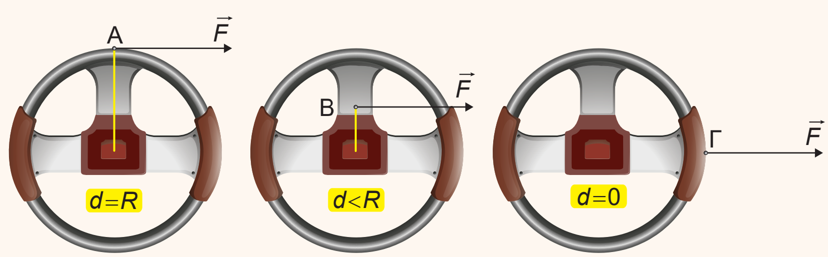
II. Θα επιλέξετε εργαλεία (όπως *πολλαπλές αναπαραστάσεις*, *λύση προβλημάτων*, *πειραματισμό και ψηφιακές προσεγγίσεις*) που είναι ικανά να υποστηρίξουν τις επιστημονικές πρακτικές.

Α. Στρατηγική προετοιμασίας (περιλαμβάνει τα βήματα 1ο και 2ο)

Βήμα 1ο: Έναυσμα ενδιαφέροντος

Μελετούμε τις **εικόνες 1.17** και **1.18** που αναπαριστάνουν καταστάσεις σχετικές με την *ευκολία περιστροφής* των σωμάτων.

Εικόνα 1.17 Προσπαθούμε να κλείσουμε την πόρτα.



Εικόνα 1.18 Δυνάμεις σε τιμόνι

Βήμα 2ο: Προϋπάρχουσες γνώσεις – Προβληματισμός – Διατύπωση υποθέσεων

Μπορούμε να επικαλεστούμε την εμπειρία μας είτε από τον τρόπο που επιχειρούμε να ανοίξουμε ή να κλείσουμε μια πόρτα είτε από το πώς στρίβουμε το τιμόνι του αυτοκινήτου μας, ώστε να έχουμε μια πρώτη προσέγγιση στο ζήτημα της περιστροφής σωμάτων και των αιτίων της. Είναι σίγουρο ότι το αίτιο για μια περιστροφή είναι η δύναμη. Το πόσο αποτελεσματικά δρα η δύναμη εξαρτάται, βέβαια, από το σημείο όπου ασκείται. Κανένας δεν θα επιχειρούσε να κλείσει μια πόρτα ασκώντας δύναμη πάνω στον άξονα περιστροφής της. Αντίθετα, η κατάσταση διευκολύνεται όσο πιο μακριά από τον άξονα περιστροφής ασκείται η δύναμη.

Υποθέσεις:

1η: Μια δύναμη που ασκείται σε ένα ακίνητο σώμα μπορεί να προκαλέσει την περιστροφή του σώματος κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.

2η: Τα αποτελέσματα της επίδρασης μιας δύναμης σε σώμα που μπορεί να περιστρέφεται εξαρτώνται:

- από το μέτρο της δύναμης,
- από την απόσταση μεταξύ του φορέα της δύναμης και ενός σημείου που συνηθίζουμε να το ονομάζουμε **σημείο περιστροφής** ή ενός άξονα που ονομάζεται **άξονας περιστροφής**.

Β. Ερευνητικό στάδιο (περιλαμβάνει το 3ο βήμα)

Βήμα 3ο: Δραστηριότητες – Πειραματισμός

Πείραμα

Συμπληρωμένος πίνακας

Γ. Παρουσίαση των αποδεικτικών στοιχείων (περιλαμβάνει τα βήματα 4ο και 5ο)

Βήμα 4ο: Συμπεράσματα – Νέες γνώσεις – Εφαρμογές

Το περιστροφικό αποτέλεσμα μιας δύναμης, που περιγράφεται από το μέγεθος που ονομάζεται **ροπή**, είναι:

- μηδέν, όταν η δύναμη ασκείται στον άξονα περιστροφής και
- ανάλογο της απόστασης ανάμεσα στο σημείο όπου ασκείται η δύναμη και στον άξονα περιστροφής.

Η ροπή είναι διανυσματικό μέγεθος.

Ορισμοί

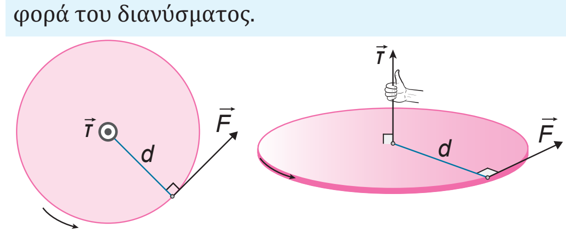
► **Ροπή δύναμης ως προς σημείο**

Είναι διάνυσμα με:

- *μέτρο* το γινόμενο της δύναμης επί την απόσταση του σημείου από τη δύναμη, δηλαδή $\tau = F \cdot d$,
- *διεύθυνση* την ευθεία που είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το σημείο και τη δύναμη,
- *φορά* που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού (**Σχήμα 1.20**).

Ο κανόνας του δεξιού χεριού

Όταν τα καμπυλωμένα δάκτυλα του δεξιού χεριού δείχνουν τη φορά περιστροφής, ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του διανύσματος.



Σχήμα 1.20 Ροπή δύναμης ως προς σημείο

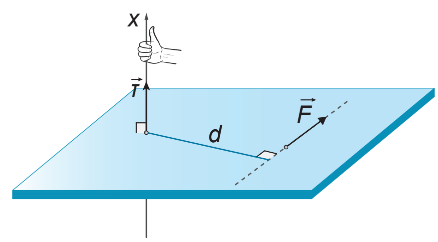
Παράδειγμα

Η ρόδα που περιστρέφεται γύρω από το κέντρο της.

► Ροπή δύναμης ως προς άξονα

Είναι διάνυσμα με:

- *μέτρο* το γινόμενο της δύναμης επί την απόσταση μεταξύ του άξονα και της δύναμης, δηλαδή $\tau = F \cdot d$,
- *διεύθυνση* που ταυτίζεται με τον άξονα,
- *φορά* που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού (**Σχήμα 1.21**).



Σχήμα 1.21 Ροπή δύναμης ως προς άξονα

Παράδειγμα

Η πόρτα που περιστρέφεται γύρω από την ευθεία που ορίζουν οι μεντεσέδες.

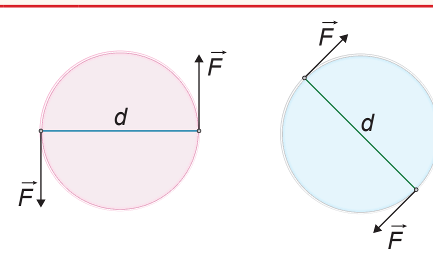
I. Προβλέψεις – Ερμηνείες

Τίθεται το ερώτημα: «Μπορεί δύο αντίθετες (ίσα μέτρα και αντίθετη κατεύθυνση) δυνάμεις να περιστρέψουν ένα σώμα;»

Ορισμοί

Ζεύγος δυνάμεων είναι ένα σύστημα δύο δυνάμεων οι οποίες ασκούνται σε δύο διαφορετικά σημεία ενός σώματος και είναι αντίθετες, (δηλαδή είναι παράλληλες, έχουν αντίθετη φορά και ίσα μέτρα) (**Σχήμα 1.22**).

Η απόσταση *d* μεταξύ των φορέων των δύο δυνάμεων λέγεται **μοχλοβραχίονας** του ζεύγους δυνάμεων.



Σχήμα 1.22 Ζεύγη δυνάμεων

Ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι το διανυσματικό φυσικό μέγεθος που έχει:

- *διεύθυνση* την ευθεία που είναι κάθετη στο επίπεδο του ζεύγους δυνάμεων,
- *φορά* που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού,
- *μέτρο* το γινόμενο του μέτρου της μίας από τις δύο δυνάμεις επί την απόσταση *d*, δηλαδή $\tau = F \cdot d$.

Ζεύγος δυνάμεων

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

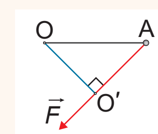
Το ζεύγος δυνάμεων μπορεί ΜΟΝΟ να περιστρέψει ένα σώμα. Δεν μπορεί να το μεταφέρει, διότι η συνισταμένη των δυνάμεων είναι ίση με μηδέν.

Σύμβαση

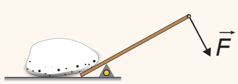
Το πρόσημο μιας ροπής είναι μια «σύμβαση», η οποία βοηθάει στη μαθηματική μελέτη των ροπών των δυνάμεων και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων τους στην καθημερινή ζωή. Θεωρούμε τη ροπή μιας δύναμης αρνητική για ένα σώμα που περιστρέφεται με την επίδρασή της σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ενώ, αν περιστρέφεται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, τη χαρακτηρίζουμε ως θετική. (Μπορούμε να θεωρήσουμε και την αντίθετη σύμβαση.)

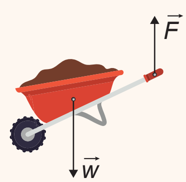
II. Λύση προβλήματος

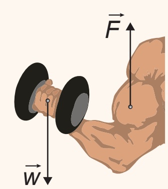
1. Με βάση την παραπάνω σύμβαση να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
Η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο O είναι:
α. $\tau = F \cdot (OA)$ **β.** $\tau = -F \cdot (OA)$ **γ.** $\tau = F \cdot (OO')$ **δ.** $\tau = -F \cdot (OO')$

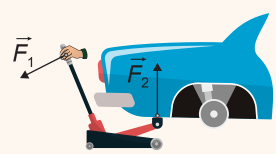


2. Με βάση την παραπάνω σύμβαση να βρείτε το πρόσημο της ροπής κάθε δύναμης που είναι σχεδιασμένη στα παρακάτω σχήματα:









Βήμα 5ο: Γενικεύσεις – Ερμηνείες – Διαθεματικότητα

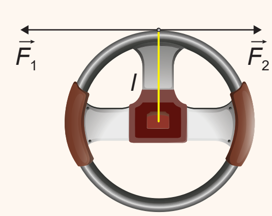
I. Γενίκευση στην καθημερινή ζωή και τεχνολογία

Να σχεδιάσετε τη δύναμη και την απόσταση που αναφέρονται στον ορισμό της ροπής στην διπλανή εικόνα.

Το θεώρημα των ροπών για ομοεπίπεδες δυνάμεις

Με βάση το σχήμα θα αποδείξουμε την πρόταση:

Η συνισταμένη $\Sigma\tau$ των ροπών τ_1, τ_2 των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ αντίστοιχα είναι ίση με τη ροπή που προκαλεί η συνισταμένη όλων των δυνάμεων.



Η πρόταση εκφράζει μια ισότητα, άρα έχει δύο μέλη.

1ο μέλος:	**2ο μέλος:**
Η συνισταμένη $\Sigma\tau$ των ροπών τ_1, τ_2 των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ αντίστοιχα.	Η ροπή που προκαλεί η συνισταμένη όλων των δυνάμεων.

Υπολογισμοί: $\Sigma\tau = \tau_1 + \tau_2$ ή $\Sigma\tau = F_1 l - F_2 l$ ή $\Sigma\tau = (F_1 - F_2) l$	**Υπολογισμοί:** $\Sigma\tau = (\Sigma F) l$

Συμπέρασμα

Τα δύο μέλη είναι ίσα, διότι η συνισταμένη των F_1 και F_2 είναι $\Sigma F = F_1 - F_2$.

Η πρόταση αυτή γενικεύεται για περισσότερες από δύο δυνάμεις και αποτελεί το **θεώρημα των ροπών** με μαθηματικό τύπο:

$$\Sigma\tau = (\Sigma F) l$$

II. Διεπιστημονικότητα – Διαθεματικότητα

Κέντρο μάζας – Κέντρο βάρους

Θεωρούμε ότι ένα στερεό σώμα μάζας m αποτελείται από έναν μεγάλο αριθμό στοιχειωδών μαζών: m_1, m_2, m_3, …, m_k. Τα βάρη των μαζών είναι δυνάμεις παράλληλες της ίδιας φοράς και έχουν συνισταμένη το βάρος του σώματος.

Κέντρο βάρους ενός σώματος ονομάζουμε ένα σταθερό ως προς το σώμα σημείο από το οποίο διέρχονται οι κατακόρυφοι που ορίζονται από τη διεύθυνση του βάρους του σώματος, οποιονδήποτε προσανατολισμό κι αν δώσουμε στο σώμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Το κέντρο βάρους ενός ομογενούς και συμμετρικού σώματος συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας του σώματος.
- Το κέντρο βάρους είναι δυνατόν να βρίσκεται εκτός του σώματος, (π.χ. σε δαχτυλίδι).
- Αν ένα σώμα στηριχτεί στην κατακόρυφο που διέρχεται από το κέντρο βάρους του, θα ισορροπήσει.
- Αν ένα σώμα έχει άξονα συμμετρίας, το κέντρο βάρους του βρίσκεται σε κάποιο σημείο του άξονα συμμετρίας.
- Το κέντρο βάρους τριγωνικού σώματος είναι το σημείο τομής των διαμέσων του, γι' αυτό και στη Γεωμετρία ονομάζεται **βαρύκεντρο**.
- Το **κέντρο μάζας** ενός σώματος είναι το σημείο το οποίο συμπεριφέρεται ως η μάζα όλου του σώματος να είναι συγκεντρωμένη σ' αυτό, ώστε το σώμα να θεωρείται υλικό σημείο. Στην περίπτωση ομογενούς βαρυτικού πεδίου το κέντρο μάζας *συμπίπτει* με το κέντρο βάρους.

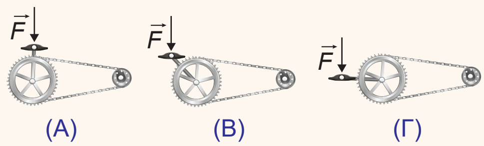
Δραστηριό-τητες

Εύρεση κέντρου μάζας με διαδοχικές αναρτήσεις

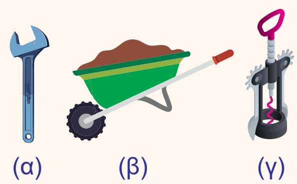
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Να συγκρίνετε το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ ως προς τον άξονα περιστροφής του πεντάλ, την οποία ασκεί το πόδι ενός μαθητή στα στιγμιότυπα Α, Β και Γ του σχήματος.



2. Χρησιμοποιώντας την έννοια της ροπής να εξηγήσετε την αρχή λειτουργίας των παρακάτω εργαλείων:



α) γερμανικό κλειδί,

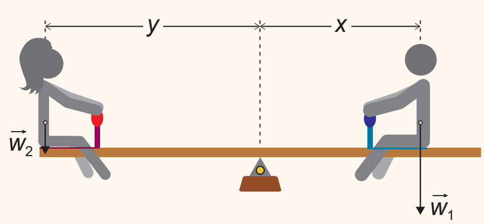
β) καρότσι οικοδομής,

γ) ανοιχτήρι κρασιού.

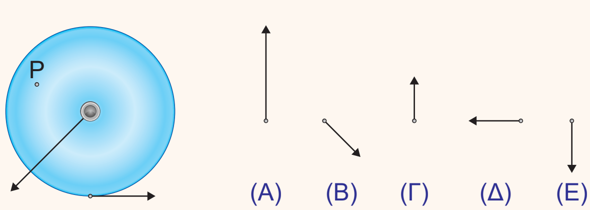
3. Να εξηγήσετε γιατί το πόμολο μιας πόρτας βρίσκεται στο ένα άκρο της απέναντι από τους μεντεσέδες γύρω από τους οποίους μπορεί να στρέφεται η πόρτα και δεν είναι στο μέσο της.

4. Ο **χρυσός κανόνας της Μηχανικής** αναφέρει: «Ό,τι χάνουμε σε δύναμη το κερδίζουμε σε απόσταση.»

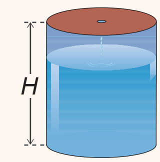
Ένας πατέρας κάνει τραμπάλα με το παιδί του. Εάν το βάρος του πατέρα είναι τριπλάσιο του βάρους του παιδιού, να εκφράσετε το x σε σχέση με το y έτσι, ώστε οι ροπές των βαρών να έχουν ίσα μέτρα.

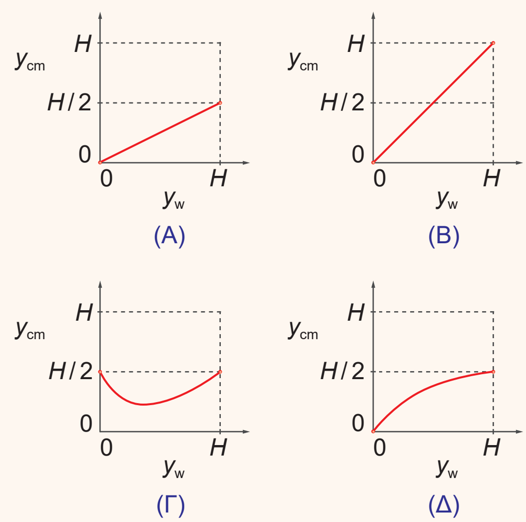


5. Δύο δυνάμεις ενεργούν στον τροχό του σχήματος. Ποια από τις δυνάμεις: (Α), (Β), (Γ), (Δ), (Ε), πρέπει να ασκηθεί στο σημείο Ρ έτσι, ώστε να μηδενιστεί η συνολική ροπή στον τροχό; Όλα τα διανύσματα είναι σχεδιασμένα υπό κλίμακα.



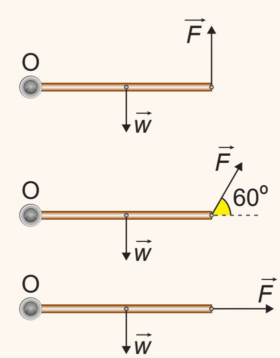
6. Στο σχήμα φαίνεται ένα πλαστικό δοχείο ύψους H, αρχικά κενό, στο οποίο κάποια χρονική στιγμή άρχισε να στάζει νερό με σταθερό ρυθμό μέσα από ένα μικρό άνοιγμα στο πάνω μέρος του. Να επιλέξετε το γράφημα που περιγράφει τη σωστή εξάρτηση της κατακόρυφης θέσης του κέντρου μάζας του νερού (y_{cm}) από το ύψος της στάθμης του νερού (y_w). Να θεωρήσετε το μηδέν του κατακόρυφου άξονα y στον πυθμένα του δοχείου και ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω.





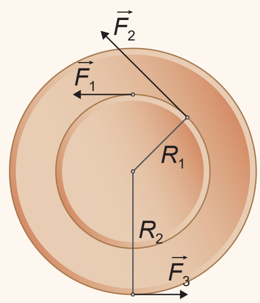
Ασκήσεις

1. Η ομογενής και συμπαγής ράβδος του σχήματος έχει βάρος 40 N και μήκος 2 m. Η ράβδος βρίσκεται σε οριζόντια θέση και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το άκρο της Ο. Στη ράβδο ασκείται δύναμη $\vec{F}$ ίσου μέτρου με το βάρος της με τους τρεις τρόπους που φαίνονται στο σχήμα.



Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το άκρο Ο σε κάθε περίπτωση.

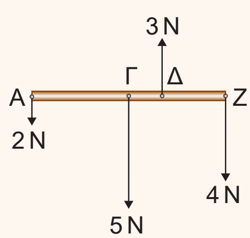
2. Στη διπλή τροχαλία του σχήματος ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_3$ με μέτρα 12 N, 24 N και 12 N αντίστοιχα. Για τις ακτίνες δίνεται ότι $R_1 = 6$ cm και $R_2 = 8$ cm.



α) Να αναγνωρίσετε το ζεύγος δυνάμεων και να υπολογίσετε τη ροπή του.

β) Να υπολογίσετε τη συνολική ροπή (μέτρο και κατεύθυνση) που ασκείται στη διπλή τροχαλία ως προς το κέντρο της.

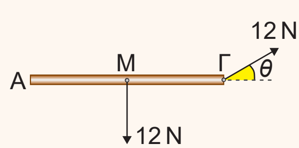
3. Στο σχήμα παριστάνονται τέσσερις παράλληλες δυνάμεις που ασκούνται σε μια λεπτή ράβδο. Δίνονται οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων εφαρμογής των δυνάμεων:



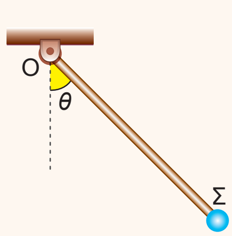
$(\text{ΑΓ}) = 50$ cm, $(\text{ΑΔ}) = 70$ cm και $(\text{ΑΖ}) = 100$ cm.

Να υπολογίσετε το μέτρο και να προσδιορίσετε την κατεύθυνση, καθώς και το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των τεσσάρων δυνάμεων.

4. Στο σχήμα παριστάνονται δύο δυνάμεις με ίσα μέτρα που ασκούνται σε μια λεπτή ράβδο ΑΓ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΓ. Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς το Α είναι μηδέν, να προσδιορίσετε τη γωνία θ.



5. Το εκκρεμές του σχήματος αποτελείται πρακτικά από μια αβαρή ράβδο μήκους 1 m, η οποία μπορεί να στρέφεται ελεύθερα γύρω από το ένα άκρο της Ο σε κατακόρυφο επίπεδο, ενώ στο άλλο άκρο της είναι στερεωμένο σφαιρίδιο Σ πολύ μικρών διαστάσεων με βάρος 3 N. Η ράβδος αφήνεται να κινηθεί από την οριζόντια θέση, δηλαδή $\theta = 90°$.



Τα ακόλουθα ερωτήματα αφορούν στην κίνηση του εκκρεμούς έως την κατακόρυφη θέση, δηλαδή $0° \le \theta \le 90°$.

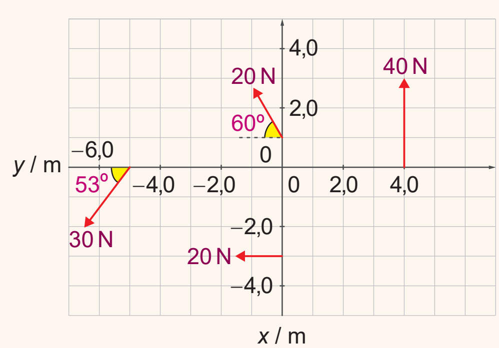
α) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το μέτρο τ της ροπής του βάρους του σφαιριδίου ως προς το σημείο στήριξης Ο της ράβδου συναρτήσει της γωνίας θ.

β) Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα με στρογγυλοποίηση των τιμών σε ένα δεκαδικό ψηφίο.

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
τ / N·m					

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της σχέσης $\tau = f(\theta)$.

6. Να υπολογίσετε τη ροπή των δυνάμεων που εμφανίζονται στο διάγραμμα ως προς την αρχή των αξόνων (Ο). Οι δυνάμεις ασκούνται στα σημεία ενός σώματος που μπορεί να περιστραφεί γύρω από άξονα που διέρχεται από το Ο.
(Τα μήκη των δυνάμεων είναι προσεγγιστικά σχεδιασμένα και όχι με την ακρίβεια της κλίμακας.)



7. Στα άκρα μιας πρακτικά αβαρούς ράβδου μήκους 120 cm προσαρμόζουμε δύο σφαίρες Α και Β μικρών διαστάσεων με βάρη $w_B = 2w_A$.

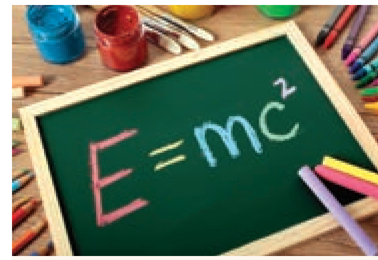
Να προσδιορίσετε το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των βαρών των σφαιρών, δηλαδή το «κέντρο βάρους» του συστήματος των σφαιρών, που είναι και κέντρο μάζας.

1.5 Νόμος Παγκόσμιας Έλξης

1. Οι ιδιότητες της μάζας

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο έγινε αναφορά στα θεμελιώδη φυσικά μεγέθη, μεταξύ των οποίων συγκαταλέγεται η μάζα ενός σώματος. Αν και ο χαρακτηρισμός ενός μεγέθους ως «θεμελιώδες» σημαίνει ότι δεν μπορεί να οριστεί σε συνάρτηση με άλλα, είναι σίγουρα χρήσιμο να κατανοήσουμε τη φύση της μάζας πριν μελετήσουμε τη… Φυσική της. Λέμε συχνά ότι μάζα είναι η ποσότητα της ύλης που περιέχει ένα σώμα, αλλά αυτό είναι λιγότερο ορισμός και περισσότερο υπεκφυγή, αφού δεν έχουμε ορίσει την έννοια της ύλης. Άλλες φορές, αναφέρουμε, ίσως, τον διασημότερο τύπο της Φυσικής: $E = mc^2$, που συσχετίζει τη μάζα m με την ενέργεια E μέσω της ταχύτητας c του φωτός. Σε βιβλία εκλαΐκευσης της επιστήμης βρίσκουμε εκφράσεις του τύπου: «Η μάζα είναι συμπυκνωμένη ενέργεια και η ενέργεια είναι εξαϋλωμένη μάζα». Ακόμη και αν παραβλέψουμε τον κυκλικό ορισμό ή το γεγονός ότι δεν έχουμε ορίσει τι είναι ενέργεια, οι όροι «συμπυκνωμένη» και «εξαϋλωμένη» είναι εξαιρετικά ασαφείς, για να συνιστούν επιστημονική διατύπωση.

Γι' αυτό, αναζητήσαμε τρόπους για να περιγράψουμε τη μάζα βασιζόμενοι στις ιδιότητές της.



Εικόνα 1.20 Ίσως ο διασημότερος τύπος της Φυσικής

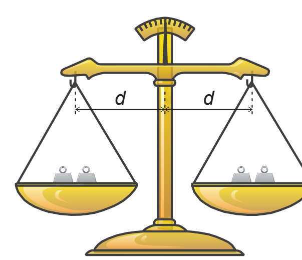
Εικόνα 1.21 Η ζυγαριά μπάνιου μετράει ουσιαστικά τη βαρυτική μάζα.

Δύο είναι οι βασικές ιδιότητες της μάζας:

I. Αντιτίθεται σε κάθε προσπάθεια μεταβολής της κινητικής της κατάστασης· ιδιότητα που ονομάζεται **αδράνεια**. Η ιδιότητα αυτή θα μας απασχολήσει στην υποενότητα 2.2 και θα μας οδηγήσει στον ορισμό της **αδρανειακής μάζας**.

II. Ασκεί ελκτική δύναμη σε κάθε άλλη μάζα· ιδιότητα που ονομάζεται **βαρύτητα**. Η ιδιότητα αυτή είναι το αντικείμενο μελέτης της υποενότητας και μας επιτρέπει να ορίσουμε τη **βαρυτική μάζα**

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι οι δύο παραπάνω ορισμοί οδηγούν σε ταυτόσημα πειραματικά αποτελέσματα.



Εικόνα 1.22 Ζυγαριά ισορροπίας

Στην καθημερινότητά μας, για να μετρήσουμε τη μάζα χρησιμοποιούμε τη βαρύτητα. Ένας απλός τρόπος μέτρησης είναι με τη χρήση μιας ζυγαριάς ισορροπίας που φέρει δύο τάσια (δίσκους). Τοποθετώντας ίσα βάρη στα τάσια της ζυγαριάς, οι δημιουργούμενες αντίθετες ροπές διατηρούν τη ζυγαριά με οριζόντιους τους βραχιονές της (**Εικόνα 1.22**). Αφού μια ζυγαριά μετράει λοιπόν το βάρος ενός σώματος, πώς καταλήγουμε να τη χρησιμοποιούμε, για να μετράμε μάζα; Αυτό μπορεί να συμβαίνει, διότι *το βάρος είναι ανάλογο της μάζας*· συνεπώς, μετρώντας το ένα προσδιορίζουμε την άλλη. Πώς εκφράζεται αυτή η αναλογία;

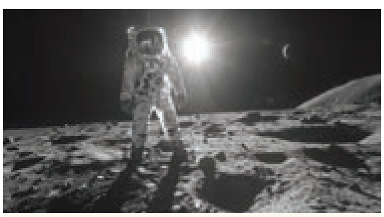
Τι μετράει η ηλεκτρονική ζυγαριά;

Αρχικά, επισημαίνουμε ότι το βάρος w δεν ταυτίζεται με τη μάζα m. Στην πραγματικότητα, έχουν τη *σχέση αιτίου και αποτελέσματος*, μιας και η μάζα M της Γης προκαλεί την άσκηση ελκτικής δύναμης σε μια άλλη μάζα m και η δύναμη αυτή ονομάζεται βάρος της m. Αφού το βάρος και η μάζα δεν είναι ομοειδή μεγέθη, η σταθερά αναλογίας τους δεν θα είναι ένας καθαρός αριθμός, αλλά ένα φυσικό μέγεθος, το οποίο συμβολίζουμε με g από την αγγλική λέξη gravity που σημαίνει βαρύτητα. Γράφουμε λοιπόν:

$$w = mg \qquad \textbf{(1.9)}$$

Η αναλογία αυτή αποτελεί την αρχή λειτουργίας της ζυγαριάς ισορροπίας. Γνωρίζουμε ότι μια «τίμια» ζυγαριά θα έχει βραχίονες με ίσα μήκη. Τοποθετώντας δύο ίσες μάζες στα τάσια της ζυγαριάς, τα ίσα βάρη τους θα παραγάγουν αντίθετες ροπές και η ζυγαριά θα παραμένει με οριζόντιους τους βραχίονες. Αν η μάζα στο αριστερό τάσι είναι γνωστή (σταθμά), προσδιορίζουμε αυτομάτως την άγνωστη μάζα στο δεξιό τάσι.

Η σταθερά αναλογίας έχει τιμή $g \approx 9{,}81\,\text{N/kg}$. Όταν η ακρίβεια των υπολογισμών δεν είναι το κύριο μέλημά μας, χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική τιμή $g \approx 10\ \text{N/kg}$. Έτσι, ένας άνθρωπος μάζας $70\ \text{kg}$ δέχεται από τη Γη ελκτική δύναμη μέτρου $700\ \text{N}$.



Εικόνα 1.23 Το βάρος του αστροναύτη είναι 6 φορές μικρότερο στη Σελήνη από ό,τι στη Γη.

Οι αστροναύτες που προσεδαφίστηκαν στη Σελήνη βίωσαν ελκτική δύναμη μειωμένη σε σχέση με εκείνη από τη Γη. Πραγματικά, για σώματα που βρίσκονται στην επιφάνεια της Σελήνης ισχύει $g_{\Sigma} \approx 1{,}62\ \text{N/kg}$, δηλαδή περίπου το $1/6$ της τιμής στην επιφάνεια της Γης. Αν, λοιπόν, ο άνθρωπος του παραπάνω παραδείγματος κατάφερνε να προσσεληνωθεί, θα αισθανόταν το σεληνιακό βάρος του ίσο μόλις $113{,}4\ \text{N}$! Η μεταβολή αυτή είναι μια πρόσθετη απόδειξη ότι το βάρος και η μάζα δεν ταυτίζονται. *Το βάρος μεταβάλλεται, ενώ η μάζα παραμένει σταθερή*.

Νόμος αντίστροφου τετραγώνου

Στην επιστημονική εργασία του ο Νεύτωνας βασίστηκε σε αστρονομικές μετρήσεις για τις κινήσεις της Σελήνης και κομητών. Τελικά, κατέληξε ότι η βαρυτική δύναμη που δέχεται ένα σώμα είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης r από το ελκτικό κέντρο Κ. Η συγκεκριμένη εξάρτηση από την απόσταση περιγράφεται συνοπτικότερα ως «Νόμος του αντίστροφου τετραγώνου» και ισχύει με την προϋπόθεση ότι οι διαστάσεις των σωμάτων που αλληλεπιδρούν βαρυτικά είναι πολύ μικρότερες από τη μεταξύ τους απόσταση, ώστε δικαιολογημένα να ταυτίζουμε την r με την απόσταση από το κέντρο του ενός σώματος μέχρι το κέντρο του άλλου.

2. Διατύπωση του Νόμου της Παγκόσμιας Έλξης

Η ιδιότητα της μάζας ενός σώματος να έλκεται από τη Γη και τη Σελήνη, που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, γενικεύεται για κάθε ζεύγος μαζών. Έτσι, η σχέση που περιγράφει την ελκτική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο μαζών φέρει το όνομα **Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης**. Αντιπροσωπεύει την πρώτη μεγάλη ενοποίηση στη Φυσική που έγινε κατά τον 17ο αιώνα από τον Isaac Newton.

Ο Νεύτωνας βρήκε ότι το μέτρο της βαρυτικής δύναμης είναι ανάλογο του γινομένου των μαζών που αλληλεπιδρούν.

Η πλήρης έκφραση του μέτρου της ελκτικής δύναμης στην οποία κατέληξε ο Νεύτωνας έχει τη μορφή:

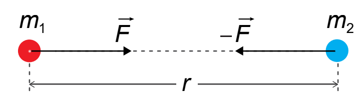
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \textbf{(1.10)}$$

όπου $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ είναι η Σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης. Ενδέχεται να δείτε τη βαρυτική δύναμη να συμβολίζεται ως:

F_N (από το όνομα του Newton), F_g (από τη λέξη gravity) ή το εξελληνισμένο $F_{βαρ}$.

Ο φορέας της δύναμης συμπίπτει με την ευθεία την οποία ορίζουν τα δύο σημειακά σώματα. Στην πραγματικότητα, ο νόμος αυτός περιγράφει τη δύναμη που ασκεί η m_1 στην m_2, αλλά και τη δύναμη που ασκεί η m_2 στην m_1. Συνεπώς, δεν έχει νόημα να κάνουμε διάκριση φοράς, διότι σε κάθε βαρυτική αλληλεπίδραση εμφανίζεται πάντοτε ζευγάρι δυνάμεων με φορά τόσο προς τη μια όσο και προς την αντίθετη κατεύθυνση, σε συμφωνία με τον Νόμο Δράσης-Αντίδρασης.

Λόγω της κατεύθυνσής της, η βαρυτική δύναμη ονομάζεται **κεντρική**, αφού έχει πάντοτε φορά προς το κέντρο του σώματος που την ασκεί.



Σχήμα 1.23 Ελκτικές δυνάμεις μεταξύ δύο σημειακών σωμάτων

3. Ορισμός και υπολογισμός του βάρους ενός σώματος

Ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης δίνει το βάρος ενός σώματος. Συμπεραίνουμε ότι το αποτέλεσμα που δίνει (**Σχέση 1.10**) ταυτίζεται με την έκφραση του βάρους του σώματος στη **σχέση 1.9**.
Ισχύει λοιπόν:

$$mg = G\frac{M_Γ m}{r^2}$$

από την οποία προκύπτει:

$$g = G\frac{M_Γ}{r^2} \qquad \textbf{(1.11)}$$

Η κατακόρυφη και η οριζόντια διεύθυνση

Η σχέση αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της σταθεράς g σε οποιαδήποτε απόσταση. Όταν το σώμα βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης, η παραπάνω σχέση γράφεται στη μορφή:

$$g_0 = G\frac{M_Γ}{R_Γ^2} \qquad \textbf{(1.12)}$$

όπου $R_Γ$ η ακτίνα της Γης.

4. Παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται το βάρος ενός σώματος

Θα αξιοποιήσουμε τη **σχέση 1.10** του Νόμου της Παγκόσμιας Έλξης και τη **σχέση 1.11** της σταθεράς g για να αναλύσουμε κάποια χαρακτηριστικά του βάρους και να εντοπίσουμε τους παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται.

Λογισμικό

Βαρυτική έλξη συναρτήσει της απόστασης

Αρχικά, η **σχέση 1.11** επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό προηγούμενης υποενότητας ότι η τιμή της σταθεράς g μεταβάλλεται, άρα και το βάρος των σωμάτων, κατά τη μετάβαση από ένα ουράνιο σώμα σε ένα άλλο, μιας και αλλάζει το $M_Γ$ με τη μάζα του κάθε πλανήτη. Επιπλέον, σύμφωνα με την ίδια σχέση, η τιμή της σταθεράς g μεταβάλλεται, (πιο συγκεκριμένα μειώνεται), όταν απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια ενός πλανήτη, μιας και αυξάνεται η απόσταση r από το κέντρο του πλανήτη. Συνεπώς, το βάρος των σωμάτων ελαττώνεται με το ύψος από την επιφάνεια των πλανητών.

Δεδομένου ότι η τιμή της σταθεράς g εξαρτάται από την απόσταση r, συμπεραίνουμε ότι η τιμή της θα μεταβάλλεται με το γεωγραφικό πλάτος. Γνωρίζουμε ότι η Γη δεν έχει τελείως σφαιρικό σχήμα. Η ακτίνα στον Ισημερινό είναι $R_{Ισ} = 6.378{,}137\ \text{km}$ και στους Πόλους $R_{Πολ} = 6.356{,}752\ \text{km}$. Επειδή η g είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της ακτίνας και $R_{Πολ} < R_{Ισ}$, αναμένουμε μεγαλύτερη τιμή στους Πόλους. Δηλαδή, όταν βρισκόμαστε στους Πόλους, θα είμαστε βαρύτεροι σε σχέση με τον Ισημερινό. Πράγματι, αντικαθιστώντας τις τιμές της ακτίνας στη **σχέση 1.12**, βρίσκουμε ότι: $g_{0,\,Ισ} = 9{,}76\ \text{N/kg}$ και $g_{0,\,Πολ} = 9{,}83\ \text{N/kg}$.

Ολοκληρώνουμε τη μελέτη της βαρυτικής έλξης αναζητώντας την απάντηση σε δύο ερωτήματα:

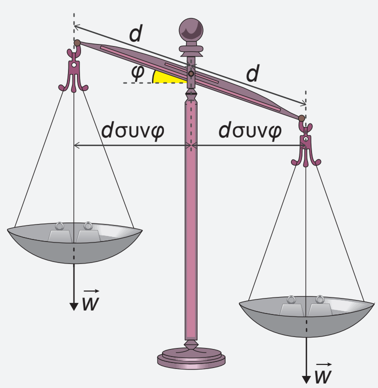
α) Είναι δυνατόν να μηδενιστεί η βαρυτική δύναμη;

β) Πώς οι μάζες αλληλεπιδρούν και πώς ασκείται η ελκτική δύναμη μεταξύ τους;

Απαντήσεις στα ερωτήματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.5

1. Έστω ότι σε μια ζυγαριά έχουμε ζυγίσει ένα σώμα, οπότε οι βραχίονές της είναι οριζόντιοι. Ασκούμε πρόσθετη ροπή στη ζυγαριά φέρνοντας τον βραχίονά της σε τέτοια θέση, ώστε να σχηματίζει τυχαία γωνία $\varphi \neq 0$ με την οριζόντια διεύθυνση και τον ακινητοποιούμε στη θέση αυτή. Μετά τον αφήνουμε ελεύθερο.



Ο βραχίονας:

A) θα επανέλθει στην οριζόντια διεύθυνση,

B) θα παραμείνει στη θέση που τον εκτρέψαμε.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

Η παρέμβαση στη ζυγαριά δεν προκαλεί αλλαγή στο σώμα και στα σταθμά. Όπως φαίνεται από το σχήμα, μετά την εκτροπή της ζυγαριάς από την οριζόντια διεύθυνση, η ροπή κάθε βάρους θα ισούται με $wd\sigma\upsilon\nu\varphi$. Δηλαδή, οι ροπές θα αλληλοεξουδετερώνονται και πάλι, άρα ο βραχίονας θα παραμείνει στη θέση που τον εκτρέψαμε.

2. Έστω ότι χρησιμοποιούμε μια ζυγαριά ισορροπίας τοποθετώντας τα σταθμά στο δεξιό τάσι και το προς ζύγιση σώμα στο αριστερό. Η ζυγαριά συνοδεύεται από τρία σταθμά με μάζες: $1\ \text{g}$, $2\ \text{g}$, $5\ \text{g}$ αντίστοιχα. Να περιγράψετε τη διαδικασία ζύγισης οποιασδήποτε ακέραιας μάζας στο διάστημα $[1\ \text{g}, 8\ \text{g}]$.

Λύση

Οι περισσότερες περιπτώσεις είναι απλές, αφού είναι εύκολο να σκεφτούμε ότι θα συνδυάσουμε τα σταθμά *προσθετικά*. Όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα, η περίπτωση των $4\ \text{g}$ απαιτεί *αφαιρετικό* συνδυασμό των σταθμών.

Για να ζυγίσουμε μάζα:	χρησιμοποιούμε τα σταθμά:
1 g	1 g
2 g	2 g
3 g	1 g και 2 g
5 g	5 g
6 g	1 g και 5 g
7 g	2 g και 5 g
8 g	1 g, 2 g και 5 g
4 g	5 g στο δεξιό τάσι και 1 g στο αριστερό μαζί με το προς ζύγιση σώμα

3. Γύρω στο 240 π.Χ., ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος χρησιμοποιώντας βασική τριγωνομετρία και απλές μετρήσεις προσδιόρισε την περιφέρεια της Γης σε $s = 39.690\ \text{km}$. Γνωρίζοντας ότι ένας άνθρωπος μάζας $m_\alpha = 70\ \text{kg}$ δέχεται βαρυτική έλξη από τον πλανήτη ίση περίπου με $w = 700\ \text{N}$, να υπολογίσετε τη μάζα της Γης M_Γ.

Ποιοι παράγοντες επηρεάζουν την ακρίβεια του υπολογισμού σας;

Λύση

Θεωρώντας τη Γη κατά προσέγγιση σφαιρική, βρίσκουμε την ακτίνα της ίση με:

$$R_\Gamma = \frac{s}{2\pi} = \frac{39.690\ \text{km}}{2\pi} \approx 6.320\ \text{km}$$

Εφαρμόζουμε τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης:

$$w = G\frac{M_\Gamma m_\alpha}{R_\Gamma^2}$$

και τον επιλύουμε ως προς τη μάζα της Γης:

$$M_\Gamma = \frac{wR_\Gamma^2}{Gm_\alpha} = 5{,}99\cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

Το αποτέλεσμα αποτελεί μια καλή προσέγγιση της τιμής που αναφέρεται στη βιβλιογραφία και είναι $M_\Gamma = 5{,}972\cdot 10^{24}\ \text{kg}$. Η απόκλιση οφείλεται στην τιμή της μέσης ακτίνας της Γης (με ακριβέστερη μέθοδο έχουμε καταλήξει στην τιμή 6.371 km), στην προσέγγιση της τιμής του π, αλλά και στο γεγονός ότι η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της.

4. Εφόσον κάθε σώμα δημιουργεί το δικό του βαρυτικό πεδίο, γιατί δεν έλκεστε από τα αντικείμενα του περιβάλλοντός σας και γιατί δεν τα έλκετε προς το μέρος σας;

Λύση

Στην πραγματικότητα, οι ελκτικές δυνάμεις που περιγράφονται στην εκφώνηση είναι υπαρκτές. Ας εφαρμόσουμε τη **σχέση 1.10** για την περίπτωση δύο ανθρώπων που έχουν μάζες $m_1 = m_2 = 70\ \text{kg}$ και απέχουν κατά $r = 1\ \text{m}$. Το μέτρο της ελκτικής τους δύναμης θα είναι:

$$\begin{aligned} F_\alpha &= G\frac{m_1 m_2}{r^2} \\ &= 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\frac{(70\ \text{kg})(70\ \text{kg})}{(1\ \text{m})^2} \\ &\approx 3{,}27\cdot 10^{-7}\ \text{N}, \end{aligned}$$

δηλαδή 0,3 εκατομμυριοστά του N.

Η Γη έλκει καθένα από τους δύο ανθρώπους προς τα κάτω με δύναμη $F = 700\ \text{N}$. Δεν υπάρχει περίπτωση, λοιπόν, ο ένας άνθρωπος να τραβήξει τον άλλο προς το μέρος του βαρυτικά.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

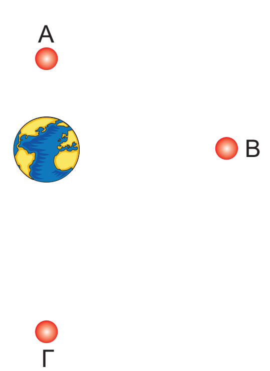
1. Ένας εκφωνητής ποδοσφαιρικού αγώνα κατά τη μετάδοση αναφέρει: «…η μπάλα χτύπησε μετά το συρτό σουτ στο *κάθετο* δοκάρι και βγήκε άουτ». Συμφωνείτε με τον χαρακτηρισμό που έδωσε ο εκφωνητής στο δοκάρι; Ναι ή όχι και γιατί;

2. Να εξηγήσετε χρησιμοποιώντας τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης, γιατί η βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο συμμαθητών που κάθονται στο ίδιο θρανίο είναι πρακτικά μηδενική.

3. Δύο πλανήτες Α και Β έχουν την ίδια πυκνότητα και την ίδια ακτίνα. Να συγκρίνετε τις βαρυτικές δυνάμεις που θα δεχόταν το ίδιο μη επανδρωμένο διαστημικό όχημα, εάν βρισκόταν στην επιφάνειά τους.

4. Να εκτιμήσετε σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της Γης το βάρος σας θα γίνει το μισό σε σχέση με την τιμή του στην επιφάνεια της Γης. Να εκφράσετε την απάντησή σας σε σχέση με την ακτίνα της Γης $R_Γ$.

5. Τρεις όμοιες σφαίρες Α, Β, Γ βρίσκονται σε κάποια σημεία γύρω από τη Γη, όπως παριστάνονται στην εικόνα. Το κέντρο της σφαίρας Α απέχει από το κέντρο της Γης απόσταση r, ενώ τα κέντρα των σφαιρών Β και Γ απέχουν από το κέντρο της Γης απόσταση $2r$.



Να σχεδιάσετε το διάνυσμα του βάρους κάθε σφαίρας και να συγκρίνετε τα μέτρα των βαρών.

Ασκήσεις

1. Η μάζα του θαλαμίσκου ενός διαστημοπλοίου εξερεύνησης είναι 100 kg. Αξιοποιώντας στοιχεία από τον πίνακα να υπολογίσετε το βάρος του:

α) στην επιφάνεια της Σελήνης και

β) στην επιφάνεια του Άρη.

Δίνεται $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 / kg^2}$.

Ουράνιο σώμα	Μάζα m / kg	Ακτίνα R / m
Ήλιος	$1{,}99 \times 10^{30}$	$6{,}96 \times 10^{8}$
Γη	$5{,}97 \times 10^{24}$	$6{,}38 \times 10^{6}$
Σελήνη	$7{,}35 \times 10^{22}$	$1{,}74 \times 10^{6}$
Άρης	$0{,}642 \times 10^{24}$	$3{,}40 \times 10^{6}$
Δίας	$19{,}0 \times 10^{26}$	$7{,}15 \times 10^{7}$

2. Αξιοποιώντας στοιχεία και από τους δύο πίνακες να υπολογίσετε τη βαρυτική δύναμη μεταξύ:

α) Γης-Ηλίου και

β) Άρη-Δία για απόσταση ίση με τη διαφορά των αποστάσεων των δύο πλανητών που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Αποστάσεις των πλανητών
του Ηλιακού μας συστήματος από τον Ήλιο

Δίνεται η μέση απόσταση Γης-Ηλίου: 1 AU (Αστρονομική μονάδα)

$1\,\mathrm{AU} \approx 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
$\approx 8{,}3167463973$ λεπτά φωτός
≈ 499 δευτερόλεπτα φωτός

Ερμής	0,39 AU
Αφροδίτη	0,72 AU
Γη	1 AU
Άρης	1,52 AU
Δίας	5,20 AU
Κρόνος	9,54 AU
Ουρανός	19,18 AU
Ποσειδώνας	30,06 AU

3. Ακολουθεί ο διάλογος μεταξύ ενός μαθητή (Μ) και μιας καθηγήτριας (Κ) της Φυσικής, αμέσως μετά το μάθημα σχετικά με τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης.

Κ: Έχεις ζυγιστεί πρόσφατα;

Μ: Μάλιστα, είμαι 70 kg.

Κ: Θα σου δώσω δύο πληροφορίες:
το βάρος σου είναι 686 N και η ακτίνα της Γης είναι 6.380 km.
Με αυτά τα δεδομένα και την τιμή της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης να υπολογίσεις τη μάζα της Γης.

Αν ήσασταν στη θέση του μαθητή, θα μπορούσατε να απαντήσετε στο ερώτημα;
Αν ναι, να γράψετε αναλυτικά τους αντίστοιχους υπολογισμούς.
Αν όχι, να εξηγήσετε γιατί.

4. Δύο πλανήτες Α και Β έχουν την ίδια ακτίνα, ενώ η πυκνότητα του Α είναι διπλάσια από την πυκνότητα του Β.
Να συγκρίνετε τα βάρη δύο πανομοιότυπων ερευνητικών διαστημοπλοίων που βρίσκονται στις επιφάνειες των πλανητών.

Δίνεται ο όγκος σφαίρας ακτίνας R: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

5. Τα κέντρα Γης-Σελήνης απέχουν μεταξύ τους $60R_\Gamma$ όπου R_Γ η ακτίνα της Γης. Η σχέση μαζών Γης-Σελήνης είναι $M_\Gamma = 81M_\Sigma$.
Σε ποιο σημείο της διακέντρου Γης-Σελήνης η συνισταμένη των βαρυτικών δυνάμεων που θα δέχεται ένας πύραυλος θα είναι μηδέν;
Θεωρήστε το σύστημα Γη-Σελήνη ότι είναι πολύ μακριά από τα άλλα ουράνια σώματα. Η απάντηση να δοθεί με μονάδα μέτρησης την ακτίνα της Γης.

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΠΕ1)

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

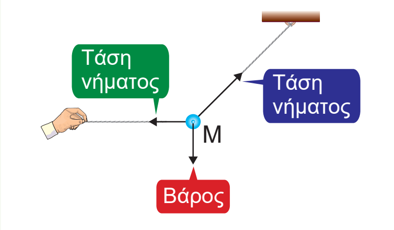
1. Η εικονική αναπαράσταση δυνάμεων σε ένα αντικείμενο

I) Προσδιορίζουμε το αντικείμενο που θέλουμε να μελετήσουμε.

II) Σχεδιάζουμε μια κλειστή καμπύλη γύρω από το αντικείμενο. Μόνο το αντικείμενο ενδιαφέροντος πρέπει να βρίσκεται μέσα στην καμπύλη, όλα τα άλλα αντικείμενα πρέπει να βρίσκονται εκτός. (Η κλειστή καμπύλη πολλές φορές παραλείπεται θεωρώντας ότι ταυτίζεται με το σύνορο του αντικειμένου.)

III) Εντοπίζουμε κάθε σημείο στο όριο αυτής της καμπύλης, όπου υπάρχουν άλλα αντικείμενα που εφάπτονται με το αντικείμενο ενδιαφέροντος. Αυτά είναι τα σημεία όπου ασκούνται δυνάμεις επαφής στο αντικείμενο.

IV) Σχεδιάζουμε και συμβολίζουμε (διανυσματικά ή ως συνιστώσα) κάθε δύναμη επαφής που ενεργεί στο αντικείμενο. Υπάρχει τουλάχιστον μία δύναμη σε κάθε σημείο επαφής. Μπορεί να υπάρχουν και περισσότερες από μία δυνάμεις (π.χ. τριβή και κάθετη δύναμη στην επαφή). Όταν είναι απαραίτητο, αξιοποιούμε δείκτες για να διακρίνουμε δυνάμεις του ίδιου τύπου (**Σχήμα 1.24**).



Σχήμα 1.24 Δυνάμεις στο σώμα Μ

Κατά τον σχεδιασμό των δυνάμεων στο αντικείμενο επιδιώκουμε:

- το μήκος των διανυσμάτων να είναι σχετικό, (δηλαδή για τη μεγαλύτερη δύναμη να σχεδιάσουμε μακρύτερο διάνυσμα),
- το σημείο εφαρμογής να είναι κατάλληλο,
- η κατεύθυνση να είναι η ορθή.

V) Τέλος σχεδιάζουμε και συμβολίζουμε (διανυσματικά ή ως συνιστώσα) κάθε δύναμη από απόσταση που επενεργεί στο αντικείμενο. Προς το παρόν η μόνη τέτοια δύναμη είναι το βάρος.

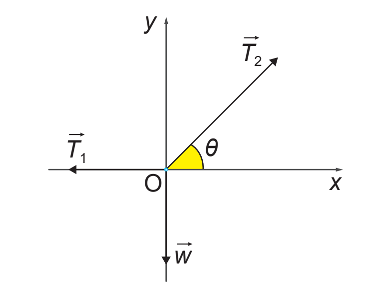
2. Διάγραμμα Ελεύθερου Σώματος (ΔΕΣ)

I) Σχεδιάζουμε το σώμα που μας ενδιαφέρει ως κουκκίδα.

II) Επιλέγουμε δύο άξονες x, y, κάθετους μεταξύ τους, με τέτοιο τρόπο, ώστε, όσο γίνεται περισσότερες δυνάμεις, να ανήκουν πάνω στους δύο άξονες (**Σχήμα 1.25**).

III) Αναλύουμε όσες από τις δυνάμεις δεν ανήκουν πάνω σε κάποιον από τους άξονες σε δύο συνιστώσες.

IV) Κατασκευάζουμε τον πίνακα συμβολισμού των δυνάμεων (**Πίνακας 1.2**)



Σχήμα 1.25 Επιλογή αξόνων

Πίνακας 1.2 Συμβολισμός δυνάμεων

Δύναμη	x συνιστώσα	Τιμή x συνιστώσας	y συνιστώσα	Τιμή y συνιστώσας
$\vec{T}_1$	T_{1x}	$-T_1$	T_{1y}	0
$\vec{T}_2$	T_{2x}	T_2συνθ	T_{2y}	T_2ημθ
$\vec{w}$	w_x	0	w_y	$-w$

V) Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τις συνιστώσες κατά μήκος του κάθε άξονα, καθώς αυτές είναι συγγραμμικές, ώστε να καταλήξουμε στη συνισταμένη κατά μήκος του x-άξονα ΣF_x και τη συνισταμένη κατά μήκος του y-άξονα ΣF_y.

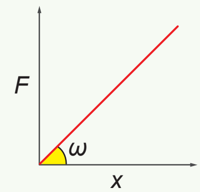
$$\Sigma F_x = T_{1x} + T_{2x} + w_x = -T_1 + T_2\text{συν}\theta$$

$$\Sigma F_y = T_{1y} + T_{2y} + w_y = T_2\text{ημ}\theta - w$$

VI) Έχοντας καταλήξει σε δύο μόνο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους, μπορούμε να απαντήσουμε στα ζητούμενα. Αν για παράδειγμα ζητείται να προσδιορίσουμε το μέτρο και την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της υποενότητας 1.2 (3) για την περίπτωση των κάθετων δυνάμεων.

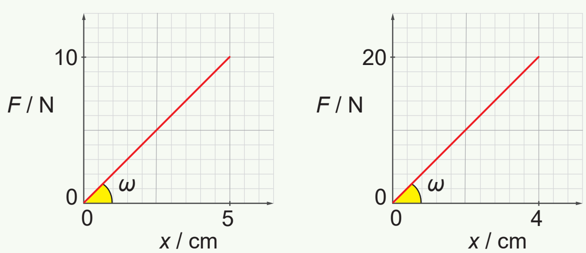
Προβλήματα

1. Ο γνωστός Νόμος του Hooke για το μέτρο F μιας δύναμης που εφαρμόζεται σε ένα δυναμόμετρο και για την επιμήκυνση x του ελατηρίου του δυναμομέτρου αναπαρίσταται στο διπλανό διάγραμμα.



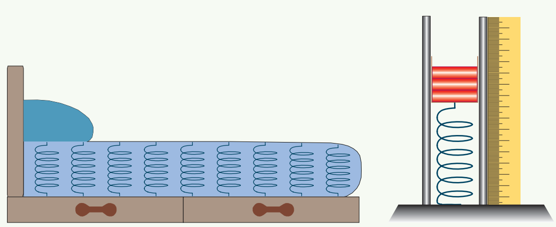
Η Αγγελική παρατηρώντας το διάγραμμα αναφέρει ότι: «Με βάση τον Νόμο του Hooke, η σταθερά του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση $k = εφω$».

Με βάση το παραπάνω συμπέρασμα, μια άλλη μαθήτρια, παρατηρώντας τις πειραματικές ευθείες των δύο επόμενων διαγραμμάτων, διατυπώνει την εξής άποψη: «Εφόσον οι γωνίες των γραφικών παραστάσεων με τον x-άξονα είναι ίσες, τα ελατήρια έχουν την ίδια σταθερά».

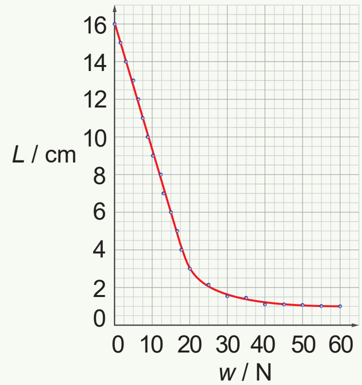


Συμφωνείτε με αυτήν την άποψη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Ο Γιώργος βγάζει ένα ελατήριο από ένα παλιό στρώμα όπως αυτό της εικόνας και αποφασίζει να πειραματιστεί με αυτό στο σχολείο. Αξιοποιεί τη συσκευή που φαίνεται στο σχήμα, τοποθετώντας διάφορα βάρη στο ελατήριο και καταγράφοντας το *μήκος* του σε κάθε περίπτωση.



Τα αποτελέσματα των μετρήσεων δίνονται στο γράφημα.



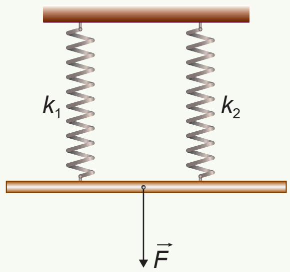
α) Για ποιο εύρος τιμών του μήκους του ελατηρίου μπορεί να περιγραφεί η συμπεριφορά του από τον Νόμο του Hooke; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Γιατί ο Γιώργος δοκιμάζει το ελατήριο στη συμπίεση και όχι στην έκταση;

γ) Τι έχει συμβεί στο ελατήριο, όταν έχει μήκος 1 cm;

δ) Η μητέρα του Γιώργου τοποθετεί το στρώμα σε θήκη συσκευασίας, η οποία του ασκεί δύναμη μέτρου 300 N. Ποια είναι η *μέση συμπίεση* των ελατηρίων, αν το στρώμα διαθέτει 60 ελατήρια;

3. Στην οριζόντια ράβδο, η οποία έχει αμελητέο βάρος, έχουν προσαρμοστεί δύο ελατήρια. Τα ελατήρια είναι παράλληλα και σταθερά συνδεμένα με τον άξονα σε μικρή απόσταση μεταξύ τους. Ασκούμε δύναμη $\vec{F}$ σε κατάλληλο σημείο της ράβδου, ώστε αυτή να παραμένει οριζόντια.



α) Να σχεδιάσετε ένα σχήμα όπου κάθε ελατήριο να έχει υποστεί επιμήκυνση 6 cm. Να συμπεριλάβετε τη δύναμη που ασκεί η ράβδος σε καθένα από τα ελατήρια και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

Δίνονται οι σταθερές των δύο ελατηρίων:
$k_1 = 100\ \text{N/m}$ και $k_2 = 200\ \text{N/m}$.

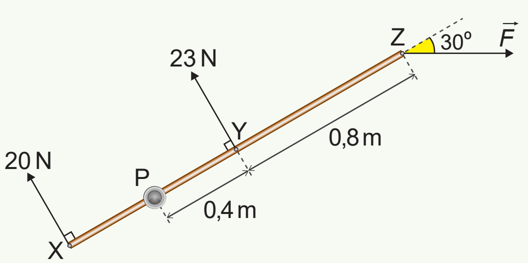
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Υπόδειξη: Η $\vec{F}$ είναι η συνισταμένη των δυνάμεων του προηγούμενου ερωτήματος.

γ) Να υπολογίσετε τη σταθερά ενός νέου ελατηρίου, το οποίο με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ θα είχε επιμήκυνση 6 cm. Το αποτέλεσμά σας μπορεί να γενικευτεί;

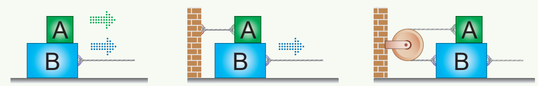
4. Δύο δυνάμεις με μέτρα 200 N και 100 N αντίστοιχα που σχηματίζουν γωνία 120° ασκούνται σε μια μικρή μπίλια αμελητέων διαστάσεων. Να επιλέξετε σύστημα αξόνων *x-y* και να τοποθετήσετε την μπίλια στην αρχή των αξόνων. Όταν σχεδιάσετε τις δυνάμεις κατά την προτίμησή σας, ώστε να είναι εύκολος ο υπολογισμός της συνισταμένης με τη μέθοδο της ανάλυσης των δυνάμεων σε άξονες, να υπολογίσετε τη συνισταμένη των δυνάμεων και να δείξετε ότι είναι κάθετη στη δύναμη με μέτρο 100 N.

5. Μια ομοιόμορφη άκαμπτη ράβδος XZ με αμελητέα μάζα έχει μήκος 1,6 m. Η ράβδος περιστρέφεται ως προς το σημείο P. Τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις δρουν στη ράβδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δυνάμεις 20 N και 23 N δρουν κάθετα στη ράβδο στα σημεία X και Y αντίστοιχα. Η δύναμη $\vec{F}$ δρα στο σημείο Z υπό γωνία 30° ως προς τον άξονα της ράβδου.



Εάν η ροπή ως προς το σημείο περιστροφής P είναι 6,0 N·m κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

6. Στα παρακάτω σχήματα το οριζόντιο δάπεδο και τα δύο σώματα είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό. Με την προϋπόθεση αυτήν μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε όλες τις επιφάνειες που βρίσκονται σε επαφή ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ο ίδιος.



(1) (2) (3)

Στην περίπτωση (1) τα σώματα κινούνται με την ίδια ταχύτητα.

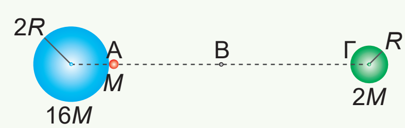
Στην περίπτωση (2) το σώμα Β κινείται, ενώ το Α είναι ακίνητο.

Στην περίπτωση (3) τα σώματα είναι οριακά έτοιμα να κινηθούν.

α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις τριβής στα σώματα.

β) Να υποδείξετε τα ζεύγη των δυνάμεων τριβής που ικανοποιούν τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα.

7. Έστω δύο ακίνητα σφαιρικά σώματα με μάζες 16*M* και 2*M* και αντίστοιχες ακτίνες 2*R* και R, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Τα κέντρα των δύο σφαιρικών σωμάτων απέχουν μεταξύ τους 12*R*. Ένα σημειακό σώμα μάζας *M* μπορεί να κινείται μεταξύ των σημείων Α και Γ που βρίσκονται στις επιφάνειες των ακίνητων σφαιρικών σωμάτων. Να υπολογίσετε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σημειακό σώμα, όταν βρίσκεται:

α) στο σημείο Α, **β)** στο σημείο Β που είναι το μέσο της απόστασης μεταξύ των κέντρων των ακίνητων σφαιρικών σωμάτων, **γ)** στο σημείο Γ.

Θεωρήστε γνωστά τα *M*, *R*, καθώς και τη σταθερά της παγκόσμιας έλξης *G*.

ΣΥΝΟΨΗ

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε την παρουσία των δυνάμεων από τα αποτελέσματά τους που είναι η *παραμόρφωση* και η *αλλαγή της κινητικής κατάστασης*. Πρόκειται για **διανυσματικά μεγέθη** με μονάδα μέτρησης το 1 N. Μια δύναμη μπορεί να μετρηθεί με τη βοήθεια ενός **δυναμομέτρου**, η λειτουργία του οποίου βασίζεται στον **Νόμο του Hooke** $\left(\vec{F} = -k \cdot \vec{x}\right)$. Οι δυνάμεις εμφανίζονται πάντα σε ζεύγη **δράσης-αντίδρασης** που υπακούουν στον **3ο Νόμο του Νεύτωνα**. Χωρίζουμε τις δυνάμεις σε δυνάμεις από απόσταση (π.χ. βάρος, ηλεκτρική δύναμη) και δυνάμεις από επαφή (π.χ. στατική τριβή και τριβή ολίσθησης, άνωση, δύναμη ελατηρίου, δύναμη από ένα νήμα). Η **τριβή ολίσθησης** $(T = \mu N)$ εξαρτάται από το είδος των επιφανειών (μ) και από την κάθετη δύναμη επαφής $(\vec{N})$, ενώ η **στατική τριβή** είναι μια δύναμη μεταβλητού μέτρου που παίρνει μια μέγιστη τιμή.

Μπορούμε να συνθέσουμε μία ή περισσότερες δυνάμεις για να βρούμε τη **συνισταμένη** τους $(\Sigma\vec{F})$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις κατά τις οποίες οι δυνάμεις είναι: *ομόρροπες*, *αντίρροπες*, *κάθετες*, οπότε η συνισταμένη για την περίπτωση δύο δυνάμεων, υπολογίζεται αντιστοίχως ως:

$$\Sigma F = F_1 + F_2, \quad \Sigma F = |F_1 - F_2|, \quad (\Sigma F)^2 = F_1^2 + F_2^2$$

Στην περίπτωση δυνάμεων σε τυχαία γωνία, για τον γραφικό προσδιορισμό της συνισταμένης χρησιμοποιούμε τον γενικό **κανόνα του παραλληλογράμμου**. Μπορούμε επίσης να αναλύσουμε μια δύναμη στις συνιστώσες της σε δύο κάθετους άξονες, χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Στις περιπτώσεις που οι διαστάσεις ενός αντικειμένου έχουν σημασία για το φαινόμενο που πρόκειται να μελετήσουμε, δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε την προσέγγιση του **υλικού σημείου**, αλλά θα εργαζόμαστε με το **μοντέλο του άκαμπτου σώματος**. Η **ροπή μιας δύναμης** ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο σημείο· είναι διανυσματικό μέγεθος με μονάδα στο SI το $1\,\text{N}\cdot\text{m}$ και η φορά της προκύπτει από τον **κανόνα του δεξιού χεριού**. Υπολογίζεται από το γινόμενο της δύναμης επί την απόσταση του φορέα της δύναμης από το σημείο υπολογισμού. Δύο δυνάμεις ίσες σε μέτρα και με παράλληλες, αλλά αντίθετες κατευθύνσεις, συνιστούν ένα **ζεύγος δυνάμεων**, η ροπή του οποίου είναι ανεξάρτητη από το σημείο ως προς το οποίο γίνεται ο υπολογισμός.

Η δύναμη του βάρους κοντά στην επιφάνεια κάποιου πλανήτη, $w = mg$, αλλάζει με την τοποθεσία. Μπορεί να γενικευθεί για δύο οποιεσδήποτε μάζες m και M που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r, οπότε αναφερόμαστε στον **Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης**:

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

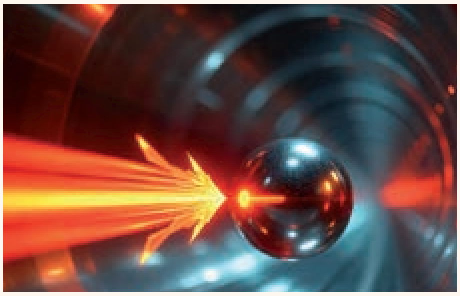
Από την απλή σύγκριση προκύπτει ότι:

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Πρόκειται για μια κεντρική δύναμη με τις δυνάμεις να είναι ζεύγος δράσης-αντίδρασης. Οι μάζες που μετέχουν στις εξισώσεις αυτές χαρακτηρίζονται και ως **βαρυτικές μάζες**, ενώ η βαρυτική δύναμη μπορεί να εξηγηθεί είτε ως **δράση από απόσταση** είτε με τη βοήθεια της έννοιας του **πεδίου**.

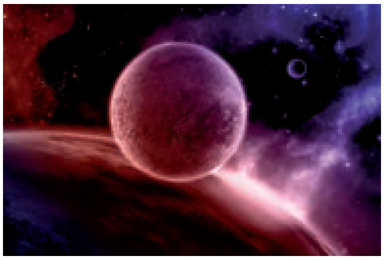
ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Από τη δύναμη στην κίνηση

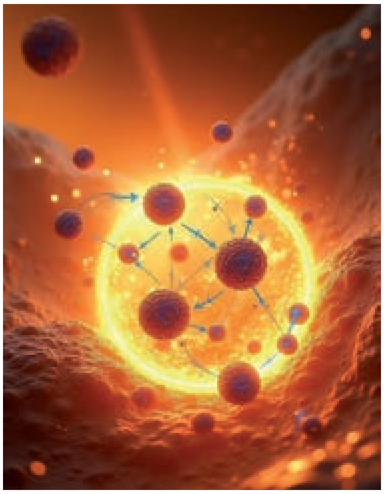


Η κίνηση είναι ένα από τα πρώτα φαινόμενα που παρατηρούμε κατά τη μελέτη της φύσης. Ο λόγος είναι εν μέρει εξελικτικός. Οτιδήποτε κινείται, αν δεν αποτελεί απειλή, ενδέχεται να είναι ένας ενδιαφέρων «μεζές»! Συνεπώς, η περιφερειακή όραση εξελίχθηκε, ώστε να μας επιτρέπει να μπορούμε να αντιληφθούμε πως κάτι κινείται στα όρια του οπτικού μας πεδίου, ακόμη κι αν δεν μπορούμε να διακρίνουμε το ακριβές σχήμα ή το χρώμα του. Πολλοί θηρευτές στην άγρια φύση έχουν εμπειρικά μάθει να κινούνται με πολύ βραδύ ρυθμό, όταν πλησιάζουν το θήραμά τους από πίσω ή από το πλάι, ακριβώς για να μην υποπέσουν στην οπτική αντίληψή του.

Όταν ο άνθρωπος εξελίχθηκε πέρα από το στάδιο της επιβίωσης και άρχισε να απορεί και να στοχάζεται σχετικά με τα φυσικά φαινόμενα, επικέντρωσε μεγάλο μέρος της φυσικής φιλοσοφίας στη μελέτη της κίνησης. Σε ένα σύμπαν που δεν έχει χάσει την ικανότητα της αλλαγής, η κίνηση παρατηρείται παντού: οι γαλαξίες κινούνται ως σμήνη στον χώρο, κάθε γαλαξίας περιστρέφεται γύρω από κάποιον νοητό άξονα, τα άστρα και οι πλανήτες σχηματίζουν ηλιακά συστήματα που χαρακτηρίζονται από διαρκή κίνηση, πίδακες διάπυρης ύλης εκτοξεύονται σε μεγάλα ύψη πάνω από την επιφάνεια ενός αστέρα, η σεισμική δραστηριότητα ανακατανέμει τα στερεά τμήματα ενός πλανήτη, ενώ η θερμότητα που φτάνει από κοντινά άστρα θέτει σε κίνηση την ύλη που βρίσκεται σε ρευστή μορφή, (υγρή ή αέρια), δημιουργώντας κύματα στις θάλασσες και ανέμους στην ατμόσφαιρα. Αν υπάρχει ζωή στον πλανήτη, τρέφεται και αναπτύσσεται χάρη στην κίνηση που είτε κάνει ο ίδιος ο οργανισμός για να φτάσει στην τροφή του είτε η τροφή που, όταν δεν κινείται αυτόβουλα, παρασύρεται από ρεύματα υγρών ή αέριων μαζών. Μέρη του σώματος ενός οργανισμού μπορούν να έχουν την ικανότητα ανεξάρτητης κίνησης. Ο θώρακάς μας κινείται διαρκώς για να προσλαμβάνουμε οξυγόνο από την ατμόσφαιρα και να αποβάλλουμε διοξείδιο του άνθρακα, η καρδιά μας φροντίζει, ώστε το οξυγόνο αυτό να φτάνει σε όλα τα κύτταρα του σώματός μας μέσω της κίνησης του αίματος, χάρη στις χημικές αντιδράσεις που συμβαίνουν στα κύτταρα, κατά τη διάρκεια των οποίων άτομα κινούνται και ανακατανέμονται στον χώρο. Κινούμε τα χέρια ή τα πόδια μας, τα μάτια μας κατά πλάτος της σελίδας, καθώς διαβάζουμε αυτό το κείμενο…



Η κίνηση όμως υπάρχει ακόμη και σε κλίμακα που δεν γίνεται αντιληπτή από τις αισθήσεις μας: σε μικροσκοπικό επίπεδο τα σωματίδια δεν σταματούν ποτέ να κινούνται είτε είναι δέσμια σε συγκροτήματα όπως τα άτομα είτε ανεξάρτητα όπως τα φωτόνια ή τα νετρίνα.



2.1 Κινηματικά φυσικά μεγέθη

1. Έννοια συστήματος αναφοράς

Λόγω των πολλών και διαρκών κινήσεων που συντελούνται γύρω μας και μέσα μας, είμαστε, έστω και υποσυνείδητα, εξοικειωμένοι με τη θεμελιώδη έννοια της κίνησης που δεν είναι άλλη από την αλλαγή της θέσης ενός αντικειμένου. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ποσοτική μελέτη της κίνησης απαιτεί τον προσδιορισμό της θέσης ενός σώματος, καθώς και της μεταβολής της.

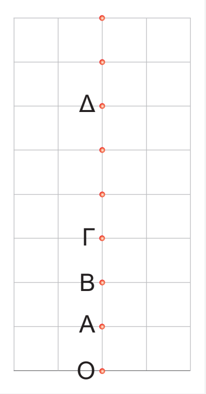
Αυτός ο προσδιορισμός γίνεται εύκολα, αν δώσουμε αριθμητική υπόσταση στα σημεία του χώρου εντός του οποίου γίνεται η κίνηση. Για παράδειγμα, ξέρουμε πού βρίσκεται ο ανελκυστήρας σε ένα κτήριο, όταν πατήσουμε το κουμπί κλήσης, με βάση τη φωτεινή ένδειξη που αντιστοιχεί στον αριθμό του ορόφου όπου είναι σταματημένος. Όταν ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος, η ένδειξη αντιστοιχεί στον έναν και μοναδικό αριθμό που μας χρειάζεται για να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τη θέση του. Το παραπάνω δεν είναι τίποτε περισσότερο

Σύστημα αναφοράς

από ένα **σύστημα αναφοράς** (Σ.Α.), δηλαδή ένας μηχανισμός όπου κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχίζεται με έναν αριθμό με βάση την απόστασή του από το έδαφος. Συνειδητοποιούμε λοιπόν ότι ένα Σ.Α. είναι πλήρες και λειτουργικό, όταν καθορίσουμε (εντελώς αυθαίρετα) το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 0 (αφετηρία του Σ.Α.) και το σημείο που αντιπροσωπεύεται από τον αριθμό 1 (μονάδα κλίμακας του Σ.Α.). Με βάση αυτές τις επιλογές, οποιοδήποτε άλλο σημείο αντιπροσωπεύεται πλέον από έναν (πραγματικό) αριθμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.1

1. Στο συνοδευτικό σχήμα οι γραμμές είναι παράλληλες και ισαπέχουσες. Κατασκευάζουμε ένα Σ.Α. αντιστοιχίζοντας τον αριθμό 0 στο σημείο Ο και τον αριθμό 1 στο σημείο Α.



α) Ποιες είναι οι θέσεις, δηλαδή οι συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ;

β) Ποιες θα ήταν οι συντεταγμένες των σημείων αυτών, αν αντιστοιχίζαμε την τιμή 1 στο σημείο Γ;

γ) Ποιες θα ήταν οι συντεταγμένες των σημείων Ο, Α και Δ, αν θεωρούσαμε το 0 στο Α και το 1 στο Β;

Λύση

α) Μετράμε την απόσταση κάθε σημείου από το Ο και τη διαιρούμε με την απόσταση (ΟΑ). Ο αριθμός που προκύπτει είναι η συντεταγμένη του σημείου αυτού. Αφού $(\text{ΟΒ}) = 2(\text{ΟΑ})$, το σημείο Β έχει συντεταγμένη 2. Αντίστοιχα, τα Γ και Δ έχουν συντεταγμένες 3 και 6.

β) Στην περίπτωση αυτήν η μονάδα μέτρησης του Σ.Α. είναι το μήκος (ΟΓ), οπότε το Α έχει συντεταγμένη $1/3$, το Β $2/3$ και το Δ έχει 2.

γ) Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα, η απάντηση για το Δ προκύπτει αβίαστα ίση προς 5. Το σημείο Ο βρίσκεται χαμηλότερα του Α. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την πληροφορία αυτή με αρνητικό πρόσημο. Συνεπώς, η συντεταγμένη του Ο ισούται με -1.

2. Η κίνηση είναι σχετική

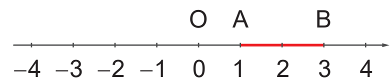
Εικόνα 2.1 Η κίνηση είναι σχετική.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα του ανελκυστήρα, ίσως έχετε παρατηρήσει ότι κατά την κίνηση θαλάμου που δεν διαθέτει εσωτερικές πόρτες ασφαλείας, οπότε ο τοίχος του φρεατίου είναι ορατός, έχετε συχνά την ψευδαίσθηση ότι δεν είναι ο θάλαμος που κινείται (π.χ. προς τα πάνω), αλλά το τοίχωμα του φρεατίου (προς τα κάτω). Αντίστοιχα, σας έχει τύχει, κατά την κίνηση με αυτοκίνητο, να προσπερνάτε ένα προπορευόμενο όχημα και παρατηρώντας το από το πλαϊνό παράθυρο, να σχηματίζετε την εντύπωση ότι το όχημα στο οποίο επιβαίνετε είναι ακίνητο, ενώ το άλλο οπισθοχωρεί! Τείνουμε να θεωρούμε συχνά τον παρατηρητή-εαυτό μας ακίνητο και όλα τα άλλα αντικείμενα ότι κινούνται ως προς εμάς. Από τα παραπάνω παραδείγματα αναδεικνύεται ότι η κίνηση είναι **σχετική** (**Εικόνα 2.1**). Με ένα Σ.Α. στη διάθεσή μας μπορούμε να προχωρήσουμε ορίζοντας έννοιες και εργαλεία που θα μας βοηθήσουν να μελετήσουμε τις κινήσεις.

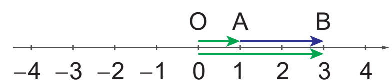
3. Τροχιά – Διάνυσμα θέσης – Μετατόπιση στην κίνηση

Τροχιά της κίνησης ενός σώματος είναι το τμήμα μιας γραμμής που αποτελείται από όλα τα σημεία στα οποία βρέθηκε το σώμα κατά τη διαδρομή του.

Σε μονοδιάστατη κίνηση η τροχιά είναι ευθύγραμμο τμήμα. Μια τέτοια κίνηση τη μελετάμε σε ένα Σ.Α. που αποτελείται από έναν και μοναδικό άξονα, (τον οποίο ονομάζουμε ***x*-άξονα** με μονάδα το 1 m), όπως στο **σχήμα 2.1**, όπου απεικονίζεται η μετακίνηση ενός σώματος μεταξύ δύο θέσεων Α και Β.



Σχήμα 2.1 Σ.Α. μονοδιάστατης κίνησης



Σχήμα 2.2 Διανύσματα θέσης – Διάνυσμα μετατόπισης

Αξιοποιώντας τα διανύσματα στη μελέτη μας, μπορούμε να καθιερώσουμε μια συστηματική μέθοδο για να προσδιορίζουμε κάθε φορά τη μετατόπιση ενός σώματος στο Σ.Α. Ορίζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{x}_1$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{x}_2$ που αντιστοιχούν στις θέσεις αρχής και τέλους της κίνησης του σώματος (**Σχήμα 2.2**). Για τον λόγο αυτόν ονομάζονται **διανύσματα θέσης**.

Προσδιορισμός μετατόπισης εντόμου

Η **μετατόπιση** του σώματος ισούται με:

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} \quad \text{ή} \quad \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \Delta\vec{x}$$

και διατυπώνεται ως το διανυσματικό φυσικό μέγεθος που έχει αρχή την αρχική θέση και τέλος την τελική θέση του σώματος που κινείται.

Θα γράφουμε για τη μετατόπιση:

$$\Delta x = x_{\text{τελ}} - x_{\text{αρχ}}$$

Για παράδειγμα, για κίνηση από το Α προς το Β για τη μετατόπιση έχουμε:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3\text{ m} - 1\text{ m} = 2\text{ m}$$

ενώ για κίνηση από το Β προς το Α έχουμε:

$$\Delta x' = x_1 - x_2 = 1\text{ m} - 3\text{ m} = -2\text{ m}$$

Συμπερασματικά:

Πρόσημο της συνιστώσας θέσης x

- Θετικό πρόσημο σημαίνει ότι το σώμα *βρίσκεται* στα θετικά του άξονα.
- Αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το σώμα *βρίσκεται* στα αρνητικά του άξονα.

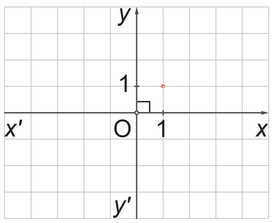
Πρόσημο της συνιστώσας μετατόπισης Δx

- Θετικό πρόσημο σημαίνει *κίνηση* προς τα θετικά του άξονα.
- Αρνητικό πρόσημο σημαίνει *κίνηση* προς τα αρνητικά του άξονα.

Όταν η κίνηση του σώματος εξελίσσεται σε ένα επίπεδο, η τροχιά είναι τμήμα μιας επίπεδης καμπύλης γραμμής. Τέτοιες περιπτώσεις είναι: η κίνηση ενός μυρμηγκιού στο πάτωμα, η κίνηση βλήματος που εκτοξεύεται από ένα κανόνι, η κίνηση ενός πλανήτη γύρω από τον Ήλιο.

Σύμβαση

Σύμφωνα με τη γενική σύμβαση για τον συμβολισμό των διανυσματικών μεγεθών που έγινε στο εισαγωγικό κεφάλαιο, θα χρησιμοποιούμε: για τα διανύσματα της θέσης και της μετατόπισης τους συμβολισμούς $\vec{x}$ και $\Delta\vec{x}$ αντίστοιχα, για το μέτρο τους τούς συμβολισμούς x και Δx αντίστοιχα και για τη συνιστώσα τους στον x-άξονα τους συμβολισμούς x_x και Δx_x αντίστοιχα. Επειδή οι τελευταίοι συμβολισμοί $(x_x$ και $\Delta x_x)$ είναι υπερβολικά τυπικοί, από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε για τη συνιστώσα της θέσης και της μετατόπισης στον x-άξονα τους συμβολισμούς x και Δx αντίστοιχα. Συνεπώς, δεν θα πρέπει να μας προβληματίζουν οι αρνητικές τιμές για τα x και Δx, αφού δεν αφορούν στο μέτρο, αλλά στη συνιστώσα της θέσης και της μετατόπισης στον x-άξονα.

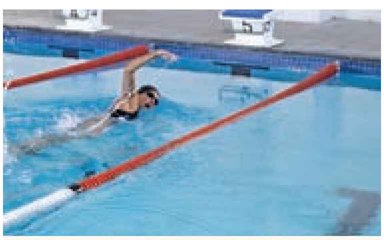


Σχήμα 2.3 Ορθογώνιο Σ.Α.

Μετατόπιση σε δύο διαστάσεις

Στην περίπτωση αυτήν, το Σ.Α. αποτελείται από δύο άξονες που τέμνονται στο σημείο Ο. Ο οριζόντιος άξονας αναφέρεται συνήθως ως $x'x$ και ο κατακόρυφος ως $y'y$.

Η μετατόπιση διαφοροποιείται από το **διάστημα** (μήκος τροχιάς) ακόμη και στις ευθύγραμμες κινήσεις. Φανταστείτε, για παράδειγμα, μια κολυμβήτρια, η οποία ξεκινά από τη μία άκρη της πισίνας (**Εικόνα 2.2**), φτάνει στην άλλη άκρη και επιστρέφει στην αφετηρία. Η συνολική μετατόπισή της είναι μηδέν, αλλά το διάστημα που έχει διανύσει είναι διπλάσιο του μήκους της πισίνας.



Εικόνα 2.2 Μονοδιάστατη κίνηση σε πισίνα

4. Χρονική στιγμή και χρονική διάρκεια

Ανεξάρτητα από το σχήμα της τροχιάς και το πλήθος των διαστάσεων εντός των οποίων εξελίσσεται η κίνηση, ο υπολογισμός της μετατόπισης δεν αρκεί για την ποσοτική μελέτη της κίνησης. Αφού οποιαδήποτε μεταβολή στη φύση απαιτεί χρόνο για να πραγματοποιηθεί, θα πρέπει στη μελέτη μας να συμπεριλάβουμε συνδυαστικά τις θέσεις στις οποίες βρέθηκε ένα σώμα και τις αντίστοιχες ενδείξεις ενός ρολογιού, δηλαδή τις **χρονικές στιγμές** όπου το σώμα διήλθε από τις θέσεις αυτές. Η χρονική στιγμή απαντά στην ερώτηση: «*Πότε* συμβαίνει;». Συνεπώς, το Σ.Α. που προορίζεται για τη μελέτη κινήσεων θα πρέπει να συμπληρωθεί με ένα χρονόμετρο. Έτσι, θα είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τη **χρονική διάρκεια** μιας κίνησης. Η χρονική διάρκεια απαντά στην ερώτηση: «*Πόσο* διαρκεί;». Στο σημείο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε μια ενδιαφέρουσα αναλογία˙ όπως ακριβώς η μετατόπιση στον χώρο ισούται με τη διαφορά της αρχικής από την τελική θέση, έτσι και η χρονική διάρκεια, (η μετατόπιση στον χρόνο), ισούται με τη διαφορά της αρχικής από την τελική χρονική στιγμή ή συμβολικά:

$$\Delta t = t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}$$

Η χρονική διάρκεια μιας κίνησης περιγράφεται επίσης με τον εναλλακτικό όρο **χρονικό διάστημα**. Για λόγους συντομίας ενδέχεται να συναντήσετε και τον όρο *χρόνος*. Αν το χρονόμετρο που χρησιμοποιούμε μηδενίζεται στην αρχή του φαινομένου που παρατηρούμε, δηλαδή αν $t_{\text{αρχ}} = 0$, τότε το χρονικό διάστημα Δt συμπίπτει αριθμητικά με τη χρονική στιγμή $t_{\text{τελ}}$, (όχι όμως εννοιολογικά).

Η εισαγωγή του χρόνου στη μελέτη μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια μαθηματική συνάρτηση της μορφής $\vec{r} = \mathrm{f}(t)$ που εκφράζει την εξάρτηση του διανύσματος της θέσης από τον χρόνο. Για την περίπτωση της μονοδιάστατης κίνησης κατά μήκος του x-άξονα συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε τον απλούστερο συμβολισμό $x = \mathrm{f}(t)$.

Προσδιορισμός θέσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.1

2. Η μονοδιάστατη κίνηση ενός σώματος περιγράφεται από τη συνάρτηση $x = 5t - 12$ (t σε s και x σε m).

α) Πού βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 7$ s;

β) Ποια χρονική στιγμή το σώμα διέρχεται από τη θέση $x = 3$ m;

γ) Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται, ώστε το σώμα να βρεθεί από το σημείο $x_{αρχ} = 78$ m στο $x_{τελ} = 108$ m;

δ) Πόση θα είναι η μετατόπιση του σώματος στη διάρκεια του 3ου δευτερολέπτου της κίνησής του;

Λύση

α) Θέτουμε στη δοσμένη σχέση $t = 7$ s, οπότε:

$$x = (5 \cdot 7 - 12)\ \text{m} = 23\ \text{m}$$

β) Θέτουμε στη δοσμένη σχέση $x = 3$ m, οπότε:

$$3 = 5t - 12 \quad ή \quad t = 3\ \text{s}$$

γ) Όπως στο β), θέτοντας $x_{αρχ} = 78$ m βρίσκουμε $t_{αρχ} = 18$ s, ενώ για $x_{τελ} = 108$ m βρίσκουμε $t_{τελ} = 24$ s. Συνεπώς, το απαιτούμενο χρονικό διάστημα είναι:

$$\Delta t = t_{τελ} - t_{αρχ} = 6\ \text{s}$$

δ) Το 3ο δευτερόλεπτο διαρκεί από την $t_1 = 2$ s έως την $t_2 = 3$ s. Όπως εργαστήκαμε στο α) ερώτημα, για $t_1 = 2$ s προκύπτει $x_1 = -2$ m, ενώ για $t_2 = 3$ s προκύπτει $x_2 = 3$ m. Συνεπώς, η ζητούμενη μετατόπιση είναι:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3\ \text{m} - (-2\ \text{m}) = 5\ \text{m}$$

2ο ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

(Προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας: 2)

5. Η μέση και η στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση

Α. Στρατηγική προετοιμασίας (περιλαμβάνει τα βήματα 1ο και 2ο)

Βήμα 1ο: Έναυσμα ενδιαφέροντος

Η έννοια της ταχύτητας είναι βιωματικά συνδεμένη με την προσπάθειά μας να περιγράψουμε ποσοτικά την κίνηση. Θα οικοδομήσουμε την έννοια της ταχύτητας ξεκινώντας από την καθημερινή αξιοποίησή της και φθάνοντας ως την επιστημονική περιγραφή της.

Αναφέρετε παραδείγματα που υποστηρίζουν τους παρακάτω ισχυρισμούς:

Αρχικές γόνιμες σκέψεις	Μια λάθος εικόνα!
Αφού διευκρινίσουμε εξαρχής ότι η ταχύτητα ενός ακίνητου σώματος είναι μηδέν, είναι εύκολο να επικαλεστούμε την εμπειρία μας για να σκεφτούμε ότι το πόσο γρήγορα κινείται ένα σώμα, (δηλαδή το πόσο μεγάλη είναι η ταχύτητά του), έχει σχέση με το πόσο μεγάλες αποστάσεις διατρέχει σε μικρή χρονική διάρκεια.	Δεν θα πρέπει να παραπλανηθούμε από το γεγονός ότι στην καθομιλουμένη το «γρήγορα» ταυτίζεται πολλές φορές με τη μικρή χρονική διάρκεια ενός γεγονότος.

Βήμα 2ο: Προϋπάρχουσες γνώσεις – Προβληματισμός – Διατύπωση υποθέσεων

	Ορισμός	Μειονέκτημα
Μέση αριθμητική ταχύτητα	Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε τη **μέση αριθμητική ταχύτητα** διαιρώντας το διάστημα που διατρέχει ένα σώμα με τη χρονική διάρκεια της κίνησης: $$v_{\mu(\alpha\rho)} = \frac{s}{\Delta t}$$ Η μέση αριθμητική ταχύτητα είναι μονόμετρο μέγεθος και πάντα θετικός αριθμός. Με τον τρόπο αυτόν έχουμε μια πρώτη κατάταξη για την κίνηση των σωμάτων. Για παράδειγμα, ένα αυτοκίνητο που έχει ταχύτητα 50 km/h είναι πιο αργό από ένα άλλο που έχει ταχύτητα 100 km/h, μιας και το πρώτο διανύει 50 km σε 1 h, ενώ το δεύτερο 100 km σε 1 h.	Δεν έχουμε απολύτως καμιά πληροφορία για το πού κατευθύνεται το σώμα. Ακόμη και αν προσθέσουμε την πληροφορία ότι το αυτοκίνητο κινείται στην Εθνική οδό Αθηνών-Κορίνθου, η γνώση μας είναι ελλιπής, γιατί δεν ξέρουμε αν κινείται προς την Αθήνα ή προς την Κόρινθο.

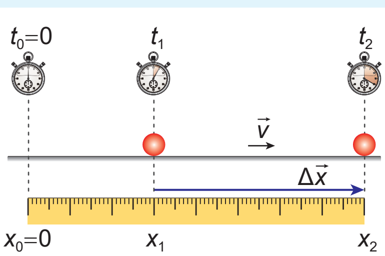
Προτείνετε τρόπους αποφυγής του μειονεκτήματος.

Β. Ερευνητικό στάδιο (περιλαμβάνει το 3ο βήμα)

Βήμα 3ο: Δραστηριότητες – Πειραματισμός

Μετατόπιση – Μέση ταχύτητα

Γ. Παρουσίαση των αποδεικτικών στοιχείων (περιλαμβάνει τα βήματα 4ο και 5ο)

Μέση ταχύτητα	Ορισμός	Μειονέκτημα
 **Σχήμα 2.5** Μέση ταχύτητα	Είναι το διανυσματικό φυσικό μέγεθος με: • διεύθυνση τον άξονα της κίνησης του κινητού, • φορά τη φορά κίνησης του κινητού και • μέτρο το πηλίκο του μέτρου Δx της μετατόπισης του κινητού σε χρονική διάρκεια Δt διά του Δt. $$v_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$$	Δεν γνωρίζουμε αν η ταχύτητα έχει την ίδια τιμή σε όλες τις ενδιάμεσες θέσεις. Διαφορετικά, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την ταχύτητα σε κάποια συγκεκριμένη θέση ή σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Διανυσματικός τύπος	Η διανυσματική γραφή της μέσης ταχύτητας: $$\vec{v}_\mu = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\Delta t}$$ μας πληροφορεί επιπλέον ότι η ταχύτητα έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μεταβολή του διανύσματος θέσης και μας επιτρέπει την επέκταση του ορισμού της και σε μη ευθύγραμμες κινήσεις.

Μονάδα της ταχύτητας στο SI: $1\,m/s$.

Βήμα 4ο: Συμπεράσματα – Νέες γνώσεις – Εφαρμογές

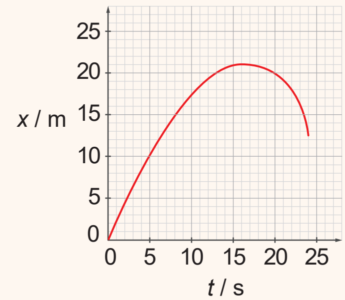
I. Προβλέψεις – Ερμηνείες

Για να παρακάμψουμε το τελευταίο μειονέκτημα, θα πρέπει οι χρόνοι t_1, t_2 (όπου το κινητό βρίσκεται στις θέσεις x_1, x_2 αντίστοιχα) να είναι κατά το δυνατόν πλησιέστεροι. Τα Μαθηματικά δίνουν τη δυνατότητα να πλησιάσουν οι δύο χρόνοι όσο κοντά θέλουμε. Από πειραματική άποψη αυτό μπορεί να γίνει τόσο καλά όσο επιτρέπει η ακρίβεια του χρονομέτρου μας: δέκατο, εκατοστό, χιλιοστό... του δευτερολέπτου. Έτσι, ορίζουμε τη στιγμιαία ταχύτητα.

Στιγμιαία ταχύτητα	Είναι το διανυσματικό φυσικό μέγεθος με: • διεύθυνση τον άξονα της κίνησης του κινητού, • φορά τη φορά κίνησης του κινητού και • μέτρο τον ρυθμό μεταβολής της θέσης, δηλαδή την τιμή που τείνει το πηλίκο της μετατόπισης Δx του κινητού προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια Δt, όταν Δt είναι πάρα πολύ μικρό. $$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\Delta t \text{ πάρα πολύ μικρό})$$
Διανυσματικός τύπος	Τα Μαθηματικά δίνουν τη δυνατότητα να γράψουμε τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας σε διανυσματική μορφή: $$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \quad (\Delta t \text{ πάρα πολύ μικρό})$$ που μας πληροφορεί επιπλέον ότι η ταχύτητα έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μεταβολή του διανύσματος θέσης και μας επιτρέπει την επέκταση του ορισμού της και σε μη ευθύγραμμες κινήσεις.

II. Λύση προβλήματος

Στο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της θέσης ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα σε συνάρτηση με τον χρόνο.



1. Να συμπληρώσετε τον **πίνακα 2.1** που ακολουθεί.
2. Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στη μέση αριθμητική και τη μέση διανυσματική ταχύτητα;
3. Να περιγράψετε τι συμβαίνει για $t = 16$ s, παρατηρώντας το διάγραμμα θέσης-χρόνου και τις τιμές της ταχύτητας του πίνακα.

4. Να υπολογίσετε τη μέση διανυσματική ταχύτητα από $t = 10$ s έως $t = 15$ s. Είναι ίση με τη μέση αριθμητική ταχύτητα στο ίδιο χρονικό διάστημα;

Πίνακας 2.1 Αποτελέσματα

Διάρκεια $\Delta t = 2$ s	Διάστημα s / m	Μέση αριθ. ταχ. $v_{\mu(\alpha\rho)}$ / m·s^{-1}	Μετατόπιση Δx / m	Μέση διαν. ταχ. v_μ / m·s^{-1}
0 s έως 2 s				
2 s έως 4 s				
14 s έως 16 s				
16 s έως 18 s				
18 s έως 20 s				
20 s έως 22 s				

Λύση προβλήματος

Βήμα 5ο: Γενικεύσεις – Ερμηνείες – Διαθεματικότητα

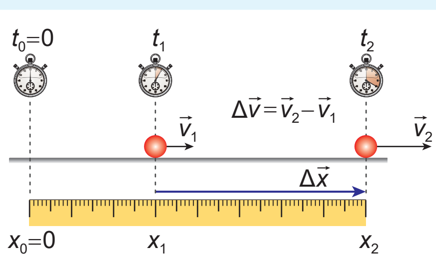
Ι α. Γενίκευση: Επιτάχυνση

Η επιτάχυνση είναι το φυσικό μέγεθος που μας πληροφορεί για το πόσο γρήγορα και προς ποια κατεύθυνση μεταβάλλεται η ταχύτητα ενός κινούμενου σώματος.

Αρχικές γόνιμες σκέψεις	Ορολογία
Αφού διευκρινίσουμε εξαρχής ότι η επιτάχυνση ενός ακίνητου σώματος ή ενός σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι μηδέν, είναι εύκολο να επικαλεστούμε την εμπειρία μας, (π.χ. από το απότομο ξεκίνημα ή από το απότομο σταμάτημα ενός αυτοκινήτου), για να σκεφτούμε ότι το πόσο μεγάλη είναι η επιτάχυνση ενός σώματος έχει σχέση με το πόσο μεγάλη μεταβολή της ταχύτητας συμβαίνει σε μικρό χρονικό διάστημα.	Στην καθημερινή γλώσσα αναφερόμαστε σε επιτάχυνση, όταν αυξάνεται η ταχύτητα, ενώ σε επιβράδυνση, όταν αυτή μειώνεται. Στο βιβλίο αυτό χρησιμοποιούμε μόνο τον όρο επιτάχυνση.

Ορίζουμε τη μέση διανυσματική επιτάχυνση ή απλά μέση επιτάχυνση.

Μέση επιτάχυνση



Σχήμα 2.5 Μέση επιτάχυνση

Ορισμός

Είναι το διανυσματικό φυσικό μέγεθος με:

- διεύθυνση αυτήν της μεταβολής της ταχύτητας (ή τη διεύθυνση της κίνησης, αν είναι ευθύγραμμη),
- φορά τη φορά της μεταβολής της ταχύτητας και

Μειονέκτημα

Δεν γνωρίζουμε αν η επιτάχυνση έχει την ίδια τιμή σε όλες τις ενδιάμεσες θέσεις.

Με άλλα λόγια, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την επιτάχυνση σε κάποια συγκεκριμένη θέση ή σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

	• μέτρο το πηλίκο του μέτρου Δv της μεταβολής της ταχύτητας σε χρονική διάρκεια Δt διά του Δt. $a_\mu = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$	
Διανυσματικός τύπος	Η διανυσματική γραφή της μέσης επιτάχυνσης: $\vec{a}_\mu = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ μας πληροφορεί επιπλέον ότι αυτή έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας και μας επιτρέπει την επέκταση του ορισμού της και σε μη ευθύγραμμες κινήσεις.	

Με συλλογισμούς παράλληλους με αυτούς που αναπτύξαμε στον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας ορίζουμε τη στιγμιαία επιτάχυνση.

Στιγμιαία επιτάχυνση	Είναι το διανυσματικό φυσικό μέγεθος με: • διεύθυνση αυτήν της μεταβολής της ταχύτητας του κινητού, • φορά ίδια με αυτήν της μεταβολής της ταχύτητας του κινητού και • μέτρο το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας, δηλαδή την οριακή τιμή στην οποία τείνει το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας Δv του κινητού προς την αντίστοιχη χρονική διάρκεια Δt, όταν Δt είναι πάρα πολύ μικρό. $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ (Δt πάρα πολύ μικρό)
Διανυσματικός τύπος	Η διανυσματική γραφή του ορισμού είναι: $\vec{a} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (Δt πάρα πολύ μικρό) που μας πληροφορεί επιπλέον ότι η επιτάχυνση έχει την ίδια κατεύθυνση με τη μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας και μας επιτρέπει την επέκταση του ορισμού της και σε μη ευθύγραμμες κινήσεις.

Μονάδα της επιτάχυνσης στο SI: $1\,\text{m/s}^2$. Είναι η επιτάχυνση ενός κινητού του οποίου η ταχύτητα μεταβάλλεται κατά $1\,\text{m/s}$ κάθε $1\,\text{s}$.

Ιβ. Γενίκευση στην καθημερινή ζωή και τεχνολογία

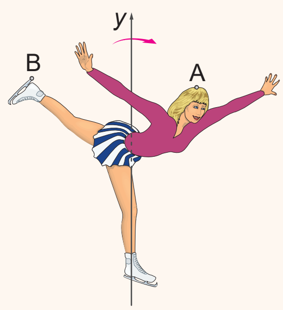
Παράδειγμα υπολογισμού μέσης ταχύτητας

Παραδείγματα υπολογισμού μέσης επιτάχυνσης

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

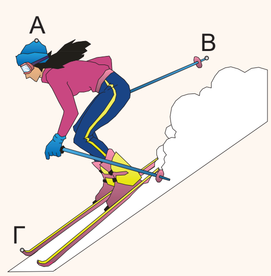
Ερωτήσεις

1. **α)** Μια αθλήτρια του καλλιτεχνικού πατινάζ εκτελεί περιστροφή γύρω από τον νοητό άξονα *y*, όπως φαίνεται στην εικόνα.



Να συγκρίνετε τα μέτρα των στιγμιαίων ταχυτήτων των σημείων Α και Β της αθλήτριας. Ποια είναι η ταχύτητα ενός σημείου του σώματος της αθλήτριας που βρίσκεται πάνω στον άξονα *y*;

β) Μια σκιέρ κατεβαίνει μια πίστα του σκι, όπως φαίνεται στην εικόνα. Να συγκρίνετε τα μέτρα των στιγμιαίων ταχυτήτων των σημείων Α, Β και Γ του εξοπλισμού της σκιέρ.



2. Ο Νικόλας αφήνει να πέσει ένα μήλο από ένα αερόστατο που κινείται κατακόρυφα προς τα επάνω. Πώς βλέπει την κίνηση του μήλου:

α) ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο αερόστατο,

β) ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο έδαφος.

3. Ένα από τα γρηγορότερα τρένα στον κόσμο μέχρι σήμερα είναι το ιαπωνικό L0 Series Maglev με μέγιστη ταχύτητα $602\ \text{km/h}$. Πώς θα περιγράφατε την κίνηση του τρένου για το τμήμα της διαδρομής που αναπτύσσει μέγιστη ταχύτητα:

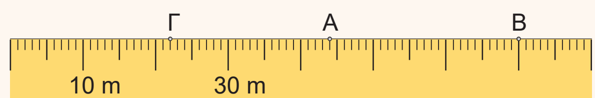
α) εάν είστε καθήμενος επιβάτης του τρένου,

β) εάν είστε ακίνητος παρατηρητής στο έδαφος.

4. Ένα λεωφορείο έκανε τη διαδρομή Αθήνα-Θεσσαλονίκη. Ο οδηγός έθεσε τον χιλιομετρητή στην ένδειξη μηδέν, όταν ξεκίνησε από την Αθήνα. Όταν έφθασε στη Θεσσαλονίκη, η ένδειξη του χιλιομετρητή θα ήταν η ίδια, μικρότερη ή μεγαλύτερη από τη μετατόπιση του λεωφορείου; Να αιτιολογήστε την απάντησή σας.

5. Ο στίβος ενός σταδίου είναι 400 m. Δηλαδή, ένας αθλητής που καλύπτει μία στροφή στον εσωτερικό διάδρομο του σταδίου έχει διανύσει απόσταση 400 m. Οι αθλητές που αγωνίζονται στα 100 m καλύπτουν μια ευθεία στη μια πλευρά του σταδίου. Στη διάρκεια ενός αγώνα των 100 m ενός αθλητή και των 400 m ενός άλλου αθλητή που τρέχει στον εσωτερικό διάδρομο, να συγκρίνετε το διάστημα και τη μετατόπισή τους.

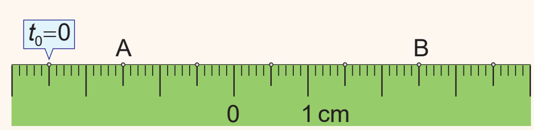
6. Αντλώντας στοιχεία από την εικόνα:



να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	Θέση x / m		Μετατόπιση Δx / m	Διάστημα s / m
Σημείο Α		$\text{A} \rightarrow \text{B}$		
Σημείο Β		$\text{B} \rightarrow \text{A}$		
Σημείο Γ		$\text{A} \rightarrow \Gamma$		
		$\text{A} \rightarrow \text{B} \rightarrow \Gamma$		

7. Στην εικόνα βλέπετε τα ίχνη σε μια χαρτοταινία που προέκυψαν από εργαστηριακή άσκηση μελέτης κίνησης με χρήση χρονομετρητή.



Εάν γνωρίζετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών κουκκίδων το χρονικό διάστημα είναι 0,01 s, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν στις κουκκίδες που βρίσκονται στα σημεία Α και Β, καθώς και τη χρονική διάρκεια της μετάβασης από το Α στο Β.

β) Να προσδιορίσετε τις θέσεις των κουκκίδων που βρίσκονται στα σημεία A και B και να σχεδιάσετε τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης.

γ) Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης από το B στο A και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της.

8. Ένας μαθητής περπατά από το σπίτι, το οποίο μπορείτε να θεωρήσετε ως αρχική θέση $x = 0$, προς το σχολείο κινούμενος σε ευθύγραμμη διαδρομή. Στον πίνακα αναγράφεται η καταγραφή από ένα έξυπνο κινητό τηλέφωνο του αριθμού των βημάτων του ανά λεπτό.

Δt / min	x / βήματα
0-1	70
1-2	70
2-3	80
3-4	90
4-5	70
5-6	80
6-7	100
7-8	90
8-9	70

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση θέσης-χρόνου.

9. Εκτελούμε τις παρακάτω ρίψεις με ένα μπαλάκι του τένις.

1η ρίψη:
Εκτοξεύουμε το μπαλάκι με ταχύτητα μέτρου v κατακόρυφα προς τα κάτω. Σε χρονικό διάστημα Δt έχει κατέλθει κατά h, ενώ το μέτρο της ταχύτητάς του έχει διπλασιαστεί.

2η ρίψη:
Εκτοξεύουμε το μπαλάκι με ταχύτητα μέτρου v κατακόρυφα προς τα πάνω. Σε χρονικό διάστημα $\Delta t/2$ έχει ανέλθει κατά $h/4$, ενώ το μέτρο της ταχύτητάς του έχει υποδιπλασιαστεί.

α) Για κάθε ρίψη να κατασκευάσετε ένα σχήμα με το μπαλάκι στις δύο αναφερόμενες θέσεις, συμπεριλαμβάνοντας τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε κάθε θέση.

β) Να συγκρίνετε το μέτρο των μέσων επιταχύνσεων και των μέσων ταχυτήτων που έχει το μπαλάκι στις δύο ρίψεις.

Ασκήσεις

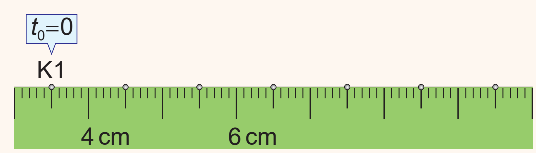
1. Στους Ολυμπιακούς Αγώνες του Τόκιο ο Στέφανος Ντούσκος κατέκτησε το χρυσό μετάλλιο στην κωπηλασία −στο αγώνισμα του μονού σκιφ− διανύοντας απόσταση 2 km σε 6 min 40,45 s. Ο αγώνας ήταν συγκλονιστικός! Στο μεγαλύτερο μέρος του ο Έλληνας κωπηλάτης ήταν δίπλα-δίπλα με τον Νορβηγό Borch που τελικά τερμάτισε δεύτερος σε χρόνο 6 min 41,66 s.

α) Με πόση χρονική διαφορά μεταξύ τους τερμάτισαν οι δύο αθλητές;

β) Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του σκάφους του Έλληνα Ολυμπιονίκη.

γ) Να εκτιμήσετε την ταχύτητα με την οποία κινείτο ο Έλληνας όπως τον έβλεπε από το σκάφος του ο Νορβηγός.

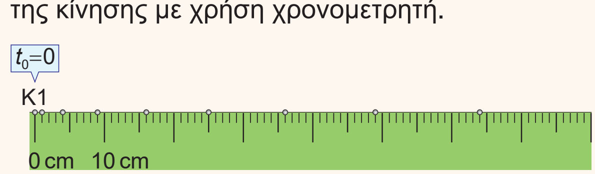
2. Στην εικόνα βλέπετε τα ίχνη σε μια χαρτοταινία που προέκυψαν από εργαστηριακή άσκηση μελέτης κίνησης με χρήση χρονομετρητή.



Εάν γνωρίζετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών κουκκίδων το χρονικό διάστημα είναι 0,01 s, να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί και να κάνετε τη γραφική παράσταση θέσης-χρόνου επιλέγοντας το κατάλληλο σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

Κουκκίδα	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
t / s							
x / cm							

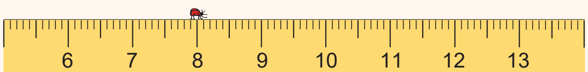
3. Στην εικόνα βλέπετε τα ίχνη σε μια χαρτοταινία που προέκυψαν από εργαστηριακή άσκηση μελέτης κίνησης με χρήση χρονομετρητή.



Εάν γνωρίζετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών κουκκίδων το χρονικό διάστημα είναι 0,01 s, να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί και να κάνετε τη γραφική παράσταση θέσης-χρόνου επιλέγοντας το κατάλληλο σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

Κουκκίδα	Κ1	Κ2	Κ3	Κ4	Κ5	Κ6	Κ7	Κ8	Κ9
t / s									
x / cm									

4. Ένα έντομο κινείται κατά μήκος ενός χάρακα, όπως παριστάνεται στην εικόνα.



Η θέση του εντόμου θα καθορίζεται από τη θέση ενός σημείου του, για παράδειγμα ενός σημείου του κεφαλιού του. Η μαθήτρια στην οποία ανήκει ο χάρακας παρατήρησε ότι το έντομο προσγειώθηκε στον χάρακα στη θέση 8 cm, ξεκίνησε να κινείται προς τα δεξιά μέχρι τη θέση 12 cm και ακολούθως άλλαξε πορεία κινούμενο ως τη θέση 6 cm, οπότε πέταξε ξανά.

α) Να σχεδιάσετε πάνω στην εικόνα το διάνυσμα της μετατόπισης του εντόμου στον χρόνο που βρισκόταν πάνω στον χάρακα και να υπολογίσετε το μέτρο της.

β) Να υπολογίσετε το διάστημα που διάνυσε το έντομο πάνω στον χάρακα.

γ) Αν η μέση αριθμητική ταχύτητα του εντόμου ήταν $0{,}4\ \mathrm{cm/s}$, να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα στο οποίο το έντομο κινήθηκε πάνω στον χάρακα.

5. Ένας κολυμβητής κολυμπάει σε πισίνα μήκους 50 m και τη διανύει σε χρόνο 40 s. Μόλις φθάνει στο τέρμα, επιστρέφει αμέσως στην αφετηρία. Η επιστροφή διαρκεί 50 s. Να βρείτε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του κολυμβητή:

α) στα πρώτα 50 m,

β) στην επιστροφή του στην αφετηρία,

γ) σε όλη την κίνηση.

6. Όταν πρόκειται να απογειωθεί από ένα αεροπλανοφόρο ένα πολεμικό αεροσκάφος F-16, ξεκινά από την ηρεμία και αυξάνει την ταχύτητά του στον διάδρομο απογείωσης έως τα $198\ \mathrm{km/h}$, η οποία είναι η ταχύτητα απογείωσης. Το μήκος της διαδρομής που διανύει το αεροπλάνο κατά την απογείωση είναι $275\ \mathrm{m}$. Θεωρούμε ότι η μέση αριθμητική τιμή της ταχύτητας του αεροσκάφους κατά την απογείωση είναι η μισή της ταχύτητας απογείωσης. Να υπολογίσετε:

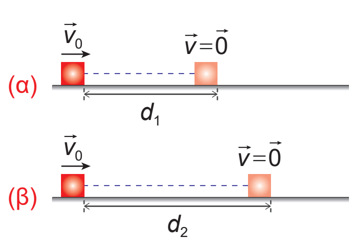
α) τον χρόνο επιτάχυνσης του αεροπλάνου στον διάδρομο απογείωσης σε δευτερόλεπτα,

β) τη μέση τιμή της επιτάχυνσης του αεροπλάνου σε $\mathrm{m/s^2}$.

2.2 Μελέτη υλικού σημείου χωρίς την επίδραση δυνάμεων – Ισορροπία άκαμπτου σώματος

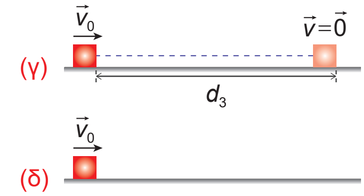
1. Ο 1ος Νόμος του Νεύτωνα – Η έννοια της αδράνειας

Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα, για παράδειγμα ένα μικρό κιβώτιο, εκτοξεύεται έτσι, ώστε να κινηθεί πάνω σε χώμα. Γνωρίζουμε από την εμπειρία μας ότι το κιβώτιο θα κινηθεί αρχικά και, αφού καλύψει κάποια απόσταση, θα σταματήσει, όπως φαίνεται στο **σχήμα 2.6α**. Αν εκτοξεύσουμε το ίδιο κιβώτιο με τον ίδιο ακριβώς τρόπο πάνω σε ένα δάπεδο από ξύλο, τότε περιμένουμε ότι το κιβώτιο θα διανύσει μεγαλύτερη απόσταση πριν σταματήσει και πάλι, όπως φαίνεται στο **σχήμα 2.6β**. Τέλος, αν αναγκάσουμε το κιβώτιο να κινηθεί πάνω σε ένα παγοδρόμιο (**Σχήμα 2.6γ**), τότε η απόσταση που θα διανύσει θα είναι ακόμη μεγαλύτερη, αλλά και πάλι θα σταματήσει κάποια στιγμή.



Σχήμα 2.6 Εκτοξεύουμε με τον ίδιο τρόπο ένα κιβώτιο: (α) κατά μήκος ενός χωμάτινου διαδρόμου, (β) κατά μήκος ενός διαδρόμου φτιαγμένου από ξύλο και

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, καταλαβαίνουμε ότι η δύναμη της τριβής που ασκείται πάνω στο κιβώτιο σε καθένα από τα παραπάνω πειράματα είναι μικρότερη από την προηγούμενη.



Σχήμα 2.6 (γ) κατά μήκος ενός διαδρόμου από πάγο. Το κιβώτιο θα διανύει ολοένα και μεγαλύτερες αποστάσεις, $(d_3 > d_2 > d_1)$, αλλά και στις τρεις περιπτώσεις κάποια στιγμή θα σταματήσει να κινείται. Τι θα συνέβαινε στην περίπτωση (δ) που το κιβώτιο θα εκτοξευόταν πάνω σε έναν διάδρομο με τον οποίο δεν θα εμφάνιζε τριβή; Σε ποια απόσταση θα σταματούσε;

Τι θα συνέβαινε όμως, αν είχαμε στη διάθεσή μας έναν διάδρομο πολύ μεγάλου μήκους ο οποίος ήταν εντελώς λείος έτσι, ώστε το κιβώτιο να κινείται πάνω του, χωρίς να δέχεται καθόλου τριβή;

Ο πρώτος που έθεσε το ερώτημα αυτό ήταν ο Γαλιλαίος και η απάντηση που έδωσε, αν και σε διαφορετικό πλαίσιο, ήταν ότι «**το κιβώτιο δεν θα σταματούσε ποτέ την κίνησή του**». Φυσικά, είναι πολύ δύσκολο σε μια τέτοιου είδους κίνηση, και γενικότερα σε όλες τις κινήσεις που εξελίσσονται κοντά στην επιφάνεια της Γης, να εξαλείψουμε τη δύναμη της τριβής. Για αυτόν τον λόγο, ο Γαλιλαίος την εποχή του δεν μπορούσε να εκτελέσει ένα τέτοιο πείραμα, αλλά μόνο να το σκεφτεί (ιδεατό πείραμα). Ο Γαλιλαίος λοιπόν φαίνεται να κατανόησε ότι είναι η τριβή, (δηλαδή η ύπαρξη μιας δύναμης), που σταματά την κίνηση των σωμάτων και όχι κάποια τάση των ίδιων των σωμάτων να παύουν να κινούνται.

Ο Νεύτωνας γενίκευσε αυτήν την ιδέα διατυπώνοντας τον φερώνυμο 1ο Νόμο ή Νόμο της Αδράνειας σύμφωνα με τον οποίο:

Αν σε ένα σώμα δεν ασκείται καμία δύναμη ή αν η συνισταμένη των δυνάμεων $\Sigma\vec{F}$ είναι ίση με το μηδέν, τότε το σώμα είτε είναι ακίνητο είτε κινείται με σταθερή ταχύτητα.

1ος Νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0} \Leftrightarrow a=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{Το σώμα είναι ακίνητο ή κινείται με} \\ \text{σταθερή ταχύτητα.}\end{cases}$$

Επισημαίνουμε ότι ο 1ος Νόμος του Νεύτωνα είναι στην πραγματικότητα μια ισοδυναμία. Αυτό σημαίνει ότι ο Νόμος ισχύει και αντίστροφα. Δηλαδή, αν το σώμα είτε είναι ακίνητο είτε κινείται με σταθερή ταχύτητα, τότε είναι βέβαιο ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται είναι ίση με το μηδέν.

Αξίζει να σημειωθεί ότι πριν από τη διατύπωση του 1ου Νόμου του Νεύτωνα οι άνθρωποι θεωρούσαν ότι η «φυσική» κατάσταση ενός σώματος είναι αυτή κατά την οποία είναι ακίνητο, ενώ για να κινείται το σώμα, ακόμη και με σταθερή ταχύτητα, θα πρέπει να δέχεται κάποια δύναμη η οποία να «συντηρεί» αυτήν του την κίνηση. Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα φθάνουμε, αν εμπιστευθούμε τις αισθήσεις μας, καθώς το σώμα μας μάς πληροφορεί ότι, ακόμη και αν θέλουμε να κινήσουμε ένα αντικείμενο με σταθερή ταχύτητα, θα πρέπει να κουραστούμε, ασκώντας του διαρκώς δύναμη. Επίσης, τα περισσότερα από τα αντικείμενα που υπάρχουν κοντά μας δεν

Αδράνεια

Μια διαφορετική διατύπωση του 1ου Νόμου του Νεύτωνα αντικατοπτρίζει το ότι όλα τα σώματα έχουν μια *εγγενή* τάση όχι μόνο να παραμένουν ακίνητα, αλλά και να διατηρούν την κινητική τους κατάσταση. Μπορούμε να περιλάβουμε μαζί τις δύο αυτές περιπτώσεις, λέγοντας ότι τα σώματα έχουν την τάση να διατηρούν την ταχύτητά τους σταθερή (υπό την έννοια ότι η ακινησία σημαίνει σταθερή ταχύτητα ίση με το μηδέν), αλλά για λόγους σαφήνειας διαχωρίσαμε την ακινησία από την περίπτωση κίνησης με σταθερή ταχύτητα. Η τάση αυτή είναι μια θεμελιακή ιδιότητα της ύλης που ονομάζεται **αδράνεια**.

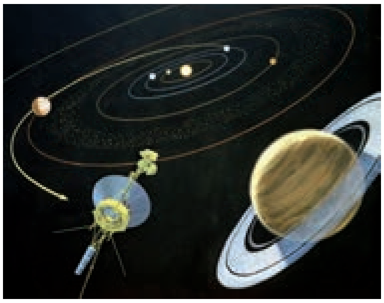
Αδράνεια

Προσοχή!

Η αδράνεια δεν είναι κάποιο νέο είδος δύναμης που ασκείται στο σώμα και συντηρεί την κίνησή του, αλλά ένα επιπρόσθετο χαρακτηριστικό που αποδίδουμε στην ύλη μαζί με όλα εκείνα που ήδη της έχουμε αποδώσει όπως ότι καταλαμβάνει όγκο ή θα της αποδώσουμε όπως ότι φέρει ηλεκτρικό φορτίο. Για να αλλάξει η κινητική κατάσταση ενός σώματος ξεπερνώντας την εγγενή του τάση να αδρανεί, δηλαδή να διατηρεί την κινητική του κατάσταση αμετάβλητη, απαιτείται να ασκηθεί κάποια δύναμη όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, όταν θα διατυπώσουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα.

βρίσκονται σε μια συνεχή κίνηση. Όταν τεθούν σε κίνηση και στη συνέχεια παύσει να υπάρχει η αιτία που τα ανάγκασε να ξεκινήσουν, αργά ή γρήγορα παύουν να κινούνται. Η βασική αιτία που συμβαίνει αυτό είναι η εξής: Δεν είναι εύκολο να εξασφαλιστεί η συνθήκη $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$, ακόμη και όταν εμείς θεωρούμε ότι ισχύει, επειδή δεν ασκούμε δύναμη στο σώμα, καθώς για παράδειγμα οι κάθε είδους τριβές (ακόμη και από τον αέρα) είναι δύσκολο να εξαλειφθούν.

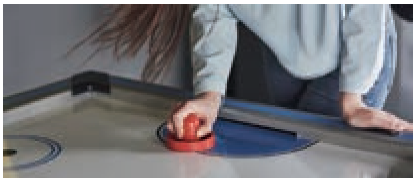
Σήμερα, όμως, με τα διαστημικά ταξίδια μπορούμε να επιβεβαιώσουμε πειραματικά την ισχύ του νόμου αυτού. Συγκεκριμένα, τα διαστημικά οχήματα, αφού απομακρυνθούν τόσο από τη Γη, ώστε πρακτικά να θεωρούμε ότι βρίσκονται σε περιοχή αμελητέων εξωτερικών δυνάμεων, ταξιδεύουν διατηρώντας σχεδόν σταθερή την ταχύτητά τους και χρησιμοποιούν τις μηχανές τους μόνο για να κάνουν αλλαγές στην τροχιά τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι διαστημικές βολίδες Voyager 1 και 2 (**Εικόνα 2.4**).



Εικόνα 2.4 Οι διαστημικές βολίδες Voyager 1 και Voyager 2 εκτοξεύθηκαν στις 5 Σεπτεμβρίου και 20 Αυγούστου αντίστοιχα του 1977. Σήμερα και τα δύο αυτά αντικείμενα είναι εκτός του Ηλιακού μας συστήματος και κινούνται στον διαστρικό χώρο με σταθερές ταχύτητες χωρίς τη λειτουργία των μηχανών τους, επιβεβαιώνοντας τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα. Στην ηλεκτρονική διεύθυνση https://voyager.jpl.nasa.gov/mission/ υπάρχουν αναλυτικές πληροφορίες και για τις δύο αυτές βολίδες, μεταξύ των οποίων η απόστασή τους από τη Γη και η ταχύτητά τους.

Εκτός από τα διαστημικά ταξίδια, μπορούμε κατά προσέγγιση να επιβεβαιώσουμε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα και στο εργαστήριο, χρησιμοποιώντας αεροτράπεζες ή αεροτροχιές (**Εικόνα 2.5**). Αεροτράπεζες εκτός του εργαστηρίου συναντάμε σε ορισμένα παιχνίδια όπου δίσκοι κινούνται πάνω σε μια λεία επιφάνεια που φέρει τρύπες από τις οποίες εξέρχεται αέρας με συνέπεια οι δίσκοι να κινούνται πάνω σε ένα στρώμα αέρα, περιορίζοντας έτσι σημαντικά την τριβή. Οι αεροτροχιές είναι αντίστοιχες κατασκευές που μειώνουν σημαντικά την τριβή και έτσι οι ειδικοί δρομείς που κινούνται πάνω τους μπορούν να διατηρούν σχεδόν σταθερή την ταχύτητά τους σε όλο το μήκος της αεροτροχιάς.

(α)



(β)

Εικόνα 2.5 (α) Ένα παιχνίδι (Air Hockey) με δίσκους που παίζεται πάνω σε αεροτράπεζα. (β) Μια αεροτροχιά που μπορείτε να συναντήσετε στο σχολικό εργαστήριο Φυσικής. Ο σωλήνας που φαίνεται στο δεξιό άκρο του διαδρόμου παρέχει αέρα ο οποίος εξέρχεται από μικρές οπές που υπάρχουν σε όλο το μήκος του διαδρόμου. Με τον τρόπο αυτόν, οι δύο δρομείς που φαίνονται πάνω στην αεροτροχιά μπορούν να κινηθούν δεχόμενοι αμελητέες τριβές.

2. Ισορροπία υλικού σημείου

Λέμε ότι κάθε σώμα, στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι ίση με το μηδέν, **ισορροπεί**. Αυτό σημαίνει ότι το σώμα είτε θα πρέπει να παραμένει ακίνητο είτε θα πρέπει να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με υλικά σημεία που ισορροπούν, γεγονός που σημαίνει ότι οι δυνάμεις που δέχονται διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο και θα θεωρήσουμε επιπλέον μόνο δυνάμεις που είτε βρίσκονται όλες στην ίδια ευθεία είτε ανήκουν όλες στο ίδιο επίπεδο, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι το επίπεδο x-y.

Σύμφωνα με τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα, για ένα τέτοιο σώμα θα ισχύει ότι $\Sigma\vec{F}=\vec{0}$. Από την ανάλυση και τη σύνθεση των δυνάμεων γνωρίζουμε ότι από το Πυθαγόρειο Θεώρημα υπολογίζουμε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης, όταν γνωρίζουμε τις δύο κάθετες συνιστώσες της. Η διανυσματική έκφραση του 1ου Νόμου $\Sigma\vec{F}=\vec{0}$ είναι ισοδύναμη με την ταυτόχρονη ισχύ των τύπων για τις συνιστώσες των δυνάμεων $\Sigma F_x=0$ και $\Sigma F_y=0$, καθώς μόνο τότε το άθροισμα των τετραγώνων που εμφανίζεται στο Πυθαγόρειο Θεώρημα μπορεί να δώσει τελικό αποτέλεσμα ίσο με το μηδέν.
Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{cases}\quad \text{(Συνθήκη Ισορροπίας υλικού σημείου)}$$

Επισημαίνουμε και πάλι ότι πρόκειται για μια ισοδυναμία, δηλαδή μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ισορροπία είτε εξασφαλίσουμε την ισχύ του διανυσματικού Νόμου $\left(\Sigma\vec{F}=\vec{0}\right)$ είτε εξασφαλίσουμε την ισχύ του Νόμου στη μορφή των συνιστωσών $\left(\Sigma F_x=0 \text{ και } \Sigma F_y=0\right)$.

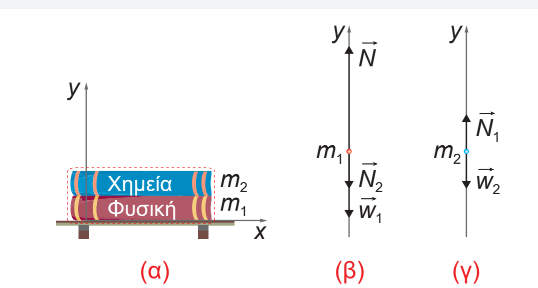
Πείραμα: Ισορροπία σώματος

Ισορροπία σώματος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.2

1. Πάνω σε ένα γραφείο είναι τοποθετημένα ένα βιβλίο Φυσικής και ένα βιβλίο Χημείας, το ένα πάνω στο άλλο, με μάζες $m_1=2\text{ kg}$ και $m_2=1\text{ kg}$ αντιστοίχως. Αφού σχεδιάσετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για κάθε βιβλίο, να υπολογίσετε τη δύναμη που δέχεται το βιβλίο μάζας m_1 από το γραφείο.
Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g=10\text{ m/s}^2$.

Λύση



(α) Σ.Α. για τα δύο βιβλία (β) ΔΕΣ για το βιβλίο της Φυσικής (γ) ΔΕΣ για το βιβλίο της Χημείας

- Στο **σχήμα** (**α**) απεικονίζονται τα δύο βιβλία που ισορροπούν και σημειώνεται το σύστημα των αξόνων *x* και *y* που θα χρησιμοποιήσουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση. Τα βιβλία αποτελούν το σύστημα που θα μας απασχολήσει. Για αυτό περιβάλλονται από μια στικτή γραμμή.
- Στο **σχήμα** (**β**) έχουμε εισαγάγει την απλοποίηση της αναπαράστασης του βιβλίου της Φυσικής με ένα υλικό σημείο και έχουμε σημειώσει τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, που είναι: η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το γραφείο, η κάθετη (πιεστική) δύναμη $\vec{N}_2$ από το βιβλίο της Χημείας που βρίσκεται από πάνω του, (αμφότερες είναι δυνάμεις επαφής), και το βάρος $\vec{w}_1$, που είναι δύναμη από απόσταση.
- Στο **σχήμα** (**γ**) έχουμε εισαγάγει και πάλι την απλοποίηση της αναπαράστασης του βιβλίου της Χημείας με ένα υλικό σημείο και έχουμε σημειώσει τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, που είναι: η κάθετη δύναμη $\vec{N}_1$ από το βιβλίο της Φυσικής που βρίσκεται από κάτω του και το βάρος $\vec{w}_2$. Έχουμε λοιπόν στον άξονα *y*:

Δυνάμεις	Μέτρα	Συνιστώσες
$\vec{w}_1$	w_1	$w_{1,y} = -w_1$
$\vec{w}_2$	w_2	$w_{2,y} = -w_2$
$\vec{N}_1$	N_1	$N_{1,y} = N_1$
$\vec{N}_2$	N_2	$N_{2,y} = -N_2$
$\vec{N}$	N	$N_y = N$

Αφού το βιβλίο της Χημείας ισορροπεί, θα πρέπει να ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N_{1,y} + w_{2,y} = 0$$

$$\text{ή} \quad N_1 - w_2 = 0 \quad \text{ή} \quad N_1 = m_2 g$$

και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$N_1 = (1\,\text{kg})\left(10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 10\,\text{N}$$

όπου δεν χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη συνθήκη για τον άξονα *x*, καθώς στον άξονα αυτόν δεν ασκούνται δυνάμεις.

Ομοίως, για το βιβλίο της Φυσικής που ισορροπεί επίσης, θα πρέπει να ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N_y + N_{2,y} + w_{1,y} = 0$$

$$\text{ή} \quad N - N_2 - w_1 = 0$$

όπου και πάλι δεν χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη συνθήκη για τον άξονα *x*, καθώς στον άξονα αυτόν δεν ασκούνται δυνάμεις.

Επειδή οι δυνάμεις $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ έχουν ίσα μέτρα, (μπορείτε να το αιτιολογήσετε;), θα έχουμε ότι:

$$N - N_1 - w_1 = 0 \quad \text{ή} \quad N = N_1 + m_1 g$$

και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$N = (10\,\text{N}) + (2\,\text{kg})(10\,\text{m/s}^2)$$

$$= (10\,\text{N}) + (20\,\text{N}) = 30\,\text{N}$$

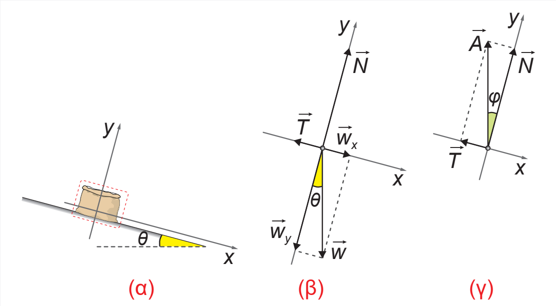
που είναι το μέτρο της ζητούμενης δύναμης.

2. Ένα βαρύ σακί με τσιμέντο, μάζας $m = 50$ kg, αφήνεται πάνω σε μια ράμπα φόρτωσης που σχηματίζει γωνία $\theta = 15°$ με το οριζόντιο επίπεδο, όπου και παραμένει ακίνητο. Να υπολογίσετε τη δύναμη της τριβής, καθώς και τη συνολική δύναμη που δέχεται το σακί από τη ράμπα. Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,\text{m/s}^2$, ημ$15° = 0{,}259$ και συν$15° = 0{,}966$.

Λύση

- Στο **σχήμα** (**α**) φαίνεται το σακί που ισορροπεί κατά μήκος της ράμπας, που αποτελεί το σύστημα που θα μας απασχολήσει στο συγκεκριμένο παράδειγμα (για αυτό περιβάλλεται από μια στικτή γραμμή), και στο ίδιο σχήμα σημειώνεται το σύστημα των αξόνων *x* και *y* που θα χρησιμοποιήσουμε.
- Στο **σχήμα** (**β**) έχουμε εισάγει την απλοποίηση της αναπαράστασης του σακιού με ένα υλικό σημείο και έχουμε σημειώσει τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, που είναι: η δύναμη της τριβής $\vec{T}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τη ράμπα, που είναι δυνάμεις επαφής, και το βάρος $\vec{w}$, που είναι δύναμη από

απόσταση. (Μπορείτε να αιτιολογήσετε γιατί το σακί δέχεται δύναμη τριβής από τη ράμπα;)



(α) Ένα σακί με τσιμέντο που ισορροπεί ακίνητο πάνω σε μια ράμπα αποτελεί το υπό μελέτη σύστημα. (β) ΔΕΣ για το σακί. (γ) Η σύνθεση των δύο δυνάμεων που ασκεί η ράμπα στο σακί για τον προσδιορισμό της συνολικής δύναμης που του ασκεί η ράμπα.

Παρατηρούμε στο **σχήμα (β)** ότι η δύναμη της τριβής και η κάθετη δύναμη βρίσκονται ήδη κατά μήκος των αξόνων που έχουμε επιλέξει, ενώ το βάρος θα πρέπει να αναλυθεί. Από το σχήμα αυτό διαπιστώνουμε ότι η γωνία θ που σχηματίζει η ράμπα με το οριζόντιο επίπεδο μεταφέρεται και είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα του βάρους $\vec{w}$ με τον αρνητικό ημιάξονα y. Αυτό σημαίνει ότι για τις δύο συνιστώσες του βάρους θα έχουμε:

$$w_x = w\text{ημ}\theta = mg\text{ημ}15^\circ$$
$$= (50\text{ kg})\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)0{,}259 = 129{,}5\text{ N}$$

$$w_y = -w\text{συν}\theta = -mg\text{συν}15^\circ$$
$$= -(50\text{ kg})\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)0{,}966 = -483\text{ N}$$

Η γωνία στο κεκλιμένο επίπεδο μεταφέρεται

Επίσης, η τριβή βρίσκεται στον άξονα x, οπότε έχουμε $T_x = -T$, ενώ η κάθετη δύναμη βρίσκεται στον άξονα y και έχουμε ότι $N_y = N$.

Καθώς γνωρίζουμε ότι το σακί είναι ακίνητο, που σημαίνει ότι ισορροπεί, σύμφωνα με τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ή} \quad w_x + T_x = 0 \quad \text{ή} \quad w_x - T = 0$$

από την οποία βρίσκουμε ότι $T = 129{,}5$ N

και

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N + w_y = 0$$

από την οποία βρίσκουμε ότι $N = 483$ N.

- Η ζητούμενη δύναμη είναι αυτή που ασκεί συνολικά η ράμπα στο σακί, την οποία στο **σχήμα (γ)** έχουμε συμβολίσει με $\vec{A}$, επομένως θα προκύψει από τη συνισταμένη των δυνάμεων που μόλις υπολογίσαμε. Επειδή η $\vec{T}$ και η $\vec{N}$ είναι κάθετες μεταξύ τους, το μέτρο της $\vec{A}$ θα δίνεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, δηλαδή:

$$A = \sqrt{T^2 + N^2}$$
$$= \sqrt{(129{,}5\text{ N})^2 + (483\text{ N})^2} = 500\text{ N}$$

Η κατεύθυνση της δύναμης αυτής μπορεί να καθοριστεί, αν υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει με έναν από τους άξονες, έστω τον άξονα y, η οποία στο **σχήμα (γ)** σημειώνεται ως φ. Μπορούμε να υπολογίσουμε οποιονδήποτε τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας αυτής και εδώ θα επιλέξουμε την εφαπτομένη, οπότε έχουμε:

$$\text{εφ}\varphi = \frac{T}{N} = \frac{129{,}5}{483} = 0{,}268$$

Αν και δεν είναι απαραίτητο, χρησιμοποιώντας έναν πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών ή έναν υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε ότι $\varphi = 15^\circ$.

Επεκτάσεις

Στο προηγούμενο παράδειγμα η συνολική δύναμη $\vec{A}$ που ασκεί η ράμπα στο σακί με το τσιμέντο προέκυψε να έχει μέτρο ίσο με 500 N, δηλαδή ίση με το βάρος του, ενώ η γωνία που σχηματίζει η $\vec{A}$ με τον άξονα y προέκυψε να έχει την τιμή $\varphi = 15°$. Μπορείτε να αιτιολογήσετε τις τιμές αυτές, χρησιμοποιώντας τη διανυσματική συνθήκη για την ισορροπία σύμφωνα με την οποία $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$;

3. Ισορροπία άκαμπτου σώματος

Πείραμα: Ισορροπία άκαμπτου σώματος

Στην περίπτωση που το σώμα που ισορροπεί δεν μπορεί να προσεγγιστεί από ένα υλικό σημείο, οι δυνάμεις δεν τέμνονται αναγκαστικά σε ένα σημείο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η συνθήκη $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ (ή ισοδύναμα οι συνθήκες $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_y = 0$ για δυνάμεις που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο) να μην αρκεί, για να εξασφαλίζει την ισορροπία, αλλά να πρέπει να συμπληρωθεί από τη συνθήκη για τον μηδενισμό των ροπών, δηλαδή:

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{0}$$

Ο υπολογισμός των ροπών μπορεί να γίνει ως προς οποιοδήποτε σημείο (ή προς οποιονδήποτε άξονα) περιστροφής. Αποδεικνύεται ότι, αν η συνισταμένη ροπή μηδενίζεται ως προς κάποιο σημείο (ή προς κάποιον άξονα), τότε θα μηδενίζεται και ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο (ή προς οποιονδήποτε άλλο άξονα) επιλέξουμε. Η συνθήκη αυτή για τις ροπές εξασφαλίζει ότι η ταχύτητα περιστροφής του σώματος δεν αλλάζει, (δηλαδή *αδρανεί στροφικά*), και στην περίπτωση που είναι ακίνητο, δεν περιστρέφεται. Η αντίστοιχη συνθήκη για τον μηδενισμό των δυνάμεων εξασφαλίζει ότι η ταχύτητα μεταφορικής κίνησης του σώματος δεν μεταβάλλεται, (δηλαδή *αδρανεί μεταφορικά*), και στην περίπτωση που είναι ακίνητο, δεν μεταφέρεται.

Σύμβαση
Η έκφραση «εκτεταμένο άκαμπτο σώμα» μπορεί να εμφανίζεται απλούστερα ως «εκτεταμένο σώμα» ή «άκαμπτο σώμα», χωρίς αλλαγή στο νόημά της.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.2

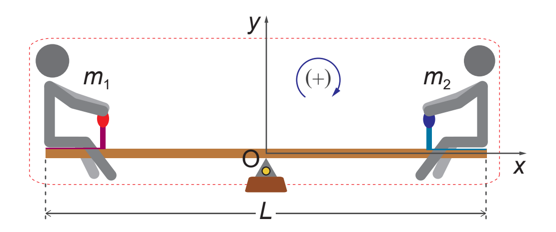
3. Δύο μαθητές του Δημοτικού με μάζες $m_1 = 25$ kg και $m_2 = 30$ kg αντιστοίχως ανεβαίνουν στις δύο θέσεις μιας τραμπάλας, η οποία θεωρούμε ότι έχει αμελητέα μάζα σε σχέση με τα παιδιά, και το μήκος της είναι $L = 1{,}5$ m.

α) Να εξηγήσετε γιατί η τραμπάλα θα περιστραφεί, αν στηριχθεί ακριβώς στο μέσο της. Προς ποια πλευρά θα τείνει να περιστραφεί στην περίπτωση αυτή;

β) Να βρείτε σε πόση απόσταση από τον μαθητή με τη μεγαλύτερη μάζα θα πρέπει να στηριχθεί η τραμπάλα, ώστε να ισορροπεί.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Λύση



(α)

(α) Οι δύο μαθητές πάνω στην τραμπάλα, η οποία στηρίζεται στο μέσο της O.

α) Στο **σχήμα** (**α**) φαίνεται η τραμπάλα στηριγμένη ακριβώς στο μέσο της. Το σύστημα είναι τα δύο παιδιά και η τραμπάλα. Επιλέγουμε τον άξονα y του συστήματος συντεταγμένων έτσι, ώστε να είναι κατακόρυφος έχοντας θετική φορά προς τα πάνω, και τον δεύτερο άξονα x, που επιλέγεται κάθετος προς τον προηγούμενο, να είναι οριζόντιος με θετική φορά προς τα δεξιά. Ορίζουμε αυθαίρετα ως θετική μια τάση για περιστροφή σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Η τραμπάλα ισορροπεί. Μόλις καθίσουν οι μαθητές, τα βάρη τους θα προκαλέσουν ροπές ως προς το μέσο της τραμπάλας που θα είναι σύμφωνα με το **σχήμα** (**β**):

$$\tau_1 = -w_1\frac{L}{2} = -m_1 g\frac{L}{2}$$

$$= -(25\ \text{kg})\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}75\ \text{m})$$

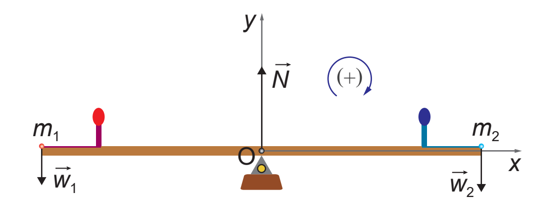
$$= -187{,}5\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$\tau_2 = +w_2\frac{L}{2} = m_2 g\frac{L}{2}$$

$$= (30\ \text{kg})\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}75\ \text{m})$$

$$= 225\ \text{N}\cdot\text{m}$$

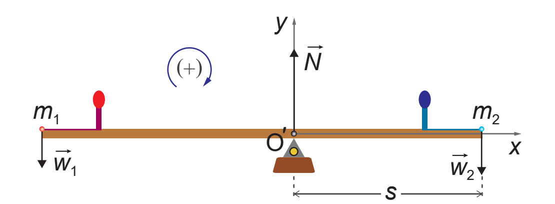
Αφού $\tau_2 > \tau_1$ και η δύναμη από το σημείο στήριξης δεν προκαλεί ροπή, η τραμπάλα θα έχει την τάση να περιστραφεί σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.



(β)

(β) Μπορούμε να προσεγγίσουμε τους μαθητές ως υλικά σημεία, αλλά όχι και την τραμπάλα.

β) Στο **σχήμα** (**γ**) φαίνεται η τραμπάλα στηριγμένη τώρα σε ένα άλλο σημείο και όχι στο μέσο της. (Μπορείτε να προβλέψετε, προκειμένου να ισορροπεί η τραμπάλα, αν θα πρέπει να στηριχθεί πιο κοντά στο παιδί με τη μικρότερη ή με τη μεγαλύτερη μάζα;)



(γ)

(γ) Η τραμπάλα, που στηρίζεται τώρα σε ένα σημείο που απέχει από τον μαθητή μεγαλύτερης μάζας σε μια απόσταση ίση με s, ισορροπεί.

Εφόσον επιθυμούμε η τραμπάλα να ισορροπεί, θα πρέπει εκτός της συνισταμένης δύναμης και η συνισταμένη των ροπών να είναι ίση με το μηδέν ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγοντας ως σημείο υπολογισμού των ροπών το σημείο στήριξης O' και αφού η ροπή της δύναμης στήριξης $\vec{N}$ είναι ίση με το μηδέν, θα έχουμε:

$$\tau_2 + \tau_1 = 0$$

$$m_2 g s - m_1 g(L - s) = 0$$

$$m_2 g s - m_1 g L + m_1 g s = 0$$

$$(m_1 + m_2) g s = m_1 g L$$

$$s = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$s = \frac{(25\ \text{kg})(1{,}5\ \text{m})}{55\ \text{kg}} = 0{,}68\ \text{m}$$

Επεκτάσεις

1. Στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίστηκε η θέση του σημείου στήριξης Ο′ από τη συνθήκη $\Sigma\vec{\tau}=\vec{0}$. Να ανατρέξετε στην προηγούμενη θεματική ενότητα και να υπολογίσετε τη θέση του σημείου Ο′ εφαρμόζοντας το θεώρημα των ροπών.

2. Να εφαρμόσετε τη δεύτερη συνθήκη για την ισορροπία ενός εκτεταμένου σώματος, δηλαδή τη συνθήκη μηδενισμού της συνισταμένης των δυνάμεων. Ποια δύναμη μπορείτε να υπολογίσετε μέσω αυτής της εξίσωσης; Ποιο είναι το μέτρο της;

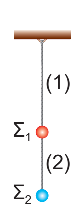
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

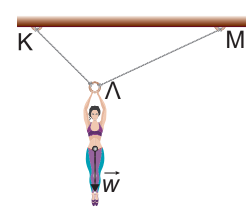
1. Ζητήθηκε από έναν μαθητή να εξηγήσει τον λόγο για τον οποίο, όταν ένα λεωφορείο φρενάρει απότομα, οι επιβάτες τείνουν να κινηθούν προς το μπροστινό μέρος και ειδικά οι όρθιοι κινδυνεύουν να τραυματιστούν, αν δεν κρατιούνται από κάποια χειρολαβή. Ο μαθητής απάντησε ως εξής: «Μόλις γίνει το απότομο φρενάρισμα, εμφανίζεται σχεδόν ακαριαία η δύναμη της αδράνειας και ωθεί τους επιβάτες μπροστά». Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Εσείς τι θα απαντούσατε;

2. Δύο μαθήτριες πληροφορούνται ότι ένα διαστημόπλοιο έχει διαφύγει από την έλξη του Ηλιακού μας συστήματος και κινείται απομακρυνόμενο με σταθερή ταχύτητα σε έναν χώρο μακριά από άλλα ουράνια σώματα, ώστε να μη δέχεται βαρυτικές δυνάμεις. Οι μαθήτριες συζητούν κατά πόσο απαιτούνται ή όχι καύσιμα, για να συνεχίσει το διαστημόπλοιο την κίνησή του σε αυτόν τον χώρο. Η μία υποστηρίζει ότι δεν απαιτούνται καύσιμα, ενώ η άλλη ισχυρίζεται ότι, για να μη σταματήσει, χρειάζεται προωθητική δύναμη και άρα απαιτούνται καύσιμα. Με ποια από τις δύο συμφωνείτε; Να δώσετε τις απαραίτητες εξηγήσεις.

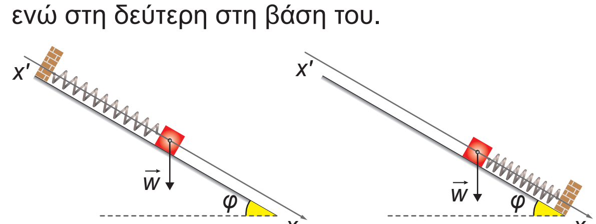
3. Στο σχήμα απεικονίζονται δύο μπαλάκια Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει $m_2=2m_1$. Τα μπαλάκια ισορροπούν με τη βοήθεια δύο αβαρών και μη εκτατών νημάτων. Το νήμα (2) συνδέει μεταξύ τους τα μπαλάκια, ενώ το νήμα (1) έχει το ένα άκρο του προσδεδεμένο στο Σ_1 και το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο ακλόνητα σε οροφή. Να συγκρίνετε το μέτρο της τάσης $\vec{T}_1$ που ασκεί το νήμα (1) στο Σ_1 με το μέτρο της τάσης $\vec{T}_2$ που ασκεί το νήμα (2) στο Σ_2.



4. Στο σχήμα απεικονίζεται μια ακροβάτισσα που ισορροπεί κρατώντας έναν κρίκο ο οποίος έχει αναρτηθεί από οροφή με δύο διαφορετικού μήκους σχοινιά $[(ΚΛ)<(ΜΛ)]$. Ποιο σχοινί ασκεί μεγαλύτερη τάση και γιατί;

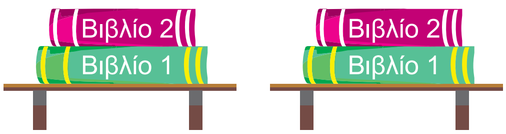


5. Σε λείο κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση ένας ομογενής κύβος με βάρος $\vec{w}$ ισορροπεί ακίνητος με τη βοήθεια αβαρούς (ιδανικού) ελατηρίου, το ένα άκρο του οποίου συνδέεται στον κύβο, ενώ το άλλο του άκρο είναι προσδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Στο σχήμα φαίνονται δύο τρόποι ισορροπίας όπου στην πρώτη περίπτωση το ακλόνητο σημείο βρίσκεται στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, ενώ στη δεύτερη στη βάση του.



Δίνεται ότι και στις δύο περιπτώσεις το ελατήριο είναι ελαστικά παραμορφωμένο. Να συγκρίνετε τις παραμορφώσεις του ελατηρίου μεταξύ τους.

6. Δύο βιβλία ισορροπούν πάνω σε ένα σχολικό θρανίο.



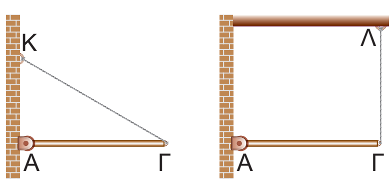
Σχήμα 1 Σχήμα 2

α) Στα σχήματα 1 και 2 να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο βιβλίο 1 και στο βιβλίο 2 αντίστοιχα.

β) Να εφαρμόσετε τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα που περιγράφει την ισορροπία κάθε βιβλίου.

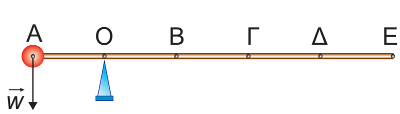
γ) Να αναγνωρίσετε το ζεύγος των δυνάμεων που ικανοποιούν τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα.

7. Μια ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ είναι αρθρωμένη στο Α σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της Γ στηρίζεται με σχοινί είτε από τον τοίχο (πλάγιο σχοινί ΚΓ) είτε από την οροφή (κατακόρυφο σχοινί ΛΓ).



Σε ποια περίπτωση η τάση του σχοινιού είναι μεγαλύτερη και γιατί;

8. Η αβαρής ράβδος του σχήματος έχει μήκος L.



Στο άκρο της Α είναι προσαρτημένο ένα σφαιρίδιο βάρους $\vec{w}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται ότι:

$$(\mathrm{AO}) = (\mathrm{OB}) = (\mathrm{B\Gamma}) = (\Gamma\Delta) = (\Delta\mathrm{E}) = \frac{L}{5}$$

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α) με το βάρος ενός άλλου σφαιριδίου (ως συνάρτηση του w) που θα αναρτηθεί στην αναφερόμενη θέση, ώστε η ράβδος να ισορροπεί

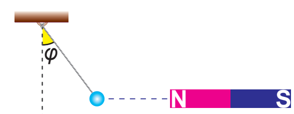
και

β) με το μέτρο της δύναμης (ως συνάρτηση του w), την οποία ασκεί το υποστήριγμα στη ράβδο σε κάθε περίπτωση.

Σημείο προσάρτησης του σφαιριδίου	Β	Γ	Δ	Ε
Βάρος σφαιριδίου				
Μέτρο δύναμης στήριξης				

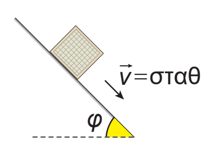
Ασκήσεις

1. Ο μαγνήτης της εικόνας ασκεί οριζόντια δύναμη στο σιδερένιο σφαιρίδιο του εκκρεμούς, ώστε αυτό να ισορροπεί, όταν το νήμα σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο.



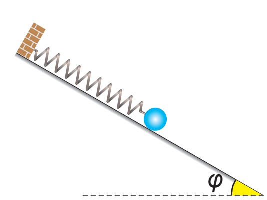
Το βάρος του σφαιριδίου είναι 12 N και γνωρίζουμε ότι συν$\varphi = 0{,}8$ και ημ$\varphi = 0{,}6$. Να υπολογίσετε το μέτρο των δυνάμεων που ασκούν το νήμα και ο μαγνήτης στο σφαιρίδιο, όταν αυτό ισορροπεί.

2. Ένα κιβώτιο μάζας m ολισθαίνει με σταθερή ταχύτητα σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση. Να αποδείξετε ότι για τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ μεταξύ κιβωτίου και κεκλιμένου επιπέδου ισχύει:



$$\mu = \varepsilon\varphi\varphi$$

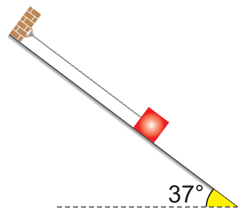
3. Η σφαίρα βάρους 20 N, που παριστάνεται στο σχήμα, ισορροπεί πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο στερεωμένη στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς 100 N/m.



Το πάνω άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου. Αν η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι

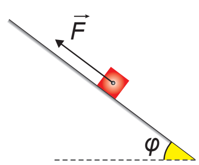
$\varphi = 30°$, να υπολογίσετε την παραμόρφωση του ελατηρίου.

4. Σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία 37° με την οριζόντια διεύθυνση ένα κιβώτιο με βάρος 100 N ισορροπεί ακίνητο με τη βοήθεια αβαρούς και μη εκτατού νήματος, το ένα άκρο του οποίου συνδέεται στο κιβώτιο, ενώ το άλλο άκρο είναι προσδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο. Εάν η τάση του νήματος που ασκείται στο κιβώτιο έχει μέτρο 50 N, να υπολογίσετε το μέτρο και την κατεύθυνση της στατικής τριβής.



Δίνονται: ημ37° = 0,6 και συν37° = 0,8.

5. Ένας εργαζόμενος σε αποθήκη σπρώχνει ένα κιβώτιο βάρους 100 N πάνω σε μια ράμπα γωνίας κλίσης φ (συν$\varphi = 0{,}8$ και ημ$\varphi = 0{,}6$) ασκώντας δύναμη μέτρου F, όπως στο σχήμα. Το κιβώτιο κινείται προς τα πάνω στη ράμπα πολύ αργά, πρακτικά με σταθερή ταχύτητα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και ράμπας είναι 0,5.

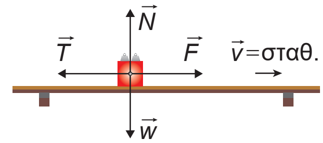


α) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που ασκεί ο εργάτης στο κιβώτιο.

β) Αν ο εργάτης αφήσει το κιβώτιο από την κορυφή της ράμπας να γλιστρήσει προς τα κάτω, πρέπει να ασκεί μέσω σχοινιού δύναμη $\vec{F}'$, προκειμένου να μην επιταχυνθεί το κιβώτιο, αλλά να κατεβαίνει αργά με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}'$.

γ) Αν ο εργάτης σπρώχνει το κιβώτιο σε οριζόντιο δάπεδο, ώστε να κινείται αργά με σταθερή ταχύτητα, ποιο είναι το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που θα ασκεί; Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ο ίδιος με αυτόν μεταξύ κιβωτίου και ράμπας.

6. Για τις ανάγκες μιας εργαστηριακής άσκησης χρησιμοποιείται η πειραματική διάταξη του σχήματος.



Ένα ομογενές σώμα Σ τίθεται σε κίνηση πάνω σε οριζόντιο πάγκο εργασίας, δεχόμενο κατάλληλη σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, ώστε να κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα προσθέτοντας στο Σ βαρίδια, με αποτέλεσμα η συνολική μάζα να μεταβάλλεται. Πριν από κάθε επανάληψη το Σ ζυγίζεται μαζί με τα βαρίδια και στη συνέχεια μετράται με κατάλληλο αισθητήρα δύναμης η σταθερή δύναμη $\vec{F}$ που εξασφαλίζει την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

m/g	F/N
200	0,98
400	1,96
600	2,94
800	3,92
1.000	4,90

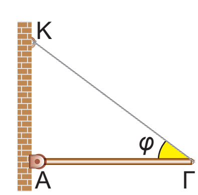
Τα αποτελέσματα των μετρήσεων αναγράφονται στον πίνακα τιμών.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

α) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης $\vec{F}$ ως συνάρτηση της συνολικής μάζας (του Σ και των βαριδιών).

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος Σ και πάγκου εργασίας με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

7. Στο σχήμα παριστάνεται μια οριζόντια ομογενής ισοπαχής ράβδος ΑΓ, βάρους 60 N, η οποία ισορροπεί στερεωμένη σε κατακόρυφο τοίχο. Η ράβδος είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α, το άλλο άκρο της οποίας συνδέεται με τον τοίχο μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος ΚΓ.



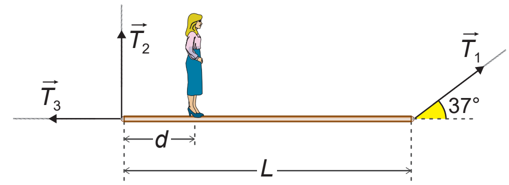
Δίνονται: συν$\varphi = 0{,}8$ και ημ$\varphi = 0{,}6$.

α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και να εξηγήσετε γιατί οι φορείς τους θα πρέπει να συντρέχουν σε ένα σημείο.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στη ράβδο.

γ) Να προσδιορίσετε κατά μέτρο και κατεύθυνση τη δύναμη που ασκείται από την άρθρωση στη ράβδο.

8. Μια ομογενής και συμπαγής ξύλινη δοκός έχει μήκος $L = 4\ \mathrm{m}$, βάρος 400 N και συγκρατείται σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια τριών νημάτων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μια κυρία βάρους 500 N βρίσκεται ακίνητη σε απόσταση $d = 1\ \mathrm{m}$ από το αριστερό άκρο της δοκού.



Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης κάθε νήματος.
Δίνονται: $ημ37° = 0{,}6$ και $συν37° = 0{,}8$.

Ισορροπία άκαμπτου σώματος

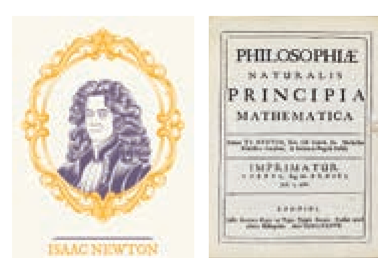
- Οριζόντια ράβδος
- Οριζόντια ράβδος με σώμα
- Πλάγια ράβδος

Λογισμικό

2.3 Μελέτη υλικού σημείου υπό την επίδραση δυνάμεων

1. Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα

Συζητώντας για την έννοια της δύναμης μάθαμε ότι οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν είτε παραμόρφωση είτε αλλαγή της κινητικής κατάστασης ενός σώματος.
Ο Νόμος του Hooke, που για την περίπτωση ενός ελατηρίου είναι $F = k\,x$, συνδέει την αιτία (δύναμη) με το πρώτο από τα αποτελέσματα που αυτή προκαλεί, την παραμόρφωση. Θα αναφερθούμε τώρα σε έναν νόμο που συνδέει τη δύναμη με το δεύτερο από τα αποτελέσματα που αυτή μπορεί να προκαλέσει, δηλαδή την αλλαγή της κινητικής κατάστασης. Με τον όρο αλλαγή της κινητικής κατάστασης εννοούμε είτε τη μεταβολή (αύξηση ή μείωση) του μέτρου είτε την αλλαγή της κατεύθυνσης της ταχύτητας του σώματος. Οι δύο αυτές μεταβολές σχετίζονται με την επιτάχυνση. Ένας τέτοιος νόμος που συνέδεσε την αιτία (δύναμη) με το αποτέλεσμα (αλλαγή της κινητικής κατάστασης-επιτάχυνση) διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Άγγλο Ισαάκ Νεύτωνα στο βιβλίο του «Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας» που εκδόθηκε το 1687 (**Εικόνα 2.6**).



(α) (β)

Εικόνα 2.6 (α) Isaac Newton (1643-1727). (β) Η σελίδα τίτλου από το βιβλίο του Ι. Νεύτωνα με τίτλο «Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας». Το βιβλίο εκδόθηκε στο Λονδίνο και ήταν γραμμένο στη Λατινική γλώσσα, θεωρείται δε μέχρι σήμερα ίσως το σπουδαιότερο επιστημονικό βιβλίο.

Ο νόμος αυτός σήμερα είναι γνωστός ως **2ος Νόμος του Νεύτωνα** ή **Θεμελιώδης Νόμος της Δυναμικής** και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Η επιτάχυνση $\vec{a}$ που αποκτά ένα σώμα μάζας m στο οποίο ασκείται συνισταμένη δύναμη $\Sigma\vec{F}$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m}$$

Σε ό,τι αφορά τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα αξίζει να γίνουν οι εξής παρατηρήσεις:

Ιστορική επεξήγηση

1. Πολλές φορές ο Νόμος αυτός διατυπώνεται στη μορφή:

   $$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

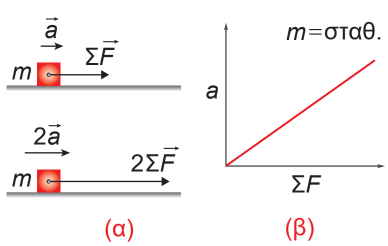
   οπότε λέμε ότι *η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα μάζας m είναι ίση με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση του σώματος*.
   Από αυτήν τη μορφή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα μπορούμε να εκφράσουμε τη μονάδα της δύναμης στο Διεθνές Σύστημα, που είναι το 1 newton, με τη βοήθεια των θεμελιωδών μονάδων ως εξής:

   $$1\,\text{newton} = 1\,\text{N} = 1\,\text{kg}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

   Αυτό σημαίνει ότι το 1 N είναι το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ασκούμενη σε ένα σώμα μάζας 1 kg του προσδίδει επιτάχυνση ίση με $1\,\text{m/s}^2$.

Δύναμη και επιτάχυνση

2. Ο συγκεκριμένος Νόμος είναι διανυσματικός. Αυτό σημαίνει ότι η επιτάχυνση έχει πάντα την *ίδια κατεύθυνση* με τη συνισταμένη των δυνάμεων. Η σύνδεση αυτή μπορεί να λειτουργήσει με δύο τρόπους:
   - είτε δηλαδή να υπολογίσουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων και στη συνέχεια από αυτήν την επιτάχυνση
   - είτε από τη γνωστή επιτάχυνση να υπολογίσουμε ποια ήταν η συνισταμένη δύναμη που την προκάλεσε.



Σχήμα 2.8 (α) Όταν σε ένα σώμα η ασκούμενη συνισταμένη δύναμη διπλασιαστεί, τότε και η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα διπλασιάζεται. Αυτό σημαίνει ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της συνισταμένης δύναμης, επομένως η γραφική τους παράσταση θα είναι μια ευθεία που θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται στο (β).
Ποιο μέγεθος δίνει η κλίση αυτής της γραφικής παράστασης;

3. Από τον Νόμο προκύπτει πως για ένα σώμα σταθερής μάζας η επιτάχυνση είναι ανάλογη της συνισταμένης δύναμης, δηλαδή αν η ασκούμενη συνισταμένη δύναμη, για παράδειγμα, διπλασιάζεται, η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα θα διπλασιαστεί επίσης (**Σχήμα 2.8**).

4. Μπορούμε να προχωρήσουμε σε μια διερεύνηση η οποία, αν και δεν είναι πλήρης, αφορά ορισμένες σημαντικές περιπτώσεις:
   - $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ ή $\vec{a} = \vec{0}$

   ή $\left\{\right.$ Το σώμα είναι ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα (1ος Νόμος του Νεύτωνα)

- $\Sigma\vec{F}=$ σταθ. ή $\vec{a}=$ σταθ.

ή
- $\vec{v}$ ομόρροπη της $\Sigma\vec{F} \rightarrow$ Το μέτρο της $\vec{v}$ αυξάνεται

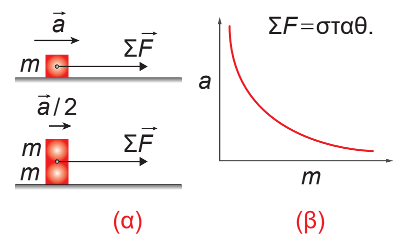
  ή

- $\vec{v}$ αντίρροπη της $\Sigma\vec{F} \rightarrow$ Το μέτρο της $\vec{v}$ μειώνεται

2. Η έννοια αδράνεια

Παραπάνω διατυπώσαμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα και μάθαμε ότι η επιτάχυνση που αποκτά ένα σώμα είναι ανάλογη με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του.

Με παρόμοιο τρόπο, ο 2ος Νόμος πληροφορεί πως η επιτάχυνση που αποκτά ένα σώμα στο οποίο δρα σταθερή συνισταμένη δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του. Αυτό σημαίνει πως η γραφική παράσταση επιτάχυνσης-μάζας είναι μια υπερβολή, όπως φαίνεται στο **σχήμα 2.9**. Αυτή όμως η σχέση αντίστροφης αναλογίας μεταξύ μάζας και επιτάχυνσης σημαίνει ότι *όσο μεγαλύτερη μάζα έχει ένα σώμα τόσο πιο δύσκολο είναι να αλλάξει η κινητική του κατάσταση*, διότι η επιτάχυνση είναι ακριβώς το μέγεθος εκείνο που μετρά το πόσο αλλάζει η κινητική κατάσταση ενός σώματος. Λέγοντας ότι αυξάνει η δυσκολία αλλαγής της κινητικής κατάστασης εννοούμε ότι, αν θέλουμε να επιτύχουμε την ίδια αλλαγή κινητικής κατάστασης για δύο σώματα με διαφορετικές μάζες, (για παράδειγμα να ακινητοποιήσουμε και τα δύο σώματα που κινούνται με την ίδια αρχική ταχύτητα), τότε στο σώμα με τη μεγαλύτερη μάζα θα πρέπει να ασκήσουμε μεγαλύτερη δύναμη.



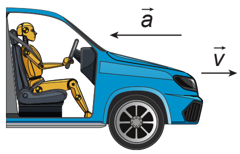
Σχήμα 2.9 (α) Όταν η μάζα του σώματος στο οποίο ασκείται η ίδια συνιστάμενη δύναμη διπλασιαστεί, τότε η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα υποδιπλασιάζεται. Αυτό σημαίνει ότι η επιτάχυνση και η μάζα είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα, επομένως η γραφική τους παράσταση θα είναι μια υπερβολή, όπως φαίνεται στο (β).

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η μάζα ενός σώματος *m*, όχι μόνο είναι ανάλογη με το βάρος, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, αλλά συνδέεται και με τη δυσκολία που θα συναντήσουμε, αν επιχειρήσουμε να αλλάξουμε την κινητική κατάσταση του συγκεκριμένου σώματος. Περιγράφουμε αυτήν τη δυσκολία της αλλαγής της κινητικής κατάστασης ενός σώματος αποδίδοντάς του την ιδιότητα της **αδράνειας**, για την οποία αναφερθήκαμε στο πλαίσιο του 1ου Νόμου του Νεύτωνα. Όσο μεγαλύτερη λοιπόν είναι η μάζα ενός σώματος τόσο μεγαλύτερη είναι η δυσκολία που θα συναντήσουμε στην οποιαδήποτε επιχειρούμενη αλλαγή της κινητικής του κατάστασης, δηλαδή τόσο μεγαλύτερη αδράνεια έχει το σώμα.

Αδρανειακή μάζα

Ο τρόπος που περιγράφουμε στο σημείο αυτό τη μάζα είναι διαφορετικός από το πώς περιγράψαμε τη βαρυτική μάζα στην Υποενότητα 1.5. Για τον λόγο αυτόν ονομάζεται αδρανειακή μάζα. Όπως θα αναφερθούμε στην υποενότητα 2.4, οι δύο μάζες είναι ίσες.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της αδράνειας, για να επιχειρήσουμε να εξηγήσουμε ορισμένα φαινόμενα. Στο **σχήμα 2.10** έχουμε ένα αυτοκίνητο που φρενάρει απότομα, άρα αποκτά μια μεγάλη επιτάχυνση με φορά προς τα αριστερά. Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι σε μια τέτοια κατάσταση μπορεί να υπάρξει σοβαρός τραυματισμός ενός επιβάτη, εφόσον αυτός δεν φορά τη ζώνη ασφαλείας του. Αυτό συμβαίνει, γιατί η δύναμη που ασκεί το



Σχήμα 2.10 Όταν ένα αυτοκίνητο φρενάρει απότομα ή όταν υφίσταται μια σύγκρουση με άλλο αυτοκίνητο ή με ακίνητο εμπόδιο, τότε αποκτά μια μεγάλη επιτάχυνση που τείνει να μειώσει γρήγορα το μέτρο της ταχύτητάς του. Έτσι, κάθε επιβάτης, προκειμένου να κινηθεί όπως κινείται το αυτοκίνητο, θα πρέπει να αποκτήσει την ίδια επιτάχυνση· επομένως, θα πρέπει να δεχθεί μια μεγάλη δύναμη ανάλογα προς τη μάζα του. Αν η ζώνη ασφαλείας δεν του παρέχει αυτήν τη δύναμη, τότε θα συνεχίσει να κινείται με την ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο πριν από τη σύγκρουση, μέχρι να του ασκηθεί (από επαφή) η αναγκαία δύναμη από κάποιο σώμα του περιβάλλοντός του.

Παράδειγμα αδράνειας

Όταν τινάζουμε τα βρεγμένα χέρια μας και τα σταματάμε απότομα για να φύγει το νερό, η διακοπή της κίνησης των χεριών μας σε μικρό χρονικό διάστημα απαιτεί την εμφάνιση μιας μεγάλης επιτάχυνσης που μειώνει την ταχύτητά τους. Λόγω αδράνειας, οι σταγόνες του νερού στα χέρια μας τείνουν να συνεχίσουν να κινούνται με την ίδια μεγάλη ταχύτητα, εκτός αν δεχθούν μια μεγάλη δύναμη ανάλογα προς τη μάζα τους, ώστε να αποκτήσουν την ίδια μεγάλη επιτάχυνση. Επειδή η δύναμη αυτή δεν είναι διαθέσιμη, αφού δεν υπάρχει κάποιο σώμα να την ασκήσει, αλλά ούτε και η τριβή από το δέρμα είναι επαρκής, οι σταγόνες θα συνεχίσουν μια σχεδόν ομαλή κίνηση φεύγοντας από τα χέρια μας.

κάθισμα ή τα χέρια του επιβάτη, αν προλάβει να κρατηθεί, δεν είναι αρκετή, ώστε να προσδώσει στον επιβάτη την ίδια επιτάχυνση με το αυτοκίνητο. Αν μάλιστα δεχθούμε ότι οι δυνάμεις που δέχεται ο επιβάτης, όταν δεν φορά τη ζώνη ασφαλείας του, είναι πολύ μικρές, ώστε κατά προσέγγιση να τις θεωρήσουμε μηδενικές, τότε σύμφωνα με τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα ο επιβάτης θα συνεχίσει να κινείται με την ταχύτητα που είχε, μέχρι να βρεθεί κάτι που θα του ασκήσει την απαραίτητη δύναμη, ώστε να σταματήσει. Αυτό είναι συνήθως το εσωτερικό του αυτοκινήτου, οπότε από τις σκληρές επιφάνειες υπάρχει ο κίνδυνος τραυματισμού.

3. Εφαρμογές του 2ου Νόμου του Νεύτωνα

Όπως αναφέρθηκε, ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα είναι ένας διανυσματικός νόμος. Αν και στο σημείο αυτό θα μελετήσουμε κινήσεις που εξελίσσονται σε μία μόνο διάσταση, αργότερα θα συναντήσουμε προβλήματα κίνησης σε δύο διαστάσεις, οπότε χρειάζεται να εκφράσουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα σε μορφή συνιστωσών. Συνήθως ορίζουμε δύο κάθετους άξονες τους οποίους ονομάζουμε x και y, οπότε η διανυσματική μορφή του 2ου Νόμου ισοδυναμεί με τη γραφή δύο εξισώσεων συνιστωσών ως εξής:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{ή} \quad \begin{matrix} \Sigma F_x = ma_x \\ \Sigma F_y = ma_y \end{matrix}$$

όπου ΣF_x και ΣF_y είναι αντιστοίχως οι συνισταμένες των δυνάμεων που ασκούνται στους άξονες x και y, ενώ a_x και a_y είναι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης που αποκτά το σώμα στους άξονες x και y αντιστοίχως. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση κατά την οποία $a_x = a_y = 0$, τότε οι προηγούμενες εξισώσεις ανάγονται στις συνθήκες ισορροπίας τις οποίες έχουμε ήδη μελετήσει.

Λογισμικό

Δυνάμεις σε υλικό σημείο

- Οριζόντιο επίπεδο
- Κεκλιμένο επίπεδο

Επεκτάσεις

- Τίναγμα θερμομέτρου
- Φρενάρισμα λεωφορείου

Προσομοίωση 2ου Νόμου του Νεύτωνα

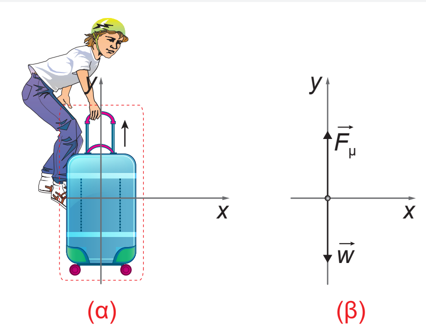
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.3

1. Ένας μαθητής σε μια πολυήμερη εκδρομή με το σχολείο του έχει μαζί του μια βαλίτσα 15 kg, η οποία κάποια στιγμή είναι ακίνητη στο έδαφος. Ο μαθητής, προκειμένου να σηκώσει τη βαλίτσα, σκύβει και της ασκεί μια κατακόρυφη δύναμη με κατεύθυνση προς τα πάνω, το μέτρο της οποίας είναι ίσο με 155 N.

α) Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει η βαλίτσα στο χρονικό διάστημα που της ασκείται αυτή η δύναμη; Αν η κίνηση αυτή είναι επιταχυνόμενη, να υπολογίσετε την επιτάχυνση της βαλίτσας.

β) Αφού ο μαθητής σηκωθεί όρθιος και η βαλίτσα δεν ακουμπά πλέον στο έδαφος, θέλει να τη μεταφέρει οριζόντια με σταθερή ταχύτητα, για να μπει στο ξενοδοχείο. Πόση είναι η δύναμη που πρέπει να ασκήσει ο μαθητής στη βαλίτσα; Δίνεται $g = 10\ \text{m}/\text{s}^2$.

Λύση



(α) Ο μαθητής σηκώνει κατακόρυφα τη βαλίτσα του. (β) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τη βαλίτσα.

α) Στο **σχήμα (α)** φαίνεται ο μαθητής που σηκώνει τη βαλίτσα κατακόρυφα προς τα πάνω. Το σύστημά μας είναι η βαλίτσα και, καθώς η κίνηση γίνεται κατακόρυφα προς τα πάνω, επιλέγουμε τον άξονα y του συστήματος συντεταγμένων έτσι, ώστε να είναι κατακόρυφος έχοντας θετική φορά προς τα πάνω, ενώ ο δεύτερος άξονας x που επιλέγεται κάθετος προς τον προηγούμενο θα πρέπει να είναι οριζόντιος με θετική φορά που συνήθως επιλέγεται προς τα δεξιά.

Στο **σχήμα (β)** παριστάνουμε τη βαλίτσα ως ένα υλικό σημείο και σημειώνουμε τις δυνάμεις που δέχεται: μια μοναδική δύναμη από επαφή $\left(\vec{F}_\mu\right)$ από τον μαθητή, αφού η βαλίτσα βρίσκεται στον αέρα και μια δύναμη από απόσταση $(\vec{w})$.

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα υπό μορφή συνιστωσών γράφεται ως εξής:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = ma_y$$

Επειδή το σώμα δεν κινείται στην οριζόντια διεύθυνση, θα είναι $a_x = 0$. Για τον άξονα y δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει επιτάχυνση. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ότι υπάρχει, (καθώς στην περίπτωση που δεν υπάρχει θα προκύψει $a_y = 0$), οπότε έχουμε:

$$\Sigma F_y = ma_y \ \text{ή}\ F_\mu - w = ma_y \ \text{ή}\ F_\mu - mg = ma_y$$

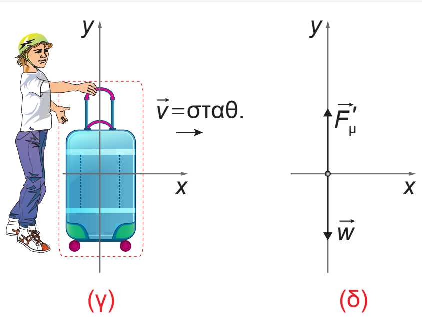
Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$(155\ \text{N}) - (15\ \text{kg})\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = (15\ \text{kg})a_y$$

$$a_y = \frac{1}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Άρα, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με $a_y = \dfrac{1}{3}\ \text{m}/\text{s}^2$.

β) Στο **σχήμα (γ)** η βαλίτσα δεν ακουμπά πλέον στο έδαφος και ο μαθητής τη μεταφέρει οριζόντια και προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα.



(γ) Ο μαθητής μεταφέρει τη βαλίτσα του οριζόντια και προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα. (δ) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τη βαλίτσα.

Το σύστημά μας είναι η βαλίτσα και, καθώς η κίνηση γίνεται προς τα δεξιά, επιλέγουμε τον άξονα x του συστήματος συντεταγμένων έτσι, ώστε να είναι οριζόντιος με κατεύθυνση προς τα δεξιά, ενώ ο δεύτερος άξονας y επιλέγεται κάθετος προς τον προηγούμενο, άρα κατακόρυφος με θετική φορά που επιλέχθηκε τυχαία να είναι προς τα πάνω.

Στο **σχήμα (δ)** παριστάνουμε τη βαλίτσα ως ένα υλικό σημείο και σημειώνουμε τις δυνάμεις που δέχεται: μια μοναδική δύναμη από επαφή $(\vec{F}'_\mu)$ από τον μαθητή, αφού η βαλίτσα βρίσκεται στον αέρα και μια δύναμη από απόσταση $(\vec{w})$.

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα υπό μορφή συνιστωσών γράφεται ως εξής:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = ma_y$$

Επειδή το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα στην οριζόντια διεύθυνση, θα είναι $a_x = 0$, ενώ, επειδή δεν κινείται κατά μήκος του άξονα y, αφού διατηρεί σταθερό ύψος από το έδαφος, θα είναι και $a_y = 0$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad F'_\mu - w = 0 \quad \text{ή} \quad F'_\mu - mg = 0$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

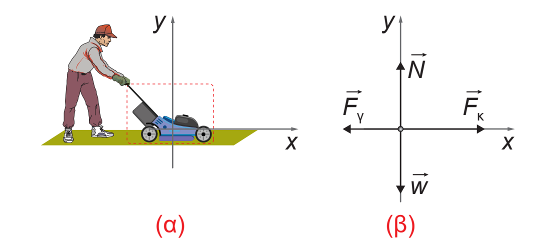
$$F'_\mu - (15\ \text{kg})\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 0 \quad \text{ή} \quad F'_\mu = 150\ \text{N}$$

που είναι το μέτρο της νέας δύναμης που πρέπει να ασκήσει ο μαθητής στη βαλίτσα.

2. Ένας κηπουρός χρησιμοποιεί μια μηχανή για να περιποιηθεί το γρασίδι ενός κήπου. Η μηχανή έχει μάζα ίση με 40 kg, ενώ η δύναμη που ασκεί ο κηπουρός πάνω της είναι ίση με 95 N. Αν η μηχανή δέχεται από το γρασίδι μια δύναμη τριβής ίση με 91 N αντίθετη από τη δύναμη που ασκεί ο κηπουρός, ποια είναι η επιτάχυνση που θα αποκτήσει η μηχανή και ποια είναι η κάθετη δύναμη που θα δεχθεί από την επιφάνεια του εδάφους; Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2$.

Λύση

Στο **σχήμα (α)** φαίνεται ο κηπουρός που ωθεί προς τα δεξιά τη μηχανή του γρασιδιού. Το σύστημά μας είναι η μηχανή και, καθώς η κίνηση γίνεται προς τα δεξιά, επιλέγουμε τον άξονα x του συστήματος συντεταγμένων έτσι, ώστε να είναι οριζόντιος με κατεύθυνση προς τα δεξιά, ενώ ο δεύτερος άξονας y επιλέγεται κάθετος προς τον προηγούμενο, άρα κατακόρυφος με θετική φορά που επιλέχθηκε τυχαία να είναι προς τα πάνω.



(α) Ο κηπουρός χρησιμοποιεί μια μηχανή για την περιποίηση του γρασιδιού. (β) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τη μηχανή.

Στο **σχήμα (β)** παριστάνουμε τη μηχανή του γρασιδιού ως ένα υλικό σημείο και σημειώνουμε τις δυνάμεις από επαφή: δύναμη από τον κηπουρό $(\vec{F}_\kappa)$, δύναμη τριβής από το γρασίδι $(\vec{F}_\gamma)$, κάθετη δύναμη $(\vec{N})$, καθώς και τη μοναδική δύναμη από απόσταση $(\vec{w})$.

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα υπό μορφή συνιστωσών γράφεται ως εξής:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = ma_y$$

Επειδή το σώμα δεν κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση, θα είναι $a_y = 0$.

Η εξίσωση για τον άξονα x γράφεται:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \text{ή} \quad F_\kappa - F_\gamma = ma_x$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$(95\ \text{N}) - (91\ \text{N}) = (40\ \text{kg})a_x \quad \text{ή} \quad a_x = 0{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

που είναι η επιτάχυνση που θα αποκτήσει η μηχανή.

Η εξίσωση για τον άξονα y γράφεται:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{ή} \quad N - w = 0 \quad \text{ή} \quad N = mg$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

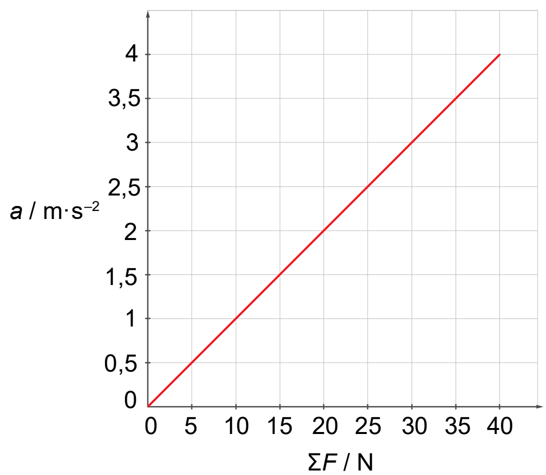
$$N = (40\ \text{kg})\left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 392\ \text{N}$$

που είναι η κάθετη δύναμη που θα δεχθεί η μηχανή από την επιφάνεια του εδάφους.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Μια μαθήτρια εκτέλεσε μια προσομοίωση σχετική με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα κιβώτιο μεταβάλλεται και καταγράφεται η τιμή της επιτάχυνσης που αποκτά αυτό. Από την καταγραφή των τιμών η μαθήτρια σχεδίασε τη γραφική παράσταση που βλέπετε. Να υπολογίσετε τη μάζα του κιβωτίου.



2. Να εξηγήσετε γιατί στην περίπτωση ενός αβαρούς, μη εκτατού και τεντωμένου νήματος οι τάσεις στα άκρα του έχουν το ίδιο μέτρο.

3. Μια πέτρα αφήνεται να πέσει ελεύθερα. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκεί η πέτρα στη Γη και η Γη στην πέτρα σύμφωνα με τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα. Να εξηγήσετε με τη βοήθεια του 2ου Νόμου του Νεύτωνα γιατί η πρόσκρουση της πέτρας στην επιφάνεια της Γης δεν επιταχύνει τη Γη.

4. Ένα μικρό αυτοκίνητο συγκρούεται μετωπικά με ένα μεγάλο φορτηγό.

α) Να συγκρίνετε τη δύναμη που ασκεί το φορτηγό στο αυτοκίνητο με αυτήν που ασκεί το αυτοκίνητο στο φορτηγό κατά την κρούση.

β) Με τη βοήθεια του 2ου Νόμου του Νεύτωνα, να συσχετίσετε τον λόγο των μαζών των δύο οχημάτων με τον λόγο των μέσων επιταχύνσεων που αποκτούν λόγω της κρούσης. Δικαιολογεί το αποτέλεσμα στο οποίο οδηγηθήκατε την εκτίμηση που είχατε για τις ζημιές που θα υποστεί κάθε όχημα;

5. Ένα φορτηγό φορτωμένο με άμμο επιταχύνεται κατά μήκος ενός αυτοκινητόδρομου. Η συνισταμένη δύναμη που του ασκείται για το διάστημα που παρατηρείτε και καταγράφετε δεδομένα παραμένει σταθερή. Τι συμβαίνει στην επιτάχυνση του φορτηγού, όταν η ρυμουλκούμενη καρότσα του συγκεντρώνει νερό λόγω βροχής;

Α) Μειώνεται.

Β) Αυξάνεται.

Γ) Αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται.

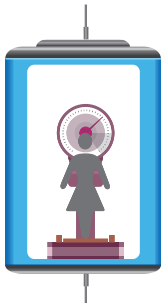
Δ) Μειώνεται και στη συνέχεια αυξάνεται.

Ε) Παραμένει σταθερή.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

6. Το φορτηγό της εικόνας μεταφέρει κιβώτια. Όταν επιταχύνεται, τα κιβώτια επιταχύνονται επίσης, αλλά παραμένουν ακίνητα ως προς το φορτηγό. Να αναγνωρίσετε τη δύναμη που επιταχύνει τα κιβώτια.

7. Μια γυναίκα βρίσκεται στο ασανσέρ ενός κτηρίου και ζυγίζεται πάνω σε μια ζυγαριά που έχει ενδείξεις σε newtons.

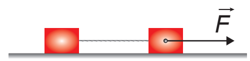


α) Όταν το ασανσέρ είναι ακίνητο, η ζυγαριά δείχνει τιμή w. Να εξηγήσετε γιατί αυτή η ένδειξη ισούται με το βάρος της γυναίκας.

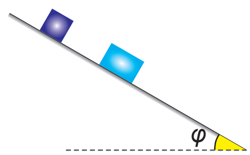
β) Όταν το ασανσέρ επιταχύνεται προς τα πάνω, η ένδειξη της ζυγαριάς είναι κατά 10% μεγαλύτερη σε σχέση με το βάρος της γυναίκας. Να συγκρίνετε την επιτάχυνση του ασανσέρ με την επιτάχυνση της βαρύτητας g.

γ) Αν το ασανσέρ επιταχυνθεί προς τα κάτω με επιτάχυνση $g/20$, ποια θα είναι η ένδειξη της ζυγαριάς συναρτήσει του w;

8. Στο σχήμα παριστάνονται δύο σώματα ίδιας μάζας δεμένα μεταξύ τους με σχοινί. Τα σώματα ολισθαίνουν επιταχυνόμενα πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στο ένα σώμα. Να αποδείξετε ότι το μέτρο της $\vec{F}$ είναι διπλάσιο από αυτό της τάσης του νήματος.



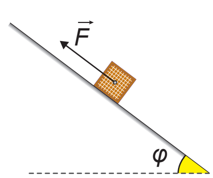
9. Δύο παγοκολόνες διαφορετικών μαζών αφήνονται να γλιστρήσουν κατά μήκος ενός μεταλλικού κεκλιμένου επιπέδου. Η τριβή μεταξύ πάγου και μετάλλου θεωρείται αμελητέα. Να συγκρίνετε τις επιταχύνσεις των δύο σωμάτων.



Ασκήσεις

1. Ένας μαθητής σπρώχνει ένα κουτί με βιβλία, ασκώντας του οριζόντια δύναμη μέτρου 69 N πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Το κουτί ολισθαίνει με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $1\,\mathrm{m/s^2}$. Αν η μάζα του κουτιού με τα βιβλία είναι 20 kg, να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του κουτιού και του δαπέδου. Δίνεται $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

2. Μέσω κατάλληλου μηχανισμού, ασκείται σταθερή δύναμη μέτρου F, όπως στο σχήμα, σε ένα κιβώτιο μάζας 10 kg, ώστε αυτό να κινείται πάνω σε μια ράμπα γωνίας κλίσης φ, (συν$\varphi = 0{,}8$ και ημ$\varphi = 0{,}6$).



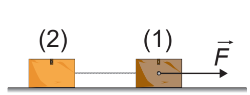
Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και ράμπας είναι 0,5. Να βρείτε το μέτρο F της δύναμης, αν το κιβώτιο:

α) ανεβαίνει, **β)** κατεβαίνει

με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $1\,\mathrm{m/s^2}$.

Δίνεται $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

3. Στο σχήμα απεικονίζονται δύο κουτιά (1) και (2) με μάζες 20 kg και 10 kg αντίστοιχα. Τα κουτιά είναι συνδεδεμένα με σχοινί και ολισθαίνουν με σταθερή επιτάχυνση $0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση οριζόντιας δύναμης μέτρου F, η οποία ασκείται στο κουτί (1). Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κάθε κουτιού και του δαπέδου είναι 0,1.



Δίνεται $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

α) Να κάνετε ένα σχήμα στο οποίο να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στα κουτιά.

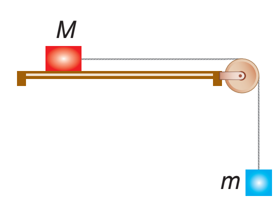
β) Να υπολογίσετε την τριβή που δέχεται κάθε κουτί.

γ) Να εφαρμόσετε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για το κουτί (2) και να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος.

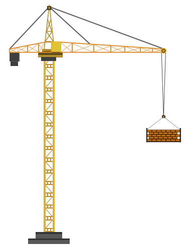
δ) Να εφαρμόσετε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα για το κουτί (1) και να υπολογίσετε το μέτρο F της δύναμης που ασκείται στο κουτί (1).

ε) Εάν ανταλλάξετε μεταξύ τους τις θέσεις των δύο κουτιών και η κίνηση πάνω στο οριζόντιο δάπεδο γίνεται με την επίδραση της ίδιας οριζόντιας δύναμης μέτρου F, να διερευνήσετε εάν θα μεταβληθεί ή όχι η επιτάχυνση και η τάση του νήματος που υπολογίσατε παραπάνω.

4. Το σώμα μάζας M του σχήματος μπορεί να κινείται πάνω στην οριζόντια αεροτράπεζα ενός εργαστηρίου πρακτικά χωρίς τριβές. Το σώμα μάζας M είναι συνδεδεμένο με το σώμα μάζας m μέσω ενός σχοινιού αμελητέας μάζας. Το σχοινί διέρχεται από το αυλάκι μιας τροχαλίας επίσης αμελητέας μάζας. Αν το σύστημα αφεθεί να κινηθεί, το σχοινί ασκεί πρακτικά την ίδια κατά μέτρο δύναμη στα σώματα. Στο εργαστήριο ένας μαθητής ζύγισε μαζί και τα δύο σώματα και βρήκε τη συνολική μάζα ίση με 0,5 kg. Επίσης, μια μαθήτρια με τη βοήθεια δυναμομέτρου βρήκε ότι το βάρος του σώματος μάζας m είναι 1 N. Με αυτά τα δεδομένα, να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης των δύο σωμάτων, όταν το σύστημα αφεθεί να κινηθεί.



5. Ο πυργογερανός της εικόνας ανεβάζει μια παλέτα με τούβλα με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $1\,m/s^2$. Η μάζα της παλέτας είναι 100 kg. Να υπολογίσετε την κατακόρυφη δύναμη που ασκεί ο πυργογερανός στην παλέτα. Δίνεται $g = 9{,}8\ m/s^2$.



6. Ένα παιδί με μάζα 50 kg βρίσκεται πάνω σε μια ζυγαριά μέσα σε έναν ανελκυστήρα. Η ένδειξη της ζυγαριάς είναι ίση με το μέτρο της κάθετης δύναμης επαφής που ασκεί το παιδί στη ζυγαριά.

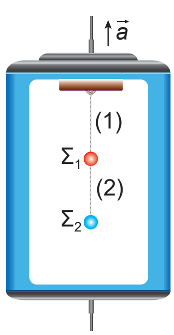
α) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τη ζυγαριά και το παιδί και να αναγνωρίσετε το ζεύγος των δυνάμεων που ικανοποιούν τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα.

β) Να προσδιορίσετε την ένδειξη της ζυγαριάς στις παρακάτω περιπτώσεις:

- **i)** Ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα $1\,m/s$.
- **ii)** Ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση $1\,m/s^2$.
- **iii)** Ο ανελκυστήρας κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση $1\,m/s^2$.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

7. Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2, που η καθεμία έχει μάζα ίση με 2 kg, είναι δεμένες από την οροφή ενός ανελκυστήρα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

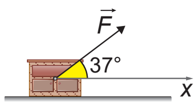


α) Αν ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $2{,}5\,m/s^2$ και φοράς προς τα πάνω, να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης κάθε σχοινιού.

β) Αν τα σχοινιά έχουν μέγιστη τάση 60 N (όριο θραύσης), ποια θα είναι η μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να έχει ο ανελκυστήρας πριν σπάσει το σχοινί (1);

Δίνεται $g = 10\,m/s^2$.

8. Το έπιπλο του σχήματος έχει μάζα 1 kg και ισορροπεί ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0{,}5$. Κάποια χρονική στιγμή ένας εργάτης ασκεί στο έπιπλο σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 10 N και κατεύθυνσης που σχηματίζει γωνία $37°$ με την οριζόντια διεύθυνση, με αποτέλεσμα αυτό να ξεκινά αμέσως την ολίσθησή του κατά μήκος ευθείας που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα *x*. Να υπολογίσετε:

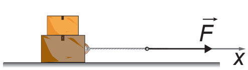


α) το μέτρο της δύναμης της τριβής ολίσθησης,

β) το μέτρο της επιτάχυνσης του επίπλου κατά την κίνησή του.

Δίνονται: $ημ37° = 0{,}6$, $συν37° = 0{,}8$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,m/s^2$.

9. Ένα κιβώτιο μάζας 10 kg τοποθετείται πάνω σε ένα δεύτερο κιβώτιο μάζας 20 kg. Μέσω κατάλληλου μηχανισμού συνδέεται σχοινί στο κάτω κιβώτιο και μέσω αυτού ασκείται στο σύστημα σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 90 N πάνω σε πρακτικά λείο δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η τριβή μεταξύ των δύο κιβωτίων εξασφαλίζει στο πάνω κιβώτιο την ακινησία σε σχέση με το κάτω. Να υπολογίσετε:



α) την επιτάχυνση των κιβωτίων και

β) το μέτρο της στατικής τριβής μεταξύ των κιβωτίων.

2.4 Ευθύγραμμες κινήσεις

1. Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση (ΕΟΚ)

ΕΟΚ (video)

Ευθύγραμμη ομαλή είναι η κίνηση ενός σώματος του οποίου η ταχύτητα παραμένει σταθερή, δηλαδή έχει σταθερό μέτρο και σταθερή κατεύθυνση.

Συμβολικά:

$$\vec{v} = \text{σταθ.}$$

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε τις αναπαραστάσεις της κίνησης. Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε τα κινηματικά μεγέθη επιτάχυνση, ταχύτητα και θέση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.

Πειραματικός προσδιορισμός ταχύτητας στην ΕΟΚ

I. Συναρτήσεις κινηματικών μεγεθών με τον χρόνο στην ΕΟΚ

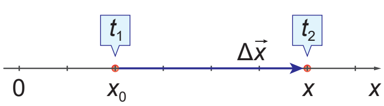
Επιτάχυνση

Η επιτάχυνση είναι μηδέν, δηλαδή $\vec{a} = \vec{0}$.

Ταχύτητα

Η ταχύτητα είναι σταθερή (σταθερό *μέτρο* και σταθερή *κατεύθυνση*) ή συμβολικά $\vec{v} = \text{σταθ.}$

Θέση



Σχήμα 2.11 Κινητό που μετατοπίζεται από τη θέση x_0 στη θέση x.

Έστω ότι το σώμα κινείται στον x-άξονα (**Σχήμα 2.11**). Για τη συνιστώσα της ταχύτητας στον x-άξονα γράφουμε:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{σταθ.} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Αν το σώμα κινείται προς τη θετική φορά του x-άξονα, τότε η v_x έχει θετική τιμή, ενώ αν κινείται προς την αρνητική φορά, τότε η v_x έχει αρνητική τιμή. Η παραπάνω σχέση οδηγεί στη συνάρτηση θέσης-χρόνου (τύπος της θέσης):

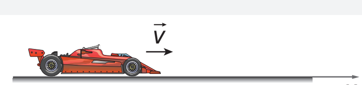
$$x = x_0 + v_x \Delta t \qquad \textbf{(2.2)}$$

Απόδειξη

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \Delta x = v_x \Delta t$$
$$\text{ή} \quad x - x_0 = v_x \Delta t$$
$$\text{ή} \quad x = x_0 + v_x \Delta t$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.4

1. Να υπολογίσετε πόσο θα μετατοπιστεί σε χρόνο 20 s ένα αυτοκίνητο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα 30 m/s σε ευθεία γραμμή (x-άξονας).



Αυτοκίνητο που μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή (x-άξονας).

Λύση

Από την **εξίσωση 2.1** έχουμε:

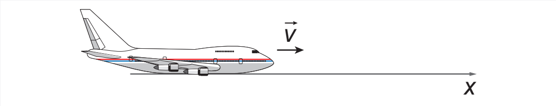
$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$30\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\Delta x}{20\ \text{s}}$$

$$\Delta x = \left(30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(20\ \text{s})$$

$$\Delta x = 600\ \text{m}$$

2. Να υπολογίσετε πόση θα είναι η μετατόπιση ενός αεροπλάνου το οποίο κινείται με ταχύτητα $250\ \text{m/s}$ για χρόνο 2 ώρες.



Αεροπλάνο που μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή (x-άξονας).

Λύση

Υποθέτουμε ότι η κίνηση γίνεται κατά μήκος του x-άξονα.

Το χρονικό διάστημα κίνησης είναι:

$$\Delta t = 2\ \text{h} = 2 \cdot 3.600\ \text{s} = 7.200\ \text{s}$$

Από την **εξίσωση 2.1** έχουμε:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ ή } 250\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\Delta x}{7.200\ \text{s}}$$

$$\text{ή } \Delta x = 1.800.000\ \text{m}$$

3. Ένα αυτοκίνητο κινείται στον x-άξονα με ταχύτητα μέτρου $10\ \text{m/s}$ προς τα αρνητικά του άξονα (αριστερά). Αν το αυτοκίνητο διέρχεται από τη θέση $x_0 = 200\ \text{m}$ τη χρονική στιγμή $t = 0$, να υπολογίσετε τη θέση του τη χρονική στιγμή $t = 10\ \text{s}$.

Λύση

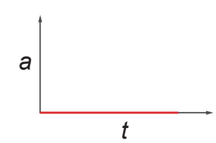
Επειδή κινείται προς τα αριστερά, είναι $v_x = -10\ \text{m/s}$. Από την **εξίσωση 2.2** έχουμε:

$$x = x_0 + v_x \Delta t = (200\ \text{m}) + \left(-10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(20\ \text{s}) = 0\ \text{m}$$

II. Γραφικές αναπαραστάσεις κινηματικών μεγεθών με τον χρόνο στην ΕΟΚ

Επιτάχυνση

Η επιτάχυνση στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι διαρκώς ίση με μηδέν. Συνεπώς, η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι μια ευθεία που ταυτίζεται με τον άξονα του χρόνου (**Σχήμα 2.12**).



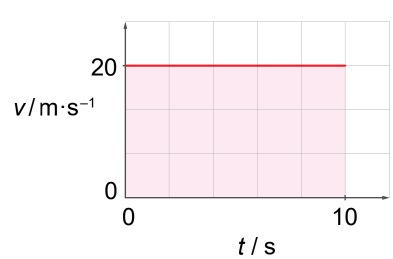
Σχήμα 2.12 Γραφική παράσταση επιτάχυνσης-χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Ταχύτητα

Θα σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου για ένα αυτοκίνητο που κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα, για παράδειγμα $20\ \text{m/s}$, για χρόνο $10\ \text{s}$. Για τη μετατόπιση του αυτοκινήτου στον χρόνο αυτόν, από την **εξίσωση 2.1** έχουμε:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ ή } 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\Delta x}{10\ \text{s}} \text{ ή } \Delta x = \left(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(10\ \text{s}) \text{ ή } \Delta x = 200\ \text{m}$$

Η ταχύτητα είναι σταθερή, συνεπώς η γραφική παράσταση θα έχει τη μορφή που φαίνεται στο **σχήμα 2.13**.



Σχήμα 2.13 Γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου στην ΕΟΚ προς τη θετική φορά του x-άξονα

Στη γραφική παράσταση σχηματίζεται ένα ορθογώνιο που έχει εμβαδόν:

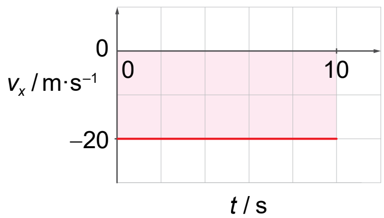
$$\text{Εμβαδόν} = (\text{Βάση}) \times (\text{Ύψος}) = 10 \cdot 20 = 200$$

Αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς σε σχέση με τις μονάδες, γράφουμε:

$$\text{«Εμβαδόν»} = (\text{Βάση}) \times (\text{Ύψος}) = (10\ \text{s})\left(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 200\ \text{m}$$

Παρατηρούμε πως το συγκεκριμένο «εμβαδόν» μετράται σε m (!) και είναι ίσο με τη μετατόπιση. Θέτουμε τη λέξη εμβαδόν σε εισαγωγικά σε όλο το βιβλίο για το συγκεκριμένο χωρίο/περιοχή που θα σχηματίζεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του οριζόντιου άξονα, αφού παρά την τυπική ομοιότητα, δεν πρόκειται για την έννοια του εμβαδού που έχουμε μάθει στη Γεωμετρία.

Στο παράδειγμα θεωρήσαμε ότι η κίνηση του αυτοκινήτου έγινε προς τη θετική φορά του *x*-άξονα. Αν έχουμε κίνηση προς την αρνητική φορά του *x*-άξονα, η γραφική παράσταση έχει τη μορφή του **σχήματος 2.14** και η μετατόπιση έχει αρνητική τιμή. Το «εμβαδόν» έχει αρνητικό πρόσημο και είναι πάλι ίσο με τη μετατόπιση.



Σχήμα 2.14 Γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου στην ΕΟΚ προς την αρνητική φορά του *x*-άξονα

Συμπεράσματα

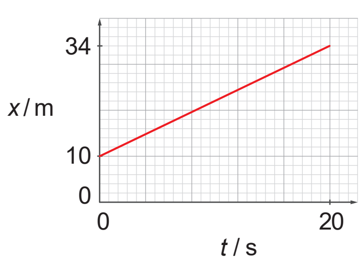
- Η γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα του χρόνου.
- Η μετατόπιση είναι ίση με το «εμβαδόν» ανάμεσα στη γραφική παράσταση v-t και τον άξονα του χρόνου. Αποδεικνύεται ότι αυτό είναι ένα γενικό αποτέλεσμα που ισχύει για όλα τα είδη κίνησης και όχι μόνο για την ευθύγραμμη ομαλή.

Εμβαδόν σε γραφική παράσταση

Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση

Θέση

Η γραφική παράσταση θέσης-χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση είναι μια ευθεία, δεδομένου ότι αυτό υποδεικνύει η **σχέση 2.2**. Στο **σχήμα 2.15**, για παράδειγμα, φαίνεται η γραφική παράσταση θέσης-χρόνου για την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ενός ανθρώπου που βαδίζει προς τη θετική κατεύθυνση του *x*-άξονα.



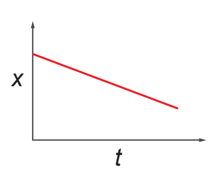
Σχήμα 2.15 Γραφική παράσταση θέσης-χρόνου στην ΕΟΚ προς τη θετική φορά του *x*-άξονα

Παρατηρούμε ότι σε 20 s ο άνθρωπος μετακινείται από τη θέση $x = 10$ m στη θέση $x = 34$ m. Για την ταχύτητα ισχύει:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{34\text{ m} - 10\text{ m}}{20\text{ s}} = 1{,}2\text{ m/s}$$

Με τη βοήθεια των μαθηματικών μπορεί να αποδειχθεί πως η κλίση της ευθείας που παριστάνει η **σχέση 2.2** είναι ίση με την v_x.

Αν η κίνηση γίνεται προς την αρνητική φορά του *x*-άξονα, το διάγραμμα θα έχει τη μορφή του **σχήματος 2.16** και η κλίση θα έχει αρνητική τιμή.



Σχήμα 2.16 Γραφική παράσταση θέσης-χρόνου στην ΕΟΚ προς την αρνητική φορά του *x*-άξονα

Συμπέρασμα

Η ταχύτητα μια ορισμένη χρονική στιγμή είναι ίση με την *κλίση* της γραφικής παράστασης θέσης-χρόνου (*x*-*t*) τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αποδεικνύεται ότι αυτό είναι ένα γενικό αποτέλεσμα που ισχύει για όλα τα είδη κίνησης και όχι μόνο για την ευθύγραμμη ομαλή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.4

4. Αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα +20 m/s σε ευθεία γραμμή που ταυτίζεται με τον *x*-άξονα, ξεκινώντας από τη θέση $x = 0$ m.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

t / s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x / m										

β) Με βάση τις τιμές του πίνακα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση θέσης-χρόνου.

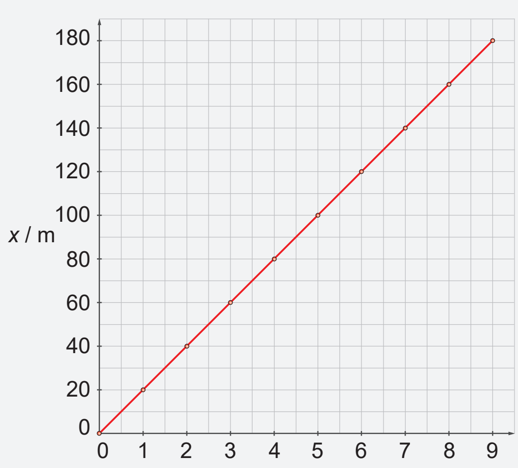
γ) Χωρίς να κάνετε αριθμητικές πράξεις, να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τη γραφική παράσταση μετατόπισης-χρόνου για ένα άλλο αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα +10 m/s κατά μήκος του *x*-άξονα.

Λύση

α) Αφού η ταχύτητα είναι 20 m/s κάθε δευτερόλεπτο θα προστίθενται 20 m στη θέση *x* του αυτοκινήτου.

t / s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x / m	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180

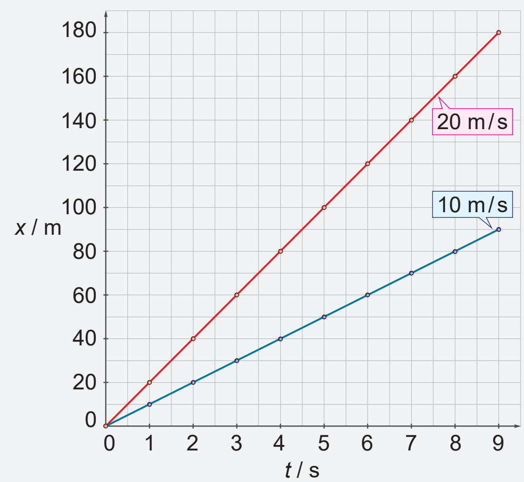
β)



Γραφική παράσταση θέσης-χρόνου για την ΕΟΚ του αυτοκινήτου

Η ζητούμενη γραφική παράσταση θα είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, όπως είναι αναμενόμενο από τη θεωρία.

γ)



Γραφική παράσταση θέσης-χρόνου στην ΕΟΚ για δύο αυτοκίνητα με διαφορετικές ταχύτητες προς τη θετική φορά του *x*-άξονα

Αφού το μέτρο της ταχύτητας είναι το μισό σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση και η κατεύθυνση κίνησης είναι η ίδια, κάθε χρονική στιγμή η τιμή της θέσης θα είναι υποδιπλάσια. Αυτό προκύπτει προφανώς και από το γεγονός ότι η κλίση ισούται με την ταχύτητα. Συνεπώς, υποδιπλάσια ταχύτητα σημαίνει ότι η κλίση της γραφικής παράστασης *x*-*t* του δεύτερου αυτοκινήτου θα είναι υποδιπλάσια αυτής του πρώτου.

2. Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση (ΕΟΜΚ)

Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη είναι η κίνηση ενός σώματος σε ευθεία γραμμή με την ταχύτητα να μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό (δηλαδή με σταθερή επιτάχυνση).

Για παράδειγμα, ένα αυτοκίνητο ξεκινάει να κινείται σε ευθεία γραμμή και η ταχύτητά του αυξάνεται ως εξής:

t / s	0	1	2	3	4	5	6	7
v_x / ms^{-1}	0	3	6	9	12	15	18	21

Παρατηρούμε πως η ταχύτητα του αυτοκινήτου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $3\ \mathrm{m/s}$ κάθε δευτερόλεπτο. Αυτή η κίνηση χαρακτηρίζεται ως ομαλά μεταβαλλόμενη με επιτάχυνση μέτρου $a = 3\ \mathrm{m/s^2}$.

Συνεπώς, ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη είναι η κίνηση με σταθερή επιτάχυνση (σταθερό μέτρο και σταθερή κατεύθυνση):

$$\vec{a} = \text{σταθ.}$$

Για κίνηση στον x-άξονα γράφουμε:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \text{σταθ.} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε τις αναπαραστάσεις της κίνησης. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε τα κινηματικά μεγέθη επιτάχυνση, ταχύτητα και θέση ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα ομαλά μεταβαλλόμενα.

I. Συναρτήσεις κινηματικών μεγεθών με τον χρόνο στην ΕΟΜΚ

Επιτάχυνση

Από τον προηγούμενο ορισμό, στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η επιτάχυνση παραμένει σταθερή. Για κίνηση στον x-άξονα γράφουμε $a_x = \text{σταθ.}$

Ταχύτητα

Η συνάρτηση ταχύτητας-χρόνου μάς επιτρέπει να υπολογίζουμε την ταχύτητα του κινητού κάθε χρονική στιγμή. Αν η κίνηση γίνεται στον x-άξονα, η συνάρτηση ταχύτητας-χρόνου είναι:

$$v_x = v_{0,x} + a_x \Delta t \qquad \textbf{(2.4)}$$

- Με $v_{0,x}$ συμβολίζουμε τη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας στον x-άξονα.
- Σε μια ευθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση η ταχύτητα και η επιτάχυνση δεν έχουν πάντοτε την ίδια κατεύθυνση. Η επιτάχυνση, όμως, έχει πάντοτε την *ίδια κατεύθυνση με τη μεταβολή της ταχύτητας*.

Απόδειξη

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad a_x = \frac{v_x - v_{0,x}}{\Delta t}$$

$$\text{ή} \quad a_x \Delta t = v_x - v_{0,x}$$

$$\text{ή} \quad v_x = v_{0,x} + a_x \Delta t$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.4

5. Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα με αρχική ταχύτητα 20 m/s και επιταχύνεται για 5 s με επιτάχυνση 4 m/s^2. Να υπολογίσετε την τελική του ταχύτητα.

Λύση

Θεωρούμε την κίνηση προς τη θετική κατεύθυνση του *x*-άξονα. Από την εκφώνηση προκύπτουν:

$$v_{0,x} = +20\ \mathrm{m/s},\quad \Delta t = 5\ \mathrm{s}\ \ \text{και}\ \ a_x = +4\ \mathrm{m/s^2}$$

Από την **εξίσωση 2.4** έχουμε:

$$v_x = v_{0,x} + a_x \Delta t = +20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \left(+4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)(5\ \mathrm{s})$$

$$= 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 40\ \mathrm{m/s}$$

6. Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα 30 m/s. Κάποια στιγμή ο οδηγός πατάει φρένο και μειώνει την ταχύτητα του αυτοκινήτου με ρυθμό 4 m/s^2. Να βρείτε σε πόσο χρόνο θα σταματήσει.

Λύση

Θεωρούμε την κίνηση προς τη θετική κατεύθυνση του *x*-άξονα. Από την εκφώνηση προκύπτουν:

$$v_{0,x} = +30\ \mathrm{m/s},\quad v_x = 0\ \mathrm{m/s}\ \ \text{και}\ \ a_x = -4\ \mathrm{m/s^2}$$

Από την **εξίσωση 2.4** έχουμε:

$$v_x = v_{0,x} + a_x \Delta t$$

$$0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \left(-4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)\Delta t$$

$$\Delta t = 7{,}5\ \mathrm{s}$$

Θέση

Η συνάρτηση θέσης-χρόνου, δηλαδή ο τύπος με τον οποίο προσδιορίζουμε τη θέση στον *x*-άξονα, στην περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης είναι:

$$x = x_0 + v_{0,x}\Delta t + \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2 \qquad \textbf{(2.5)}$$

Η απόδειξη του τύπου μπορεί να γίνει με αξιοποίηση της γραφικής αναπαράστασης της κίνησης.

	1 φωτοπύλη	2 φωτοπύλες
Πειράματα στην ΕΟΜΚ με φωτοπύλες		

ΕΟΜΚ	
$a > 0$	
$a < 0$	

Δύο διαδοχικές κινήσεις	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.4

7. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση ενός αεροπλάνου που επιταχύνεται ευθύγραμμα ομαλά, μεταβάλλοντας την ταχύτητά του από 60 m/s σε 80 m/s μέσα σε 12 s.

Λύση

Θεωρούμε την κίνηση προς τη θετική κατεύθυνση του *x*-άξονα. Από την εκφώνηση προκύπτουν:

$$v_{0,x} = +60\ \mathrm{m/s},\quad v_x = +80\ \mathrm{m/s}\ \ \text{και}\ \ \Delta t = 12\ \mathrm{s}$$

Η μεταβολή της ταχύτητας είναι:

$$\Delta v_x = (80 - 60)\ \mathrm{m/s} = +20\ \mathrm{m/s}$$

οπότε:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{+20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{12\ \mathrm{s}} = +\frac{5}{3}\ \mathrm{m/s^2}$$

Επομένως:

$$\Delta x = v_{0,x}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2$$

$$= \left(+60\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(12\ \mathrm{s}) + \frac{1}{2}\left(+\frac{5}{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)(12\ \mathrm{s})^2$$

$$= 720\ \mathrm{m} + 120\ \mathrm{m} = 840\ \mathrm{m}$$

8. Ένα αυτοκίνητο κινείται κατά μήκος του x-άξονα με ταχύτητα $+20\ \mathrm{m/s}$ και επιταχύνεται για $5\ \mathrm{s}$ με επιτάχυνση $4\ \mathrm{m/s^2}$.

α) Να υπολογίσετε τη μετατόπισή του σε αυτό το χρονικό διάστημα.

β) Αν το αυτοκίνητο βρισκόταν στη θέση $x_0 = +50\ \mathrm{m}$ τη στιγμή που άρχισε να επιταχύνεται, να βρείτε την τελική του θέση.

Λύση

α) Από την εκφώνηση προκύπτουν:

$$v_{0,x} = +20\ \mathrm{m/s},\quad \Delta t = 5\ \mathrm{s}\quad \text{και}\quad a_x = +4\ \mathrm{m/s^2}$$

Από την **εξίσωση 2.5** έχουμε:

$$\Delta x = v_{0,x}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2$$

$$= \left(+20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(5\ \mathrm{s}) + \frac{1}{2}\left(+4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)(5\ \mathrm{s})^2$$

$$= 100\ \mathrm{m} + 50\ \mathrm{m} = 150\ \mathrm{m}$$

β) Το αυτοκίνητο ήταν στη θέση $x_0 = +50\ \mathrm{m}$ και στη συνέχεια μετατοπίστηκε κατά $\Delta x = +150\ \mathrm{m}$. Άρα, η τελική του θέση θα είναι:

$$x = 50\ \mathrm{m} + 150\ \mathrm{m} = 200\ \mathrm{m}$$

Η απόδειξη του τύπου 2.6

Ο τύπος που συνδέει την ταχύτητα με τη μετατόπιση στην ΕΟΜΚ

Σε πολλά προβλήματα θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα μετά από κάποια δεδομένη μετατόπιση του κινητού. Η σχέση αυτή προκύπτει με απαλοιφή του χρόνου από τις **εξισώσεις 2.4** και **2.5**. Έτσι, καταλήγουμε στον τύπο:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x\Delta x \qquad \text{(2.6)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.4

9. Ένα αυτοκίνητο κινείται κατά μήκος του x-άξονα με ταχύτητα $+20\ \mathrm{m/s}$. Ο οδηγός πατάει φρένο και μειώνει την ταχύτητα του αυτοκινήτου με ρυθμό $4\ \mathrm{m/s^2}$.

α) Να βρείτε σε πόσο χρόνο θα σταματήσει το αυτοκίνητο.

β) Να υπολογίσετε το διάστημα που θα διανύσει μέχρι να σταματήσει.

γ) Αν το αυτοκίνητο βρισκόταν στη θέση $x_0 = +50\ \mathrm{m}$ τη στιγμή που άρχισε το φρενάρισμα, να βρείτε την τελική του θέση.

Λύση

α) Από την εκφώνηση προκύπτουν:

$$v_{0,x} = +20\ \mathrm{m/s},\quad v_x = 0\ \mathrm{m/s}\quad \text{και}\quad a_x = -4\ \mathrm{m/s^2}$$

Από την **εξίσωση 2.4** έχουμε:

$$v_x = v_{0,x} + a_x\Delta t$$

$$0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = +20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \left(-4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)\Delta t$$

$$\Delta t = 5\ \mathrm{s}$$

β) Το αυτοκίνητο κινείται προς τα θετικά x, άρα η μετατόπιση θα έχει ίδια τιμή με το διάστημα που διανύει.

Από την **εξίσωση 2.5** έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta x &= v_{0,x}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2\\ &= \left(+20\ \frac{m}{s}\right)(5\ s) + \frac{1}{2}\left(-4\ \frac{m}{s^2}\right)(5\ s)^2\\ &= 100\ m - 50\ m = 50\ m\end{aligned}$$

γ) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την **εξίσωση 2.5** ή απευθείας: αφού το αυτοκίνητο από τη θέση $x_0 = +50$ m μετατοπίστηκε κατά $\Delta x = +50$ m, η τελική του θέση θα είναι:

$$x = 50\ m + 50\ m = 100\ m$$

10. Ένας ποδηλάτης κατηφορίζει ευθύγραμμα από έναν λόφο με αρχική ταχύτητα 2,0 m/s. Κινείται με σταθερή επιτάχυνση, φθάνοντας στο κατώτατο σημείο του λόφου με ταχύτητα 6,0 m/s. Εάν η διαδρομή έχει μήκος 40,0 m, να υπολογίσετε την επιτάχυνση του ποδηλάτη.

Λύση

Θεωρούμε την κίνηση στον x-άξονα που ταυτίζεται με την ευθύγραμμη τροχιά που διαγράφει το ποδήλατο. Από την εκφώνηση προκύπτουν:

$$v_{0,x} = +2{,}0\ m/s,\ v_x = +6{,}0\ m/s\ \text{ και}$$

$$\Delta x = 40{,}0\ m$$

Από την **εξίσωση 2.6** έχουμε:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x\Delta x$$

$$\left(+6{,}0\ \frac{m}{s}\right)^2 = \left(+2{,}0\ \frac{m}{s}\right)^2 + 2a_x(+40{,}0\ m)$$

$$2a_x(+40{,}0\ m) = 32\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$a_x = +0{,}40\ m/s^2$$

II. Γραφικές αναπαραστάσεις κινηματικών μεγεθών με τον χρόνο στην ΕΟΜΚ

Επιτάχυνση

Στην ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση η επιτάχυνση είναι εξ ορισμού σταθερή. Η γραφική παράσταση θα είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα του χρόνου (**Σχήμα 2.17**).

Για παράδειγμα, το **σχήμα 2.18** δείχνει την επιτάχυνση ενός σώματος που κινείται σε ευθεία γραμμή. Το σώμα ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ με ταχύτητα $v_{0,x} = 5$ m/s και επιταχύνεται για 10 s.

Από το διάγραμμα φαίνεται πως η επιτάχυνση είναι ίση με 3 m/s². Η ταχύτητα που θα έχει το σώμα στο τέλος των 10 s προκύπτει από την **εξίσωση 2.4**:

$$v_x = v_{0,x} + a_x\Delta t = 5\ \frac{m}{s} + \left(3\ \frac{m}{s^2}\right)(10\ s) = 5\ \frac{m}{s} + 30\ \frac{m}{s} = 35\ m/s$$

Παρατηρούμε πως η ταχύτητα αυξήθηκε κατά 30 m/s.

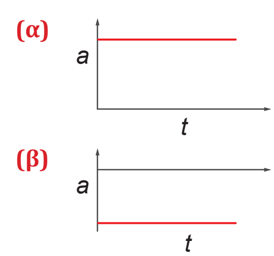
Το «εμβαδόν» του ορθογωνίου που σχηματίζεται είναι:

$$\text{«Εμβαδόν»} = (\text{Βάση})\times(\text{Ύψος}) = (10\ s)\left(3\ \frac{m}{s^2}\right) = 30\ m/s$$

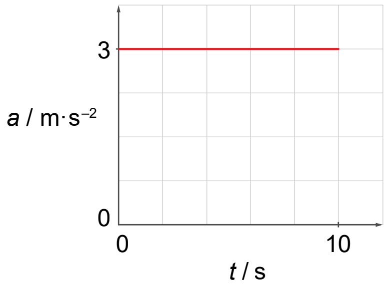
Δηλαδή είναι ίσο με τη μεταβολή της ταχύτητας.

Συμπέρασμα

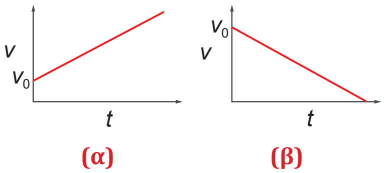
Η μεταβολή Δv της ταχύτητας είναι ίση με το «εμβαδόν» κάτω από τη γραφική παράσταση επιτάχυνσης-χρόνου.



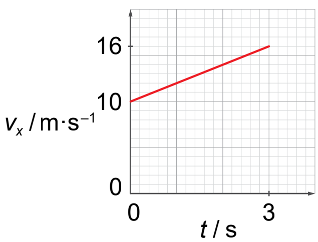
Σχήμα 2.17 Γραφική παράσταση επιτάχυνσης-χρόνου στην ΕΟΜΚ: **(α)** με $a_x > 0$, **(β)** με $a_x < 0$



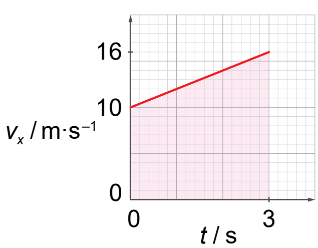
Σχήμα 2.18 Γραφική παράσταση επιτάχυνσης-χρόνου για την ΕΟΜΚ ενός σώματος



Σχήμα 2.19 Γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου στην ΕΟΜΚ: **(α)** με $a_x > 0$, **(β)** με $a_x < 0$



Σχήμα 2.20 Γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου για την ΕΟΜΚ ενός αυτοκινήτου



Σχήμα 2.21 Υπολογισμός της επιτάχυνσης μέσω της κλίσης και της μετατόπισης μέσω του «εμβαδού» από τη γραφική παράσταση v-t

Η απόδειξη του τύπου της θέσης

Πειραματικός προσδιορισμός a, v_0 και s από τη γραφική παράσταση v^2-x

Ταχύτητα

Στην ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση η ταχύτητα μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό. Αυτό σημαίνει πως η γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου είναι μια ευθεία (**Σχήμα 2.19**). Το συμπέρασμα αυτό δικαιολογείται και από τη μορφή του τύπου της ταχύτητας:

$$v_x = v_{0,x} + a_x \Delta t \quad \text{ή} \quad v_x = v_{0,x} + a_x (t-0) \quad \text{ή} \quad v_x = v_{0,x} + a_x t$$

Η τελευταία εξίσωση παραπέμπει σε συνάρτηση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και παριστάνει ευθεία γραμμή με κλίση a_x.

Συμπεράσματα

- Η επιτάχυνση είναι ίση με την *κλίση* της γραφικής παράστασης v-t.
- Η μετατόπιση είναι ίση με το «εμβαδόν» κάτω από τη γραφική παράσταση v-t όπως και στην ΕΟΚ.

Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση στο **σχήμα 2.20** περιγράφει την κίνηση ενός αυτοκινήτου κατά μήκος του x-άξονα. Θα υπολογίσουμε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου, καθώς και τη μετατόπισή του μεταξύ 0 s και 3 s.

Η επιτάχυνση ισούται με την κλίση. Συνεπώς:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{16\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3\ \text{s}} = 2\ \text{m/s}^2$$

Η μετατόπιση ισούται με το «εμβαδόν» του τραπεζίου. Συνεπώς:

$$\Delta x = \frac{\mathrm{B}+\beta}{2}\cdot \upsilon = \frac{16\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}\cdot(3\ \text{s}) = 39\ \text{m}$$

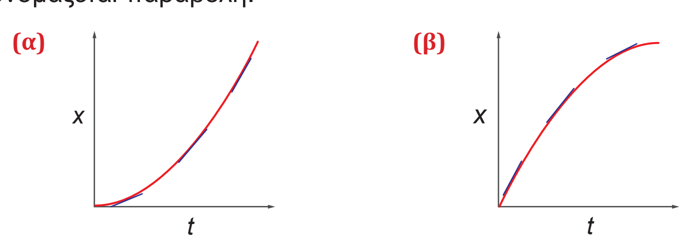
Θέση

Ο **τύπος 2.5** της θέσης είναι:

$$x = x_0 + v_{0,x}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 \quad \text{ή} \quad x = x_0 + v_{0,x} t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

όπου θέσαμε $\Delta t = t - 0 = t$.

Η εξίσωση αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί με μια καμπύλη που ονομάζεται παραβολή.



Σχήμα 2.22 Γραφική παράσταση θέσης-χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.
(α) Είναι $a_x > 0$. Η κλίση αυξάνεται όσο περνά ο χρόνος και τότε λέμε πως η καμπύλη έχει «τα κοίλα άνω». **(β)** Είναι $a_x < 0$. Η κλίση μειώνεται όσο περνά ο χρόνος και τότε λέμε πως η καμπύλη έχει «τα κοίλα κάτω».

Λογισμικό

Διάγραμμα θέσης-χρόνου στην ΕΟΜΚ

- $a > 0$
- $a < 0$

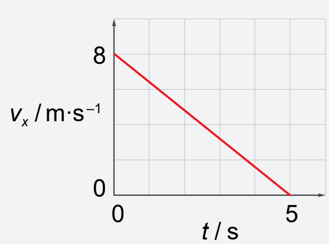
Συμπεράσματα

- Η ταχύτητα σε κάθε θέση ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης x-t στη θέση αυτή, όπως και στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.
- Αν η γραφική παράσταση θέσης-χρόνου στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω, αυτό δεν σημαίνει αυτόματα πως η κίνηση είναι *ομαλά* μεταβαλλόμενη. Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει η καμπύλη να είναι μια παραβολή, κάτι που δεν μπορεί να ταυτοποιηθεί με παρατήρηση της γραφικής παράστασης. Μια καμπύλη θα είναι παραβολή, όταν η θέση εξαρτάται από το τετράγωνο του χρόνου $\left(\text{όπως } x = x_0 + v_0 t + at^2/2\right)$ και όχι μεγαλύτερες δυνάμεις του.
- Χωρίς αρχική ταχύτητα, η μετατόπιση είναι ανάλογη του t^2 και ισχύει $\Delta x = \frac{1}{2}a_x t^2$. Αν, επιπλέον, είναι $x_0 = 0$, τότε η θέση είναι ανάλογη του t^2 και ισχύει $x = \frac{1}{2}a_x t^2$, οπότε η γραφική παράσταση x-t^2 είναι ευθεία με κλίση $a_x/2$.

Πειραματικός προσδιορισμός *a* και *ΣF*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.4

11. Η ακόλουθη γραφική παράσταση περιγράφει την κίνηση ενός αυτοκινήτου κατά τη θετική κατεύθυνση του x-άξονα.



Διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου για την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση ενός αυτοκινήτου

α) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή $t = 3$ s.

β) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα από 0 s έως 5 s.

Λύση

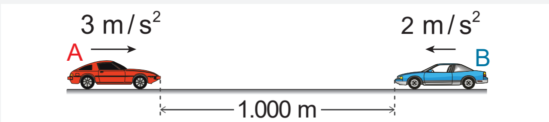
α) Η επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 3$ s είναι ίση με την επιτάχυνση σε όλη τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $t = 0$ s έως $t = 5$ s (η κίνηση είναι ομαλά μεταβαλλόμενη, δηλαδή έχει σταθερή επιτάχυνση).

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\text{ s}} = -1{,}6\text{ m/s}^2$$

β) Η μετατόπιση ισούται με το «εμβαδόν» του τριγώνου, άρα:

$$\Delta x = \frac{(\text{Βάση})\times(\text{Ύψος})}{2} = \frac{(5\ \text{s})\cdot\left(8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{2} = 20\ \text{m}$$

12. Δύο αυτοκίνητα Α και Β τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκονται ακίνητα σε απόσταση 1.000 m μεταξύ τους και αρχίζουν να επιταχύνονται με επιταχύνσεις $a_{\text{A}} = 3\ \text{m/s}^2$ και $a_{\text{B}} = 2\ \text{m/s}^2$ κινούμενα το ένα προς το άλλο.



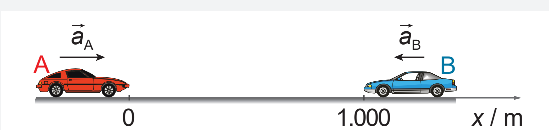
Τα αυτοκίνητα Α και Β στις αρχικές τους θέσεις

α) Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο και σε ποιο σημείο θα συναντηθούν.

β) Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα θέσης-χρόνου.

Λύση

α) Στη μελέτη μας θα θεωρήσουμε τα αυτοκίνητα ως υλικά σημεία. Κατασκευάζουμε μονοδιάστατο Σ.Α., ώστε η αρχική θέση του Α να είναι η $x_{0,\text{A}} = 0\ \text{m}$ και η αρχική θέση του Β να είναι η $x_{0,\text{B}} = 1.000\ \text{m}$. Οι επιταχύνσεις είναι $a_{\text{A},x} = 3\ \text{m/s}^2$ και $a_{\text{B},x} = -2\ \text{m/s}^2$.



Τα αυτοκίνητα Α και Β σε μονοδιάστατο σύστημα αναφοράς

Οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης είναι:

$$x_{\text{A}} = x_{0,\text{A}} + \frac{1}{2}a_{\text{A},x}t^2 \qquad x_{\text{B}} = x_{0,\text{B}} + \frac{1}{2}a_{\text{B},x}t^2$$

$$x_{\text{A}} = 0 + \frac{3}{2}t^2 \qquad x_{\text{B}} = 1.000 + \frac{1}{2}(-2)t^2$$

$$x_{\text{A}} = \frac{3}{2}t^2\ \text{(SI)} \qquad x_{\text{B}} = 1.000 - t^2\ \text{(SI)}$$

Τα δύο αυτοκίνητα θα συναντηθούν όταν ταυτιστούν οι θέσεις τους, δηλαδή όταν:

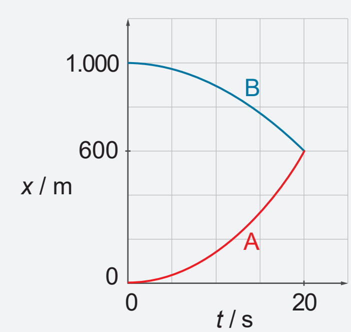
$$x_{\text{A}} = x_{\text{B}}\ \ \text{ή}\ \ \frac{3}{2}t^2 = 1.000 - t^2\ \ \text{ή}\ \ t^2 = 400$$

από την οποία βρίσκουμε $t = 20\ \text{s}$.

Η θέση συνάντησης μπορεί να προσδιοριστεί τόσο μέσω του x_{A} όσο και μέσω του x_{B} (οι θέσεις ταυτίζονται τη στιγμή της συνάντησης):

$$x_{\text{A}} = \frac{3}{2}t^2 = \frac{3}{2}(400)\ \text{m} = 600\ \text{m} = x_{\text{B}}$$

β) Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα θέσης-χρόνου για τα δύο αυτοκίνητα.



Το διάγραμμα θέσης-χρόνου για τα αυτοκίνητα Α, Β

3. Ελεύθερη πτώση

Galileo Galilei

Για πολλά χρόνια οι φιλόσοφοι πίστευαν πως όσο βαρύτερο είναι ένα σώμα τόσο πιο γρήγορα πέφτει προς τη Γη. Από τα τέλη του 16ου αιώνα με τη βοήθεια πειραμάτων που έκανε ο Ιταλός φιλόσοφος Galileo Galilei (γνωστός στα ελληνικά και ως Γαλιλαίος), οι φιλόσοφοι και στη συνέχεια οι φυσικοί διαπίστωσαν πως:

Αν δεν επιδρούσε ο αέρας, όλα τα αντικείμενα στον ίδιο τόπο κοντά στην επιφάνεια της Γης θα έπεφταν με την ίδια επιτάχυνση η οποία στην περιοχή μας έχει τιμή περίπου $9{,}8\ \text{m/s}^2$ και ονομάζεται **επιτάχυνση της βαρύτητας**.

Αυτή εμφανίζεται στον 2ο Νόμο του Νεύτωνα που λαμβάνει τη μορφή $w = mg$, με βάση την οποία μπορούμε να ονομάζουμε τη μάζα *αδρανειακή*. Στο κεφάλαιο της βαρύτητας μάθαμε ότι το βάρος ενός σώματος είναι ανάλογο της μάζας. Αυτή η μάζα αναφέρεται ως *βαρυτική*. Όλα τα πειράματα δείχνουν ότι οι δύο μάζες είναι ίσες, γεγονός που εξηγήθηκε θεωρητικά από τον Einstein. Αυτός είναι ο λόγος που αναφερόμαστε απλά σε μάζα και δεν κάνουμε τον διαχωρισμό ανάμεσα σε βαρυτική και αδρανειακή. Ο συντελεστής αναλογίας $g \approx 9{,}81\,\mathrm{N/kg}$ που συναντήσαμε στο κεφάλαιο της βαρύτητας ταυτίζεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την ισότητα των μονάδων:

$$1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{kg}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας αλλάζει ελαφρά από τόπο σε τόπο, εξαρτώμενη κυρίως από το πόσο βόρεια ή νότια από τον Ισημερινό βρίσκεται ο τόπος, καθώς και από το υψόμετρό του. Οι τιμές της ποικίλουν από περίπου $9{,}76\,\mathrm{m/s^2}$ (στην κορυφή του όρους Νεβάντο Χουασκαράν στο Περού) έως περίπου $9{,}83\,\mathrm{m/s^2}$ (στον Βόρειο Πόλο). Στην Ελλάδα η τιμή είναι περίπου $9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$.

Ως **ελεύθερη πτώση** ορίζουμε την κίνηση που κάνει ένα σώμα, αν αφεθεί από κάποιο ύψος και κινηθεί με την επίδραση μόνο του βάρους του (δηλαδή θεωρώντας αμελητέα την επίδραση του αέρα).

Για την εξαγωγή των συναρτήσεων κίνησης (μαθηματικών τύπων) στην ελεύθερη πτώση υποθέτουμε ότι το σώμα ξεκινά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, χωρίς αρχική ταχύτητα, από τη θέση $y = 0$ ενός κατακόρυφου y-άξονα με θετική φορά προς τα «κάτω».

Σύμφωνα με αυτές τις αρχικές συνθήκες, η ελεύθερη πτώση είναι ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα με θετική επιτάχυνση μέτρου $a = g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Συνεπώς, οι τύποι που περιγράφουν την ελεύθερη πτώση βρίσκονται ως εξής:

- από την **εξίσωση 2.4** προκύπτει:

$$v_y = g \cdot \Delta t \qquad \textbf{(2.7)}$$

- από την **εξίσωση 2.5** προκύπτει:

$$y = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \qquad \textbf{(2.8)}$$

- από την **εξίσωση 2.6** προκύπτει:

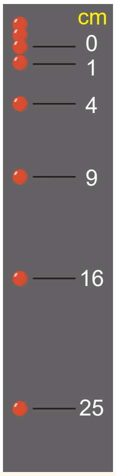
$$v_y^2 = 2g \cdot y \qquad \textbf{(2.9)}$$

Στην πραγματικότητα οι τύποι αυτοί δεν ισχύουν με μεγάλη ακρίβεια στη Γη, παρά μόνο στις εξής περιπτώσεις:

1. Για σχετικά μικρά, βαριά αντικείμενα τα οποία πέφτουν από σχετικά μικρό ύψος.

Εικόνα 2.7 Ο Galileo Galilei και ο Πύργος της Πίζας όπου πιθανότατα έκανε κάποια από τα πειράματά του.

Προσδιορισμός της τιμής της g



Εικόνα 2.8 Διαδοχικά στιγμιότυπα μπάλας σε ελεύθερη πτώση που έχουν ληφθεί σε ίσα χρονικά διαστήματα. Η αύξηση της μετατόπισης ανά μονάδα χρόνου δείχνει πως η κίνηση είναι μεταβαλλόμενη.

Εικόνα 2.9 Ο πύργος ελεύθερης πτώσης ZARM στη Γερμανία ο οποίος επιτρέπει πτώσεις σε κενό από ύψος 122 m. © CuttyP

Ελεύθερη πτώση

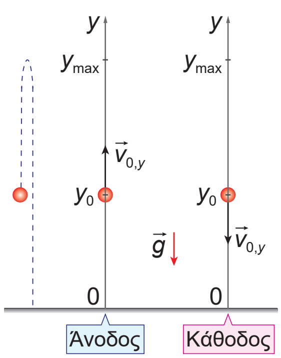
2. Στο εσωτερικό σωλήνα από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ο αέρας (δηλαδή επικρατεί *κενό αέρα*). Τέτοιοι σωλήνες μπορεί να υπάρχουν σε ένα εργαστήριο Φυσικής με μήκη περίπου ένα μέτρο, υπάρχει όμως και ο πύργος ZARM στη Γερμανία (**Εικόνα 2.9**).

Σε πλανήτες ή δορυφόρους χωρίς ατμόσφαιρα (π.χ. στη Σελήνη) οι εξισώσεις ισχύουν με μεγάλη ακρίβεια. Εκεί φυσικά η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει διαφορετικές τιμές.

Το 1971 ο αστροναύτης David Scott επαλήθευσε στην επιφάνεια της Σελήνης πως χωρίς την επίδραση του αέρα ένα σφυρί και ένα φτερό πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση.

4. Κατακόρυφη βολή

Μια γενικότερη περίπτωση κατακόρυφης κίνησης υπό την επίδραση του βάρους είναι η κατακόρυφη βολή. Σε αυτήν δίνουμε στο σώμα αρχική κατακόρυφη ταχύτητα, εκτοξεύοντάς το είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω. Για να μελετήσουμε την κίνηση, θεωρούμε πως αυτή γίνεται σε έναν κατακόρυφο άξονα (y-άξονας) όπου συνήθως η θετική κατεύθυνση είναι προς τα επάνω (**Σχήμα 2.23**). Οι εξισώσεις που την περιγράφουν προκύπτουν από τις γενικές εξισώσεις της ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης.



Σχήμα 2.23 Ο y-άξονας που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την κατακόρυφη βολή.

Από την **εξίσωση 2.4** προκύπτει:

$$v_y = v_{0,y} + a_y \Delta t \qquad \textbf{(2.10)}$$

Από την **εξίσωση 2.5** προκύπτει:

$$y = y_0 + v_{0,y}\Delta t + \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2 \qquad \textbf{(2.11)}$$

Θέτουμε $a_y = -g$, αν η θετική φορά του y-άξονα είναι προς τα επάνω και $a_y = +g$, αν η θετική φορά του y-άξονα είναι προς τα κάτω.

Ανάλογα σκεφτόμαστε για το πρόσημο της ταχύτητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.4

13. Αφήνουμε μια μικρή μπάλα από ύψος 2,0 m από το έδαφος να εκτελέσει ελεύθερη πτώση. Να υπολογίσετε:

α) σε πόσο χρονικό διάστημα και

β) με πόση ταχύτητα

θα φτάσει στο έδαφος.

Δίνεται $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

Λύση

α) Θεωρούμε την κίνηση στον κατακόρυφο y-άξονα με θετική φορά προς τα κάτω και αρχή το σημείο από όπου αφήνεται η μπάλα. Από την εκφώνηση είναι $y = 2{,}0\ \text{m}$. Χρησιμοποιώντας την **εξίσωση 2.8** έχουμε:

$$y = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \ \text{ ή } \ \Delta t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \ \text{ ή } \ \Delta t = 0{,}64\ \text{s}$$

β) Χρησιμοποιώντας την **εξίσωση 2.7** έχουμε:

$$v_y = g \cdot \Delta t = \left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}64\ \text{s}) = 6{,}3\ \text{m/s}$$

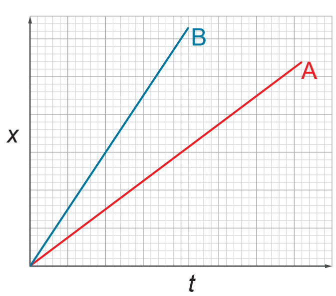
Παράδειγμα 14

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

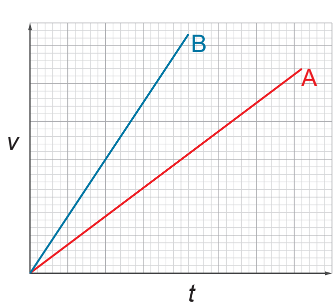
1. Να αποδείξετε ότι στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση η μέση ταχύτητα σε ένα χρονικό διάστημα ισούται με τον μέσο όρο της αρχικής και της τελικής ταχύτητας σε αυτό το χρονικό διάστημα ή με τη στιγμιαία ταχύτητα στο μέσο του ίδιου χρονικού διαστήματος.

2. Στο διάγραμμα παριστάνεται η θέση δύο αυτοκινήτων Α, Β σε συνάρτηση με τον χρόνο.



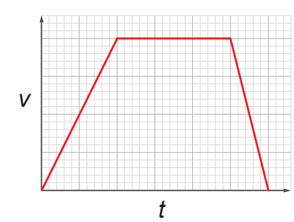
Τα αυτοκίνητα κινούνται πάνω στον ίδιο ευθύγραμμο δρόμο που ταυτίζεται με τον *x*-άξονα. Να εξηγήσετε πώς προκύπτει από το διάγραμμα ότι τα αυτοκίνητα κινούνται με σταθερή ταχύτητα και να υπολογίσετε τον λόγο των ταχυτήτων των αυτοκινήτων v_B / v_A.

3. Στο διάγραμμα παριστάνεται η ταχύτητα δύο αυτοκινήτων Α, Β σε συνάρτηση με τον χρόνο.

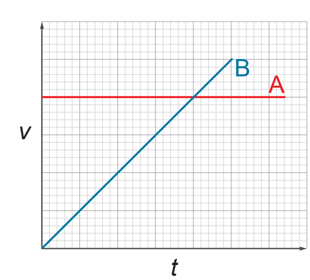


Τα αυτοκίνητα κινούνται πάνω στον ίδιο ευθύγραμμο δρόμο που ταυτίζεται με τον *x*-άξονα. Να εξηγήσετε πώς προκύπτει από το διάγραμμα ότι τα αυτοκίνητα κινούνται με σταθερή επιτάχυνση και να υπολογίσετε τον λόγο των επιταχύνσεων των αυτοκινήτων a_B / a_A.

4. Στο διάγραμμα παριστάνεται η ταχύτητα ενός σφαιριδίου σταθερής μάζας σε συνάρτηση με τον χρόνο. Το σφαιρίδιο κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του *x*-άξονα. Να κατασκευάσετε ποιοτικά το διάγραμμα της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται στο σφαιρίδιο σε συνάρτηση με τον χρόνο.



5. Στο διάγραμμα έχει σχεδιαστεί στο ίδιο σύστημα αξόνων η ταχύτητα δύο οχημάτων Α, Β σε συνάρτηση με τον χρόνο.

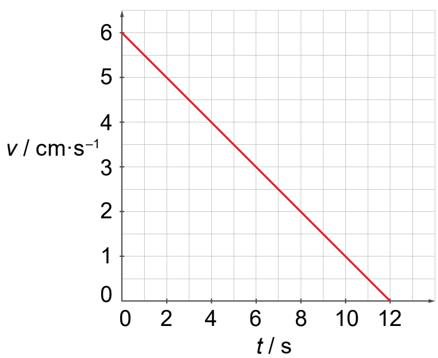


Τα οχήματα κινούνται πάνω στον ίδιο ευθύγραμμο δρόμο. Να υπολογίσετε τον λόγο των διαστημάτων s_A / s_B που διάνυσαν τα δύο οχήματα από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη στιγμή που έχουν την ίδια τιμή ταχύτητας.

6. Ένα αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση κατά μήκος του *x*-άξονα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

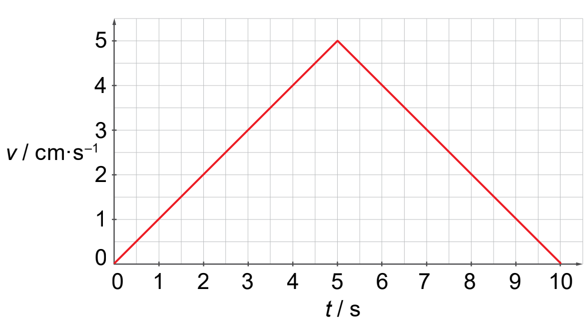
t / s	0	1		3	
x_0 / m					
v_0 / m·s^{-1}					
a / m·s^{-2}				2	
v / m·s^{-1}	10	12	14		20
Δx / m	0	11		39	75
x / m	50		74	89	

7. Δίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας ενός σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



Να προσδιορίσετε το είδος της κίνησης και να βρείτε τη μετατόπιση του σώματος από τη χρονική στιγμή $t = 4$ s έως τη χρονική στιγμή $t = 8$ s.

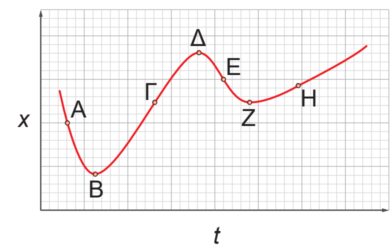
8. Δίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο για ένα σώμα που κινείται ευθύγραμμα.



α) Να προσδιορίσετε το είδος της κίνησης και να συγκρίνετε τα μέτρα των επιταχύνσεων του σώματος στα χρονικά διαστήματα από $t = 0$ έως $t_1 = 5$ s και από $t_1 = 5$ s έως $t_2 = 10$ s.

β) Να συγκρίνετε τις μετατοπίσεις του σώματος στα ίδια χρονικά διαστήματα.

9. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η θέση σε συνάρτηση με τον χρόνο για ένα σώμα που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο.

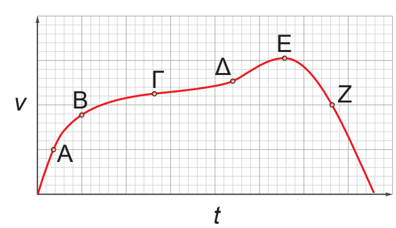


α) Να προσδιορίσετε τις θέσεις στις οποίες η ταχύτητα είναι:

i) μηδενική, **ii)** θετική, **iii)** αρνητική.

β) Σε ποιο από τα σημεία του διαγράμματος η ταχύτητα έχει το μεγαλύτερο μέτρο;

10. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η ταχύτητα σε συνάρτηση με τον χρόνο για ένα σώμα που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο.

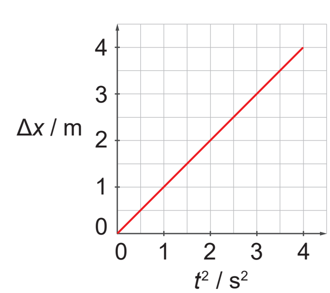


α) Να προσδιορίσετε τα σημεία στα οποία η επιτάχυνση είναι:

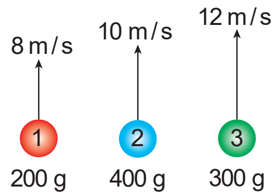
i) μηδενική, **ii)** θετική, **iii)** αρνητική.

β) Σε ποιο από τα σημεία του διαγράμματος η επιτάχυνση έχει το μεγαλύτερο μέτρο;

11. Ένα βαγόνι εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα πάνω σε αεροτροχιά που συμπίπτει με τον x-άξονα. Η γραφική παράσταση του σχήματος αναπαριστά τη μετατόπιση του βαγονιού σε συνάρτηση με το τετράγωνο του χρόνου. Αξιοποιώντας τη γραφική παράσταση να βρείτε την επιτάχυνση του βαγονιού.



12. Οι σφαίρες 1, 2 και 3 έχουν εκτοξευτεί κατακόρυφα προς τα πάνω και στο σχήμα απεικονίζεται ένα στιγμιότυπο της κίνησής τους.



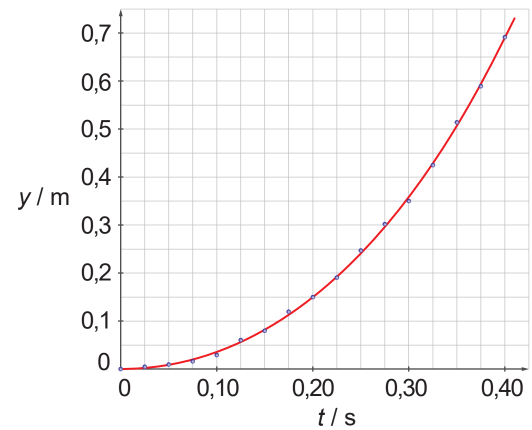
Αν η αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα, να προβλέψετε τις ταχύτητές τους ένα δευτερόλεπτο μετά τον χρόνο στον οποίον έχει ληφθεί το στιγμιότυπο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

13. Από την άκρη ενός βράχου ύψους h ένας μαθητής εκτοξεύει (βάλλει) μια πέτρα με ταχύτητα v_0 κατακόρυφα προς τα πάνω και στη συνέχεια εκτοξεύει μια δεύτερη κατακόρυφα προς τα κάτω με την ίδια αρχική ταχύτητα v_0. Να συγκρίνετε τις ταχύτητες με τις οποίες οι πέτρες φτάνουν στο έδαφος.

14. Από την ταράτσα μιας πολυκατοικίας αφήνεται να πέσει μια ξύλινη μπίλια μάζας m. Ταυτόχρονα, αφήνεται να πέσει από το μπαλκόνι του δεύτερου ορόφου της ίδιας πολυκατοικίας μια σιδερένια μπίλια διπλάσιας μάζας $2m$. Εάν γνωρίζετε ότι το ύψος πτώσης της ξύλινης μπίλιας είναι τετραπλάσιο σε σχέση με αυτό της σιδερένιας, να συγκρίνετε τους χρόνους πτώσης. Η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα και συνεπώς οι δύο μπίλιες εκτελούν ελεύθερη πτώση.

15. Ένα σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση στη Γη και ένα άλλο στη Σελήνη. Εάν χρειάζονται το ίδιο χρονικό διάστημα για να φτάσουν στο έδαφος, να υπολογίσετε τον λόγο των υψών από τα οποία αφέθηκαν να πέσουν τα δύο σώματα. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στη Γη είναι έξι φορές μεγαλύτερη από αυτήν στη Σελήνη.

16. Σε μια σχολική αίθουσα πραγματοποιήθηκε ένα πείραμα ελεύθερης πτώσης. Συγκεκριμένα, βιντεοσκοπήθηκε η ελεύθερη πτώση μιας μπίλιας και με το λογισμικό Tracker έγινε βιντεοανάλυση της κίνησης. Από αυτήν προέκυψε το ακόλουθο διάγραμμα της θέσης στον y-άξονα σε συνάρτηση με τον χρόνο σε μονάδες SI.

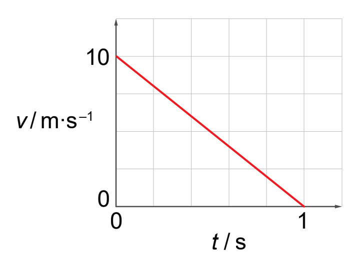


Η θετική φορά του άξονα καθορίστηκε προς τα κάτω και η αρχή στο σημείο από όπου αφέθηκε να πέσει η μπίλια. Χρησιμοποιώντας το λογισμικό, οι μαθητές προσέγγισαν τη γραφική παράσταση με παραβολή της μορφής $y = \mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}t + \mathrm{C}$, την οποία χάραξαν στο ίδιο διάγραμμα.

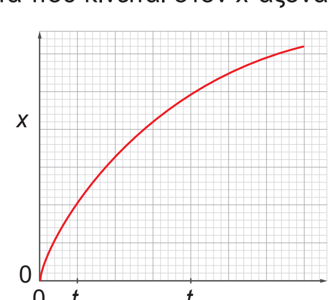
α) Να εξηγήσετε γιατί οι παράμετροι B και C έχουν κάποιες μικρές μη μηδενικές τιμές.

β) Να αξιοποιήστε την τιμή της παραμέτρου A, για να βρείτε την τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας όπως αυτή προκύπτει από το πείραμα, δίνοντας τις απαραίτητες εξηγήσεις.

17. Μια πέτρα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Στο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου για την πέτρα από τη στιγμή της εκτόξευσης έως τη στιγμή που έφτασε στο ανώτερο ύψος. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος ανόδου της πέτρας.



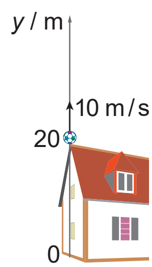
18. Δίνεται το διάγραμμα θέσης-χρόνου για μια μοτοσικλέτα που κινείται στον x-άξονα.



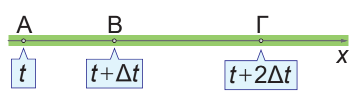
α) Τη χρονική στιγμή $t=0$ η μοτοσικλέτα είναι ακίνητη ή έχει κάποια ταχύτητα;

β) Να συγκρίνετε τις τιμές της ταχύτητας της μοτοσικλέτας τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2.

19. Τη χρονική στιγμή $t=0$ μια μικρή μπάλα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $10\ \text{m/s}$ από τη στέγη κτηρίου, από ύψος 20 m πάνω από το έδαφος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $9{,}8\ \text{m/s}^2$. Να γράψετε την εξίσωση κίνησης $y=\text{f}(t)$ με δεδομένο ότι η αρχή του y-άξονα έχει τεθεί στο έδαφος.



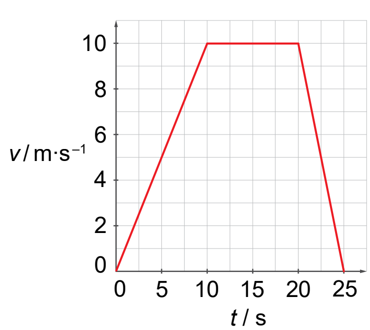
20. Στο σχήμα φαίνονται τρία μόνο από τα διαδοχικά ίχνη που ελήφθησαν σε μια χαρτοταινία από την εργαστηριακή άσκηση μελέτης μιας ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.



Το χρονικό διάστημα λήψης δύο διαδοχικών ιχνών είναι Δt. Να δείξετε ότι η ταχύτητα στη θέση Β ισούται με τη μέση ταχύτητα για την κίνηση από το Α στο Γ.

Ασκήσεις

1. Δίνεται το διάγραμμα της ταχύτητας-χρόνου για μια μοτοσικλέτα που κινείται ευθύγραμμα πάνω σε δρόμο ο οποίος ταυτίζεται με τον x-άξονα.



Η μοτοσικλέτα τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην αρχή $(x=0)$ του x-άξονα. Για το χρονικό διάστημα από 0 s έως 25 s:

α) να καθορίσετε τα είδη κίνησης της μοτοσικλέτας,

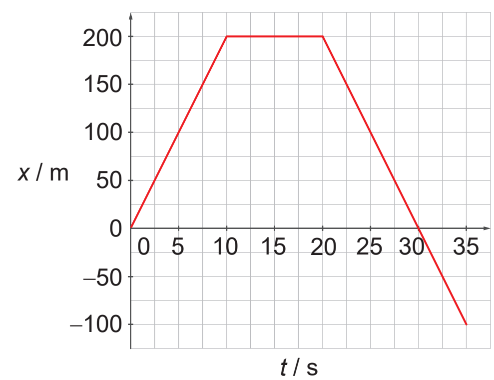
β) να κάνετε τα διαγράμματα επιτάχυνσης-χρόνου και θέσης-χρόνου για τη μοτοσικλέτα,

γ) να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα της μοτοσικλέτας.

2. Δίνεται το διάγραμμα θέσης-χρόνου ενός αυτοκινήτου που κινείται ευθύγραμμα πάνω σε δρόμο ο οποίος ταυτίζεται με τον x-άξονα.

α) Να περιγράψετε την κίνηση του αυτοκινήτου από τη χρονική στιγμή 0 s έως τη χρονική στιγμή 35 s.

β) Να κάνετε το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου για το αυτοκίνητο.



3. Ένα αυτοκίνητο κινήθηκε για μισή ώρα. Στα πρώτα 15 min κινήθηκε με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα $80\ \text{km/h}$ και στα επόμενα 15 min με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα $90\ \text{km/h}$. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο κινήθηκε 120 km. Στο μισό διάστημα (60 km) κινήθηκε με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα $80\ \text{km/h}$ και στο άλλο μισό με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα $60\ \text{km/h}$. Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα των δύο αυτοκινήτων.

4. Ένα όχημα κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $10\ \text{m/s}$ και τη χρονική στιγμή $t=0$ αρχίζει να επιταχύνεται ομαλά για 5 s, οπότε σε αυτό το χρονικό διάστημα διπλασιάζει την ταχύτητά του. Να υπολογίσετε το διάστημα που διάνυσε το όχημα στα 5 s.

5. Ένα αυτοκίνητο φρενάρει τη στιγμή που έχει ταχύτητα $72\ \text{km/h}$. Η επιβράδυνσή του κατά το φρενάρισμα είναι σταθερή και ο χρόνος φρεναρίσματος μέχρι να σταματήσει είναι 10 s. Να υπολογίσετε το διάστημα που διάνυσε το αυτοκίνητο από τη στιγμή που άρχισε το φρενάρισμα μέχρι να σταματήσει.

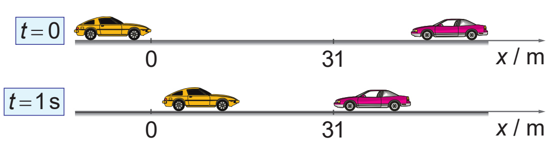
6. Θα μελετήσουμε την κίνηση ενός λεωφορείου σε ευθύγραμμο δρόμο μεταξύ δύο πολύ κοντινών στάσεων Α και Β. Θεωρούμε έναν άξονα κίνησης (x-άξονας) με τη θέση $x=0$ στη στάση Α και θετική φορά από τη στάση Α προς τη στάση Β. Το λεωφορείο ξεκινάει από την ηρεμία τη χρονική στιγμή $t_0=0$ από τη στάση Α με κατεύθυνση προς τη στάση Β. Αρχικά επιταχύνεται με επιτάχυνση $2\ \mathrm{m/s^2}$ μέχρι που αποκτά ταχύτητα $20\ \mathrm{m/s}$. Στη συνέχεια, για ορισμένο χρόνο διατηρεί σταθερή αυτήν την ταχύτητα. Τέλος, επιβραδύνεται σταθερά με ρυθμό $2{,}5\ \mathrm{m/s^2}$ μέχρι που σταματά στη στάση Β τη χρονική στιγμή $t=30\ \mathrm{s}$.

α) Να υπολογίσετε τα χρονικά διαστήματα της επιταχυνόμενης, της ομαλής και της επιβραδυνόμενης κίνησης του λεωφορείου.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των στάσεων Α και Β.

γ) Σε βαθμολογημένους άξονες να κάνετε τα διαγράμματα της επιτάχυνσης, της ταχύτητας και της θέσης του λεωφορείου σε συνάρτηση με τον χρόνο.

7. Δύο τηλεκατευθυνόμενα αμαξίδια κινούνται πάνω σε έναν οριζόντιο δρόμο που ταυτίζεται με τον x-άξονα. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το ένα αμαξίδιο ξεκινά από την ηρεμία από τη θέση $x=0$ με σταθερή επιτάχυνση $2\ \mathrm{m/s^2}$ κινούμενο προς τη θετική φορά του x-άξονα. Το άλλο αμαξίδιο ξεκινά την ίδια χρονική στιγμή κινούμενο προς την αρνητική φορά του x-άξονα με σταθερή ταχύτητα μέτρου $5\ \mathrm{m/s}$ και τη χρονική στιγμή $t=1\ \mathrm{s}$ βρίσκεται στη θέση $x=31\ \mathrm{m}$, όπως απεικονίζεται στο σχήμα.



α) Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης $x_1(t)$, $x_2(t)$ των δύο αμαξιδίων.

β) Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή και τη θέση συνάντησης των δύο αμαξιδίων.

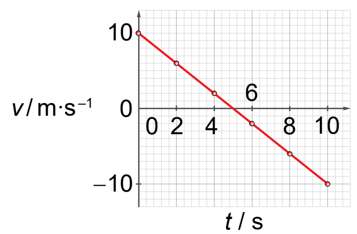
8. Σε ένα κιβώτιο μάζας $10\ \mathrm{kg}$ που ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου $30\ \mathrm{N}$ τη χρονική στιγμή $t=0$, οπότε το κιβώτιο αρχίζει να ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο. Μόλις το κιβώτιο διανύσει $8\ \mathrm{m}$, η δύναμη παύει να ασκείται, οπότε αυτό συνεχίζει την ολίσθησή του μέχρι να σταματήσει λόγω της τριβής. Δίνονται $\mu=0{,}2$ και $g=10\ \mathrm{m/s^2}$. Να υπολογίσετε:

α) τη χρονική στιγμή που καταργήθηκε η δύναμη των $30\ \mathrm{N}$ και την ταχύτητα που είχε το κιβώτιο τη στιγμή της κατάργησης της δύναμης,

β) το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κιβώτιο από τη χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι να σταματήσει.

9. **α)** Να δώσετε παραδείγματα από την καθημερινότητά σας όπου η κατεύθυνση της ταχύτητας ενός κινούμενου σώματος αλλάζει, ενώ η επιτάχυνσή του παραμένει σταθερή.

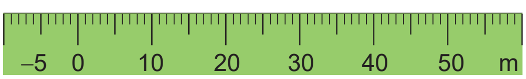
β) Η εικονιζόμενη γραφική παράσταση περιγράφει ακριβώς μια τέτοια περίπτωση ενός σώματος που κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο.



Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα αλλάζει κατεύθυνση και να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος.

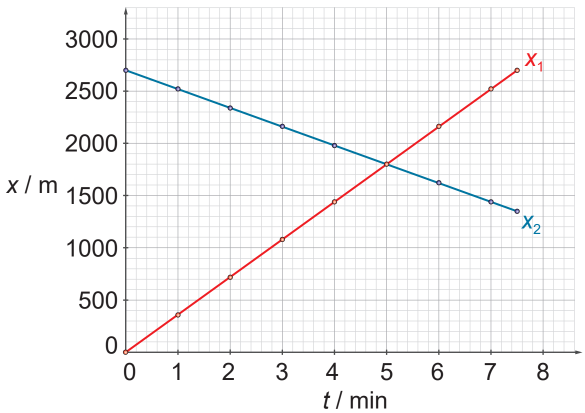
γ) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση και το διάστημα που διάνυσε το σώμα από την $t=0$ έως την $t=10\ \mathrm{s}$.

δ) Εάν την $t=0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση $x=-5\ \mathrm{m}$, να περιγράψετε την κίνησή του με τη βοήθεια του άξονα του σχήματος.



10. Δύο ποδηλάτες διέρχονται τη χρονική στιγμή $t=0$ από τα δύο άκρα της γέφυρας Ρίου-Αντιρρίου με σκοπό να τη διασχίσουν.

Στο διάγραμμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση θέσης-χρόνου για κάθε ποδηλάτη.

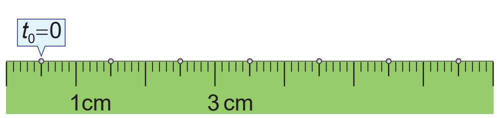


α) Αξιοποιώντας πληροφορίες από το διάγραμμα να προσδιορίσετε το μήκος της γέφυρας, τη χρονική στιγμή της συνάντησης και το διάστημα που διάνυσε κάθε ποδηλάτης μέχρι τη συνάντηση.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα κάθε ποδηλάτη σε m/s και να γράψετε την εξίσωση της θέσης του.

γ) Να υπολογίσετε τη χρονική διάρκεια που απαιτήθηκε, για να διασχίσει τη γέφυρα κάθε ποδηλάτης.

11. Στο σχήμα βλέπετε τα ίχνη σε μια χαρτοταινία που προέκυψαν από μια εργαστηριακή άσκηση μελέτης κίνησης με χρήση χρονομετρητή. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών κουκκίδων είναι 0,01 s.



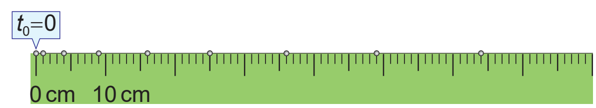
α) Να προσδιορίσετε το είδος της κίνησης.

β) Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών.

t / s	x / cm	Δt / s	Δx / cm	v / cms^{-1}
0				
0,01		$0{,}01 - 0 = 0{,}01$		
0,02		$0{,}02 - 0{,}01 = 0{,}01$		
0,03		$0{,}03 - 0{,}02 = 0{,}01$		
0,04				
0,05				
0,06				

γ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

12. Στο σχήμα βλέπετε τα ίχνη σε μια χαρτοταινία που προέκυψαν από μια εργαστηριακή άσκηση μελέτης της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης χωρίς αρχική ταχύτητα με χρήση χρονομετρητή. Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών κουκκίδων είναι 0,1 s.



α) Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα τιμών (7 στήλες).

t / s	x / cm	Δt / s
0		
0,1		$0{,}1 - 0 = 0{,}1$
0,2		$0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1$
0,3		$0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$
0,4		
0,5		
0,6		

Δx / cm	v / cm·s^{-1}	Δv / cm·s^{-1}	a / cm·s^{-2}

β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων.

γ) Να γράψετε την εξίσωση θέσης και την εξίσωση ταχύτητας του σώματος.

Υπόδειξη

Για τη συμπλήρωση της στήλης της ταχύτητας, να χρησιμοποιήσετε τον τύπο $v = \Delta x / \Delta t$. Αυτό αποτελεί πηγή σφάλματος, καθώς η κίνηση δεν είναι ομαλή, αλλά το σφάλμα είναι αποδεκτό σε σχολικό επίπεδο, καθώς το Δt είναι μικρό σε σχέση με το t.

13. Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται δεδομένα από την προπόνηση του κατόχου του παγκόσμιου ρεκόρ $(9{,}58\ \text{s})$ στα 100 m Τζαμαϊκανού Ολυμπιονίκη Usain Bolt.

t / s	t^2 / s^2	x / m
0,0		0,0
0,5		0,5
1,0		2,0
1,5		4,5
2,0		8,0
2,5		12,5
3,0		18,0
3,5		23,0
4,0		28,0
4,5		33,0
5,0		38,0

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση $x = \mathrm{f}\left(t^2\right)$ για το χρονικό διάστημα $0\ \text{s} - 3\ \text{s}$, εάν γνωρίζετε ότι την $t = 0$ ο αθλητής δεν έχει ταχύτητα.

β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του αθλητή στο χρονικό διάστημα $0\ \text{s} - 3\ \text{s}$.

γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του αθλητή τη χρονική στιγμή $t = 2\ \text{s}$ και τη χρονική στιγμή $t = 4\ \text{s}$.

14. Ένα αυτοκινητάκι κινείται κατά μήκος του x-άξονα και η εξίσωση που περιγράφει τη θέση του είναι:

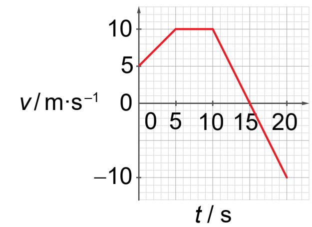
$$x = 30 + 10 \cdot t - 2{,}5 \cdot t^2 \quad (x \text{ σε cm και } t \text{ σε s})$$

α) Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή που το αυτοκινητάκι αλλάζει κατεύθυνση και τη θέση του εκείνη τη στιγμή.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητά του τη στιγμή που θα διέλθει ξανά από την αρχική του θέση.

γ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση ταχύτητας-χρόνου από την $t = 0$ έως την $t = 5\ \text{s}$.

15. Σώμα μικρών διαστάσεων, μάζας $1\ \text{kg}$, κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του προσανατολισμένου άξονα Ox και η τιμή της ταχύτητάς του μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Να θεωρήσετε ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = 0$.



α) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 5\ \text{s}$.

β) Να υπολογίσετε τη μέση αριθμητική ταχύτητα του σώματος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 20\ \text{s}$.

γ) Να προσδιορίσετε το είδος της κίνησης και να υπολογίσετε την τιμή της συνισταμένης δύναμης $\Sigma\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα στα επιμέρους χρονικά διαστήματα:

$$0 \rightarrow 5\ \text{s},\ \ 5\ \text{s} \rightarrow 10\ \text{s},\ \ 10\ \text{s} \rightarrow 15\ \text{s} \ \ \text{και}$$

$$15\ \text{s} \rightarrow 20\ \text{s}$$

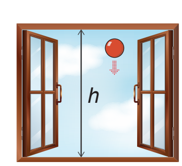
16. Ένα ταχύπλοο σκάφος που κινείται με ταχύτητα $20\ \text{m/s}$ βρίσκεται σε απόσταση 84 m από μια σημαδούρα. Ο οδηγός επιβραδύνει το σκάφος με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $2\ \text{m/s}^2$.

α) Να υπολογίσετε πόσο χρόνο χρειάζεται το σκάφος για να φτάσει τη σημαδούρα.

β) Ποια είναι η ταχύτητα του σκάφους, όταν περνά δίπλα από τη σημαδούρα;

γ) Σε ποια απόσταση από το σημείο που ξεκίνησε η επιβράδυνση θα σταματήσει το σκάφος;

17. Ένα παιδικό παιχνίδι που πέφτει κατακόρυφα χρειάζεται $0{,}4\ \text{s}$ για να περάσει μπροστά από ένα παράθυρο ύψους 2 m. Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα, να υπολογίσετε από ποιο ύψος



από το πάνω τμήμα του παραθύρου αφέθηκε να πέσει το παιχνίδι. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

18. Αφήνετε να πέσει ελεύθερα μια πέτρα στη θάλασσα από την άκρη ενός βράχου. Εάν ακούσετε τον ήχο εισόδου της πέτρας στο νερό 2,1 s αφότου την αφήσατε να πέσει, να υπολογίσετε το ύψος του βράχου. Να θεωρήσετε την αντίσταση του αέρα αμελητέα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα $v = 340\ \text{m/s}$.

19. Ένα ελικόπτερο κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει ταχύτητα μέτρου $9{,}8\ \text{m/s}$, βρίσκεται σε ύψος $4{,}9\ \text{m}$ από το έδαφος και αφήνει ένα δέμα με φαρμακευτικό υλικό. Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα και την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $9{,}8\ \text{m/s}^2$, να υπολογίσετε:

α) το μέγιστο ύψος από το έδαφος στο οποίο θα φτάσει το δέμα,

β) τη χρονική στιγμή που το δέμα θα έχει ταχύτητα μέτρου $9{,}8\ \text{m/s}$ κατεβαίνοντας,

γ) το μέτρο της ταχύτητας του δέματος ακριβώς πριν χτυπήσει στο έδαφος.

20. Να υπολογίσετε σε km/h την ταχύτητα με την οποία θα έφτανε ένας κόκκος χαλαζιού στο έδαφος, αν δεν υπήρχε η αντίσταση του αέρα. Δίνεται $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ και ύψος νεφών 3 km.

21. Από την ταράτσα ενός κτηρίου με ύψος $78{,}4\ \text{m}$ αφήνονται να πέσουν διαδοχικά δύο χαλίκια με διαφορά χρόνου 1 s.

α) Να υπολογίσετε τον χρόνο που απαιτείται για να φτάσει το πρώτο χαλίκι στο έδαφος, καθώς και την ταχύτητα που αποκτά ακριβώς πριν ακουμπήσει στο έδαφος.

β) Να βρείτε το ύψος από το έδαφος που βρίσκεται το δεύτερο χαλίκι, μόλις το πρώτο ακουμπήσει στο έδαφος.

Να θεωρήσετε την αντίσταση του αέρα αμελητέα και την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $9{,}8\ \text{m/s}^2$.

22. Από την ταράτσα ενός κτηρίου ρίχνεται κατακόρυφα προς τα κάτω μια πέτρα με ταχύτητα μέτρου v_0, η οποία φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα μέτρου v. Το ύψος του κτηρίου μετρήθηκε 39,6 m και ο χρόνος καθόδου της πέτρας 2 s. Να υπολογίσετε τα μέτρα v_0 και v των ταχυτήτων. Να θεωρήσετε την αντίσταση του αέρα αμελητέα και την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $9{,}8\ \text{m/s}^2$.

23. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύουμε από ένα σημείο Ο του εδάφους μια μπίλια, κατακόρυφα προς τα πάνω, με ταχύτητα μέτρου $20\ \text{m/s}$.

α) Να προσδιορίσετε τον χρόνο ανόδου της μπίλιας και το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει.

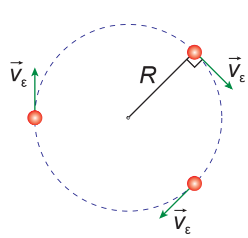
β) Να προσδιορίσετε τον ολικό χρόνο πτήσης της μπίλιας και την ταχύτητα με την οποία αυτή επιστρέφει στο Ο.

γ) Ποιες χρονικές στιγμές η μπίλια βρίσκεται σε ύψος 15 m και ποια η ταχύτητά της τότε;

Να θεωρήσετε την αντίσταση του αέρα αμελητέα και την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $10\ \text{m/s}^2$.

2.5 Περιοδικές κινήσεις – Ομαλή κυκλική κίνηση

1. Ομαλή κυκλική κίνηση



Σχήμα 2.24 Ομαλή κυκλική κίνηση

Στο Γυμνάσιο γνωρίσαμε τις **περιοδικές κινήσεις**. Ονομάζονται έτσι οι κινήσεις που επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα. Παραδείγματα περιοδικών κινήσεων (έστω και προσεγγιστικά) είναι η κίνηση μιας κούνιας, η κίνηση του βαριδιού στο νήμα ενός απλού εκκρεμούς, οι κινήσεις των πλανητών, οι χτύποι της καρδιάς.

Μια ειδική περίπτωση περιοδικής κίνησης είναι η ομαλή κυκλική κίνηση.

Ομαλή κυκλική κίνηση είναι η κίνηση ενός σώματος σε περιφέρεια κύκλου (κυκλική τροχιά) με ταχύτητα σταθερού μέτρου.

Άμεσο αποτέλεσμα του ορισμού είναι ότι το σώμα σε ίσους χρόνους διανύει ίσα τόξα κινούμενο στην κυκλική τροχιά και η ακτίνα, που συνδέει το σώμα με το κέντρο, διαγράφει ίσες επίκεντρες γωνίες, αφού αυτές βαίνουν σε ίσα τόξα.

Η ταχύτητα του σώματος είναι *εφαπτόμενη* σε κάθε σημείο της κυκλικής τροχιάς (**Σχήμα 2.24**)· για αυτόν τον λόγο ονομάζεται **επιτρόχια ταχύτητα** $(\vec{v}_\varepsilon)$.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, όπως και σε κάθε περιοδική κίνηση, ορίζουμε δύο βασικά μεγέθη που εκφράζουν την περιοδικότητα: την περίοδο και τη συχνότητα.

I. Περίοδος

Ο χρόνος για μία πλήρη επανάληψη της κίνησης ονομάζεται **περίοδος** T. Η μονάδα της περιόδου στο SI είναι το 1 s.

II. Συχνότητα

Ο αριθμός των επαναλήψεων της κίνησης στη μονάδα του χρόνου (στο ένα δευτερόλεπτο) ονομάζεται **συχνότητα** f. Επομένως, αν σε χρόνο Δt πραγματοποιούνται N περιφορές, ισχύει:

$$f = \frac{N}{\Delta t}$$

Για μία πλήρη περιφορά ισχύουν $N = 1$ και $\Delta t = T$, οπότε καταλήγουμε στη σχέση μεταξύ συχνότητας και περιόδου:

$$f = \frac{1}{T} \qquad (2.12)$$

Η μονάδα της συχνότητας στο SI είναι το 1 hertz (Hz). Ισχύει:

$$1\,\text{Hz} = 1\,\text{s}^{-1}$$

Παραδείγματα ομαλής κυκλικής κίνησης

- Η κίνηση των άκρων των δεικτών του ρολογιού.
- Η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο (προσεγγιστικά).
- Η κίνηση της Σελήνης γύρω από τη Γη (προσεγγιστικά).

Οι αναπαραστάσεις της ταχύτητας

Περιφορά Γης και Σελήνης

- Η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο έχει περίοδο 365,256 ημέρες.
- Η κίνηση της Σελήνης γύρω από τη Γη έχει περίοδο 27,32 ημέρες.

Συχνότητα περιστροφής ηλεκτροκινητήρα

Περιφορά ηλεκτρονίου

Το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου (στο Πρότυπο του Bohr) περιφέρεται γύρω από τον πυρήνα 6,6 τετράκις εκατομμύρια φορές το δευτερόλεπτο. Αυτό σημαίνει ότι $f = 6{,}6 \cdot 10^{15}\,\text{Hz}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.5

1. Μια αρσενική μέλισσα πετάει συνεχώς κυκλικά γύρω από την κυψέλη της, περιμένοντας την έξοδο της βασίλισσας μέλισσας (συνήθης συμπεριφορά των αρσενικών μελισσών). Αν η μέλισσα εκτελεί έναν κύκλο κάθε 0,2 s, να υπολογίσετε τη συχνότητα της κίνησής της.

Λύση

Από την εκφώνηση προκύπτει $T = 0{,}2$ s. Από την **εξίσωση 2.12** έχουμε:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}2\,\text{s}} = 5\,\text{Hz}$$

Στη συνέχεια, θα αξιοποιήσουμε τον ορισμό της ομαλής κυκλικής κίνησης, καθώς και τα δύο βασικά περιοδικά μεγέθη και θα μελετήσουμε την κίνηση αυτήν με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο θα εστιάσουμε στο τόξο που διαγράφει το σώμα, ενώ στον δεύτερο θα εστιάσουμε στην επίκεντρη γωνία που βαίνει σε αυτό το τόξο.

Το ακτίνιο

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε τον τύπο που μετρά μια γωνία σε *ακτίνια* (rad):

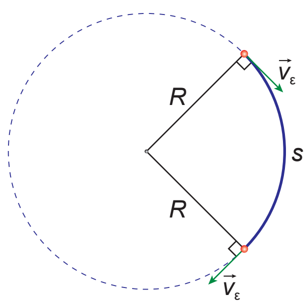
$$\theta = \frac{s}{R}$$

όπου s το μήκος του τόξου και R η ακτίνα του κύκλου.

I. Μετρώντας το τόξο

Στην ομαλή κυκλική κίνηση σε ίσους χρόνους διανύονται ίσα τόξα. Έτσι, σε αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, το μέτρο $v_ε$ της επιτρόχιας ταχύτητας είναι σταθερό και δίνεται από τον τύπο:

$$v_ε = \frac{s}{t} \qquad (2.13)$$



Σχήμα 2.25 Ορισμός επιτρόχιας ταχύτητας

Για μία πλήρη περιφορά ισχύουν $s = 2πR$ και $t = T$, οπότε ο **τύπος 2.13** γίνεται:

$$v_ε = \frac{2πR}{T} \qquad (2.14)$$

II. Μετρώντας την επίκεντρη γωνία

Αφού σε ίσους χρόνους διανύονται ίσα τόξα, θα διαγράφονται ίσες επίκεντρες γωνίες. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε μια καινούργια ταχύτητα που ονομάζεται **γωνιακή ταχύτητα** και συμβολίζεται με $ω$.

Πείραμα στην ομαλή κυκλική κίνηση

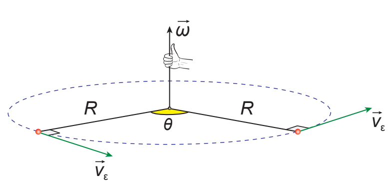
Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$ω = \frac{θ}{t} \qquad (2.15)$$

με μονάδα μέτρησης στο SI το 1 rad/s.

Για μία πλήρη περιφορά ισχύουν $θ = 2π$ και $t = T$, οπότε ο **τύπος 2.15** γίνεται:

$$ω = \frac{2π}{T} \qquad (2.16)$$



Σχήμα 2.26 Ορισμός γωνιακής ταχύτητας

Η γωνιακή ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος. Το διάνυσμά της είναι κάθετο στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς με αφετηρία το κέντρο της και με κατεύθυνση που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Αυτό σημαίνει πως για περιφορά αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού, το διάνυσμα $\vec{ω}$ κατευθύνεται προς τα «πάνω», όπως στο **σχήμα 2.26**, ενώ για περιφορά σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού, το $\vec{ω}$ κατευθύνεται προς τα «κάτω».

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το διάνυσμα $\vec{ω}$ είναι σταθερό.

Η διατύπωση αυτή αποτελεί έναν ισοδύναμο ορισμό της ομαλής κυκλικής κίνησης και αιτιολογεί τον χαρακτηρισμό «ομαλή».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.5

2. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που κινείται σε κυκλική τροχιά με περίοδο 10,0 s.

Λύση

Είναι $T = 10{,}0$ s.

Από την **εξίσωση 2.16** έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10{,}0}\frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 0{,}628 \text{ rad/s}$$

3. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ενός σώματος που κινείται σε κυκλική τροχιά με συχνότητα $3{,}0$ Hz.

Λύση

Είναι $f = 3{,}0$ Hz.

Από την **εξίσωση 2.12** υπολογίζουμε την περίοδο της κίνησης:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ή} \quad 3{,}0 \text{ Hz} = \frac{1}{T} \quad \text{ή} \quad T = \frac{1}{3}\text{ s}$$

Από την **εξίσωση 2.16** έχουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(1/3)}\frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 19 \text{ rad/s}$$

4. Η Γη κάνει μία περιφορά γύρω από τον Ήλιο σε 1 έτος. Η τροχιά της είναι κατά προσέγγιση κυκλική και έχει ακτίνα $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.
Να υπολογίσετε την επιτρόχια ταχύτητα της Γης.

Λύση

Η περίοδος για την περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι:

$$\begin{aligned} T &= 1 \text{ y} \\ &= 365{,}25 \text{ d} \\ &= 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} \\ &= 3{,}1558 \cdot 10^7 \text{ s} \end{aligned}$$

Η ακτίνα της τροχιάς είναι $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

Από την **εξίσωση 2.14** έχουμε:

$$v_\varepsilon = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\left(1{,}5 \cdot 10^{11}\text{ m}\right)}{3{,}1558 \cdot 10^7 \text{ s}} \approx 3{,}0 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

III. Η σχέση μεταξύ των μέτρων των ταχυτήτων v_ε και ω

Έχουμε:

$$\theta = \frac{s}{R} \quad \text{ή} \quad s = R\theta \quad \text{ή} \quad \frac{s}{t} = \frac{\theta}{t} \cdot R$$

Άρα:

$$v_\varepsilon = \omega \cdot R \qquad \textbf{(2.17)}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να προκύψει και από τον συνδυασμό των **σχέσεων 2.14** και **2.16**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.5

5. Οι μεγάλοι δίσκοι μουσικής βινυλίου κάνουν $33\frac{1}{3}$ στροφές σε ένα λεπτό, ενώ έχουν διάμετρο 12,0 ίντσες. Μία ίντσα είναι ίση με $2{,}54$ cm.
Να υπολογίσετε:

α) την περίοδο ενός τέτοιου δίσκου,

β) τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ενός τέτοιου δίσκου,

γ) την επιτρόχια ταχύτητα ενός σημείου στην περιφέρεια του δίσκου.

Λύση

α) Αφού ο δίσκος κάνει $33\frac{1}{3}=\frac{100}{3}$ στροφές σε ένα λεπτό, θα κάνει μία στροφή σε χρόνο:

$$T=\frac{60\ \text{s}}{\frac{100}{3}}=1{,}80\ \text{s}$$

Δίσκος βινυλίου

β) Η γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{1{,}80}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\approx 3{,}49\ \text{rad/s}$$

γ) Ένα σημείο στην περιφέρεια του δίσκου απέχει από το κέντρο απόσταση ίση με την ακτίνα R του δίσκου. Η ακτίνα του δίσκου είναι ίση με το μισό της διαμέτρου. Άρα:

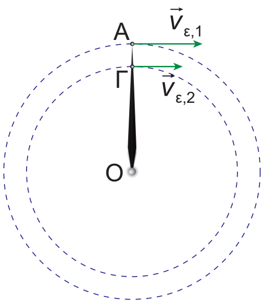
$$R=\frac{12}{2}\cdot 2{,}54\ \text{cm}=0{,}152\ \text{m}$$

Η επιτρόχια ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_\varepsilon=\omega R$$

$$=\left(3{,}49\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(0{,}152\ \text{m})\approx 0{,}530\ \text{m/s}$$

IV. Η σχέση μεταξύ υ_ε και ω σε άκαμπτα εκτεταμένα σώματα



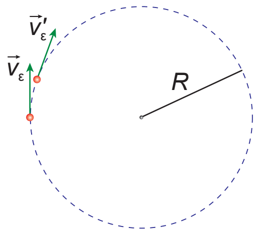
Σχήμα 2.27 Δύο σημεία Α, Γ στον λεπτοδείκτη ενός ρολογιού

Θεωρούμε την περιστροφή ενός άκαμπτου σώματος γύρω από σταθερό άξονα. Ας πάρουμε ως παράδειγμα άκαμπτου εκτεταμένου σώματος τον λεπτοδείκτη ενός ρολογιού (**Σχήμα 2.27**). Το άκρο Α του δείκτη εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο 1 h, ακτίνα τροχιάς R_1, γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1 και επιτρόχια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{\varepsilon,1}$. Ένα άλλο σημείο Γ του δείκτη θα εκτελεί επίσης ομαλή κυκλική κίνηση με την ίδια περίοδο, μικρότερη ακτίνα R_2, γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_2 και επιτρόχια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{\varepsilon,2}$. Επειδή τα σημεία Α, Γ έχουν την ίδια περίοδο, από τη **σχέση 2.16** προκύπτει ότι θα έχουν ίσες γωνιακές ταχύτητες. Άρα, για τα μέτρα τους θα ισχύει $\omega_1=\omega_2$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και από τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας, αν σκεφτούμε ότι τα Α, Γ σε ίσους χρόνους διανύουν ίσα τόξα, οπότε οι ακτίνες ΟΑ, ΟΓ διαγράφουν ίσες επίκεντρες γωνίες.

Τα Α, Γ δεν θα έχουν το ίδιο μέτρο επιτρόχιας ταχύτητας, αφού οι ακτίνες είναι διαφορετικές. Τα σημεία με τη μεγαλύτερη ακτίνα τροχιάς θα έχουν και μεγαλύτερη επιτρόχια ταχύτητα. Πράγματι, επειδή $\omega_1=\omega_2$, έχουμε:

$$\frac{\upsilon_{\varepsilon,1}}{R_1}=\frac{\upsilon_{\varepsilon,2}}{R_2}\quad \text{ή}\quad \frac{\upsilon_{\varepsilon,1}}{\upsilon_{\varepsilon,2}}=\frac{R_1}{R_2}$$

2. Κεντρομόλος επιτάχυνση



Σχήμα 2.28 Η μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση

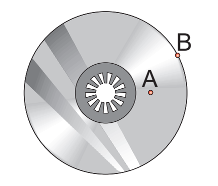
Αν μελετήσουμε προσεκτικά την ομαλή κυκλική κίνηση, θα διαπιστώσουμε ότι είναι κίνηση *μεταβαλλόμενη*! Και αυτό γιατί, καθώς η κατεύθυνση της ταχύτητας μεταβάλλεται, η ταχύτητα (ως διάνυσμα) θα μεταβάλλεται (**Σχήμα 2.28**). Αφού το διάνυσμα της ταχύτητας μεταβάλλεται, θα υπάρχει επιτάχυνση. Αποδεικνύεται ότι η επιτάχυνση έχει διεύθυνση την ακτίνα και φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Για τον λόγο αυτόν ονομάζεται **κεντρομόλος επιτάχυνση**.

Το μέτρο της δίνεται από τη σχέση:

$$a_\kappa = \frac{v_\varepsilon^2}{R} \qquad (2.18)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.5

6. Στο σχήμα φαίνεται ένα CD και δύο σημεία του A και B. Το A βρίσκεται στο μέσο μιας ακτίνας και το B στην περιφέρεια. Αν το CD περιστρέφεται, να υπολογίσετε τον λόγο των επιτρόχιων ταχυτήτων και τον λόγο των κεντρομόλων επιταχύνσεων των σημείων A και B.



Δύο σημεία A, B ενός CD

Λύση

Τα σημεία A και B έχουν την ίδια περίοδο. Συνεπώς, από τη σχέση $\omega = \frac{2\pi}{T}$ προκύπτει ότι θα έχουν και την ίδια γωνιακή ταχύτητα, οπότε $\omega_A = \omega_B$. Άρα:

$$\frac{v_{\varepsilon,A}}{R_A} = \frac{v_{\varepsilon,B}}{R_B} \quad \text{ή} \quad \frac{v_{\varepsilon,A}}{v_{\varepsilon,B}} = \frac{R_A}{R_B} \quad \text{ή} \quad \frac{v_{\varepsilon,A}}{v_{\varepsilon,B}} = \frac{1}{2}$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση του A είναι:

$$a_{\kappa,A} = \frac{v_{\varepsilon,A}^2}{R_A} = \frac{\omega_A^2 R_A^2}{R_A} = \omega_A^2 R_A$$

Ομοίως, η κεντρομόλος επιτάχυνση του B είναι:

$$a_{\kappa,B} = \omega_B^2 R_B$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις τελευταίες δύο σχέσεις και δεδομένου ότι $\omega_A = \omega_B$ και $R_B = 2R_A$ βρίσκουμε τελικά:

$$\frac{a_{\kappa,A}}{a_{\kappa,B}} = \frac{1}{2}$$

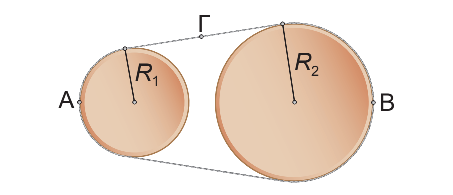
7. Ένας τροχός ακτίνας $R_1 = 0,2\ \text{m}$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 10\ \text{rad/s}$ και είναι συνδεδεμένος μέσω ιμάντα με δεύτερο τροχό ακτίνας $R_2 = 0,5\ \text{m}$.

Να βρείτε:

α) το μέτρο της ταχύτητας των σημείων A, B, Γ του ιμάντα,

β) τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δεύτερου τροχού,

γ) το μέτρο της επιτάχυνσης των σημείων A, B, Γ.



Δύο τροχοί συνδεδεμένοι με ιμάντα

Λύση

α) Η επιτρόχια ταχύτητα του A έχει μέτρο:

$$v_A = \omega_1 R_1 = \left(10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(0,2\ \text{m}) = 2\ \text{m/s}$$

Αν σε χρόνο t το A διαγράφει τόξο s, το ίδιο τόξο διαγράφει και το B. Στον ίδιο χρόνο, θα μετατοπιστεί και το Γ κατά s. Άρα, τα σημεία A, Γ, B έχουν την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα. Έτσι:

$$v_A = v_B = v_\Gamma = 2\ \text{m/s}$$

β) Έχουμε:

$$v_B = \omega_2 R_2 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \frac{v_B}{R_2} = \frac{2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,5\ \text{m}} = 4\ \text{rad/s}$$

γ) Το Γ κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. Άρα $a_\Gamma = 0$.

Τα A, B εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση. Άρα, έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$a_A = \frac{v_A^2}{R_1} = \frac{\left(2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,2\ \text{m}} = 20\ \text{m/s}^2$$

$$a_B = \frac{v_B^2}{R_2} = \frac{\left(2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,5\ \text{m}} = 8\ \text{m/s}^2$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρόμοια με το σύστημα των τροχών με ιμάντα αντιμετωπίζουμε και το σύστημα των οδοντωτών τροχών που συνδέονται με αλυσίδα. Για παράδειγμα, στο ποδήλατο ο οδοντωτός τροχός του πεντάλ συνδέεται με τον οδοντωτό τροχό της πίσω ρόδας με αλυσίδα (βλ. ερώτηση 5).

8. Με βάση το παράδειγμα 4 να υπολογίσετε την κεντρομόλο επιτάχυνση της Γης, καθώς περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο. Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την επιτάχυνση της βαρύτητας g.

Λύση

Στο παράδειγμα 4 βρήκαμε πως το μέτρο της επιτρόχιας ταχύτητας για την κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι $v = 3{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s}$, ενώ με βάση την εκφώνηση η ακτίνα της τροχιάς είναι $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$. Από την **εξίσωση 2.18** έχουμε:

$$a_\kappa = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(3{,}0 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}} = 0{,}0060\ \mathrm{m/s^2}$$

Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\left(g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}\right)$ είναι $\dfrac{9{,}8}{0{,}0060} \approx 1.600$ φορές μεγαλύτερη από την κεντρομόλο επιτάχυνση της Γης, καθώς αυτή περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο. Αυτή είναι η αιτία για την οποία δεν αντιλαμβανόμαστε άμεσα την περιφορά της Γης γύρω από τον Ήλιο σε καθημερινά φαινόμενα.

3. Κεντρομόλος δύναμη

Αφού στην ομαλή κυκλική κίνηση υπάρχει επιτάχυνση, σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα θα υπάρχει και δύναμη η οποία ονομάζεται **κεντρομόλος δύναμη** $\vec{F}_\kappa$. Τα διανύσματα της κεντρομόλου επιτάχυνσης και της κεντρομόλου δύναμης έχουν την ίδια κατεύθυνση (**Σχήμα 2.29**).

Η κεντρομόλος δύναμη είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα στη διεύθυνση της ακτίνας και έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου, οπότε δεν πρόκειται για νέα δύναμη. Κάποια/ες από τις γνωστές δυνάμεις που ήδη δρουν στο σώμα αναλαμβάνει/ουν αυτόν τον ρόλο:

$$\Sigma F_{\text{στη διέθυνση της ακτίνας}} = F_\kappa$$

Ο τύπος που δίνει το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης είναι ο εξής:

$$F_\kappa = \frac{m v_\varepsilon^2}{R} \qquad \text{(2.19)}$$

Ανάλογα με την κίνηση, διάφορες δυνάμεις παίζουν τον ρόλο κεντρομόλου δύναμης:

- η τριβή για αυτοκίνητο που στρίβει σε οριζόντιο δρόμο,
- η βαρυτική έλξη για τη Σελήνη που περιφέρεται γύρω από τη Γη,
- η βαρυτική έλξη για τη Γη που περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο.

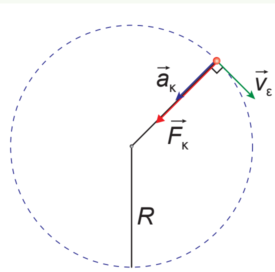
Απόδειξη

Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα για έναν άξονα, έστω τον x-άξονα, γράφεται:

$$\Sigma F_x = m a_x$$

Η κεντρομόλος δύναμη είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα στη διεύθυνση της ακτίνας και έχει φορά προς το κέντρο του κύκλου σε κάθε περίπτωση. Επομένως:

$$\Sigma F_{\text{στη διέθυνση της ακτίνας}} = F_\kappa = m a_\kappa = \frac{m v_\varepsilon^2}{R}$$



Σχήμα 2.29 Κεντρομόλος επιτάχυνση και κεντρομόλος δύναμη

4. Φυσικοί και τεχνητοί δορυφόροι

Με αφορμή το τελευταίο παράδειγμα της προηγούμενης υποενότητας, μπορεί να αναρωτηθούμε το εξής: Αφού η βαρυτική δύναμη από τον Ήλιο προς τη Γη είναι ελκτική (**Σχήμα 2.30**), γιατί η Γη δεν πέφτει προς τον Ήλιο και κινείται σχεδόν κυκλικά γύρω από αυτόν;

Η Γη θα έπεφτε πράγματι προς τον Ήλιο, αν δεν είχε επιτρόχια ταχύτητα που είναι περίπου $3{,}0 \times 10^4\ m/s$, όπως υπολογίσαμε στο παράδειγμα 4.

Από την άλλη, αν εξαφανιζόταν η βαρυτική έλξη του Ήλιου, η Γη θα συνέχιζε να κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά (1ος Νόμος Νεύτωνα) και εφαπτομενικά από εκείνο το σημείο της κυκλικής της τροχιάς όπου βρισκόταν όταν μηδενίστηκε η βαρυτική έλξη.

Η Γη έχει ακριβώς την ταχύτητα που απαιτείται, ώστε η πτώση της προς τον Ήλιο σε συνδυασμό με την ευθύγραμμη κίνηση που θα έκανε χωρίς την έλξη του, να συντίθενται στην κυκλική τροχιά. Ουσιαστικά, πέφτει διαρκώς προς τον Ήλιο, αλλά η καμπύλη τροχιά αποτρέπει την προσέγγισή της σε αυτόν.

Αν η ταχύτητα της Γης ήταν πολύ μεγαλύτερη, θα κινδύνευε να ξεφύγει τελείως από την έλξη του Ήλιου.

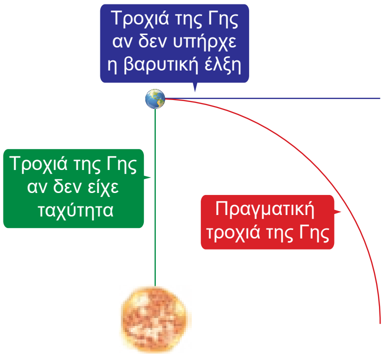
Αντιθέτως, αν η ταχύτητα της Γης ήταν πολύ μικρότερη, θα κινδύνευε πράγματι να πέσει στον Ήλιο.

Η Γη και ολόκληρο το ηλιακό μας σύστημα, όπως πιστεύουμε, δημιουργήθηκαν από έναν περιστρεφόμενο δίσκο αερίων και σκόνης. Αυτό εξασφάλισε στη Γη την απαιτούμενη ταχύτητα, για να επιτευχθεί κυκλική τροχιά. Σε γενικές γραμμές, όσα τμήματα του δίσκου δεν είχαν την κατάλληλη ταχύτητα έπεσαν στον Ήλιο ή κινήθηκαν έξω από τον χώρο που θα γινόταν το ηλιακό σύστημα, ενώ τα υπόλοιπα συμπυκνώθηκαν κυρίως σε πλανήτες όπως η Γη (**Εικόνα 2.10**).

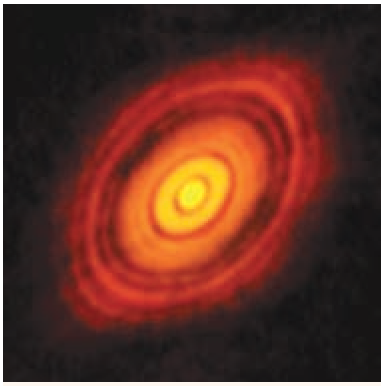
Ανάλογη περιγραφή μπορούμε να κάνουμε για την επιτρόχια ταχύτητα με την οποία περιφέρεται η Σελήνη γύρω από τη Γη, αλλά και για κάθε ουράνιο σώμα που περιφέρεται γύρω από ένα άλλο ουράνιο σώμα μεγαλύτερης μάζας. Κάθε τέτοιο σώμα αποτελεί έναν **φυσικό δορυφόρο**.

Οι φυσικοί δορυφόροι δεν κινούνται συνήθως σε τέλειες κυκλικές τροχιές, αλλά σε *ελλειπτικές* τροχιές (**Εικόνα 2.11**).

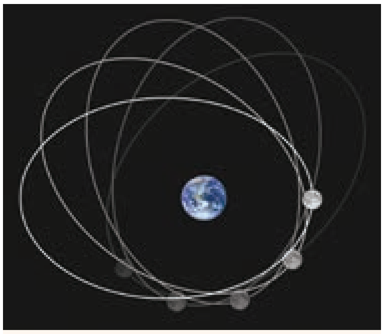
Σε τροχιά γύρω από τη Γη υπάρχουν αυτήν τη στιγμή χιλιάδες **τεχνητοί δορυφόροι**. Καθένας από αυτούς εκτοξεύτηκε με τη βοήθεια κάποιου πυραύλου. Στο κατάλληλο ύψος από την επιφάνεια της Γης δόθηκε στον δορυφόρο η αναγκαία ταχύτητα (τόσο σε κατεύθυνση όσο και σε μέτρο), ώστε να μπορέσει η βαρυτική δύναμη της Γης να παίξει τον ρόλο κεντρομόλου (όπως ακριβώς στην περίπτωση της Γης γύρω από τον Ήλιο) (βλ. παράδειγμα 9). Σήμερα,



Σχήμα 2.30 Γιατί η Γη δεν πέφτει στον Ήλιο.



Εικόνα 2.10 Αρχικός δίσκος αερίων και σκόνης HL Tauri από τον οποίο δημιουργείται σήμερα ένα νέο ηλιακό σύστημα με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που δημιουργήθηκε το δικό μας ηλιακό σύστημα. © Ralph Bennett – ALMA Obs.

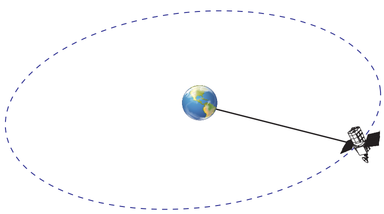


Εικόνα 2.11 Η τροχιά της Σελήνης (φυσικός δορυφόρος της Γης) γύρω από τη Γη. Η εικόνα δεν είναι υπό κλίμακα. Κάθε περιφορά αντιστοιχεί σε έλλειψη διαφορετική από την προηγούμενη. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **μετάπτωση**.

αυτή είναι μια διαδικασία ρουτίνας με εκατοντάδες δορυφόρους να τίθενται σε τροχιά κάθε χρόνο, αλλά τεχνικά είναι πολύπλοκη και δύσκολη. Από τη στιγμή που ένας δορυφόρος τίθεται σε τροχιά, δεν χρειάζεται καύσιμα και μηχανή, αλλά μόνο την επίδραση της βαρύτητας για να κινείται.

Οι τεχνητοί δορυφόροι προορίζονται για ποικίλες χρήσεις:

- Τηλεπικοινωνίες
- Κατασκοπεία άλλων χωρών
- Μετάδοση τηλεοπτικού σήματος
- Μετεωρολογικές παρατηρήσεις
- Επιστημονική έρευνα
- Παρατήρηση του διαστήματος χωρίς την παρεμβολή της ατμόσφαιρας
- Συστήματα προσδιορισμού θέσης (όπως το αμερικάνικο GPS, αλλά και τα GLONASS, Beidou, Galileo) με βάση τα οποία λειτουργούν εφαρμογές όπως το Google Maps



Σχήμα 2.31 Ένας γεωστατικός δορυφόρος έχει ίδια περίοδο με τη Γη και βρίσκεται συνεχώς απέναντι (πάνω) από το ίδιο σημείο του Ισημερινού.

Μια ιδιαίτερη κατηγορία τεχνητών δορυφόρων είναι οι **γεωστατικοί**. Οι δορυφόροι αυτοί βρίσκονται πάντα πάνω από το ίδιο σημείο της επιφάνειας της Γης (**Σχήμα 2.31**). Αυτό είναι κάτι που μπορεί να επιτευχθεί μόνο υπό τις εξής προϋποθέσεις:

1. Ο δορυφόρος έχει περίοδο κυκλικής κίνησης γύρω από το κέντρο της Γης ίση με την περίοδο περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της, δηλαδή 24 ώρες, οπότε αυτός και η Γη κινούνται συγχρονισμένα.
2. Ο δορυφόρος περιφέρεται σε επίπεδο ίδιο με αυτό του Ισημερινού της Γης.

Όταν ικανοποιείται μόνο η πρώτη προϋπόθεση, ο δορυφόρος ονομάζεται **γεωσύγχρονος**.

Οι γεωστατικοί δορυφόροι κινούνται σε κυκλική τροχιά ακτίνας 42.164 km (35.786 km από την επιφάνεια της Γης), με επιτρόχια ταχύτητα περίπου 3,07 km/s. Αυτοί οι περιορισμοί έχουν οδηγήσει σε διαμάχες ανάμεσα σε χώρες, αφού ο αριθμός των δορυφόρων που μπορούν να συνυπάρξουν με ασφάλεια σε αυτήν την τροχιά είναι περιορισμένος.

Οπτική επαφή

- Ο γεωστατικός δορυφόρος μπορεί να βρίσκεται σταθερά μόνο πάνω από σημείο του Ισημερινού, όπως φαίνεται από τις παραπάνω προϋποθέσεις. Επειδή όμως βρίσκεται πολύ μακριά από τη Γη, είναι ορατός σχεδόν από ένα ολόκληρο ημισφαίριο.
- Το πλεονέκτημα των γεωστατικών δορυφόρων είναι πως, αφού ακολουθούν την περιστροφή της Γης, από τη στιγμή που μια κεραία εδάφους στοχεύσει σε έναν τέτοιον δορυφόρο, δεν πρόκειται να χάσει την οπτική επαφή μαζί του και θα λαμβάνει το σήμα από αυτόν διαρκώς.

Οι περισσότεροι δορυφόροι δεν είναι σε γεωστατική τροχιά, αλλά σε τροχιές πολύ μικρότερου ύψους από την επιφάνεια της Γης, ξεκινώντας περίπου από τα 200 km. Για εφαρμογές τηλεπικοινωνιών (όπως το δορυφορικό ίντερνετ, αλλά και το GPS) από δορυφόρους σε αυτό το ύψος, χρειάζονται πάρα πολλοί από τους τελευταίους, γιατί κινούνται πολύ γρήγορα και καμία κεραία στο έδαφος δεν μπορεί να παρακολουθήσει μόνο έναν (**Εικόνα 2.12**). Το GPS χρειάζεται τουλάχιστον 24 δορυφόρους, ενώ συστήματα παροχής δορυφορικού διαδικτύου (internet) όπως το Starlink της εταιρίας SpaceX χρειάζονται δεκάδες χιλιάδες δορυφόρους.

Εικόνα 2.12 Επίγειος σταθμός λήψης τηλεπικοινωνιακού δορυφόρου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 2.5

9. Η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο με επιτρόχια ταχύτητα $3{,}0 \cdot 10^4\ \text{m/s}$ σε κύκλο ακτίνας $1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}$. Η μάζα της Γης είναι $6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$.

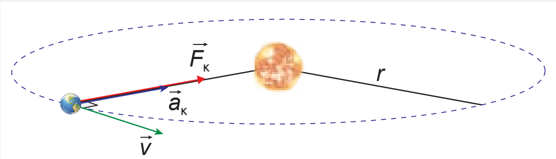
α) Να σχεδιάσετε την κεντρομόλο επιτάχυνση και την επιτρόχια ταχύτητα της Γης, καθώς και την κεντρομόλο δύναμη που δέχεται η Γη.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης.

γ) Να υπολογίσετε τη βαρυτική δύναμη που ασκεί ο Ήλιος στη Γη.

Λύση

α) Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται τα διανύσματα της κεντρομόλου επιτάχυνσης, της κεντρομόλου δύναμης και της επιτρόχιας ταχύτητας.



Η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η δύναμη, καθώς η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο.

β) Δίνονται: $v_\varepsilon = 3{,}0 \cdot 10^4\ \text{m/s}$, $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}$, $m = 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$, οπότε από την **εξίσωση 2.19** έχουμε:

$$F_\kappa = \frac{m v_\varepsilon^2}{r}$$

$$= \frac{\left(6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}\right)\left(3 \cdot 10^4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}} = 3{,}6 \cdot 10^{22}\ \text{N}$$

γ) Η κεντρομόλος δύναμη είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη Γη. Η μόνη δύναμη όμως που ασκείται στη Γη είναι η βαρυτική έλξη από τον Ήλιο. Συνεπώς, η βαρυτική δύναμη από τον Ήλιο στη Γη είναι ίση με $3{,}6 \cdot 10^{22}\ \text{N}$.

10. Ένας τεχνητός δορυφόρος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από τη Γη. Να βρείτε τις σχέσεις υπολογισμού της επιτρόχιας ταχύτητας και της περιόδου του δορυφόρου συναρτήσει της σταθεράς G, της μάζας M της Γης και της ακτίνας της τροχιάς r.

Λύση

Αν m είναι η μάζα του δορυφόρου και F η δύναμη με την οποία η Γη τον έλκει, ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης γράφεται:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Η δύναμη F παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης που συγκρατεί τον δορυφόρο στην τροχιά του. Άρα:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v_\varepsilon^2}{r} \quad \text{ή} \quad v_\varepsilon = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Από τη σχέση ταχύτητας-περιόδου στην ομαλή κυκλική κίνηση έχουμε:

$$T = \frac{2\pi r}{v_\varepsilon}$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, μετά τις πράξεις βρίσκουμε τελικά:

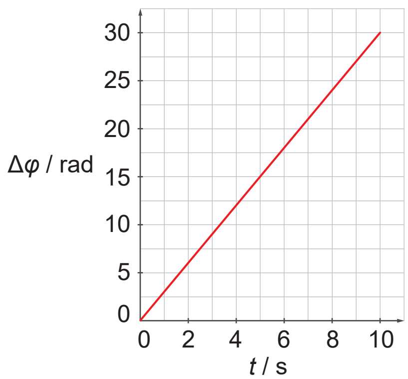
$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Να δώσετε ένα παράδειγμα όπου ένα σώμα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου και η επιτάχυνσή του είναι μηδενική και ένα παράδειγμα που ένα σώμα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου και η επιτάχυνσή του είναι μη μηδενική. Υπάρχει καμπυλόγραμμη κίνηση στην οποία η επιτάχυνση να είναι μηδενική;

2. Ένας τροχός με διάμετρο 1 m περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό του που περνά από το κέντρο του. Δίνεται το διάγραμμα της γωνίας $\Delta\varphi$ που διαγράφει μια ακτίνα του τροχού σε συνάρτηση με τον χρόνο.



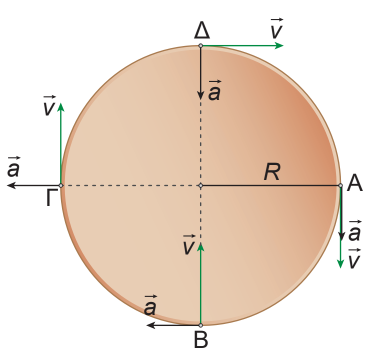
α) Με βάση το διάγραμμα, να εξηγήσετε γιατί κάθε σημείο του τροχού εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις τιμές των μεγεθών: γωνιακή ταχύτητα, συχνότητα, περίοδος, επιτρόχιος ταχύτητα και κεντρομόλος επιτάχυνση, για ένα σημείο της περιφέρειας του τροχού.

$\omega\,/\,rad{\cdot}s^{-1}$	$f\,/\,Hz$	$T\,/\,s$	$v_\varepsilon\,/\,m{\cdot}s^{-1}$	$a_\kappa\,/\,m{\cdot}s^{-2}$

3. **α)** Στο σχήμα 1 τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση. Η Αγγελική (Α), ο Βασίλης (Β), η Γεωργία (Γ) και ο Δημήτρης (Δ) σχεδίασαν τα διανύσματα της επιτρόχιας ταχύτητας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης.

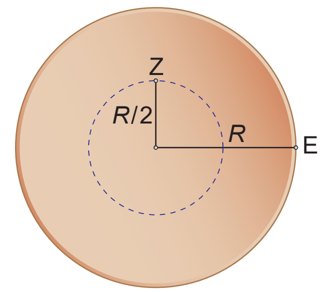
Να εξηγήσετε ποιος μαθητής σχεδίασε σωστά τα διανύσματα.



Σχήμα 1

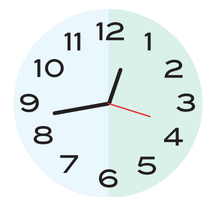
β) Στο σχήμα 2 το σημείο Ε της περιφέρειας του δίσκου και το σημείο Ζ εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση.

Να σχεδιάσετε τα διανύσματα της επιτρόχιας ταχύτητας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης στα Ζ και Ε επιλέγοντας κατάλληλη κλίμακα.



Σχήμα 2

4. Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού έχει διπλάσιο μήκος από τον ωροδείκτη.

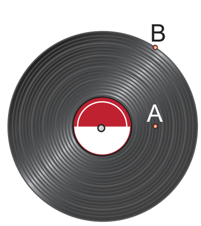


Να υπολογίσετε τον λόγο των μέτρων των επιτρόχιων ταχυτήτων των άκρων τους.

5. Στην εικόνα φαίνεται ένα τμήμα ποδηλάτου. Συγκεκριμένα, φαίνεται ο οδοντωτός δίσκος του πεντάλ μέσα από τον οποίο

περνά η αλυσίδα, συνδέοντάς τον με τον μικρότερο οδοντωτό δίσκο που βρίσκεται στον πίσω τροχό. Ο οδοντωτός δίσκος του πεντάλ έχει τριπλάσια ακτίνα από τον αντίστοιχο δίσκο του πίσω τροχού. Θεωρούμε ένα σημείο Α στην περιφέρεια του μεγαλύτερου δίσκου και ένα σημείο Β στην περιφέρεια του μικρότερου δίσκου από τους οποίους περνά η αλυσίδα. Όταν κινείται το ποδήλατο με σταθερή ταχύτητα, να εξηγήσετε γιατί τα σημεία Α και Β εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση ως προς τον ποδηλάτη. Να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιακών ταχυτήτων και των κεντρομόλων επιταχύνσεων της ομαλής κυκλικής κίνησης των σημείων Α και Β ως προς τον ποδηλάτη.

6. Ο δίσκος βινυλίου είναι ένα είδος φωνογραφικού αποθηκευτικού υλικού που χρησιμεύει ως μέσο αποθήκευσης και αναπαραγωγής αναλογικού ήχου. Ένας τέτοιος φαίνε-



ται στην εικόνα και περιστρέφεται με συχνότητα 33 στροφές ανά λεπτό. Να συγκρίνετε για ένα σημείο της περιφέρειάς του (σημείο Β) και για ένα εσωτερικό σημείο (σημείο Α):

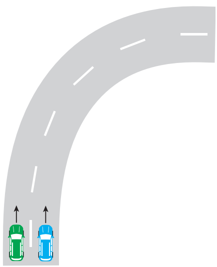
α) τις επιτρόχιες ταχύτητες,

β) τις γωνιακές ταχύτητες,

γ) τις κεντρομόλους επιταχύνσεις.

7. Ένας άνθρωπος βρίσκεται στον Ισημερινό και ζυγίζεται πατώντας πάνω σε μια ζυγαριά. Ως γνωστόν η ζυγαριά αναγράφει την τιμή της αντίδρασης που ασκεί η ίδια. Λαμβάνοντας υπόψη την περιστροφή της Γης, η ζυγαριά δείχνει την ίδια ένδειξη στην υποθετική περίπτωση που η Γη ήταν ακίνητη; Αν όχι, σε ποια περίπτωση η ένδειξη της ζυγαριάς είναι μεγαλύτερη;

8. Τα αυτοκίνητα της εικόνας κινούνται με ταχύτητα ίδιου μέτρου σε έναν επίπεδο και ολισθηρό δρόμο. Να εξηγήσετε ποιο από τα δύο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να εκτραπεί από τον δρόμο, το πράσινο που θα πάρει ανοιχτά τη στροφή ή το μπλε που θα την πάρει κλειστά;



9. Ένα αγωνιστικό αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο δρόμο και παίρνει μια στροφή η οποία είναι πρακτικά τόξο κύκλου. Να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα και να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο αυτοκίνητο. Να εξηγήσετε γιατί, όταν η ταχύτητα είναι πολύ μεγάλη, το αυτοκίνητο κινδυνεύει να εκτραπεί από τον δρόμο.

10. Ο **3ος Νόμος του Kepler** διατυπώνεται ως εξής: «Αν T είναι ο χρόνος μια πλήρους περιφοράς ενός πλανήτη γύρω από τον Ήλιο και R το μήκος του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς του, τότε τα ποσά T^2 και R^3 είναι ανάλογα». Θεωρώντας την κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο ομαλή κυκλική και λαμβάνοντας υπόψη ότι η δύναμη της βαρύτητας παίζει τον ρόλο κεντρομόλου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{σταθ.}$$

11. Ένας αστροναύτης βρίσκεται σε έναν διαστημικό σταθμό που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από τη Γη. Να εξηγήσετε γιατί:

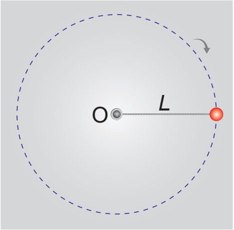
α) η κεντρομόλος επιτάχυνση του συστήματος σταθμός-αστροναύτης είναι ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας στο ύψος της περιφοράς του διαστημικού σταθμού,

β) αν ο αστροναύτης σταθεί σε ζυγαριά, η ένδειξή της θα είναι μηδέν, δηλαδή έχουμε **συνθήκες έλλειψης βαρύτητας** στον διαστημικό σταθμό.

Ασκήσεις

1. Ένας μαθητής έτρεξε σε σχολικό αγώνα 800 m και είχε επίδοση 2′ και 5″. Ο στίβος του σχολικού γηπέδου ήταν κυκλικός και η ακτίνα του διαδρόμου που έτρεξε ο μαθητής ήταν 50 m. Αν θεωρηθεί ότι ο μαθητής έτρεχε με σταθερή κατά μέτρο επιτρόχια ταχύτητα, να υπολογίσετε τη γωνιακή του ταχύτητα.

2. Μια λεία μπίλια μάζας $m = 100$ g είναι δεμένη στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση κατά την ωρολογιακή φορά σε οριζόντιο επίπεδο, κάτοψη του οποίου φαίνεται στο σχήμα.



α) Να σχεδιάσετε τα διανύσματα της επιτρόχιας ταχύτητας, της γωνιακής ταχύτητας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης και να υπολογίσετε τα μέτρα τους, εάν $T = 2$ s και $L = 20$ cm.

β) Να αναγνωρίσετε τη δύναμη που παίζει ρόλο κεντρομόλου και να την υπολογίσετε (μέτρο και κατεύθυνση).

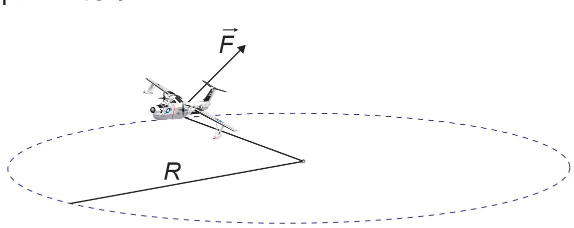
3. Να υπολογίσετε με ακρίβεια δευτερολέπτου κάθε πόσο χρονικό διάστημα ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης ενός ρολογιού είναι ακριβώς στην ίδια θέση.

4. Στη σχολική τάξη ένας μαθητής ρώτησε την καθηγήτρια Φυσικής πώς μπορούν οι επιστήμονες και υπολογίζουν τη μάζα ουράνιων σωμάτων, για παράδειγμα της Γης, αφού δεν είναι δυνατόν να τα ζυγίσουν. Η καθηγήτρια τότε έθεσε ένα πρόβλημα στην τάξη. Ζήτησε να υπολογιστεί η μάζα της Γης, αν είναι γνωστό ότι ένας δορυφόρος της Γης που περιφέρεται σε ύψος 600 km από την επιφάνειά της έχει περίοδο 1,5 h. Γνωστά θεωρούνται η ακτίνα της Γης $R = 6.400\ \text{km}$ και η σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$. Η απάντηση σε kg να προσεγγιστεί με ένα ακέραιο ψηφίο (χωρίς δεκαδικά) πολλαπλασιασμένο με την κατάλληλη δύναμη του 10.

5. Στο άτομο του υδρογόνου ένα ηλεκτρόνιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από ένα πρωτόνιο σε απόσταση $5{,}3 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$. Το πρωτόνιο έλκει το ηλεκτρόνιο με ηλεκτρική δύναμη μέτρου $8{,}2 \cdot 10^{-8}\,\text{N}$ που παίζει τον ρόλο κεντρομόλου. Να υπολογίσετε πόσες περιφορές κάνει το ηλεκτρόνιο κάθε δευτερόλεπτο. Δίνεται η μάζα του ηλεκτρονίου $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$.

6. Οριζόντιος δίσκος περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του. Πάνω στον δίσκο είναι τοποθετημένο ένα σώμα σε απόσταση 0,2 m από τον άξονα περιστροφής. Το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει, όταν η συχνότητα περιστροφής του δίσκου ξεπερνά τις 30 περιστροφές / min. Να βρείτε τον συντελεστή τριβής μεταξύ δίσκου και σώματος. Δίνεται $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

7. Ένα αεροπλάνο πετά με ταχύτητα μέτρου 360 km/h διαγράφοντας οριζόντιο κύκλο. Τα φτερά του αεροπλάνου σχηματίζουν με τον ορίζοντα γωνία 45°.

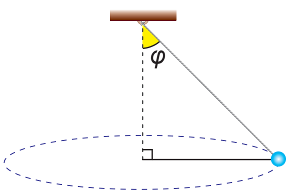


Να βρείτε την ακτίνα R της κυκλικής τροχιάς του αεροπλάνου. Να θεωρήσετε ότι $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Υπόδειξη

Η ανυψωτική δύναμη $\vec{F}$ του αεροπλάνου να θεωρηθεί κάθετη στα φτερά, οπότε σχηματίζει γωνία 45° με την ακτίνα R.

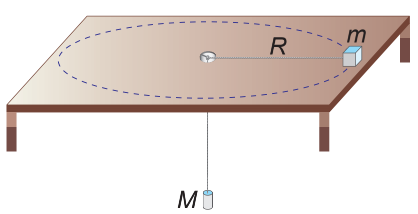
8. Στην εικόνα παριστάνεται το λεγόμενο κωνικό εκκρεμές, δηλαδή ένα εκκρεμές του οποίου το σφαιρίδιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο.



Αν η γωνία φ είναι 45° και η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι 0,9 m, να υπολογίσετε το μέτρο της επιτρόχιας ταχύτητας του σφαιριδίου.

Να θεωρήσετε ότι $g = 10\ \text{m/s}^2$.

9. Στην εικόνα παριστάνεται ένα κύβος μάζας $m = 1\,\text{kg}$ πάνω σε ένα λείο τραπέζι και ένας κύλινδρος μάζας $M = 4\ \text{kg}$ που συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές σχοινί το οποίο περνά από μια τρύπα του τραπεζιού.



Ο κύβος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα $R = 1\,\text{m}$ και κατάλληλη συχνότητα, ώστε ο κύλινδρος να ισορροπεί ακίνητος.

Να υπολογίσετε τη συχνότητα της κίνησης του κύβου. Δίνονται: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ και $\pi^2 = 9{,}8$.

10. Η Σελήνη είναι ο μοναδικός φυσικός δορυφόρος της Γης και η μέση απόστασή της από τον πλανήτη μας είναι $3{,}8 \cdot 10^8\,\text{m}$. Η περίοδος περιφοράς της γύρω από τη Γη είναι 27,3 ημέρες. Να υπολογίσετε για τη Σελήνη:

α) τη μέση επιτρόχια ταχύτητα,

β) τη γωνιακή ταχύτητα,

γ) την κεντρομόλο επιτάχυνση.

Για λόγους απλότητας να θεωρήσετε την τροχιά της Σελήνης κυκλική.

11. **α)** Να αποδείξετε ότι το μέτρο της επιτρόχιας ταχύτητας ενός δορυφόρου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από έναν πλανήτη ή γενικότερα ενός σώματος που βρίσκεται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου γύρω από ένα άλλο σώμα μάζας M είναι:

$$v_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

όπου G η σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης και r η απόσταση μεταξύ των κέντρων των σωμάτων.

β) Ένας δορυφόρος Α έχει μάζα m και βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη Γη σε απόσταση r από το κέντρο της με επιτρόχια ταχύτητα μέτρου 9.000 m/s. Ένας δορυφόρος Β έχει μάζα $3m$ και βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη Γη σε απόσταση $2r$ από το κέντρο της. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτρόχιας ταχύτητας του δορυφόρου Β.

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΠΕ2)

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1. Μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων ισορροπίας

Στα προβλήματα ισορροπίας που θα αντιμετωπίσουμε στην ενότητα αυτήν, μπορούμε να διακρίνουμε ορισμένα βασικά βήματα που καλό είναι να ακολουθούμε κατά την επίλυση. Τα βήματα αυτά είναι τα εξής:

I) Κάνουμε ένα πρόχειρο σχήμα για το φαινόμενο που περιγράφεται στο πρόβλημα, στο οποίο μπορούμε να εισαγάγουμε και τις απαραίτητες απλοποιήσεις, όπως για παράδειγμα ότι τα σώματα είναι υλικά σημεία.

II) Επιλέγουμε το σώμα με το οποίο θα ασχοληθούμε και το οποίο ισορροπεί.

III) Επιλέγουμε ένα σύστημα αξόνων έτσι, ώστε όσο γίνεται περισσότερες από τις ασκούμενες δυνάμεις να συμπίπτουν με τους άξονες, οπότε να μην χρειάζονται ανάλυση.

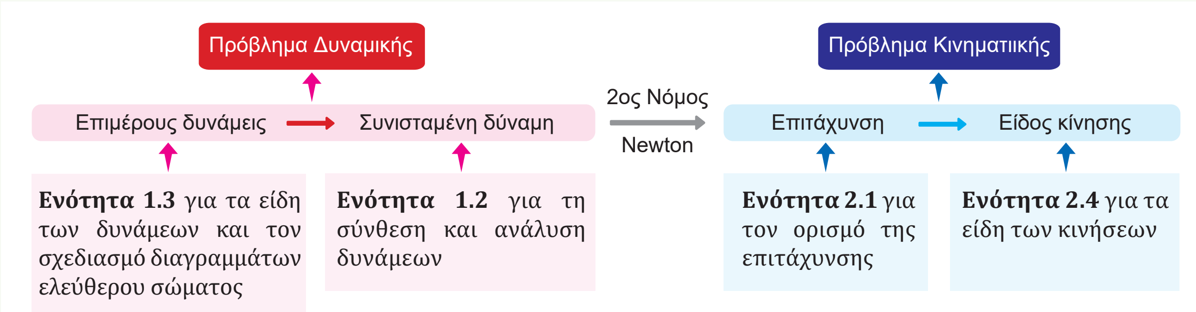
IV) Σχεδιάζουμε ένα διάγραμμα ελεύθερου σώματος στο οποίο σημειώνουμε τις δυνάμεις που δέχεται το σώμα, ενώ αναλύουμε όσες από αυτές τις δυνάμεις δεν βρίσκονται κατά μήκος κάποιου από τους δύο άξονες που έχουμε επιλέξει. Για τον σχεδιασμό των δυνάμεων στο σώμα σκεφτόμαστε ποια άλλα σώματα βρίσκονται σε επαφή με το σώμα που ισορροπεί, ώστε να σημειώσουμε τις δυνάμεις από επαφή, ενώ στη συνέχεια σημειώνουμε τις δυνάμεις από απόσταση. Κάθε δύναμη που σημειώνουμε θα πρέπει να γνωρίζουμε από ποιο σώμα προέρχεται, ενώ θα πρέπει να πάντοτε να θυμόμαστε ότι τα ζεύγη δράσης-αντίδρασης στον 3ο Νόμο του Νεύτωνα ασκούνται σε διαφορετικά σώματα.

V) Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας είτε στη διανυσματική μορφή είτε στη μορφή των συνιστωσών.

VI) Αν το πρόβλημα αναφέρεται στην ισορροπία εκτεταμένου σώματος, επιλέγουμε ένα σημείο (ή έναν άξονα) και απαιτούμε τον μηδενισμό της συνισταμένης των ροπών ως προς αυτό (ή προς αυτόν). Παρ' ότι η επιλογή μπορεί να γίνει τυχαία, αναζητούμε συνήθως εκείνο το σημείο (ή τον άξονα) που οδηγεί σε μηδενισμό των ροπών όσο το δυνατόν περισσότερων από τις άγνωστες δυνάμεις του προβλήματος.

2. Μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων δυναμικής

Στη μέθοδο επίλυσης προβλημάτων δυναμικής (και ισορροπίας) μπορούμε να συνοψίσουμε τις απαραίτητες γνώσεις και δεξιότητες στο **σχήμα 2.32**.



Σχήμα 2.32 Η βασική δομή των προβλημάτων που θα αντιμετωπίσουμε στην τρέχουσα θεματική ενότητα. Παρατηρήστε ότι ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα γεφυρώνει τα προβλήματα Δυναμικής (δηλαδή τα προβλήματα στα οποία εμπλέκονται οι δυνάμεις) με τα προβλήματα Κινηματικής (δηλαδή τα προβλήματα που έχουν να κάνουν με την περιγραφή της κίνησης μέσω των μεγεθών της θέσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης). Αξίζει επίσης να επισημανθεί το γεγονός ότι ορισμένες από τις συνεπαγωγές αντιστρέφονται (για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε το είδος της κίνησης, μπορούμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση), ενώ άλλες όχι (για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε τη συνισταμένη δύναμη, δεν μπορούμε πάντοτε να προσδιορίσουμε όλες τις επιμέρους δυνάμεις).

Στα προβλήματα όπου θα κάνουμε χρήση του 2ου Νόμου του Νεύτωνα εκφρασμένου με τη βοήθεια των συνιστωσών του, μπορούμε να διακρίνουμε ορισμένα βασικά βήματα που καλό είναι να τα ακολουθούμε κατά την επίλυση. Τα βήματα αυτά είναι τα εξής:

I) Κάνουμε ένα πρόχειρο σχήμα για το φαινόμενο που περιγράφεται στο πρόβλημα, στο οποίο μπορούμε να εισαγάγουμε και τις απαραίτητες απλοποιήσεις, όπως για παράδειγμα ότι τα σώματα είναι υλικά σημεία.

II) Επιλέγουμε το σύστημα το οποίο μπορεί να αποτελείται από ένα ή περισσότερα σώματα.

III) Επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με τον πρώτο από τους άξονες να είναι παράλληλος προς το διάνυσμα της επιτάχυνσης (συνήθως, αλλά όχι απαραίτητα, ο άξονας αυτός έχει την κατεύθυνση της επιτάχυνσης) και τον δεύτερο άξονα να είναι κάθετος στον πρώτο. Στην περίπτωση που μελετάμε σύστημα με περισσότερα από ένα σώματα, το σύστημα συντεταγμένων που θα επιλεγεί για κάθε σώμα μπορεί να μην έχει τους ίδιους άξονες.

IV) Σχεδιάζουμε ένα διάγραμμα ελεύθερου σώματος για καθένα από τα σώματα του συστήματος, στο οποίο σημειώνουμε τις δυνάμεις που δέχεται το σώμα, ενώ αναλύουμε όσες από αυτές τις δυνάμεις δεν βρίσκονται κατά μήκος κάποιου από τους δύο άξονες που έχουμε επιλέξει.

V) Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα εκφρασμένο στη μορφή συνιστωσών για καθένα από τα σώματα.

- **i.** Επειδή στα προβλήματα που θα εξετάσουμε εδώ, παρότι οι δυνάμεις μπορεί να βρίσκονται και στους δύο άξονες, η κίνηση θα εξελίσσεται μόνο στον έναν, η συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά μήκος του άξονα που το σώμα δεν κινείται θα είναι ίση με 0.
- **ii.** Αν το σώμα είναι ακίνητο, δηλαδή έχουμε να κάνουμε με ένα πρόβλημα ισορροπίας, τότε και οι δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης θα είναι ίσες με 0.

VI) Από τις εξισώσεις που έχουμε καταστρώσει και τα δεδομένα του προβλήματος προσπαθούμε με μαθηματικούς υπολογισμούς να υπολογίσουμε τις άγνωστες ποσότητες.

Προβλήματα

1. Ένας πεζός ξεκινά στις 07.00 το πρωί από την πόλη Α με κατεύθυνση την πόλη Β. Στις 08.00 ένα αυτοκίνητο περνά από την πόλη Α κατευθυνόμενο προς την πόλη Β. Στον δρόμο ο οδηγός του αυτοκινήτου συναντά και παίρνει τον πεζό ο οποίος φθάνει έτσι μία ώρα νωρίτερα από ό,τι είχε υπολογίσει στην πόλη Β.

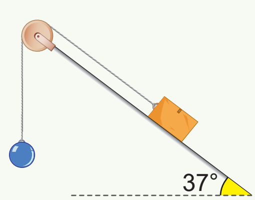
α) Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των πόλεων Α και Β;

β) Τι ώρα συνάντησε ο οδηγός του αυτοκινήτου τον πεζό;

Δίνεται ότι ο πεζός κινείται με μέση αριθμητική ταχύτητα $5\ \text{km/h}$ και το αυτοκίνητο κινείται με μέση αριθμητική ταχύτητα $55\ \text{km/h}$.

2. Ένα αυτοκίνητο μήκους 3 m κινείται με ταχύτητα $72\ \text{km/h}$. Όταν ο μπροστινός προφυλακτήρας του απέχει 50 m από μια διασταύρωση, ανάβει πορτοκαλί φανάρι διάρκειας 3 s. Η διασταύρωση έχει εύρος 14 m στη διεύθυνση κίνησης του αυτοκινήτου. Ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού είναι αμελητέος και αν πατήσει φρένο, επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό $4\ \text{m/s}^2$, ενώ αν πατήσει γκάζι, επιταχύνεται με σταθερό ρυθμό $1\ \text{m/s}^2$. Ποια είναι η καλύτερη επιλογή για τον οδηγό, ώστε να μη βρεθεί με κόκκινο μέσα στη διασταύρωση.

3. Μια σφαίρα μάζας 3 kg συνδέεται με κιβώτιο μάζας 1 kg μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος που περιτρέχει μια τροχαλία, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο, να υπολογίσετε:

i) την επιτάχυνση του συστήματος,

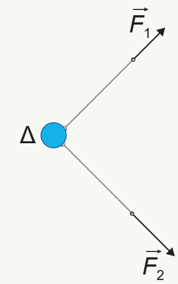
ii) το μέτρο της τάσης του νήματος.

β) Αν το κεκλιμένο επίπεδο είναι τραχύ και η σφαίρα κατεβαίνει με επιτάχυνση μέτρου $5\ \text{m/s}^2$, να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και κεκλιμένου επιπέδου.

Να θεωρήσετε την τροχαλία αβαρή έτσι, ώστε οι τάσεις των νημάτων από τις δύο πλευρές της να έχουν ίσα μέτρα.

Δίνονται:
$\etaμ37° = 0{,}6$, $συν37° = 0{,}8$ και $g = 10\ \text{m/s}^2$.

4. Μια κυλινδρική δεξαμενή Δ με μάζα $m = 200\ \text{kg}$ ισορροπεί ακίνητη σε οριζόντιο επίπεδο με τον άξονά της κατακόρυφο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκούνται σε αυτήν δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα 600 N και 800 N αντίστοιχα από δύο οχήματα μέσω σχοινιών, προκειμένου να τη μετακινήσουν. Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι συνεχώς κάθετες μεταξύ τους. Στο σχήμα απεικονίζεται η κάτοψη του οριζοντίου επιπέδου στην οποία δεν έχουν σχεδιαστεί όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στη Δ. Η δεξαμενή μετά τη χρονική στιγμή t_0 κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $a = 1\ \text{m/s}^2$.



α) Να προσδιορίσετε τη συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ σε μέτρο και κατεύθυνση.

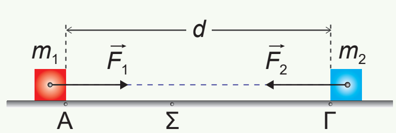
β) Να αποδείξετε ότι στο σώμα ασκείται τριβή και να υπολογίσετε το μέτρο της.

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\ \text{s}$ οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ παύουν να ασκούνται στη δεξαμενή.

γ) Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή που η δεξαμενή θα ακινητοποιηθεί, καθώς και το συνολικό διάστημα που θα διανύσει από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη στιγμή που ακινητοποιείται.

δ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του διαστήματος που διάνυσε η κυλινδρική δεξαμενή σε συνάρτηση με τον χρόνο από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη στιγμή που ακινητοποιείται.

5. Τα σώματα του σχήματος με μάζες m_1, m_2 είναι ακίνητα σε απόσταση d μεταξύ τους πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο.



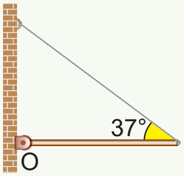
Πάνω στα σώματα αρχίζουν να ασκούνται ταυτόχρονα δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ που έχουν ίσα μέτρα $(F_1 = F_2)$. Τα σώματα κινούνται το ένα προς το άλλο, οπότε συναντώνται στο σημείο Σ για το οποίο ισχύει $(ΑΣ) = d/3$. Να βρείτε τον λόγο των μαζών m_1/m_2.

6. Υποθέτουμε ότι ένας μαθητής κρατά ένα λάστιχο ποτίσματος κατακόρυφα με τέτοιον τρόπο, ώστε ο πίδακας νερού να εξέρχεται από το στόμιο του λάστιχου προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα. Το στόμιο του λάστιχου βρίσκεται 1 m από το οριζόντιο έδαφος. Ξαφνικά η παροχή νερού διακόπτεται και ο μαθητής ακούει το νερό να χτυπά στο έδαφος δίπλα του για 1,5 s ακόμη μετά τη διακοπή. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία εξερχόταν το νερό πριν από τη διακοπή. Να θεωρήσετε την αντίσταση του αέρα αμελητέα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. Για λόγους απλότητας να θεωρήσετε την κίνηση του νερού ευθύγραμμη και κατακόρυφη.

(Από τον Πανελλήνιο Διαγωνισμό Φυσικής «Αριστοτέλης» 2021)

7. Ένα αεροπλάνο κινείται οριζόντια με ταχύτητα $300\ \mathrm{m/s}$ σε ύψος 780 m από το έδαφος. Στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο με το αεροπλάνο υπάρχει στο έδαφος ένα αντιαεροπορικό κανόνι που ρίχνει κατακόρυφα ένα βλήμα με αρχική ταχύτητα $400\ \mathrm{m/s}$. Το βλήμα ανεβαίνοντας χτυπά το αεροπλάνο. Ποια η απόσταση του αεροπλάνου από την κατακόρυφο που περνά από το κανόνι τη στιγμή που βάλλεται το βλήμα; Να θεωρήσετε ότι $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

8. Μια ομογενής ράβδος μήκους L και βάρους 240 N ισορροπεί οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ένα άκρο της ράβδου είναι αρθρωμένο σε κατακόρυφο τοίχο (σημείο Ο), ενώ το άλλο άκρο της συνδέεται με τον τοίχο μέσω αβαρούς και μη εκτατού νήματος που σχηματίζει με τη ράβδο γωνία $37°$. Να υπολογίσετε:

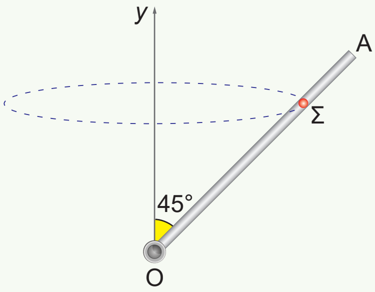


α) την τάση του νήματος,

β) τη δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη ράβδο (μέτρο και κατεύθυνση).

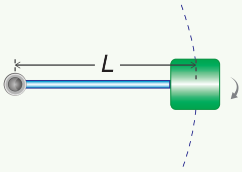
Δίνονται: $ημ37° = 0{,}6$ και $συν37° = 0{,}8$.

9. Στο ακόλουθο σχήμα ένας σιδερένιος σωλήνας ΟΑ περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα Οy που περνά από το άκρο του Ο.



Ο σωλήνας περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και σχηματίζει συνεχώς με τον άξονα Οy γωνία $45°$. Μέσα στον σωλήνα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές μια μικρή σφαίρα Σ. Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα, αν η σφαίρα ισορροπεί μέσα στον σωλήνα σε απόσταση 40 cm από τον άξονα περιστροφής, ώστε να διαγράφει σταθερά οριζόντιο κύκλο. Δίνεται $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

10. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η κάτοψη ενός προσομοιωτή φυγοκέντρου ο οποίος χρησιμοποιείται στην εκπαίδευση των αστροναυτών, ώστε να εξοικειωθούν με τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την απογείωση διαστημικών πυραύλων. Ένας αστροναύτης κάθεται στον θαλαμίσκο απέχοντας από το κέντρο περιστροφής $L = 6\ \mathrm{m}$.



α) Αν η συχνότητα περιστροφής του προσομοιωτή είναι 30 περιστροφές ανά λεπτό, να υπολογίσετε την κεντρομόλο επιτάχυνση του αστροναύτη σε συνάρτηση με την επιτάχυνση της βαρύτητας g.

β) Για τον έλεγχο της αντοχής των αστροναυτών, το μηχάνημα στο οποίο μπαίνουν επιταχύνεται από τα ανεκτά $4g$ έως $6g$ στην τεράστια επιτάχυνση των $9g$ όπου συνήθως προκαλείται απώλεια συνείδησης. Να υπολογίσετε σε περιστροφές ανά λεπτό τη συχνότητα περιστροφής στο ανώτατο όριο επιτάχυνσης των $9g$.

Δίνονται: $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ και $π^2 = 10$.

ΣΥΝΟΨΗ

Λέμε ότι η κίνηση είναι **σχετική** εννοώντας ότι εξαρτάται από τον παρατηρητή που την περιγράφει. Για την περιγραφή μιας κίνησης ορίζουμε τα μεγέθη της **θέσης**, της **μετατόπισης**, που προκύπτει από τη διαφορά δύο θέσεων, της **ταχύτητας**, που είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης, και της **επιτάχυνσης**, που είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας. Εκτός από τις *στιγμιαίες* τιμές της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, ορίζονται και οι *μέσες* τιμές τους που αφορούν σε ένα χρονικό διάστημα.

Σύμφωνα με τον **1ο Νόμο του Νεύτωνα** κάθε σώμα στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων είναι ίση με μηδέν, είτε παραμένει ακίνητο είτε κινείται με σταθερή ταχύτητα, ενώ ισχύει και το αντίστροφο. Στην περίπτωση που το σώμα είναι εκτεταμένο, τότε για να εξασφαλίσουμε την ισορροπία του, θα πρέπει επιπλέον η συνισταμένη των ροπών να είναι ίση με μηδέν $\left(\Sigma\vec{\tau}=\vec{0}\right)$. Ο **2ος Νόμος του Νεύτωνα** διαβεβαιώνει ότι η συνισταμένη δύναμη και η επιτάχυνση έχουν πάντοτε την ίδια κατεύθυνση και η μάζα, που εκφράζει την αδράνεια του σώματος, συμμετέχει στη διαμόρφωση της επιτάχυνσης σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\vec{a}=\Sigma\vec{F}/m$$

Πολλές φορές θα εκφράζουμε τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα με εξισώσεις συνιστωσών στη μορφή:

$$\Sigma F_x=ma_x \quad \text{και} \quad \Sigma F_y=ma_y$$

Η **ευθύγραμμη ομαλή κίνηση** είναι μια κίνηση που γίνεται με σταθερή ταχύτητα (όταν $\Sigma\vec{F}=\vec{0}$) και εφόσον γίνεται κατά μήκος του άξονα x, περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$a_x=0,\quad v_x=\text{σταθ.} \quad \text{και} \quad x=x_0+v_xt$$

Στην **ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση** η επιτάχυνση είναι σταθερή και εφόσον εξελίσσεται κατά μήκος του άξονα x, περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$a_x=\text{σταθ.},\quad v_x=v_{0,x}+a_xt \quad \text{και} \quad x=x_0+v_{0,x}t+\frac{1}{2}a_xt^2$$

Κάθε κίνηση μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια τριών διαγραμμάτων της μορφής a_x-t, v_x-t και x-t. Υπολογίζοντας «εμβαδά» στα δύο πρώτα, προκύπτει αντιστοίχως η μεταβολή της ταχύτητας και η μετατόπιση, ενώ υπολογίζοντας τις κλίσεις στα δύο τελευταία, προκύπτει αντιστοίχως η επιτάχυνση και η ταχύτητα. Μια ειδική αλλά σημαντική περίπτωση ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης είναι η **ελεύθερη πτώση** στην οποία η επιτάχυνση είναι ίση με την **επιτάχυνση της βαρύτητας** g.

Η **ομαλή κυκλική κίνηση** ακτίνας R είναι μια περιοδική κίνηση και ως τέτοια χαρακτηρίζεται από την *περίοδο* (T) και τη *συχνότητα* (f). Η **επιτρόχια ταχύτητα** $\left(\vec{v}_\varepsilon\right)$ είναι σταθερή κατά μέτρο, αλλά έχει μεταβαλλόμενη κατεύθυνση, αφού είναι πάντοτε εφαπτομένη στην τροχιά. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει επιτάχυνση που ονομάζεται **κεντρομόλος επιτάχυνση**:

$$a_\kappa=v_\varepsilon^2/R$$

Επομένως, για να πραγματοποιηθεί μια τέτοια κίνηση, απαιτείται δύναμη που ονομάζεται **κεντρομόλος δύναμη**:

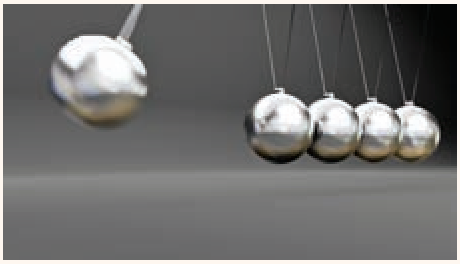
$$F_\kappa=ma_\kappa$$

Εκτός από την επιτρόχια ταχύτητα, μπορούμε να περιγράψουμε την ομαλή κυκλική κίνηση και με τη **γωνιακή ταχύτητα** $\left(\vec{\omega}\right)$ που είναι ένα διανυσματικό μέγεθος με κατεύθυνση που προκύπτει από *τον κανόνα του δεξιού χεριού* και ορίζεται ως ο ρυθμός σάρωσης της επίκεντρης γωνίας από την ακτίνα. Τα μέτρα της επιτρόχιας και της γωνιακής ταχύτητας συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης:

$$v_\varepsilon=\omega R$$

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Από τη δύναμη στην ενέργεια



Η ηλιακή ενέργεια που φθάνει στον πλανήτη μας απορροφάται καταρχάς από την ατμόσφαιρα, θερμαίνοντάς την. Η ενέργεια αυτή είναι ένας από τους βασικούς παράγοντες που καθορίζουν το κλίμα σε πλανητικό επίπεδο, καθώς, για παράδειγμα, συντελεί στη δημιουργία των ανέμων, την κινητική ενέργεια των οποίων χρησιμοποιούμε στις ανεμογεννήτριες.

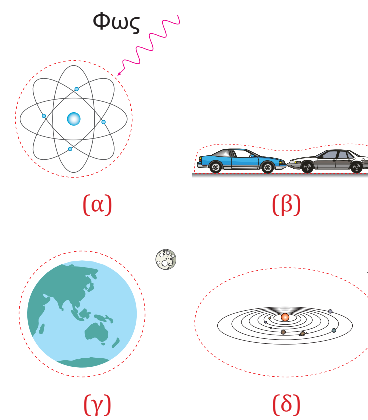
Η ηλιακή ενέργεια που φθάνει στην επιφάνεια της Γης αυξάνει τη θερμοκρασία στους ωκεανούς συντελώντας στην κίνηση των νερών και επομένως στη δημιουργία των διαφόρων θαλάσσιων ρευμάτων, που παίζουν επίσης σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση του κλίματος σε παγκόσμιο επίπεδο. Ο άνεμος μαζί με την ενέργεια που έχει απορροφήσει το νερό οδηγούν στον σχηματισμό κυμάτων, την κινητική ενέργεια των οποίων εκμεταλλευόμαστε στις διατάξεις που παράγουν ενέργεια από την κίνησή τους. Η θέρμανση των κάθε είδους υδάτινων αποθεμάτων στην επιφάνεια της Γης οδηγεί στην εξάτμιση του νερού, κατά την οποία η δυναμική ενέργεια του νερού αυξάνεται, καθώς αυξάνεται το ύψος, συμβάλλοντας έτσι στη συντήρηση του κύκλου του νερού.

Ένα άλλο τμήμα της ηλιακής ενέργειας που φθάνει στην επιφάνεια της Γης δεσμεύεται από τα φυτά στη διαδικασία της φωτοσύνθεσης, από την οποία παράγονται ουσίες που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουν αποθηκευμένη χημική ενέργεια. Αυτή η χημική ενέργεια μεταφέρεται μέσω της τροφής σε ανώτερους στην τροφική αλυσίδα οργανισμούς όπως για παράδειγμα ο άνθρωπος και χρησιμοποιείται από αυτούς για να φέρουν σε πέρας όλες εκείνες τις διεργασίες που χαρακτηρίζουν τη ζωή (κίνηση, αναπαραγωγή κ.ο.κ.). Η χημική ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στη ζωική και φυτική ύλη υπό τις κατάλληλες συνθήκες που επικρατούσαν στο παρελθόν αποθηκεύτηκε στο εσωτερικό της Γης, δίνοντας τα γνωστά μας ορυκτά καύσιμα. Τα καύσιμα αυτού του είδους χρησιμοποιούμε σήμερα στις θερμικές μηχανές, που είναι βασικό μέρος του τεχνολογικού μας πολιτισμού, παράγοντας μεγάλες ποσότητες έργου.

Τα φωτοβολταϊκά συστήματα, που τώρα αρχίζει να εκμεταλλεύεται ο άνθρωπος σε μεγάλη κλίμακα, χρησιμοποιούν επίσης την ηλιακή ενέργεια που φθάνει στην επιφάνεια της Γης για να παράγουν ηλεκτρική ενέργεια. Αυτήν την ενέργεια στις διάφορες συσκευές που έχουμε στα σπίτια μας τη μετατρέπουμε σε άλλες μορφές ενέργειας όπως θερμική στον ηλεκτρικό θερμοσίφωνα ή την ηλεκτρική κουζίνα, φωτεινή στους λαμπτήρες κ.ο.κ.

Σε όλα τα προηγούμενα φαινόμενα, που μελετώνται από τις επιστήμες της Βιολογίας, της Χημείας και της Φυσικής, το ενοποιητικό στοιχείο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή και την ερμηνεία τους είναι η έννοια της ενέργειας. Αυτή η ιδιότητα της ενέργειας να εμφανίζεται και να χρησιμοποιείται και σε άλλες επιστήμες είναι που την ανέδειξε σε μια από τις βασικότερες έννοιες της Φυσικής.

Εικόνα 3.1 Αντλία εξόρυξης πετρελαίου με γραμμές ροής



Σχήμα 3.1 Τέσσερις περιπτώσεις συστημάτων που συναντάμε πολύ συχνά στη μελέτη της Φυσικής. Το σύστημα που έχει επιλεγεί σε κάθε περίπτωση περικλείεται σε στικτή γραμμή. Έξω από το σύστημα έχει τοποθετηθεί ένα στοιχείο που ανήκει στο περιβάλλον, όπως: (α) το φως που προσπίπτει πάνω σε ένα άτομο, (β) το οδόστρωμα πάνω στο οποίο κινούνται τα δύο αυτοκίνητα που συγκρούονται, (γ) η Σελήνη που βρίσκεται κοντά στη Γη και (δ) ένας αστέρας που βρίσκεται έξω από το Ηλιακό μας Σύστημα σε πολύ μακρινή απόσταση από αυτό.

3.1 Το φυσικό μέγεθος ενέργεια συστήματος

1. Ανοικτά, κλειστά και μονωμένα συστήματα

Στη μελέτη της Φυσικής είναι πολύ σημαντική η έννοια του συστήματος. Λέγοντας **σύστημα** εννοούμε ένα σύνολο σωμάτων τα οποία απομονώνουμε από το υπόλοιπο Σύμπαν και ό,τι υπάρχει έξω από αυτά ονομάζεται **περιβάλλον**. Με αυτήν την έννοια λοιπόν ένα σύστημα μπορεί να είναι: ένα άτομο, κάποια από τα σώματα που υπάρχουν γύρω μας όπως δύο αυτοκίνητα που από λάθος χειρισμούς συγκρούονται μεταξύ τους, ολόκληρη η Γη, το Ηλιακό μας Σύστημα κ.ο.κ. Ορισμένα από αυτά τα συστήματα θα τα μελετήσουμε στη συνέχεια της υποενότητας, ενώ, προκειμένου να είναι σαφές ποιο είναι κάθε φορά το σύστημα που επιλέγουμε, θα το περιχαράζουμε με μια στικτή γραμμή η οποία μπορεί να είναι είτε ένα υλικό σύνορο όπως στην περίπτωση των δύο αυτοκινήτων που συγκρούονται είτε ένα νοητό σύνορο χωρίς υλική υπόσταση όπως στις τρεις άλλες περιπτώσεις των συστημάτων που φαίνονται στο **σχήμα 3.1**.

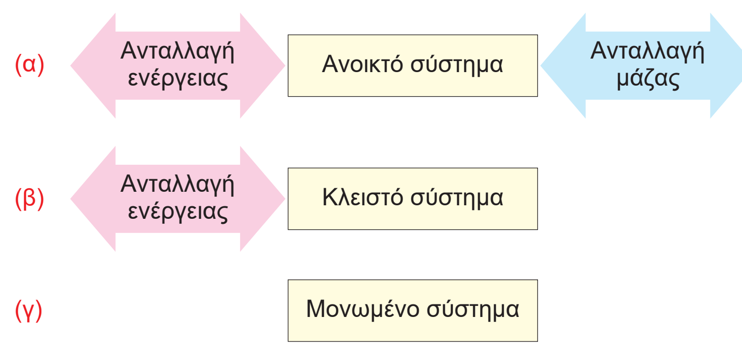
Επιλογή συστήματος

Μπορούμε να χωρίσουμε τα διάφορα συστήματα ως προς την ανταλλαγή *ύλης* (μάζας) και *ενέργειας* με το περιβάλλον σε ορισμένες σημαντικές κατηγορίες (**Σχήμα 3.2**) που είναι οι εξής:

Ανοικτά Συστήματα: Πρόκειται για συστήματα που ανταλλάσσουν ύλη και ενέργεια με το περιβάλλον. Παράδειγμα ενός τέτοιου συστήματος είναι ένας δοκιμαστικός σωλήνας εντός του οποίου γίνεται κάποια χημική αντίδραση από την οποία απελευθερώνεται ένα αέριο.

Κλειστά Συστήματα: Πρόκειται για συστήματα που δεν ανταλλάσσουν ύλη με το περιβάλλον, όμως ανταλλάσσουν ενέργεια. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός τέτοιου συστήματος είναι ένα κλειστό δοχείο με κάποιο αέριο το οποίο θερμαίνουμε. Ένα άλλο σύστημα που είναι *κατά προσέγγιση κλειστό* είναι ολόκληρος ο πλανήτης μας, καθώς η ποσότητα της ύλης που ανταλλάσσει με το υπόλοιπο Σύμπαν είναι πάρα πολύ μικρή, ενώ αντίθετα η ποσότητα της ενέργειας που ανταλλάσσει η Γη με το περιβάλλον της είναι σημαντική.

Μονωμένα Συστήματα: Πρόκειται για συστήματα που δεν ανταλλάσσουν ούτε ύλη ούτε ενέργεια με το περιβάλλον. Ένα σύστημα που είναι κατά προσέγγιση μονωμένο είναι ένα υγρό μέσα σε ένα δοχείο θερμός.



Σχήμα 3.2 Πολλές φορές, για να αναπαραστήσουμε ένα σύστημα στη γενική του μορφή, χρησιμοποιούμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ανάλογα, με το τι συμβαίνει ως προς την ανταλλαγή μάζας και ενέργειας με το περιβάλλον, χωρίζουμε τα συστήματα σε: (α) ανοικτά, (β) κλειστά και (γ) μονωμένα.

2. Περιγραφική προσέγγιση της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας

Από τη στιγμή που έχουμε επιλέξει ένα σύστημα, όσο απλό ή περίπλοκο και αν είναι αυτό, μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε προς μια ποσότητα που ονομάζεται **ολική ενέργεια του συστήματος**. Η ολική ενέργεια ενός συστήματος αποτελείται από το άθροισμα όλων των ενεργειών του συστήματος, όπως φαίνεται στον **πίνακα 3.1** για ορισμένα βασικά είδη ενέργειας (κινητική K, δυναμική U, χημική, θερμική, …).

Πίνακας 3.1 Πιθανές μορφές ενέργειας σε ένα σύστημα

Σύστημα
K, U, $E_{χημ}$, $E_{θερμ}$, ...
$E_{συστ} = K + U + E_{χημ} + E_{θερμ} + ...$

Η ενέργεια του συστήματος ορίζεται ως το άθροισμα αυτών των ενεργειών.

Είναι λοιπόν:

$$E_{συστ} = K + U + E_{χημ} + E_{θερμ} + \ldots$$

Πρόκειται για ενέργεια που δεν μπορεί εύκολα να υπολογιστεί παρά μόνο σε πολύ απλές περιπτώσεις συστημάτων, αλλά, ακόμη και αν μπορούσε να υπολογιστεί για κάθε σύστημα, δεν θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη, καθώς, όπως θα διαπιστώσουμε, αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως είναι η μεταβολή της ενέργειας αυτής.

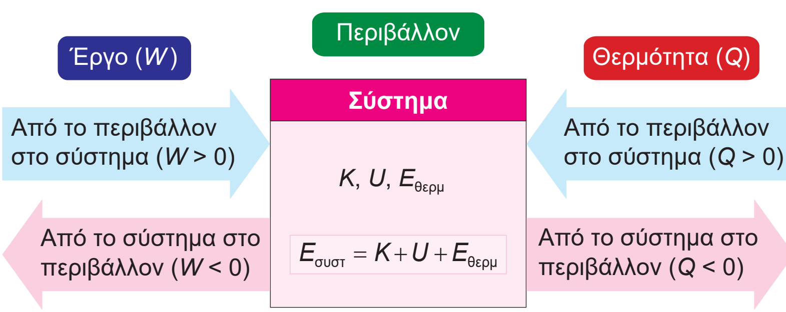
Οι διαδικασίες που μπορούν να συμβαίνουν με την ενέργεια σε ένα σύστημα είναι δύο, οι εξής:

α) Μεταφορά ενέργειας μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντος. Θα μελετήσουμε μόνο τη μεταφορά ενέργειας μέσω των μηχανισμών του έργου W και της θερμότητας Q.

β) Μετατροπή ενέργειας εντός του συστήματος από μια μορφή σε μια άλλη. Θα μελετήσουμε μόνο τις μετατροπές μεταξύ των μορφών κινητικής, δυναμικής και θερμικής ενέργειας.

Προκειμένου να λάβουμε υπόψη και αυτές τις μεταφορές της ενέργειας, θα χρησιμοποιούμε το **σχήμα 3.3** που απεικονίζει το τελικό ενεργειακό μοντέλο το οποίο θα λειτουργεί ως πρότυπο για το τι συμβαίνει σε ένα σύστημα.

Ένα ενεργειακό μοντέλο



Σχήμα 3.3 Το τελικό βασικό ενεργειακό μοντέλο για ένα σύστημα. Απεικονίζει τις μεταφορές ενέργειας.

Έχοντας σκιαγραφήσει το βασικό μοντέλο για την ενέργεια ενός συστήματος, μπορούμε τώρα να εκφράσουμε την **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας**, σύμφωνα με την οποία:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Μεταβολή} \\ \text{της ενέργειας} \\ \text{του συστήματος}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Ποσότητες ενέργειας} \\ \text{που ανταλλάσσει το σύστημα} \\ \text{με το περιβάλλον}\end{array}\right)$$

Στην περίπτωση που το σύστημα είναι *μονωμένο*, οπότε δεν υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας με το περιβάλλον, το δεξιό μέλος της προηγούμενης εξίσωσης μηδενίζεται και η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας παίρνει τη μορφή:

$$\Delta E_{συστ} = 0 \quad ή \quad E_{συστ} = σταθ.$$

Έχοντας αναλύσει τη γενική εικόνα (Ενέργεια – Σύστημα – Περιβάλλον), κάποιος μπορεί να θεωρήσει ότι είμαστε πλέον σε θέση να μελετήσουμε ενεργειακά οποιοδήποτε σύστημα. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει, αφού τα πραγματικά συστήματα είναι πολύπλοκα, από την άποψη ότι εμπλέκουν πολλά είδη ενέργειας. Για τον λόγο αυτόν θα προχωρήσουμε με τον αντίστροφο τρόπο· θα ξεκινήσουμε δηλαδή από μερικά πολύ απλά συστήματα στα οποία εμπλέκονται και μεταβάλλονται μόνο λίγα είδη ενέργειας, με σκοπό, αφενός να κατανοήσουμε αυτά τα επιμέρους είδη της ενέργειας ως προς το πώς υπολογίζονται, αλλά και το πότε μεταβάλλονται, αφετέρου να διατυπώσουμε τη γενική Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας, που μάθαμε παραπάνω, σε αυτά τα ειδικά συστήματα.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Εάν θεωρηθεί όλο το σύμπαν ως σύστημα, θα το χαρακτηρίζατε ως ανοικτό, κλειστό ή μονωμένο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Να χαρακτηρίσετε ως ανοικτό ή κλειστό καθένα από τα παρακάτω συστήματα:

Α) Ένα φλιτζάνι με τσάι που αχνίζει

Β) Ένα μεταλλικό κουτί με αναψυκτικό στο ράφι μιας υπεραγοράς

Γ) Μια παγοκύστη

Δ) Το σώμα σας

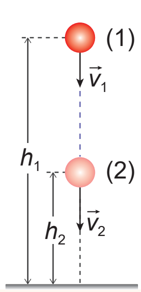
Ε) Η μηχανή ενός αυτοκινήτου

3. Φουσκώνετε δύο μπαλόνια με αέρα. Το πρώτο το δένετε και το αφήνετε στο πάτωμα και το δεύτερο το αφήνετε, χωρίς να το δέσετε. Να θεωρήσετε κάθε μπαλόνι ως σύστημα το οποίο να χαρακτηρίσετε ως ανοικτό ή κλειστό. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Μια ζεστή ανοιξιάτικη μέρα αγοράζετε ένα μπουκαλάκι παγωμένο νερό από το κυλικείο του σχολείου σας, στο διάλειμμα, πριν από το μάθημα της Φυσικής Αγωγής για να το πιείτε στο τέλος του μαθήματος. Εάν θεωρήσετε το μπουκαλάκι με το νερό ως σύστημα, να εξηγήσετε εάν αυτό είναι μονωμένο ή όχι.

3.2 Αποθήκευση της ενέργειας

1. Κινητική ενέργεια σώματος



Σχήμα 3.4 Ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση διέρχεται κινούμενο από το σημείο (1) στο σημείο (2).

Ας θεωρήσουμε σώμα αμελητέων διαστάσεων/υλικό σημείο, μάζας *m*, (στο εξής θα γράφουμε παντού απλώς τη λέξη σώμα), το οποίο εκτελεί ελεύθερη πτώση, όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.4**.

Το σώμα διέρχεται από το σημείο (1) που βρίσκεται σε ύψος h_1 (πάνω από την επιφάνεια της Γης) με ταχύτητα μέτρου v_1. Μετά περνά από το σημείο (2) που βρίσκεται σε ύψος h_2 (πάνω από την επιφάνεια της Γης) με ταχύτητα μέτρου v_2. Από τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης, υποθέτοντας ότι η μετάβαση του σώματος από το (1) στο (2) γίνεται με τη βαρυτική επιτάχυνση *g*, ισχύει ότι:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g\Delta h$$

η οποία στην περίπτωσή μας γίνεται:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh_1 - 2gh_2$$

όπου με αναδιάταξη των όρων παίρνει τη μορφή:

$$2gh_1 - 2gh_2 = v_2^2 - v_1^2$$

Πολλαπλασιάζουμε την προηγούμενη σχέση με τη μάζα m του κινούμενου σώματος:

$$2mgh_1 - 2mgh_2 = mv_2^2 - mv_1^2$$

και με απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς καταλήγουμε στη μορφή:

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad \text{(I)}$$

Σε αυτήν τη σχέση αναγνωρίζουμε δύο όρους: τον $\frac{1}{2}mv^2$ και τον mgh, που ο καθένας τους εμφανίζεται για καθεμία από τις δύο θέσεις που διέρχεται το σώμα κατά την κίνησή του. Οι δύο αυτοί όροι σχετίζονται με *διαφορετικούς τρόπους αποθήκευσης της ενέργειας* και είναι αντιστοίχως η **κινητική ενέργεια** και η **βαρυτική δυναμική ενέργεια**.

Κινητική ενέργεια ορίζεται η ενέργεια που έχει ένα σώμα ενός συστήματος εξαιτίας της κίνησής του. Πρόκειται για μονόμετρο μέγεθος που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \textbf{(3.1)}$$

όπου m η μάζα του σώματος και v το μέτρο της ταχύτητάς του.

Η μονάδα SI της κινητικής ενέργειας όπως και η μονάδα κάθε είδους ενέργειας είναι το 1 joule (1 J), που πήρε το όνομά της από τον σημαντικό Άγγλο επιστήμονα του 19ου αιώνα James Prescott Joule. Μπορούμε πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε, σύμφωνα με την εξίσωση ορισμού της κινητικής ενέργειας, ότι η συγκεκριμένη μονάδα αναλύεται σε απλούστερες μονάδες του Διεθνούς Συστήματος ως εξής:

$$1\ \text{joule} = 1\ \text{J} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

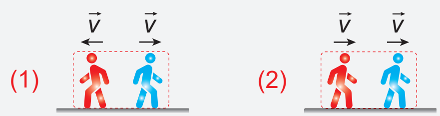
Αξίζει να γίνουν ορισμένες σημαντικές παρατηρήσεις σε ό,τι αφορά στο μέγεθος της κινητικής ενέργειας.

1. Γίνεται εύκολα κατανοητό, με βάση την εξίσωση ορισμού της κινητικής ενέργειας, ότι η κινητική ενέργεια ενός σώματος αυξάνεται όσο ταχύτερα κινείται το σώμα, ενώ η κινητική ενέργεια ενός ακίνητου σώματος είναι ίση με το μηδέν.
2. Αφού η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος, η τιμή της δεν αλλάζει, όταν αλλάζει η κατεύθυνση της ταχύτητας. Δεν ισχύει το ίδιο για την ταχύτητα του σώματος. Έτσι, για παράδειγμα, στην ομαλή κυκλική κίνηση η κινητική ενέργεια παραμένει σταθερή, παρά το γεγονός ότι το διάνυσμα της ταχύτητας αλλάζει συνεχώς.

3. Στην περίπτωση που έχουμε ένα σύστημα με περισσότερα από ένα σώματα, η ολική κινητική ενέργεια προκύπτει από το άθροισμα των κινητικών ενεργειών όλων των επιμέρους σωμάτων του συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.2

1. Δύο αθλητές έχουν ίδια μάζα m και κινούνται με ταχύτητες ίσων μέτρων v, τη μια φορά ο ένας προς την Ανατολή και ο άλλος προς τη Δύση και την άλλη φορά και οι δύο προς την Ανατολή, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Για την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο αθλητών στα σχήματα (1) και (2) ισχύει ότι:

Α) $0 = K_{συστ,(1)} < K_{συστ,(2)} = mv^2$

Β) $K_{συστ,(1)} = K_{συστ,(2)} = mv^2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η Β.

Επειδή η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος, δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση της κίνησης του σώματος. Και στις δύο περιπτώσεις θα πρέπει να προσθέσουμε τις κινητικές ενέργειες των δύο αθλητών, που η καθεμία δίνεται ως $K = \frac{1}{2}mv^2$. Επομένως, θα προκύψει ως αποτέλεσμα η ολική κινητική ενέργεια για το σύστημα ανά περίπτωση ίση με mv^2.

2. Το 1896 στο Waco του Texas, ο William Crush τοποθέτησε δύο ατμομηχανές στα άκρα μιας σιδηροδρομικής γραμμής έτσι, ώστε τα μπροστινά τους μέρη να απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με $6{,}4\ \text{km}$. Στη συνέχεια, έθεσε σε λειτουργία τις ατμομηχανές ταυτόχρονα και μπροστά σε κοινό 30.000 θεατών τις άφησε να συγκρουστούν μετωπικά. Αν υποθέσουμε ότι κάθε ατμομηχανή ζύγιζε $1{,}2 \cdot 10^6\ \text{N}$ και ότι η επιτάχυνσή τους ήταν σταθερή και ίση με $0{,}26\ \text{m/s}^2$, πόση ήταν η ολική κινητική ενέργεια των δύο ατμομηχανών ακριβώς πριν από τη σύγκρουση;

Δίνεται $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

Λύση

Αφού ξεκινούν ταυτόχρονα οι δύο ατμομηχανές, καθεμία από αυτές θα διανύσει ακριβώς τη μισή απόσταση πριν συγκρουστεί με την άλλη, επομένως θα είναι $\Delta x = 3{,}2 \cdot 10^3\ \text{m}$. Αυτό σημαίνει ότι θα συγκρουστούν μετά από χρόνο t που υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta x = 0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}26\ \text{m/s}^2}} = 157\ \text{s}$$

έχοντας ταχύτητα:

$$v = 0 + at = \left(0{,}26\ \text{m/s}^2\right)\left(157\ \text{s}\right) = 41\ \text{m/s}$$

Για να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια της κάθε ατμομηχανής, θα πρέπει να γνωρίζουμε τη μάζα της. Έχουμε:

$$w = mg \quad \text{ή} \quad m = \frac{w}{g} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6\ \text{N}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 1{,}22 \cdot 10^5\ \text{kg}$$

Αυτό σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια της μιας ατμομηχανής ήταν:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(1{,}22 \cdot 10^5\ \text{kg}\right)\left(41\ \text{m/s}\right)^2 = 1 \cdot 10^8\ \text{J}$$

Επομένως, για τις δύο ατμομηχανές η ολική κινητική ενέργεια ήταν:

$$K_{ολ} = 2K = 2 \cdot 10^8\ \text{J}$$

Επέκταση

2. Κινητική ενέργεια εκτεταμένου άκαμπτου σώματος

Κινητική ενέργεια έχει και ένα εκτεταμένο σώμα που βρίσκεται σε κίνηση. Επειδή οι κινήσεις που μπορεί να εκτελέσει ένα σώμα, τις διαστάσεις του οποίου δεν μπορούμε να αγνοήσουμε, μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκες, στο σημείο αυτό θα μελετήσουμε την κινητική ενέργεια ενός άκαμπτου στερεού σώματος που εκτελεί τις δύο απλούστερες δυνατές κινήσεις, αυτήν της **μεταφοράς** (όπου κάθε σημείο του σώματος κάνει ακριβώς την ίδια κίνηση, δηλαδή έχει την ίδια ταχύτητα κατά μέτρο και κατεύθυνση) και εκείνη της **περιστροφής** γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

Μεταφορική και Περιστροφική κινητική ενέργεια εκτεταμένου σώματος

Αποδεικνύεται ότι η **κινητική μεταφορική ενέργεια** ενός εκτεταμένου άκαμπτου σώματος δίνεται από τον τύπο:

$$K_{\mu} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \qquad \textbf{(3.2)}$$

όπου M η μάζα του σώματος και v_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του.

Η **κινητική περιστροφική ενέργεια** ενός άκαμπτου στερεού σώματος το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του δίνεται από τον τύπο:

$$K_{\pi} = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \qquad \textbf{(3.3)}$$

όπου I_{cm} η ροπή αδράνειας του στερεού σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και ω η γωνιακή ταχύτητα του στερεού.

Ροπή αδράνειας άκαμπτου σώματος ως προς άξονα

Θεωρούμε ένα άκαμπτο σώμα που αποτελείται από N σωματίδια με μάζες $m_1, m_2, \ldots, m_N$, καθένα από τα οποία απέχει $r_1, r_2, \ldots, r_N$ αντίστοιχα από έναν σταθερό άξονα περιστροφής. Η ροπή αδράνειας I του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής ορίζεται το άθροισμα:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_N r_N^2$$

Μονάδα ροπής αδράνειας

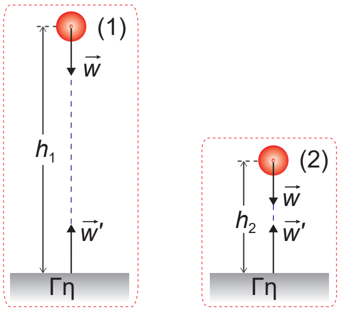
Η ροπή αδράνειας είναι μονόμετρο μέγεθος με μονάδα στο SI το $1\,\mathrm{kg \cdot m^2}$.

3. Βαρυτική δυναμική ενέργεια υλικού σημείου (απλά σώματος)

Ο δεύτερος τρόπος αποθήκευσης ενέργειας, που εισήχθηκε μέσω του παραδείγματος της ελεύθερης πτώσης στην υποενότητα 1, είναι η **βαρυτική δυναμική ενέργεια**. Πρόκειται για την πρώτη από τις δυναμικές ενέργειες που θα μελετήσουμε. Όλες έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά που είναι τα ακόλουθα:

1. Γενικά, όλα τα είδη δυναμικής ενέργειας που θα συναντήσουμε αναφέρονται σε ένα σύστημα σωμάτων και ποτέ σε μόνο ένα σώμα.
2. Κάθε δυναμική ενέργεια συνδέεται με μια δύναμη που ασκείται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος, η οποία, όπως θα μάθουμε στη συνέχεια, πρέπει να διαθέτει ορισμένα χαρακτηριστικά.
3. Η δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται κάθε φορά που μεταβάλλεται η διαμόρφωση του συστήματος, δηλαδή οι σχετικές θέσεις των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα.

Στην περίπτωση της ελεύθερης πτώσης που μελετήσαμε προηγουμένως, η βαρυτική δυναμική ενέργεια αναφέρεται στο σύστημα



(α) (β)

Σχήμα 3.5 Το σύστημα σώμα-Γη (α) στην αρχική του διαμόρφωση και (β) στην τελική του διαμόρφωση.

Λόγω της αλλαγής της διαμόρφωσης, αλλάζει η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος.

σώμα-Γη, όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.5**. Η ασκούμενη δύναμη μεταξύ αυτών των σωμάτων είναι η βαρυτική δύναμη, ενώ η διαμόρφωση του συστήματος αλλάζει, καθώς αλλάζει η απόσταση μεταξύ αυτών των δύο σωμάτων, δηλαδή αλλάζει η σχετική θέση των δύο σωμάτων.

Στην περίπτωση που η κίνηση του σώματος γίνεται σε μικρό ύψος από την επιφάνεια της Γης, η βαρυτική δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$U_{βαρ} = mgh \qquad (3.4)$$

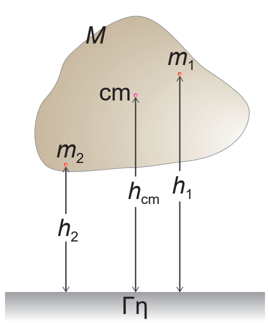
όπου m η μάζα του σώματος, g η επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης και h το ύψος από την επιφάνεια της Γης.

Αξίζει να τονιστεί για μια ακόμη φορά ότι η τιμή της δυναμικής ενέργειας μεταβάλλεται κάθε φορά που αλλάζει η απόσταση του σώματος από την επιφάνεια της Γης, όταν δηλαδή μεταβάλλεται η διαμόρφωση του συστήματος σώμα-Γη.

Πρόκειται για μονόμετρο μέγεθος με μονάδα στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων το 1 J που όπως προηγουμένως:

$$1\ \text{joule} = 1\ \text{J} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = 1\ \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

4. Βαρυτική δυναμική ενέργεια λόγω της αλληλεπίδρασης ενός εκτεταμένου σώματος και της Γης



Σχήμα 3.6 Η δυναμική ενέργεια ενός άκαμπτου εκτεταμένου σώματος προκύπτει ως το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών των σωματιδίων από τα οποία αποτελείται το σώμα.

Αν το σώμα στο προηγούμενο σύστημα σώμα-Γη αντικατασταθεί από ένα εκτεταμένο σώμα, τότε τα σώματα θα εξακολουθούν να αλληλεπιδρούν μέσω της δύναμης του βάρους και κάθε φορά που με κάποιον τρόπο θα μεταβάλλεται η μεταξύ τους απόσταση, (μεταβάλλεται η διαμόρφωση του συστήματος), θα μεταβάλλεται και η βαρυτική δυναμική ενέργεια. Μπορούμε λοιπόν και στην περίπτωση αυτήν να ορίσουμε δυναμική ενέργεια για το σύστημα των σωματιδίων που συναποτελούν το άκαμπτο σώμα και η Γη, αφού διευκρινίσουμε ποιο θα είναι το «σωστό» ύψος h που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί στην αντίστοιχη εξίσωση (**Σχήμα 3.6**).

Για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος εκτεταμένο σώμα-Γη, θα πρέπει αφενός μεν να χρησιμοποιήσουμε την ολική μάζα M του σώματος, αφετέρου δε να χρησιμοποιήσουμε την απόσταση του κέντρου μάζας του από την επιφάνεια της Γης, οπότε η εξίσωση που δίνει τη δυναμική ενέργεια στην περίπτωση αυτήν παίρνει τη μορφή:

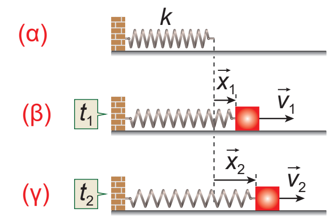
$$U_{βαρ} = Mgh_{cm} \qquad (3.5)$$

Απόδειξη της σχέσης: $U_{βαρ} = Mgh_{cm}$

5. Ελαστική δυναμική ενέργεια

Ας υποθέσουμε ότι ένα ελατήριο σταθεράς k έχει το ένα άκρο του στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο, ενώ στο άλλο του άκρο είναι προσδεδεμένο σώμα μάζας m το οποίο μπορεί να ολισθαίνει πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Υποθέτουμε επιπλέον ότι κάποια χρονική στιγμή το σώμα ξεκίνησε να κινείται πάνω στο οριζόντιο δάπεδο, εκτελώντας μια παλινδρομική κίνηση που ονομάζεται **ταλάντωση**.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 (με $t_1 < t_2$) στις οποίες το σώμα διέρχεται από δύο θέσεις που απέχουν αντίστοιχα αποστάσεις x_1 και x_2 από τη θέση που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, ενώ το σώμα στις θέσεις αυτές έχει αντίστοιχα ταχύτητες v_1 και v_2, όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.7**.



Σχήμα 3.7 Η κίνηση ενός σώματος που είναι στερεωμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k και ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο δάπεδο.
(α) Η θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.
(β) – (γ) Δύο τυχαίες θέσεις από τις οποίες διέρχεται το σώμα τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2.

Αποδεικνύεται ότι σε αυτήν την περίπτωση ισχύει μια σχέση ανάλογη με την **εξίσωση (I)** της υποενότητας 1, που αποδείξαμε προηγουμένως, για την κίνηση της ελεύθερης πτώσης. Ισχύει λοιπόν ότι:

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad \textbf{(II)}$$

Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι υπάρχει μια σειρά από επιπρόσθετες αναλογίες με το πρόβλημα της ελεύθερης πτώσης που μελετήσαμε προηγουμένως, οι οποίες είναι:

1. Υπάρχει ένα σύστημα αποτελούμενο από το ελατήριο και το σώμα όπως υπήρχε το σύστημα σώμα-Γη.
2. Μεταξύ των μελών αυτού του συστήματος ασκείται μια δύναμη η οποία γνωρίζουμε ότι δίνεται από τον Νόμο του Hooke $F_{ελ} = -kx$, όπως ακριβώς μεταξύ του σώματος και της Γης υπήρχε η δύναμη του βάρους. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι ενώ η δύναμη από το ελατήριο είναι μεταβλητή, η δύναμη του βάρους στην ελεύθερη πτώση από μικρό ύψος είναι σταθερή.
3. Η διαμόρφωση του συστήματος σώμα-ελατήριο αλλάζει συνεχώς, καθώς το σώμα κινείται, όπως ακριβώς η διαμόρφωση του συστήματος σώμα-Γη μεταβαλλόταν συνεχώς, καθώς το σώμα κινείτο ελεύθερα προς την επιφάνεια της Γης.

Οι αναλογίες αυτές υποδεικνύουν ότι μπορούμε να ορίσουμε μια άλλη μορφή αποθήκευσης της ενέργειας που θα είναι επίσης μια δυναμική ενέργεια, αλλά, καθώς σχετίζεται με την ελαστικότητα του ελατηρίου, ονομάζεται **ελαστική δυναμική ενέργεια**. Πρόκειται για ένα είδος δυναμικής ενέργειας την οποία έχουν όλα τα ελαστικά σώματα όπως: ένα μικρό λαστιχάκι, όταν το τεντώνουμε, ένας ιμάντας από αυτούς που χρησιμοποιούνται στο bungee jumping κ.ο.κ. Για την περίπτωση ενός ελατηρίου σταθεράς k που υπακούει στον Νόμο του Hooke και για οποιαδήποτε τιμή παραμόρφωσης αυτή η ελαστική δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(3.6)}$$

όπου x η επιμήκυνση ή η συσπείρωση του ελατηρίου (μετρούμενη ως προς το φυσικό του μήκος).

Στις περιπτώσεις της ελεύθερης πτώσης (όπου εισήχθηκε το σύστημα σώμα-Γη) και της κίνησης ενός σώματος προσδεδεμένου στο άκρο ενός ελατηρίου (όπου εισήχθηκε το σύστημα ελατήριο-σώμα), με τις οποίες μελετήσαμε τη βαρυτική και την ελαστική δυναμική ενέργεια, χρησιμοποιήσαμε αντιστοίχως τις σχέσεις (I) και (II):

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

και

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι και στις δύο αυτές σχέσεις εμφανίζονται διαφορές δυναμικών και κινητικών ενεργειών.

Οι εμφανιζόμενες διαφορές των δυναμικών ενεργειών, δηλαδή:

$$mgh_1 - mgh_2 = U_{βαρ,αρχ} - U_{βαρ,τελ} = -\Delta U_{βαρ}$$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{ελ,αρχ} - U_{ελ,τελ} = -\Delta U_{ελ}$$

δεν είναι τυχαίο γεγονός.

Αποδεικνύεται ότι σε όλα τα είδη των δυναμικών ενεργειών αυτό που έχει φυσική σημασία δεν είναι αυτή καθαυτήν η τιμή της δυναμικής ενέργειας, αλλά οι *μεταβολές* της.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι πρακτικό να αναφερόμαστε σε απόλυτες τιμές δυναμικής ενέργειας. Για να γίνει όμως κάτι τέτοιο, θα πρέπει να ορίσουμε μια **διαμόρφωση αναφοράς** / **επίπεδο αναφοράς** για το σύστημά μας, στην οποία να αποδώσουμε τιμή δυναμικής ενέργειας ίση με το μηδέν.

Ένα δεύτερο σημείο που πρέπει να αναφερθεί για την περίπτωση όλων των δυναμικών ενεργειών είναι ότι ορισμένες φορές μπορούμε καταχρηστικά να τις αποδίδουμε αντί στο σύστημα, όπως είναι το ορθό, σε μόνο ένα από τα σώματα του συστήματος. Για να γίνει κατανοητό το σημείο αυτό, αρκεί να σκεφτούμε αρχικά την περίπτωση της ελεύθερης πτώσης ενός σώματος κοντά στην επιφάνεια της Γης. Τότε ορίσαμε το σύστημα σώμα-Γη στο οποίο εμφανίζεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια. Στην περίπτωση αυτήν, παρότι σύμφωνα με τον 3ο Νόμο του Νεύτωνα στα δύο σώματα ασκούνται ίσες δυνάμεις, είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι εξαιτίας της μάζας της Γης, πρακτικά αυτή δεν θα κινηθεί σε αντίθεση φυσικά από το σώμα. Αυτό σημαίνει ότι, επειδή πρακτικά μόνο το σώμα θα αποκτήσει κινητική ενέργεια, μπορούμε να αποδώσουμε τη δυναμική ενέργεια, η οποία στην πραγματικότητα ανήκει στο σύστημα σώμα-Γη, μόνο στο σώμα. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και στο σύστημα ελατήριο-σώμα, όπως θα εξηγηθεί στην ύλη μεγαλύτερης τάξης.

Επιλογή διαμόρφωσης αναφοράς

Στην περίπτωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, για κινήσεις κοντά στην επιφάνεια της Γης επιλέγουμε ως διαμόρφωση αναφοράς την κατάσταση στην οποία το σώμα βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης, (δηλαδή είναι $h = 0$). Στην περίπτωση της ελαστικής δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε ως διαμόρφωση αναφοράς εκείνη στην οποία το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.2

3. Το ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο, ενώ στο άλλο άκρο του είναι προσδεδεμένο ένα σώμα. Το ελατήριο επιμηκύνεται σε μια περίπτωση κατά x από το φυσικό του μήκος και σε μια άλλη περίπτωση συσπειρώνεται επίσης κατά x από το φυσικό του μήκος. Για αυτές τις δύο περιπτώσεις και για τη δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα, καθώς και για την ελαστική δυναμική ενέργεια ελατηρίου-σώματος, ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστή;

Α) Τόσο οι δυνάμεις όσο και οι δυναμικές ενέργειες είναι ίσες μεταξύ τους.

Β) Οι δυνάμεις είναι ίσες μεταξύ τους, αλλά οι δυναμικές ενέργειες δεν είναι ίσες μεταξύ τους.

Γ) Οι δυνάμεις δεν είναι ίσες μεταξύ τους, αλλά οι δυναμικές ενέργειες είναι ίσες μεταξύ τους.

Δ) Ούτε οι δυνάμεις ούτε οι δυναμικές ενέργειες είναι ίσες μεταξύ τους.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή είναι η Γ.

Επειδή έχουμε να κάνουμε με επιμήκυνση και συσπείρωση με τα ίδια μέτρα, οι δυνάμεις θα έχουν το ίδιο μέτρο, αλλά αντίθετες κατευθύνσεις, αφού η δύναμη από το ελατήριο δρα πάντα προς την κατεύθυνση του φυσικού μήκους του. Επομένως, οι δυνάμεις δεν είναι ίσες μεταξύ τους, διότι δεν έχουν ίδιες κατευθύνσεις. Αντιθέτως, οι δυναμικές ενέργειες είναι ίσες μεταξύ τους εξαιτίας της εξάρτησης από το τετράγωνο της παραμόρφωσης από το φυσικό μήκος.

4. Ο καρπός ενός δέντρου, που μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο μάζας 2 kg, βρίσκεται σε ένα κλαδί σε ύψος 2 m από το έδαφος, όπως φαίνεται στο **σχήμα**.

Δίνεται $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

α) Να υπολογίσετε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια $U_{βαρ}$ του συστήματος καρπός-Γη, αν θεωρήσουμε ως επίπεδο αναφοράς $h = 0$: (1) το έδαφος, (2) το κλαδί.

Να θεωρήσετε ότι στο $h = 0$ που επιλέγετε κάθε φορά η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι ίση με το μηδέν.

β) Κάποια στιγμή, αφού ωριμάσει ο καρπός, πέφτει στο έδαφος. Για καθεμία από τις προηγούμενες επιλογές (1) και (2) του επιπέδου αναφοράς, πόση είναι η μεταβολή $\Delta U_{βαρ}$ της δυναμικής ενέργειας του συστήματος καρπός-Γη εξαιτίας της πτώσης του καρπού στο έδαφος;

Λύση

α) Από τη στιγμή που επιλέξαμε ως επίπεδο αναφοράς το $h = 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια $U_{βαρ}$ του συστήματος καρπός-Γη ως προς αυτό, χρησιμοποιώντας την εξίσωση $U_{βαρ} = mgh$.

- Στην επιλογή (1) ο καρπός βρίσκεται σε ύψος $h = 2$ m, οπότε η αρχική δυναμική ενέργεια θα είναι:

$$U_{βαρ,αρχ} = mgh = (2\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(2\ \text{m}) = 39{,}2\ \text{J}$$

- Στην επιλογή (2) η αρχική δυναμική ενέργεια θα είναι:

$$U_{βαρ,αρχ} = mgh = (2\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0\ \text{m}) = 0\ \text{J}$$

β) Μεταβολή $\Delta U_{βαρ}$ της δυναμικής ενέργειας

- Στην επιλογή (1), όταν ο καρπός βρεθεί στην επιφάνεια της Γης, η τελική δυναμική ενέργεια θα είναι:

$$U_{βαρ,τελ} = mgh = (2\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0\ \text{m}) = 0\ \text{J}$$

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας θα είναι:

$$\Delta U_{βαρ} = U_{βαρ,τελ} - U_{βαρ,αρχ} = (0\ \text{J}) - (39{,}2\ \text{J}) = -39{,}2\ \text{J}$$

- Στην επιλογή (2) η τελική δυναμική ενέργεια θα είναι:

$$U_{βαρ,τελ} = mgh = (2\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(-2\ \text{m}) = -39{,}2\ \text{J}$$

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας θα είναι:

$$\Delta U_{βαρ} = U_{βαρ,τελ} - U_{βαρ,αρχ} = (-39{,}2\ \text{J}) - (0\ \text{J}) = -39{,}2\ \text{J}$$

Η τιμή είναι ίδια με αυτήν που προέκυψε στην επιλογή (1).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η επιλογή του επιπέδου αναφοράς επηρεάζει τις τιμές της δυναμικής ενέργειας, αλλά όχι την τιμή της μεταβολής της.

6. Μηχανική ενέργεια

Έχοντας ορίσει μέχρι στιγμής την κινητική ενέργεια, καθώς και δύο είδη δυναμικών ενεργειών, (βαρυτική και ελαστική), μπορούμε να ορίσουμε τώρα τη μηχανική ενέργεια $E_{μηχ}$ ενός συστήματος σωμάτων.

Μηχανική ενέργεια $E_{μηχ}$ ενός συστήματος σωμάτων ορίζεται ως το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των επιμέρους σωμάτων του συστήματος, καθώς και των δυναμικών ενεργειών που εμφανίζονται στο σύστημα. Ισχύει δηλαδή ότι:

$$E_{μηχ} = K + U_{βαρ} + U_{ελ} \quad (3.7)$$

όπου K είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών όλων των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα, $U_{βαρ}$ η συνολική βαρυτική δυναμική ενέργεια που οφείλεται στις αλληλεπιδράσεις λόγω της δύναμης του βάρους και $U_{ελ}$ η συνολική ελαστική δυναμική ενέργεια που οφείλεται σε αλληλεπιδράσεις από δυνάμεις ελαστικότητας, (οι οποίες στην περίπτωσή μας θα υπακούν στον Νόμο του Hooke).

Επειδή η διαμόρφωση αναφοράς στην οποία η δυναμική ενέργεια είναι ίση με το μηδέν μπορεί να επιλεχθεί αυθαίρετα, συμπεραίνουμε ότι και η τιμή της μηχανικής ενέργειας ενός συστήματος δεν ορίζεται απόλυτα, αφού εμπεριέχει τη σύμβαση μηδενισμού της δυναμικής ενέργειας.

7. Θερμική ενέργεια

Στην υποενότητα 3.1 μάθαμε ότι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της ενέργειας είναι ότι αυτή διατηρείται ή με άλλα λόγια πως ούτε δημιουργείται από το μηδέν ούτε εξαφανίζεται. Το πρώτο σκέλος αυτής της διαβεβαίωσης γίνεται εύκολα αποδεκτό από την εμπειρία μας, καθώς ποτέ, για παράδειγμα, δεν έχουμε παρατηρήσει ένα ακίνητο σώμα να ξεκινήσει να κινείται, άρα να αποκτήσει κινητική ενέργεια πάνω σε ένα οριζόντιο δάπεδο, ή ένα ακίνητο σώμα προσδεδεμένο στο άκρο ενός ελατηρίου να ξεκινήσει να κινείται παλινδρομικά αποκτώντας κινητική και δυναμική ενέργεια κ.ο.κ., αν δεν προηγηθεί προσφορά ενέργειας από έναν εξωτερικό παράγοντα. Μάλιστα, είναι τόσο ισχυρή η πίστη μας στο ότι είναι αδύνατο να παρατηρηθούν τέτοια φαινόμενα, ώστε, αν κάποιος μας τα επιδείξει, να θεωρήσουμε ότι είναι μια «καλά στημένη πλάνη» και να αναζητήσουμε κάποια αιτία που να τα εξηγεί.

Αντιθέτως, υπάρχει πληθώρα φαινομένων στα οποία φαίνεται ότι η ενέργεια εξαντλείται σταδιακά και τελικά εξαφανίζεται τελείως όπως για παράδειγμα το γεγονός ότι αν εκτοξεύσουμε ένα σώμα πάνω σε ένα οριζόντιο δάπεδο προσφέροντάς του κινητική ενέργεια, αυτό κάποια στιγμή θα σταματήσει να κινείται, άρα δεν θα έχει κινητική ενέργεια, αλλά δεν θα φαίνεται να διαθέτει και καμία ενέργεια άλλου είδους. Ανάλογα, αν θέσουμε σε ταλάντωση ένα σώμα που είναι προσδεδεμένο στο άκρο ενός ελατηρίου, άρα το σύστημα θα διαθέτει κινητική και ελαστική δυναμική ενέργεια, η ταλάντωση θα φθίνει σταδιακά και τελικά το σώμα θα σταματήσει να κινείται, οπότε το σύστημα δεν θα διαθέτει ούτε κινητική ούτε και δυναμική ενέργεια, αλλά θα φαίνεται να μην διαθέτει και καμία άλλου είδους ενέργεια. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να εξηγήσουμε αυτήν τη φαινομενική, αν θεωρήσουμε ότι η διατήρηση της ενέργειας ισχύει, εξαφάνιση της ενέργειας. Τα φαινόμενα αυτά συνδέονται με την ύπαρξη τριβών και αντιστάσεων από τον αέρα. Δυνάμεις όπως η τριβή και η αντίσταση του αέρα προκαλούν τη μακροσκοπική «εξαφάνιση» της κινητικής ενέργειας ενός συστήματος. Ως εκ τούτου, αυτές ονομάζονται **διασκορπιστικές δυνάμεις** (ή **δυνάμεις διασκορπισμού**).

Η ενεργειακή ανάλυση αυτών των φαινομένων σχετίζεται με τη θερμοκρασία του συστήματος. Για παράδειγμα, καθώς ένα σώμα κινείται σε οριζόντιο δάπεδο, η τριβή προκαλεί θέρμανση και στα δύο αντικείμενα (σώμα-δάπεδο). Αυτή η αύξηση της θερμοκρασίας συνδέεται με μια άλλη μορφή αποθήκευσης της ενέργειας που ονομάζεται **θερμική ενέργεια**. Στην πραγματικότητα, αυτή η ενέργεια είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών, λόγω της τυχαίας κίνησης των σωματιδίων που αποτελούν ένα σώμα.

Εσωτερικές ενέργειες

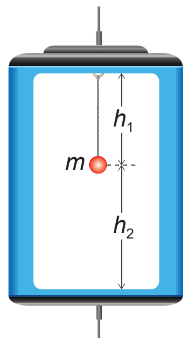
Η θερμική ενέργεια ανήκει στη μεγάλη οικογένεια των **εσωτερικών ενεργειών**, δηλαδή των ενεργειών που έχει ένα σώμα. Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν επίσης η χημική ενέργεια, αλλά και η ενέργεια που σχετίζεται με τον τους ισχυρούς δεσμούς εντός των πυρήνων των ατόμων.

Πείραμα: Ενεργειακή μελέτη κίνησης σε κεκλιμένο επίπεδο

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Μια σφαίρα μάζας m επαρκώς μικρών διαστάσεων, ώστε να θεωρείται σημειακή, κρέμεται από την οροφή ανελκυστήρα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να γράψετε την εξίσωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας της σφαίρας (χρησιμοποιώντας την m, στοιχεία από το σχήμα και την επιτάχυνση της βαρύτητας g) της σφαίρας, αν το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας βρίσκεται:



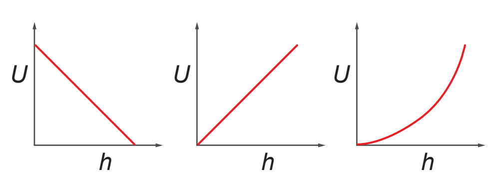
α) Σε οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη σφαίρα

β) Στο δάπεδο του ανελκυστήρα

γ) Στην οροφή του ανελκυστήρα.

2. Ένα αυτοκίνητο ζυγίζει 900 kg και κινείται με ταχύτητα 72 km/h. Ένα φορτηγό ζυγίζει 2 t και κινείται με ταχύτητα 36 km/h και ένα βλήμα ζυγίζει 25 g και κινείται με ταχύτητα 400 m/s. Να ταξινομήσετε τις κινητικές τους ενέργειες με αύξουσα σειρά.

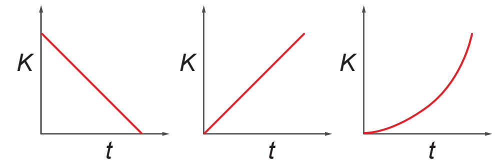
3. Ποιο από τα τρία διαγράμματα περιγράφει τη βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος (με επίπεδο αναφοράς το έδαφος), που εκτελεί ελεύθερη πτώση, σε συνάρτηση με το ύψος από το έδαφος;



(A) (B) (Γ)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Ποιο από τα τρία διαγράμματα περιγράφει την κινητική ενέργεια μιας πέτρας, η οποία τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται να εκτελέσει ελεύθερη πτώση, ως συνάρτηση του χρόνου;

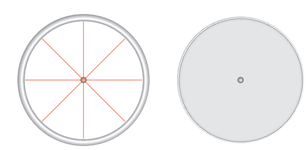


(A) (B) (Γ)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

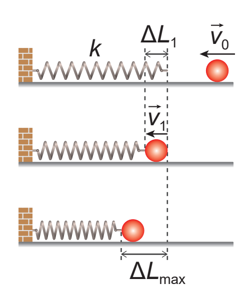
5. Ένα παιδί εκτοξεύει με τη σφεντόνα του μια πέτρα κατακόρυφα προς τα πάνω, η οποία επιστρέφει στο έδαφος, συγκρούεται με αυτό και ακινητοποιείται. Να αναφέρετε τις ενεργειακές μετατροπές που συμβαίνουν από τη στιγμή που το παιδί αρχίζει να τεντώνει τη σφεντόνα ως τη στιγμή που η πέτρα ακινητοποιείται στο έδαφος.

6. Οι τροχοί του σχήματος έχουν ίδια μάζα και ίδια ακτίνα. Στην περίπτωση του τροχού (A) η μάζα είναι σχεδόν ολόκληρη κατανεμημένη στην περιφέρεια, ενώ στην περίπτωση του τροχού (B) αυτός είναι ομογενής και ισοπαχής. Οι τροχοί μπορούν να περιστρέφονται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο τους. Αν τους δοθεί η ίδια ενέργεια, τότε θα αποκτήσουν την ίδια κινητική ενέργεια. Ποιος τροχός θα περιστρέφεται με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα;

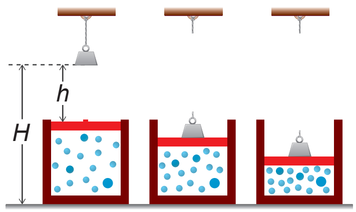


(A) (B)

7. Μικρή σφαίρα που ολισθαίνει σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου v_0 προσπίπτει σε οριζόντιο ιδανικό ελατήριο που βρίσκεται στη θέση του φυσικού του μήκους. Στο σχήμα απεικονίζονται τρία στιγμιότυπα του συστήματος ελατήριο-σφαίρα. Να γράψετε την εξίσωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος, αντλώντας στοιχεία από το σχήμα σε καθένα από τα στιγμιότυπα.



8. Στο σχήμα φαίνονται στιγμιότυπα της πτώσης ενός βαριδιού μάζας m που οδηγεί σε πρόσκρουση με δοχείο που περιέχει αέριο και στο πάνω μέρος του έχει προσαρμοστεί έμβολο με δυνατότητα κίνησης.



Το βαρίδι βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το έμβολο και H πάνω από τη βάση του δοχείου. Να θεωρήσετε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη βάση του δοχείου.

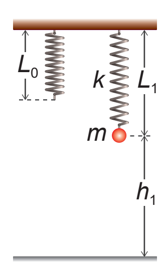
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

α) Να εκφράσετε τη μηχανική ενέργεια του βαριδιού πριν αφεθεί ελεύθερο να κινηθεί και ακριβώς πριν προσκρούσει στο κινούμενο έμβολο.

β) Να συγκρίνετε τη θερμική ενέργεια του αερίου πριν από την κρούση με αυτήν που έχει, όταν το βαρίδι ακινητοποιηθεί πάνω στο έμβολο.

Ασκήσεις

1. Ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 200\ \text{N/m}$ έχει μήκος $L_0 = 20\ \text{cm}$ και το ένα του άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο στην οροφή ενός εργαστηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια στιγμή προσαρτάται στο ελεύθερο άκρο του σφαίρα βάρους $5\ \text{N}$ και το σύστημα ελατήριο-σώμα ισορροπεί σε ύψος $h_1 = 2\ \text{m}$ από οριζόντιο δάπεδο.



Να υπολογίσετε στη θέση ισορροπίας του συστήματος ελατήριο-σώμα:

α) Το μήκος L_1 του ελατηρίου

β) Την ελαστική δυναμική ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο ελατήριο

γ) Τη δυναμική ενέργεια του συστήματος.

Να θεωρήσετε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το δάπεδο.

2. Μια σφαίρα βάρους $10\ \text{N}$ είναι προσδεδεμένη στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, το πάνω άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Η μάζα του ελατηρίου είναι αμελητέα. Στη θέση ισορροπίας το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $20\ \text{cm}$. Ένας μαθητής ανεβάζει με το χέρι κατακόρυφα τη σφαίρα, ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος.

Να υπολογίσετε τη σταθερά του ελατηρίου, καθώς και τη μεταβολή της βαρυτικής και της ελαστικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος ελατήριο-σώμα.

Πόση ενέργεια κατανάλωσε ο μαθητής για αυτήν τη μετατόπιση;

3. Ένας οριζόντιος ομογενής και ισοπαχής δίσκος με μάζα $m = 4\ \text{kg}$ και ακτίνα R περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του. Η επιτρόχια ταχύτητα της ομαλής κυκλικής κίνησης που εκτελούν τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου έχει μέτρο $10\ \text{m/s}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2}mR^2$.

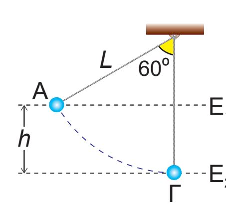
α) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του δίσκου, λόγω της περιστροφικής κίνησης.

β) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του δίσκου, αν εκτελούσε μόνο μεταφορική κίνηση και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του ήταν πάλι $10\ \text{m/s}$.

4. Ένας τερματοφύλακας εκτελεί ελεύθερο με μπάλα μάζας $400\ \text{g}$ προς τα πάνω (όχι κατακόρυφα). Αν η μηχανική ενέργεια της μπάλας είναι κάποια στιγμή $50\ \text{J}$ και το 40% αυτής της ενέργειας είναι κινητική, να υπολογίσετε την ταχύτητα και το ύψος από το έδαφος της μπάλας εκείνη τη στιγμή. Να θεωρήσετε τη δυναμική ενέργεια μηδενική στο έδαφος.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ \text{m/s}^2$.

5. Το σφαιρίδιο μάζας $m = 100\ \text{g}$ του σχήματος είναι προσαρτημένο σε αβαρές και μη εκτατό νήμα μήκους $L = 1\ \text{m}$ και κινείται



από τη θέση εκτροπής Α στη θέση Γ όπου το νήμα είναι κατακόρυφο. Να υπολογίσετε:

α) Τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του σφαιριδίου στις θέσεις Α και Γ, αν ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας θεωρηθεί **i)** το οριζόντιο επίπεδο E_1 που διέρχεται από το Α και **ii)** το οριζόντιο επίπεδο E_2 που διέρχεται από το Γ.

β) Τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας από τη θέση Α στη θέση Γ στις περιπτώσεις i) και ii). Εξαρτάται η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας από την επιλογή του επιπέδου μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας;

Δίνονται: $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = 0{,}5$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \text{m/s}^2$.

6. **α)** Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια ενός αυτοκινήτου που ζυγίζει 1.000 kg και κινείται με ταχύτητα $20\ \text{m/s}$.

β) Να υπολογίσετε από ποιο ύψος θα έπρεπε να αφεθεί το αυτοκίνητο έτσι, ώστε η κινητική του ενέργεια ακριβώς πριν χτυπήσει στο έδαφος να είναι ίση με αυτήν που υπολογίσατε στο ερώτημα α). Εξαρτάται το ύψος που υπολογίσατε από τη μάζα του αυτοκινήτου; Για τους υπολογισμούς θεωρήστε ότι $g = 10\ \text{m/s}^2$.

7. Ο Ισθμός της Κορίνθου είναι από τους δημοφιλέστερους προορισμούς για ανθρώπους που αγαπούν να κάνουν bungee jumping. Ο Κωνσταντίνος έχει βάρος 800 N και πηδά από τη γέφυρα του Ισθμού που απέχει 80 m από την επιφάνεια του νερού. Το ελαστικό σχοινί έχει μήκος 15 m, ασκεί δύναμη, μόνο όταν είναι επιμηκυσμένο και θεωρήστε ότι συμπεριφέρεται ως ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 47\ \text{N/m}$. Αν η αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα, η κίνηση του Κωνσταντίνου για τα πρώτα δεκαπέντε μέτρα, (τότε το σχοινί αρχίζει να τεντώνεται), μπορεί να θεωρηθεί ως ελεύθερη πτώση. Αν κατά τη διάρκεια ενός άλματος το σχοινί bungee τεντώνεται κατά 300% σε σχέση με το αρχικό του μήκος, να υπολογίσετε:

α) Το μήκος του σχοινιού, όταν το σύστημα bungee-Κωνσταντίνος ισορροπεί

β) Τη δυναμική ενέργεια του συστήματος bungee-Κωνσταντίνος ως προς την επιφάνεια του νερού τη στιγμή του μέγιστου τεντώματος του σχοινιού.

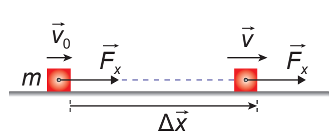
Να θεωρήσετε ότι το κέντρο μάζας του Κωνσταντίνου ταυτίζεται με το άκρο του σχοινιού.

3.3 Μεταφορά της ενέργειας

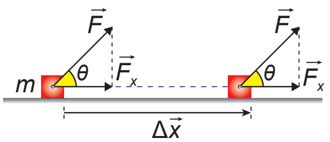
1. Έργο δύναμης

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας υποθέτοντας ότι ένα σώμα μάζας *m*, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ως υλικό σημείο, κινείται αρχικά με ταχύτητα $\vec{v}_0$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή αρχίζει να ασκείται στο σώμα μια σταθερή δύναμη $\vec{F}_x$, όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.8α**, οπότε το σώμα θα κινηθεί ομαλά και επιταχυνόμενα. Μετά από μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ η ταχύτητα του σώματος, άρα και η κινητική του ενέργεια $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$, θα έχουν και οι δύο αυξηθεί.

Εξηγούμε αυτήν την αύξηση της κινητικής ενέργειας του σώματος δεχόμενοι ότι η δύναμη που ασκείται πάνω του μεταφέρει ενέργεια από τον άνθρωπο ή τον μηχανισμό που ασκεί τη δύναμη (γενικότερα, θα λέμε από το *περιβάλλον*, όταν δεν είναι σαφές ποιος ασκεί τη δύναμη) προς το σώμα.



Σχήμα 3.8α Ένα σώμα που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_0$ δέχεται δύναμη $\vec{F}_x$ και μετατοπίζεται κατά $\Delta\vec{x}$.



Σχήμα 3.8β Η δύναμη $\vec{F}$ σχηματίζει γωνία θ με τη μετατόπιση.

Κάθε φορά που μια δύναμη μεταφέρει ενέργεια από ένα σώμα σε ένα άλλο, λέμε ότι η δύναμη *παράγει* ή *εκτελεί* έργο πάνω στο σώμα στο οποίο ασκείται. Συνεπώς, το **έργο** είναι το φυσικό μέγεθος που χρησιμοποιούμε, για να περιγράφουμε έναν από τους τρόπους *μεταφοράς* ενέργειας στον οποίο εμπλέκεται κάποια *δύναμη*.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε μια σχέση υπολογισμού του έργου μιας δύναμης. Στην περίπτωση του **σχήματος 3.8α** η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα είναι:

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

Αν μετά από μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ το σώμα έχει ταχύτητα $\vec{v}$, γνωρίζουμε από την κινηματική ότι ισχύει η σχέση:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x\Delta x$$

Αντικαθιστώντας σε αυτήν την εξίσωση την έκφραση για την επιτάχυνση a_x έχουμε:

$$v^2 = v_0^2 + 2\frac{F_x}{m}\Delta x \quad \text{ή} \quad mv^2 = mv_0^2 + 2F_x\Delta x$$

$$\text{ή} \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x\Delta x$$

Στο πρώτο μέλος της τελευταίας εξίσωσης εμφανίζεται η μεταβολή (στη συγκεκριμένη περίπτωση αύξηση) της κινητικής ενέργειας. Επομένως, το δεύτερο μέλος μπορεί να ερμηνευθεί ως το έργο της δύναμης που, μεταφέροντας ενέργεια, αυξάνει την κινητική ενέργεια του σώματος.

Μια δύναμη μεταφέρει ενέργεια, μέσω του έργου της, μόνο με τη συνιστώσα που συμπίπτει με τη διεύθυνση της κίνησης. Συνεπώς, η γενικότερη σχέση υπολογισμού του έργου μιας δύναμης είναι:

$$W_F = F\Delta x \sigma\upsilon\nu\theta \qquad \textbf{(3.8)}$$

όπου θ είναι η γωνία ανάμεσα στα διανύσματα της δύναμης και της μετατόπισης **(Σχήμα 3.8β)**.

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνουν ορισμένες σημαντικές παρατηρήσεις σχετικά με το έργο δύναμης.

1. Αν η δύναμη είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση, τότε $\theta = 0°$, οπότε το έργο της δύναμης δίνεται από τη σχέση:

   $$W_F = F\Delta x$$

   Αν η δύναμη είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση, τότε $\theta = 180°$, οπότε το έργο της δύναμης δίνεται από τη σχέση:

   $$W_F = -F\Delta x$$

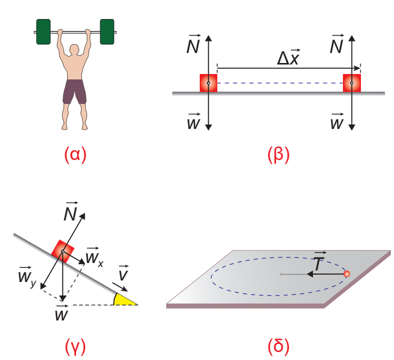
2. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις όπου το έργο μιας δύναμης είναι ίσο με μηδέν, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον **(Σχήμα 3.9)**.

Μονάδα έργου στο SI

Το έργο είναι μονόμετρο μέγεθος. Η μονάδα του στο SI είναι ίδια με τη μονάδα της ενέργειας, δηλαδή το 1 joule. Όπως φαίνεται από τον ορισμό του έργου ισχύει:

$$1\ \text{joule} = 1\ \text{J} = 1\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Γωνία διανυσμάτων



Σχήμα 3.9 Παραδείγματα δυνάμεων που δεν παράγουν έργο (δεν παρατηρείται κάποια μεταφορά ενέργειας). (α) Οι δυνάμεις που ασκεί ο αρσιβαρίστας στην ακίνητη μπάρα. (β) Η κάθετη δύναμη $\vec{N}$, αλλά και το βάρος $\vec{w}$ στην περίπτωση ενός σώματος που κινείται σε οριζόντιο επίπεδο. (γ) Η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ σε ένα σώμα που κατεβαίνει σε ένα κεκλιμένο επίπεδο. (δ) Η τάση του νήματος $\vec{T}$, στο άκρο του οποίου είναι προσδεδεμένο ένα σώμα που εκτελεί κυκλική κίνηση πάνω σε οριζόντιο επίπεδο.

- Όταν υπάρχει δύναμη, αλλά το σώμα δεν μετατοπίζεται ($\Delta x = 0$). Ένας αρσιβαρίστας που κρατά τα βάρη ακίνητα σε κάποιο ύψος και ένα παιδί που σπρώχνει έναν τοίχο είναι δύο παραδείγματα στα οποία υπάρχουν δυνάμεις που δεν παράγουν έργο, διότι δεν παρατηρείται μετατόπιση.
- Όταν η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση ($\theta = 90°$). Η κάθετη δύναμη που δρα σε ένα σώμα που κινείται σε ένα οριζόντιο ή κεκλιμένο επίπεδο και η κεντρομόλος δύναμη είναι παραδείγματα δυνάμεων των οποίων το έργο είναι ίσο με μηδέν, διότι είναι κάθετες στη μετατόπιση.

3. Το έργο μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν. Το πρόσημό αυτό έχει φυσικό περιεχόμενο. Αν $W_F > 0$, συμβαίνει μεταφορά ενέργειας από το περιβάλλον προς το σώμα. Αν $W_F < 0$, η μεταφορά ενέργειας γίνεται με την αντίστροφη φορά, δηλαδή από το σώμα προς το περιβάλλον. Αν $W_F = 0$, τότε δεν υπάρχει μεταφορά ενέργειας μεταξύ σώματος και περιβάλλοντος.

Έργο δύναμης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.3

1. Να αποδείξετε ότι οι δύο αναλύσεις του joule που έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα, δηλαδή το $1\,\text{kg}\cdot\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ και το $1\,\text{N}\cdot\text{m}$, ταυτίζονται.

Λύση

Από τον Θεμελιώδη Νόμο της Δυναμικής $F = ma$ προκύπτει ότι $1\,\text{N} = 1\,\text{kg}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, οπότε:

$$1\,\text{J} = 1\,\text{N}\cdot\text{m} = 1\,\text{kg}\cdot\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

2. Το **θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας** ή **θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας** διατυπώνεται ως εξής:

> Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος είναι ίση με το ολικό έργο που παράγεται σε αυτό από τις δυνάμεις που δέχεται.
>
> $$\Delta K = W_{ολ} \qquad \textbf{(3.9)}$$

Να αποδείξετε το θεώρημα στην περίπτωση ενός σώματος στο οποίο ασκείται μία μόνο δύναμη που παράγει έργο.

Λύση

Στην αρχή της υποενότητας αποδείξαμε ότι στην περίπτωση ενός σώματος (που μπορεί να θεωρηθεί ως υλικό σημείο), το οποίο κινείται υπό την επίδραση μίας δύναμης $\vec{F}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.9β**, ισχύει:

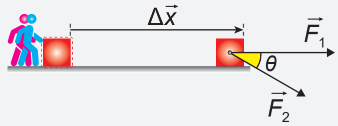
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F\Delta x \quad \text{ή} \quad \Delta K = W_F$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην πράξη το ολικό έργο $W_{ολ}$ υπολογίζεται προσθέτοντας τα έργα των δυνάμεων. Αν έχουμε βρει τη συνισταμένη $\Sigma\vec{F}$ των δυνάμεων, τότε το ολικό έργο ισούται με το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων, δηλαδή:

$$W_{ολ} = \Sigma W = W_{\Sigma\vec{F}}$$

3. Δύο εργάτες σπρώχνουν από κοινού ένα κιβώτιο μάζας $m = 225\,\text{kg}$ μετατοπίζοντάς το κατά $\Delta x = 8{,}5\,\text{m}$ πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η δύναμη που ασκεί ο πρώτος εργάτης είναι οριζόντια με μέτρο $F_1 = 12\ \text{N}$, ενώ η δύναμη που ασκεί ο δεύτερος εργάτης έχει μέτρο $F_2 = 10\ \text{N}$ και σχηματίζει γωνία $\theta = 30°$ με το οριζόντιο δάπεδο κατευθυνόμενη προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο **σχήμα**.



Αν το κιβώτιο ήταν αρχικά ακίνητο, ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητάς του στο τέλος της μετατόπισης Δx; Δίνεται συν$30° = 0,87$.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας για το σύστημα που είναι μόνο το κιβώτιο (το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ως σώμα). Για τον σκοπό αυτόν θα υπολογίσουμε αρχικά το συνολικό έργο που εκτελείται πάνω στο κιβώτιο, προσθέτοντας τα έργα των δυνάμεων που δέχεται. Έχουμε:

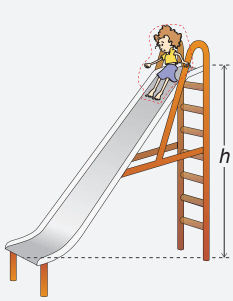
$$\begin{aligned} W_{ολ} &= W_1 + W_2 = F_1 \Delta x συν0° + F_2 \Delta x συν30° \\ &= (12\ \text{N})(8,5\ \text{m})(1) + (10\ \text{N})(8,5\ \text{m})(0,87) \\ &= 102\ \text{J} + 74\ \text{J} \\ &= 176\ \text{J} \end{aligned}$$

Αν v το μέτρο της ζητούμενης ταχύτητας, από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\Delta K = W_{ολ} \quad ή \quad \frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_{ολ} \quad ή \quad v = \sqrt{\frac{2W_{ολ}}{m}}$$

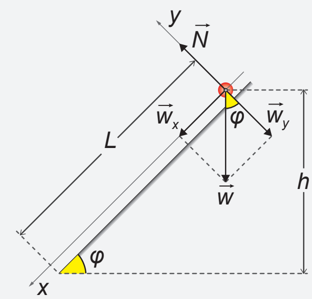
Με αντικατάσταση βρίσκουμε $v = 1,25\ \text{m/s}$.

4. Ένα μικρό κορίτσι ανεβαίνει στην κορυφή μιας τσουλήθρας που βρίσκεται σε ύψος $h = 2\ \text{m}$. Το κοριτσάκι ξεκινά την κάθοδό του κινούμενο χωρίς τριβές κατά μήκος της τσουλήθρας, όπως φαίνεται στο **σχήμα (α)**. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία φτάνει στη βάση της τσουλήθρας. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9,81\ \text{m/s}^2$.



(α)

Λύση



(β)

Επιλέγουμε ως σύστημα το μικρό κορίτσι, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ως υλικό σημείο πάνω στο οποίο ασκείται το βάρος $\vec{w}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από την τσουλήθρα. Η δύναμη $\vec{N}$ δεν παράγει έργο, οπότε το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας γράφεται:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_w$$

Επειδή το κοριτσάκι ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα, η αρχική του κινητική ενέργεια είναι ίση με μηδέν, $\frac{1}{2}mv_0^2 = 0$. Το βάρος αναλύεται σε δύο συνιστώσες $\vec{w}_x$ και $\vec{w}_y$, από τις οποίες μόνο η πρώτη παράγει έργο, αφού η δεύτερη είναι κάθετη στη μετατόπιση. Επομένως:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgημ\varphi L$$

όπου L η μετατόπιση του κοριτσιού μέχρι τη βάση της τσουλήθρας και v το μέτρο της ζητούμενης ταχύτητας. Από το ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετη πλευρά το ύψος h και υποτείνουσα μήκους L έχουμε:

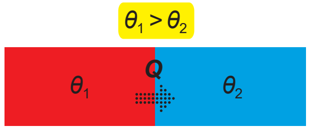
$$ημ\varphi = \frac{h}{L} \quad ή \quad h = Lημ\varphi$$

οπότε το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad ή \quad v = \sqrt{2gh}$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε $v = 6,3\ \text{m/s}$.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την απόκτηση ταχύτητας από το κορίτσι δεχόμενοι ότι το παραγόμενο έργο από τη δύναμη του βάρους που ασκεί η Γη πάνω στο μικρό κορίτσι αυξάνει την κινητική του ενέργεια.



Σχήμα 3.10 Όταν δύο σώματα διαφορετικής θερμοκρασίας (θ_1 και θ_2) έρθουν σε επαφή, τότε μεταφέρεται ενέργεια υπό μορφή θερμότητας από το σώμα υψηλότερης θερμοκρασίας (θ_1) προς το σώμα χαμηλότερης θερμοκρασίας (θ_2).

Μονάδα θερμότητας στο SI

Η θερμότητα είναι μονόμετρο μέγεθος, συμβολίζεται συνήθως με Q και έχει μονάδα στο SI το 1 joule.

Θερμότητα vs Έργο

Σε ***μικροσκοπικό*** επίπεδο η θερμότητα δεν είναι διαφορετικός τρόπος μεταφοράς ενέργειας από το έργο. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι, όταν δύο σώματα με διαφορετικές θερμοκρασίες έρθουν σε επαφή μεταξύ τους, οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των επιφανειακών σωματιδίων των δύο σωμάτων, που φυσικά είναι πολύ μεγάλες σε πλήθος, παράγουν η καθεμία από ένα έργο. Όταν όλα αυτά τα έργα αθροιστούν, προκύπτει μια καθαρή ροή ενέργειας από το σώμα υψηλότερης προς το σώμα χαμηλότερης θερμοκρασίας, την οποία ονομάζουμε θερμότητα. Αυτή δεν μπορεί να υπολογιστεί από το γινόμενο μιας μακροσκοπικής δύναμης επί μια μετατόπιση.

Μονάδα ισχύος στο SI

Η μέση ισχύς είναι ένα μονόμετρο μέγεθος που έχει ως μονάδα στο SI το 1 watt (W) για το οποίο ισχύει:

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

2. Θερμότητα

Στην προηγούμενη υποενότητα ορίσαμε το έργο ως έναν τρόπο μεταφοράς ενέργειας, ο οποίος συνδέεται με τη δράση μιας δύναμης. Μπορεί όμως να υπάρχει μεταφορά ενέργειας χωρίς την ύπαρξη δύναμης. Πρόκειται για τον δεύτερο τρόπο μεταφοράς ενέργειας που είναι η **θερμότητα**, η οποία εμφανίζεται κάθε φορά που δύο σώματα διαφορετικής θερμοκρασίας βρίσκονται σε επαφή. Η *αυθόρμητη* μεταφορά ενέργειας παρατηρείται πάντα από το σώμα υψηλότερης προς το σώμα χαμηλότερης θερμοκρασίας **(Σχήμα 3.10)**.

Η θερμότητα, όπως άλλωστε και το έργο, μπορεί να πάρει θετική, αρνητική, ή μηδενική τιμή, που ερμηνεύονται αντιστοίχως ως μεταφορά ενέργειας από το περιβάλλον στο σώμα, από το σώμα στο περιβάλλον, ή ως απουσία μεταφοράς ενέργειας μεταξύ σώματος και περιβάλλοντος.

Θα μελετήσουμε αναλυτικότερα τη θερμότητα στο πλαίσιο της επιμέρους ενότητας της θερμοδυναμικής, καθώς στη μηχανική το συγκεκριμένο μέγεθος δεν εμφανίζεται συστηματικά.

3. Ισχύς

Στις δύο προηγούμενες υποενότητες αναλύσαμε τους δύο τρόπους μεταφοράς ενέργειας. Αν υποθέσουμε ότι με κάποιον τρόπο, είτε με τον μηχανισμό του έργου μιας δύναμης είτε με τον μηχανισμό της θερμότητας, μεταφέρεται μια ποσότητα ενέργειας E, τότε πολλές φορές έχει σημασία (κυρίως από τεχνολογικής σκοπιάς) το πόσο γρήγορα γίνεται αυτή η μεταφορά. Για τον σκοπό αυτόν ορίζουμε την **ισχύ** ως τον ρυθμό μεταφοράς ενέργειας.

Η **μέση ισχύς** P_μ είναι το πηλίκο της μεταφερόμενης ενέργειας E προς το χρονικό διάστημα Δt εντός του οποίου πραγματοποιείται η συγκεκριμένη μεταφορά ενέργειας, δηλαδή:

$$P_\mu = \frac{E}{\Delta t} \qquad \textbf{(3.10)}$$

Στην περίπτωση που η μεταφορά της ενέργειας γίνεται μέσω του έργου κάποιας δύναμης παράλληλης στη μετατόπιση, τότε έχουμε:

$$E = W_F = F\Delta x$$

οπότε για την ισχύ P μπορούμε να γράψουμε:

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{F\Delta x}{\Delta t}$$

Αν το χρονικό διάστημα Δt είναι αρκούντως μικρό, τότε το $\Delta x / \Delta t$ είναι η στιγμιαία ταχύτητα v, οπότε η σχέση υπολογισμού της ισχύος λαμβάνει τη μορφή:

$$P = Fv \qquad \textbf{(3.11)}$$

και η ισχύς P ονομάζεται **στιγμιαία ισχύς**.

Άλλες μονάδες θερμότητας και ισχύος

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Σε μια φάση της πτώσης του ένας αλεξιπτωτιστής πέφτει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα. Να περιγράψετε τις ενεργειακές μετατροπές που συμβαίνουν.

2. Ένα όχημα ξεκινά από την ηρεμία και κινείται σε ευθύγραμμο δρόμο επιταχυνόμενο για ένα χρονικό διάστημα. Η κινητική ενέργεια του οχήματος στο τέλος αυτού του χρονικού διαστήματος είναι $4 \cdot 10^5$ J και η θερμική ενέργεια λόγω διαφόρων αντιστάσεων είναι 10^5 J. Να βρείτε την ενέργεια που κατανάλωσε ο κινητήρας του οχήματος.

3. Αν η δυναμική ενέργεια μιας πέτρας βάρους 41,8 N που βρίσκεται σε ύψος 10 m από το έδαφος προσφερόταν εξ ολοκλήρου σε 10 g νερό, πόσο θα αυξανόταν η θερμοκρασία του;
Δίνεται ότι για την ανύψωση κατά 1 °C απαιτούνται 4180 J/kg.

4. Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της Γης θα ανεβάζαμε έναν βράχο βάρους 10^6 N, αν του προσφέραμε ενέργεια 1 kWh;

5. Ένας χειριστής ανυψωτικού μηχανήματος ισχυρίζεται ότι με το μηχάνημά του, ισχύος 1 kW, μπορεί να ανεβάσει βάρος 1.000 N κατά 1,5 m εντός χρόνου 1 s. Μπορεί να ευσταθεί ο ισχυρισμός του;

6. Δύο μαθητές, που έχουν το ίδιο βάρος, ανεβαίνουν από το προαύλιο στην τάξη τους, η οποία βρίσκεται στον 2ο όροφο. Ο πρώτος μαθητής ανεβαίνει τα σκαλοπάτια σε 45 s και ο δεύτερος τα ανεβαίνει σε 50 s. Να συγκρίνετε τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας των δύο μαθητών και την ισχύ που αποδίδουν.

7. Να αιτιολογήσετε τις παρακάτω προτάσεις.

α) Η δύναμη της βαρύτητας ενός δορυφόρου που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τη Γη δεν παράγει έργο.

β) Η τάση του νήματος με το οποίο είναι δεμένο ένα μπαλάκι που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση δεν παράγει έργο.

γ) Η κεντρομόλος δύναμη δεν παράγει έργο.

8. Μια ατσάλινη σφαίρα πέφτει από κάποιο ύψος σε δάπεδο από τσιμέντο. Χρησιμοποιώντας μια θερμική κάμερα παρατηρούμε ότι μετά την πρόσκρουση της σφαίρας στο τσιμέντο αυξάνεται τόσο η θερμοκρασία της σφαίρας όσο και του δαπέδου στο σημείο της πρόσκρουσης. Να αναλύσετε τις μετατροπές και τις μεταφορές ενέργειας που συμβαίνουν στο φαινόμενο. Πώς θα διαφοροποιούσατε την ανάλυσή σας, αν στη θέση της σφαίρας ήταν ένα μπαλάκι και στη θέση του τσιμεντένιου δαπέδου μια ρακέτα του τένις;

9. Να χαρακτηρίσετε το έργο της δύναμης του βάρους της βαλίτσας ως θετικό, αρνητικό ή μηδέν στα παρακάτω παραδείγματα:

α) Κάποιος κρατά μια βαριά βαλίτσα.

β) Κάποιος σηκώνει μια βαριά βαλίτσα.

γ) Κάποιος αφήνει μια βαριά βαλίτσα από ένα ύψος πάνω από το δάπεδο.

Στις περιπτώσεις που υπάρχει κίνηση της βαλίτσας, παίζει ρόλο αν αυτή γίνεται αργά ή γρήγορα;

10. Ένας μαθητής τρώει ένα παγωτό που του προσδίδει περίπου 200 χιλιοθερμίδες (kcals). Λόγω ενεργειακών απωλειών του πεπτικού και του απεκκριτικού συστήματος, ο οργανισμός χρησιμοποιεί περίπου το 20% αυτής της ενέργειας. Αν το βάρος του μαθητή είναι 600 N, να προσδιορίσετε το ύψος του βουνού που πρέπει να ανέβει, για να καταναλώσει αυτήν την ενέργεια. Δίνεται ότι 1 cal = 4,2 J.

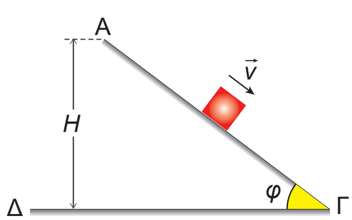
Ασκήσεις

1. Ένας εργάτης σπρώχνει σε οριζόντιο δάπεδο ένα έπιπλο βάρους 250 N ασκώντας σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου 200 N. Το έπιπλο μετατοπίζεται κατά 2 m με σταθερή ταχύτητα.

α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ επίπλου και δαπέδου.

β) Αφού σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο έπιπλο, να υπολογίσετε το έργο καθεμίας για την παραπάνω μετατόπιση.

2. Στο απλοποιημένο σχήμα φαίνεται μια βαλίτσα βάρους $w = 100$ N που κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος μιας κεκλιμένης ράμπας γωνίας κλίσης $\varphi = 37°$ όπου η κορυφή της Α απέχει από το οριζόντιο δάπεδο Δ απόσταση $H = 1{,}2$ m.



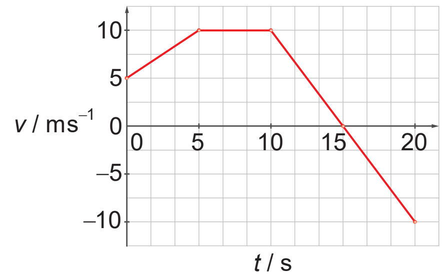
α) Αφού σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη βαλίτσα, να υπολογίσετε το έργο καθεμίας κατά τη μετακίνηση της βαλίτσας από το Α στο Γ.

β) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας κατά τη μετακίνηση της βαλίτσας από το Α στο Γ και να συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με το έργο του βάρους για την ίδια μετακίνηση.

γ) Να περιγράψετε τις μετατροπές και τις μεταφορές ενέργειας που συμβαίνουν κατά τη μετακίνηση της βαλίτσας από το Α στο Γ.

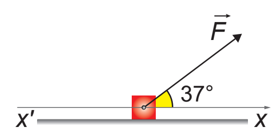
Δίνονται: ημ37° = 0,6 και συν37° = 0,8.

3. Σώμα μικρών διαστάσεων μάζας 1 kg κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος ενός προσανατολισμένου άξονα Ox και η τιμή της ταχύτητάς του μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 20$ s.

4. Ένας κύβος μάζας 1 kg ισορροπεί ακίνητος πάνω σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0{,}5$.



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στον κύβο σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 10 N και κατεύθυνσης που σχηματίζει γωνία 37° με την οριζόντια διεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα, με αποτέλεσμα ο κύβος να αρχίσει αμέσως την ολίσθησή του κατά μήκος ευθείας που ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα $x'x$. Θεωρήστε ότι ο κύβος ξεκινά από τη θέση Ο $(x = 0)$ του άξονα κινούμενος προς τη θετική φορά.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής ολίσθησης.

β) Αφού σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο, να υπολογίσετε το έργο της δύναμης $\vec{F}$ κατά τη μετατόπισή του από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 2$ s. Δίνονται: ημ37° = 0,6, συν37° = 0,8 και $g = 10$ m/s^2.

5. Συγκρουόμενο αυτοκινητάκι σε λούνα παρκ ζυγίζει 80 kg μαζί με τον οδηγό του. Κάποια στιγμή έχοντας ταχύτητα μέτρου 2 m/s φρενάρει, μπλοκάρουν οι τροχοί και κινούμενο ευθύγραμμα σταματά μετά από 2 m.

α) Να περιγράψετε τις μετατροπές και τις μεταφορές ενέργειας που συμβαίνουν κατά το φρενάρισμα.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της τριβής ανάμεσα στο αυτοκινητάκι και το δάπεδο.

6. Ένα αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $108\ \text{km/h}$ και ο κινητήρας του αποδίδει ισχύ $90\ \text{kW}$. Να υπολογίσετε το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που αντιστέκεται στην κίνηση του αυτοκινήτου.

7. Ένα αναβατόριο που χρησιμοποιείται στις μετακομίσεις αποδίδει ισχύ $2.700\ \text{W}$. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία θα μπορούσε να ανεβάσει ένα ψυγείο βάρους $900\ \text{N}$. Στην πραγματικότητα, η ταχύτητα με την οποία μπορεί να ανεβάσει το ψυγείο είναι μικρότερη από αυτήν που υπολογίσατε. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

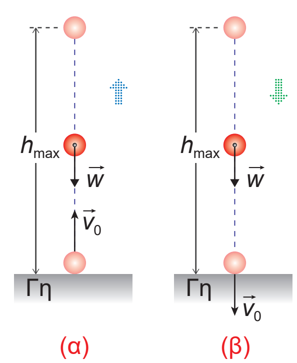
8. Μια αντλία άρδευσης ισχύος $1\ \text{kW}$ ανεβάζει νερό από πηγάδι σε ύψος $39{,}2\ \text{m}$ από το επίπεδο της αντλίας. Το νερό εξέρχεται από τον σωλήνα της αντλίας με ταχύτητα $4\ \text{m/s}$. Αν θεωρηθούν αμελητέες οι απώλειες ενέργειας προς το περιβάλλον, να υπολογίσετε πόσα kg νερό ανεβάζει η αντλία σε χρόνο $1\ \text{h}$.
Να θεωρήσετε ότι $g = 10\ \text{m/s}^2$.

9. Σε ένα υδροηλεκτρικό εργοστάσιο η υδατόπτωση έχει ροή $80\ \text{m}^3$ νερό ανά δευτερόλεπτο και το ύψος πτώσης του νερού είναι $140\ \text{m}$. Η απόδοση της εγκατάστασης είναι 80%. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική ενέργεια που παράγεται σε kWh μέσα σε ένα εικοσιτετράωρο.
Δίνεται η πυκνότητα του νερού $\rho = 1.000\ \text{kg/m}^3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

3.4 Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

1. Συντηρητικές δυνάμεις

Έστω ένα σώμα μάζας m που εκτοξεύεται από την επιφάνεια του εδάφους με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$, όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.11**. Υποθέτουμε ότι το σώμα, αφού φτάσει σε κάποιο μέγιστο ύψος h_{max} από την επιφάνεια της Γης, επιστρέφει σε αυτήν με την όλη κίνηση να εξελίσσεται κοντά στην επιφάνεια της Γης.



Σχήμα 3.11 Ένα σώμα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω.
(α) Στη φάση της ανόδου και
(β) στη φάση της καθόδου του.

Μια τέτοιου είδους κίνηση ονομάζεται **κλειστή** ή **κυκλική διαδρομή**, καθώς το σημείο από το οποίο ξεκινά η κίνηση ταυτίζεται με το σημείο στο οποίο τερματίζεται. Θα υπολογίσουμε τώρα το έργο της δύναμης του βάρους για αυτήν τη συγκεκριμένη κλειστή διαδρομή, υπολογίζοντας τα έργα για την άνοδο και την κάθοδο και προσθέτοντάς τα, οπότε θα έχουμε το έργο $W_{κυκλ}$ για ολόκληρη την κλειστή διαδρομή. Δηλαδή:

$$W_{κυκλ} = W_{αν} + W_{καθ} = mgh_{max}συν180° + mgh_{max}συν0°$$
$$= -mgh_{max} + mgh_{max}$$

Άρα:

$$W_{κυκλ} = 0 \qquad \textbf{(3.12)}$$

Το αποτέλεσμα αυτό, που αποδείχθηκε για μια ειδική κλειστή διαδρομή, μπορεί να γενικευτεί για το έργο της δύναμης του βάρους για οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή και κάθε δύναμη που ικανοποιεί αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται συντηρητική δύναμη.

Σύστημα σώμα-Γη

Φάση ανόδου

$K \xrightarrow{W_{βαρ}} U_{βαρ}$

Το έργο του βάρους ($W_{βαρ}$) μεταφέρει ενέργεια, μειώνοντας την κινητική ενέργεια (K) του συστήματος και αυξάνοντας τη βαρυτική δυναμική ενέργεια ($U_{βαρ}$) του συστήματος.

(α)

Σύστημα σώμα-Γη

Φάση καθόδου

$U_{βαρ} \xrightarrow{W_{βαρ}} K$

Το έργο του βάρους ($W_{βαρ}$) μεταφέρει ενέργεια, μειώνοντας τη βαρυτική δυναμική ενέργεια ($U_{βαρ}$) του συστήματος και αυξάνοντας την κινητική ενέργεια (K) του συστήματος.

(β)

Σχήμα 3.12 Οι μετατροπές ενέργειας που συμβαίνουν στο σύστημα σώμα-Γη σε μια κλειστή διαδρομή.
(α) Κατά τη φάση της ανόδου του σώματος και
(β) κατά τη φάση της καθόδου του σώματος.

Επομένως:

Μια δύναμη ονομάζεται **συντηρητική**, αν το έργο της κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής είναι ίσο με το μηδέν.

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι κατά τη διάρκεια του προηγούμενου υπολογισμού αποδείξαμε ότι $W_{βαρ,αν} = -W_{βαρ,καθ}$, γεγονός που ισχύει γενικά σε κάθε περίπτωση συντηρητικής δύναμης από την άποψη ότι σε ένα τμήμα της κλειστής διαδρομής το έργο είναι θετικό, ενώ στο υπόλοιπο τμήμα της κλειστής διαδρομής το έργο είναι ίσο κατά απόλυτη τιμή και αρνητικό. Στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι $W_{βαρ,αν} = -mgh_{max}$ και $W_{βαρ,καθ} = mgh_{max}$, γεγονός που σημαίνει ότι κατά την άνοδο το έργο του βάρους αφαιρεί ενέργεια από το σώμα, (πράγματι, η κινητική ενέργεια του σώματος μειώνεται), ενώ κατά την κάθοδο προσφέρει ενέργεια στο σώμα, (πράγματι, είναι εύκολα αντιληπτό ότι κατά την κάθοδο αυξάνεται η κινητική ενέργεια του σώματος). Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι: «Πού μεταφέρεται αυτή η ενέργεια κατά την άνοδο και από πού μεταφέρεται αυτή η ενέργεια κατά την κάθοδο;»

Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, έχουμε εισαγάγει την έννοια της δυναμικής ενέργειας, η οποία αναφέρεται σε ένα σύστημα. Συγκεκριμένα, δεχόμαστε ότι κατά την άνοδο του σώματος το έργο του βάρους μεταφέρει ενέργεια μειώνοντας την κινητική ενέργεια του συστήματος και αυξάνοντας τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος, ενώ κατά την κίνηση της καθόδου το έργο του βάρους μεταφέρει πάλι ενέργεια μειώνοντας τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος και αυξάνοντας την κινητική ενέργεια του συστήματος και ειδικότερα στη συγκεκριμένη περίπτωση την κινητική ενέργεια του σώματος, αφού πρακτικά η Γη δεν κινείται. Αυτές οι δύο διαδικασίες απεικονίζονται με τη βοήθεια του **σχήματος 3.12**.

Επομένως, σύμφωνα με το συγκεκριμένο παράδειγμα:

Το έργο μιας δύναμης δεν μεταφέρει μόνο ενέργεια από και προς ένα σύστημα, αλλά μπορεί να *μεταφέρει ενέργεια εντός ενός συστήματος μειώνοντας ένα είδος ενέργειας και αυξάνοντας κάποιο άλλο είδος ενέργειας*.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι εκτός του βάρους και η δύναμη από ένα ελατήριο που υπακούει στον Νόμο του Hooke είναι συντηρητική.

Να περιγράψετε με σχήματα παρόμοια με αυτά που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση του συστήματος σώμα-Γη τι συμβαίνει στην περίπτωση του συστήματος σώμα-ελατήριο για μια κίνηση που εξελίσσεται σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο κατά τη διάρκεια μιας κλειστής διαδρομής που θα επιλέξετε· για παράδειγμα, από το φυσικό μήκος του ελατηρίου μέχρι μια ακραία θέση και επιστροφή στο φυσικό του μήκος.

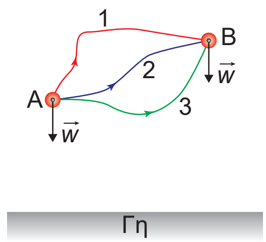
Ένα σημαντικό πόρισμα που προκύπτει από το προηγούμενο κριτήριο περί μηδενικής τιμής του έργου σε οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή για μια συντηρητική δύναμη είναι:

Το έργο που παράγεται από μια συντηρητική δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα το οποίο μετατοπίζεται μεταξύ δύο σημείων είναι *ανεξάρτητο από τη διαδρομή* που ακολουθεί το σώμα και εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική του θέση.

Στο **σχήμα 3.13** απεικονίζονται τρεις από τις άπειρες διαφορετικές διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει ένα σώμα κινούμενο από το σημείο Α στο σημείο Β, ενώ πάνω του ασκείται, πιθανόν μεταξύ και άλλων δυνάμεων, η δύναμη του βάρους. Σύμφωνα με το πόρισμα περί ανεξαρτησίας του έργου μιας συντηρητικής δύναμης, (όπως το βάρος), από τη διαδρομή θα ισχύει ότι:

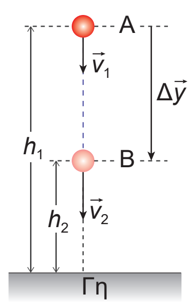
$$W_{\beta\alpha\rho,\, A \xrightarrow{1} B} = W_{\beta\alpha\rho,\, A \xrightarrow{2} B} = W_{\beta\alpha\rho,\, A \xrightarrow{3} B}$$

δηλαδή το έργο του βάρους θα είναι το ίδιο στις τρεις αυτές διαδρομές, αλλά και σε οποιαδήποτε άλλη διαδρομή που συνδέει τα σημεία Α και Β.



Σχήμα 3.13 Το έργο της δύναμης του βάρους είναι το ίδιο, όταν το σώμα μεταφέρεται από τη θέση Α στη θέση Β, ανεξάρτητα από τη διαδρομή που θα ακολουθηθεί (1, 2 ή 3), επειδή το βάρος είναι συντηρητική δύναμη.

Η τελευταία ιδιότητα των συντηρητικών δυνάμεων με την οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, που θα συνδυαστεί με την ανεξαρτησία του έργου από τη διαδρομή, θα αναδείξει τη σπουδαιότητα των συντηρητικών δυνάμεων στον υπολογισμό του έργου, που αποδεικνύεται εξαιρετικά απλός. Θα ασχοληθούμε και πάλι με την περίπτωση ενός σώματος που πέφτει ελεύθερα και κατακόρυφα, καθώς αυτό διέρχεται από δύο σημεία Α (διαμόρφωση 1) και Β (διαμόρφωση 2), όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.14**.



Σχήμα 3.14 Ένα σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

Για την κίνηση αυτήν το έργο της δύναμης του βάρους θα είναι:

$$W_{\beta\alpha\rho,\, A\to B} = mg\Delta y \sigma\upsilon\nu 0 = mg\left(h_1 - h_2\right) = mgh_1 - mgh_2$$
$$= U_{\beta\alpha\rho,\,1} - U_{\beta\alpha\rho,\,2} = -\Delta U_{\beta\alpha\rho}$$

δηλαδή το έργο της δύναμης του βάρους είναι αντίθετο της μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι το έργο μιας συντηρητικής δύναμης όπως το βάρος δεν εξαρτάται από τη διαδρομή. Συνεπώς, για οποιαδήποτε κίνηση που ξεκινά από το σημείο Α και καταλήγει στο σημείο Β ανεξάρτητα από την τροχιά θα ισχύει ότι:

$$W_{\beta\alpha\rho,\, A\to B} = U_{\beta\alpha\rho,\,1} - U_{\beta\alpha\rho,\,2} = -\Delta U_{\beta\alpha\rho} \tag{3.13}$$

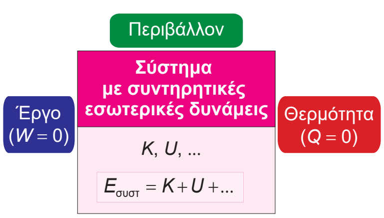
Πρόκειται και πάλι για ένα γενικό χαρακτηριστικό όλων των συντηρητικών δυνάμεων· το έργο τους μπορεί να υπολογιστεί χωρίς να μας ενδιαφέρει η διαδρομή που ακολουθεί το σώμα, χρησιμοποιώντας απλώς και μόνο τη διαφορά δύο τιμών της αντίστοιχης δυναμικής ενέργειας.

Στον **πίνακα 3.2** συνοψίζονται οι δύο συντηρητικές δυνάμεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, οι αντίστοιχες εκφράσεις για τις δυναμικές τους ενέργειες, καθώς και οι εκφράσεις για τον υπολογισμό του έργου τους, όταν το σύστημα μεταβαίνει από τη διαμόρφωση 1 στη διαμόρφωση 2.

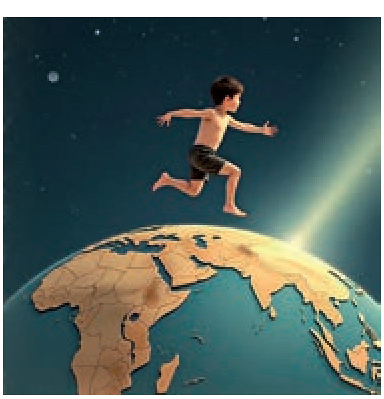
Πίνακας 3.2 Συντηρητικές δυνάμεις

Δύναμη	Νόμος για τη δύναμη	Δυναμική ενέργεια	Έργο
Βαρυτική δύναμη κοντά στην επιφάνεια της Γης	$w = mg$	$U_{βαρ} = mgh$	$W_{βαρ,\, Α\to Β} = U_{βαρ,\,1} - U_{βαρ,\,2} = -\Delta U_{βαρ}$
Δύναμη ελατηρίου	$F_{ελ} = -kx$	$U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2$	$W_{ελ,\, Α\to Β} = U_{ελ,\,1} - U_{ελ,\,2} = -\Delta U_{ελ}$

2. Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας σε μονωμένα συστήματα όπου όλες οι εσωτερικές δυνάμεις είναι συντηρητικές



Σχήμα 3.15 Ενεργειακό μοντέλο για το σύστημα



Το μοντέλο ενέργειας που εξετάζουμε έχει τη μορφή του **σχήματος 3.15**. Στην υποενότητα 3.2, που έγινε η εισαγωγή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, ξεκινήσαμε αποδεικνύοντας ότι στην ελεύθερη πτώση ενός σώματος μάζας m μεταξύ δύο σημείων (σε διαφορετικό ύψος) κοντά στην επιφάνεια της Γης ισχύει:

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

όπου mgh_1 και $\frac{1}{2}mv_1^2$ είναι αντιστοίχως η βαρυτική δυναμική ενέργεια του **συστήματος σώμα-Γη** και η κινητική ενέργεια του σώματος στη διαμόρφωση 1, ενώ mgh_2 και $\frac{1}{2}mv_2^2$ είναι οι αντίστοιχες ποσότητες στη διαμόρφωση 2 του ίδιου συστήματος. Μπορούμε να γράψουμε αυτήν τη σχέση σε δύο διαφορετικές μορφές:

1η	$U_{βαρ,\,1} - U_{βαρ,\,2} = K_2 - K_1$ ή $U_{βαρ,\,1} + K_1 = U_{βαρ,\,2} + K_2$ ή $E_{μηχ,\,1} = E_{μηχ,\,2}$
2η	$U_{βαρ,\,1} - U_{βαρ,\,2} = K_2 - K_1$ ή $-\left(U_{βαρ,\,2} - U_{βαρ,\,1}\right) = K_2 - K_1$ ή $\Delta K = -\Delta U_{βαρ}$ ή $\Delta K + \Delta U_{βαρ} = 0$

Παρόλο που οι συγκεκριμένες σχέσεις αποδείχθηκαν για μια πολύ ειδική περίπτωση, αυτήν της ελεύθερης πτώσης ενός σώματος κοντά στην επιφάνεια της Γης, αποδεικνύεται ότι ισχύουν σε όλες εκείνες τις περιπτώσεις στις οποίες έχουμε ένα *μονωμένο* σύστημα, δηλαδή ένα σύστημα που δεν ανταλλάσσει ενέργεια με το περιβάλλον του και στο οποίο δρουν μόνο συντηρητικές δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων που το αποτελούν, επομένως μπορεί να οριστεί κάποιου είδους δυναμικής ενέργειας U. Οι εκφράσεις αυτές αποτελούν την **Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ΑΔΜΕ)**, σύμφωνα με την οποία:

Σε ένα μονωμένο σύστημα στο οποίο όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές ή δρουν δυνάμεις που δεν παράγουν έργο η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, δηλαδή:

$$E_{\mu\eta\chi} = \sigma\tau\alpha\theta. \text{ ή } \Delta E_{\mu\eta\chi} = 0 \text{ ή } E_{\mu\eta\chi,\,1} = E_{\mu\eta\chi,\,2} \text{ ή } U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$
$$\text{ή } \Delta K = -\Delta U \text{ ή } \Delta K + \Delta U = 0$$

Διατήρηση της ενέργειας

Απόδειξη

Πείραμα: Μηχανική ενέργεια άκαμπτου σώματος

Ενεργειακή μελέτη κίνησης σε κεκλιμένο επίπεδο

Αξίζει στο σημείο αυτό να γίνουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

1. Το ότι η μηχανική ενέργεια ενός συστήματος παραμένει σταθερή δεν σημαίνει ότι παραμένουν σταθερές η κινητική και η δυναμική του ενέργεια. *Αυτές μπορούν να μεταβάλλονται*, αλλά με τέτοιο τρόπο, ώστε το άθροισμά τους, που είναι η μηχανική ενέργεια, να προκύπτει το ίδιο σε οποιαδήποτε κατάσταση του συστήματος.
2. Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας είναι ένας εξαιρετικά ισχυρός νόμος που μας επιτρέπει να συνδέσουμε το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας σε μια διαμόρφωση του συστήματος μια ορισμένη χρονική στιγμή με το άθροισμα των ίδιων ενεργειών σε κάποια άλλη διαμόρφωση μια άλλη χρονική στιγμή, χωρίς να χρειαστεί να μελετήσουμε τις *ενδιάμεσες καταστάσεις* από τις οποίες περνά το σύστημα.
3. Στον υπολογισμό των δυναμικών ενεργειών, που αποτελούν μέρη αντίστοιχων μηχανικών ενεργειών, θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στο γεγονός ότι οι δυναμικές ενέργειες υπολογίζονται πάντα ως προς τη διαμόρφωση αναφοράς στην οποία αποδίδουμε μηδενική δυναμική ενέργεια. Η διαμόρφωση αυτή μπορεί να επιλεχθεί τυχαία, αλλά θα πρέπει να είναι η ίδια για όλες τις δυναμικές ενέργειες που θα χρειαστεί να υπολογίσουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.4

1. α) Μια πέτρα αφήνεται να πέσει από ύψος h και όταν φτάνει στο έδαφος, αποκτά ταχύτητα v. Για να αποκτήσει ταχύτητα $2v$, θα πρέπει να πέσει από ύψος:

Α) h **Β)** $\sqrt{2}h$ **Γ)** $2h$ **Δ)** $4h$

β) Η αρχική δυναμική ενέργεια ενός καταδύτη, ο οποίος πέφτει από μεγάλο ύψος, θα έχει μετατραπεί σε κινητική ενέργεια κατά το ήμισυ, όταν αυτός θα βρίσκεται σε ύψος, σε σχέση με το αρχικό, ίσο με:

Α) $1/3$ **Β)** $1/2$ **Γ)** $1/4$ **Δ)** $1/5$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

α) Σωστή είναι η Δ. Θεωρούμε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος πέτρα-Γη είναι μηδέν, όταν η πέτρα βρίσκεται στο έδαφος. Επομένως, τη στιγμή που αφήνεται, η δυναμική ενέργεια είναι mgh και η κινητική ενέργεια μηδέν. Συνεπώς, η αρχική μηχανική ενέργεια είναι:

$$E_{μηχ,αρχ} = mgh$$

Όταν η πέτρα φτάνει στο έδαφος, η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν και η κινητική ενέργεια είναι K. Συνεπώς, η τελική μηχανική ενέργεια θα είναι:

$$E_{μηχ,τελ} = K = \frac{1}{2}mv^2$$

Στην πέτρα ασκείται μόνο το βάρος, οπότε η μηχανική ενέργεια διατηρείται, δηλαδή ισχύει $E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ}$. Λαμβάνοντας υπόψη τις δύο προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad ή \quad v = \sqrt{2gh}$$

Άρα, για να αποκτήσει διπλάσια ταχύτητα, θα πρέπει το ύψος να τετραπλασιαστεί.

β) Σωστή είναι η Β. Σκεφτόμαστε ανάλογα με το προηγούμενο ερώτημα για το σύστημα καταδύτης–Γη. Θεωρούμε ως διαμόρφωση 1 εκείνη όπου ο καταδύτης βρίσκεται στην αρχική του θέση, οπότε η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_{μηχ,1} = U_1 = mgh_1$$

Στη διαμόρφωση 2, όπου η δυναμική ενέργεια θα έχει μετατραπεί κατά το ήμισυ σε κινητική, η μηχανική ενέργεια θα είναι:

$$E_{μηχ,2} = U_2 + K_2 = U_2 + \frac{1}{2}U_1$$

Θεωρώντας αμελητέα την αντίσταση του αέρα, η μηχανική ενέργεια διατηρείται, δηλαδή ισχύει $E_{μηχ,1} = E_{μηχ,2}$. Λαμβάνοντας υπόψη τις δύο προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$U_2 = \frac{1}{2}U_1 \quad ή \quad mgh_2 = \frac{1}{2}mgh_1 \quad ή \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}$$

2. Μια μπάλα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $20\ m/s$. Να υπολογίσετε:

α) το μέγιστο ύψος και

β) την ταχύτητα της μπάλας, όταν θα βρίσκεται στο μισό του μέγιστου ύψους.

Να θεωρήσετε ότι $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

α) Θεωρούμε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος μπάλα-Γη είναι μηδέν, όταν η μπάλα βρίσκεται στο έδαφος. Επομένως, τη στιγμή της εκτόξευσης η μπάλα έχει μηδενική δυναμική ενέργεια και κινητική ενέργεια K_0. Συνεπώς, η αρχική μηχανική ενέργεια είναι:

$$E_{μηχ,αρχ} = K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Όταν η μπάλα φτάνει στο μέγιστο ύψος, η κινητική ενέργεια είναι μηδέν και η δυναμική ενέργεια είναι mgh_{max}. Συνεπώς, η μηχανική ενέργεια στο μέγιστο ύψος θα είναι:

$$E_{μηχ,τελ} = mgh_{max}$$

Στην μπάλα ασκείται μόνο το βάρος, οπότε η μηχανική ενέργεια διατηρείται, δηλαδή ισχύει $E_{μηχ,αρχ} = E_{μηχ,τελ}$. Λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες δύο σχέσεις έχουμε:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{max} \quad ή \quad h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{20^2}{2 \cdot 10}\ m = 20\ m$$

β) Στο μισό του μέγιστου ύψους, δηλαδή για $h_1 = 10\ m$, η μηχανική ενέργεια είναι:

$$E_{μηχ,1} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_1$$

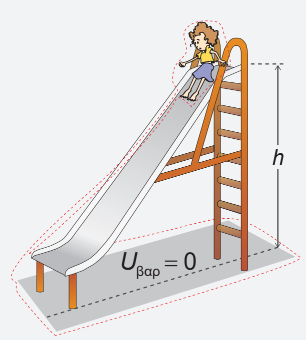
Αφού η μηχανική ενέργεια διατηρείται, ισχύει $E_{μηχ,τελ} = E_{μηχ,1}$. Επομένως:

$$mgh_{max} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_1$$

Η μάζα m απλοποιείται, όποτε αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών g, h_{max} και h_1 βρίσκουμε:

$$v = \sqrt{200}\ \frac{m}{s} \approx 14\ m/s$$

3. Ένα μικρό κορίτσι ανεβαίνει στην κορυφή μιας τσουλήθρας που βρίσκεται σε ύψος $h = 2\ m$. Το κορίτσι ξεκινά την κάθοδό του κινούμενο χωρίς τριβές κατά μήκος της τσουλήθρας, όπως φαίνεται στο **σχήμα (α)**.



(α)

Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία φτάνει στη βάση της τσουλήθρας. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Λύση

Έχουμε λύσει το συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, αλλά εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

Θεωρούμε το σύστημα κορίτσι-Γη το οποίο είναι μονωμένο, αφού η τσουλήθρα, που δεν ανήκει στο σύστημα, ασκεί στο κορίτσι μια δύναμη συνεχώς κάθετη στη μετατόπιση, οπότε δεν παράγει έργο. Επίσης, μεταξύ του μικρού κοριτσιού και της Γης δρα η δύναμη του βάρους που είναι συντηρητική. Άρα, ισχύει η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Με αρχική θέση την κορυφή της τσουλήθρας (από όπου ξεκινά η κάθοδος του κοριτσιού) και τελική τη βάση της ισχύει:

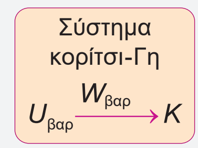
$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \quad \text{ή} \quad mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{ή} \quad v^2 = 2gh$$

$$\text{ή} \quad v = \sqrt{2gh}$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $v = 6{,}3\,\mathrm{m/s}$.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την απόκτηση ταχύτητας από το κορίτσι δεχόμενοι ότι η αρχική δυναμική ενέργεια του κοριτσιού μετατρέπεται σταδιακά σε κινητική ενέργεια με το έργο της δύναμης του βάρους ουσιαστικά να μεταφέρει ενέργεια μειώνοντας τη δυναμική ενέργεια του συστήματος και αυξάνοντας την κινητική ενέργεια. Μια αναπαράσταση αυτής της ερμηνείας φαίνεται στο **σχήμα (β)**.



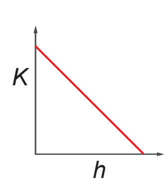
(β)

Παραδείγματα	Ταχύτητα προσγείωσης	Διάγραμμα κινητικής ενέργειας	Μετατροπή δυναμικής σε ελαστική

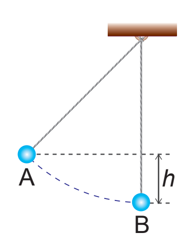
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

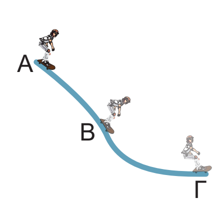
1. Μια μπίλια αφήνεται να κάνει ελεύθερη πτώση από κάποιο ύψος. Στο διάγραμμα παριστάνεται η κινητική ενέργεια K της μπίλιας σε συνάρτηση με το ύψος h από το έδαφος, καθώς αυτή πέφτει πρακτικά χωρίς αντίσταση από τον αέρα. Να σχεδιάσετε πάνω στο ίδιο διάγραμμα τη γραφική παράσταση της δυναμικής και της μηχανικής ενέργειας της μπίλιας σε συνάρτηση με το ύψος h.



2. Το σφαιρίδιο του εκκρεμούς που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα αφήνεται να κινηθεί από τη θέση Α. Η θέση Β είναι η κατώτερη θέση της αιώρησης. Δεδομένου ότι τουλάχιστον για την πρώτη αιώρηση μπορούμε να θεωρήσουμε αμελητέα την αντίσταση του αέρα, να δείξετε ότι η ταχύτητα του σφαιριδίου στη θέση Β είναι ανεξάρτητη της μάζας του και εξαρτάται μόνο από την υψομετρική διαφορά h μεταξύ των θέσεων Α, Β και την επιτάχυνση της βαρύτητας.



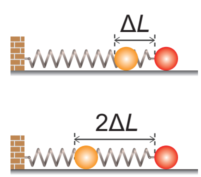
3. Ένας skater ξεκινά χωρίς αρχική ταχύτητα από την κορυφή Α μιας πίστας και «αφήνεται» να κατέβει χωρίς ελιγμούς, όπως στο σχήμα.



Θεωρώντας τις αντιστάσεις αμελητέες, να συμπληρώσετε τον πίνακα με τη δυναμική, την κινητική και τη μηχανική του ενέργεια.

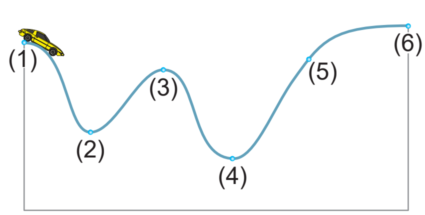
Θέση	U / J	K / J	$E_{μηχ}$ / J
Α	2.000		
Β		1.100	
Γ	0		

4. Μια μπάλα του μπιλιάρδου τοποθετείται, χωρίς να προσδεθεί, στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο ακλόνητα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σπρώχνουμε οριζόντια την μπάλα, ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί κατά ΔL και στη συνέχεια την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η μπάλα, μόλις πάψει να ακουμπά στο ελατήριο, έχει κινητική ενέργεια K. Αν επαναληφθεί η διαδικασία με διπλάσια συσπείρωση του ελατηρίου, να συγκρίνετε την κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει η μπάλα μόλις αποδεσμευτεί από το ελατήριο με την προηγούμενη τιμή K.



5. Ένας σφαιροβόλος αφήνει κατά λάθος τη σφαίρα να πέσει ελεύθερα προς το έδαφος, χωρίς αρχική ταχύτητα, από ύψος 1,6 m. Σε ποιο ύψος από το έδαφος η κινητική ενέργεια της σφαίρας θα είναι ίση με τη δυναμική; Να θεωρήσετε τη δυναμική ενέργεια μηδενική στο έδαφος.

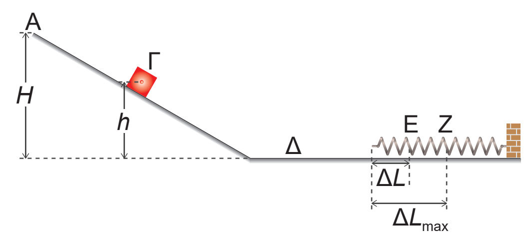
6. Ένα αυτοκινητάκι αφήνεται να κινηθεί στον αυτοκινητόδρομο του σχήματος.



Στην ιδανική περίπτωση που αγνοηθούν οποιεσδήποτε τριβές και αντιστάσεις να αντιστοιχίσετε τους αριθμούς των σημείων της τροχιάς με τα γράμματα στο ενεργειακό διάγραμμα.

Να εξηγήσετε γιατί το αυτοκινητάκι είναι αδύνατον να φτάσει στο σημείο (6).

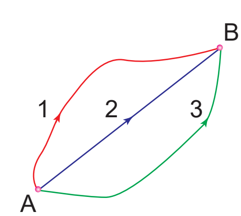
7. Ένας κύβος βάρους 10 N αφήνεται να κινηθεί από την κορυφή Α ενός κεκλιμένου επιπέδου, η οποία βρίσκεται σε ύψος $H = 1\,\text{m}$ από οριζόντιο επίπεδο. Αφού μεταβεί από το κεκλιμένο στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς να αναπηδήσει, ο κύβος συναντά οριζόντιο ιδανικό ελατήριο και το συσπειρώνει. Δίνονται: $\Delta L_{max} = 2\Delta L$ και $H = 2h$.



Αγνοώντας οποιουδήποτε είδους τριβές και αντιστάσεις, να συμπληρώσετε τον πίνακα ενεργειών για τις θέσεις Α, Γ, Δ, Ε και Ζ της τροχιάς του κύβου. Ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας να θεωρήσετε το οριζόντιο επίπεδο.

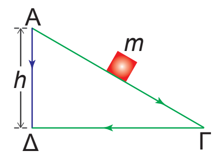
Θέση	$U_{βαρ}$ / J	$U_{ελ}$ / J	K / J	$E_{μηχ} = U_{βαρ} + U_{ελ} + K$ / J
Α				
Γ				
Δ				
Ε				
Ζ				

8. Στο σχήμα φαίνονται οι τροχιές των κέντρων μάζας τριών κουτιών ενός απορρυπαντικού, καθώς η υπάλληλος ενός σουπερμάρκετ τα τοποθετεί σε ένα ράφι.



Να συγκρίνετε τα έργα του βάρους των κουτιών στις τρεις διαδρομές.

9. Για το σώμα μάζας m του σχήματος να υπολογίσετε το έργο του βάρους κατά τη μετάβαση του σώματος από το σημείο Α στο σημείο Δ:



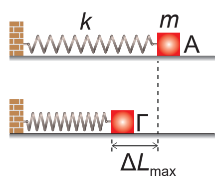
α) απευθείας **β)** μέσω του σημείου Γ.

Τι παρατηρείτε;

Κατά την κίνηση δεν υπάρχουν τριβές. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

10. Κλειστή διαδρομή

Ένα σώμα μάζας m κινείται σε τραχύ δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ. Το σώμα πραγματοποιεί την κλειστή διαδρομή $Α \rightarrow Γ \rightarrow Α$, όπου η θέση Α αντιστοιχεί στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και η θέση Γ στη θέση μέγιστης συσπείρωσης $\left(\Delta L_{max}\right)$. Αν k η σταθερά του ελατηρίου και g η επιτάχυνση της βαρύτητας, να υπολογίσετε:



α) το έργο της δύναμης του ελατηρίου,

β) το έργο της τριβής ολίσθησης.

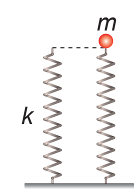
Ασκήσεις

1. Ένα πέδιλο έφυγε κατά λάθος από έναν σκιέρ, όταν αυτός προσπαθούσε να το δέσει. Το πέδιλο ξεκίνησε χωρίς αρχική ταχύτητα και άρχισε να ολισθαίνει σε κατηφορική πίστα. Η υψομετρική διαφορά του σημείου από όπου ξεκίνησε το πέδιλο έως τη βάση της πίστας είναι $20\ m$. Αν θεωρήσετε αμελητέες τις διάφορες αντιστάσεις, να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία θα φτάσει το πέδιλο στη βάση της πίστας. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

2. Μια αθλήτρια του άλματος σε ύψος επιχειρεί ένα άλμα κατά το οποίο περνά πάνω από τον πήχη με ταχύτητα μέτρου $0,4\ m/s$ έχοντας μετατοπίσει κατακόρυφα το κέντρο μάζας της συνολικά κατά $1,6\ m$. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με το οποίο εγκατέλειψε το έδαφος, για να πραγματοποιήσει το άλμα της. Να θεωρήσετε την αντίσταση του αέρα αμελητέα και την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $9,8\ m/s^2$.

3. Ένας ποδοσφαιριστής εκτελεί φάουλ έξω από τη μεγάλη περιοχή. Η μπάλα φεύγει από το πόδι του με ταχύτητα $25\ m/s$ και περνά πάνω από το τείχος των αμυντικών σε ύψος $2,45\ m$ από το χορτάρι. Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μπάλας, όταν βρίσκεται ακριβώς πάνω από το τείχος. Να θεωρήσετε αμελητέα την αντίσταση του αέρα στη διαδρομή της μπάλας από τη θέση του λακτίσματος έως τη θέση πάνω από το τείχος. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

4. Στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $98\ N/m$ στερεώνουμε μια μπάλα μάζας $1\ kg$. Το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αφήνουμε την μπάλα χωρίς αρχική ταχύτητα από τη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, δηλαδή τη συσπείρωση όταν η μπάλα ακινητοποιείται στιγμιαία κατά την κάθοδό της. Να θεωρήσετε την αντίσταση του αέρα αμελητέα και την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $9,8\ m/s^2$.



5. Μια ομογενής μεταλλική ράβδος μήκους $L = 0,3\ m$ και μάζας m μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα άκρο της. Η ράβδος αφήνεται από την οριζόντια θέση να περιστραφεί γύρω από τον άξονα. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, όταν βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση. Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που περνά από το άκρο της $I = \frac{1}{3}mL^2$. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

6. Ένα παιδί μέσα στο έλκηθρό του ξεκινά από την ηρεμία από την κορυφή μιας χιονισμένης πλαγιάς και φτάνει στο χαμηλότερο σημείο της πλαγιάς με ταχύτητα μέτρου $10\ m/s$. Το σύστημα παιδί-έλκηθρο έχει συνολική μάζα $40\ kg$.

α) Να υπολογίσετε το ύψος της πλαγιάς, αν αγνοήσετε κάθε είδους τριβή. Στην πραγματική περίπτωση όπου έχουμε τριβές/αντιστάσεις, για το ύψος της πλαγιάς που υπολογίσατε, η ταχύτητα με την οποία θα φτάσει το σύστημα έλκηθρο-παιδί στη βάση της πλαγιάς θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από $10\ \text{m/s}$;

β) Να κατασκευάσετε σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας του συστήματος παιδί-έλκηθρο σε συνάρτηση με το ύψος από το χαμηλότερο σημείο της πλαγιάς για την κίνηση από την κορυφή έως τη βάση της.

Να θεωρήσετε ότι $g = 10\ \text{m/s}^2$.

7. O Armand Duplantis, κάτοχος του παγκόσμιου ρεκόρ στο άλμα επί κοντώ, σε ένα μεγάλο άλμα περνά πάνω από τον πήχη με ταχύτητα μέτρου $0{,}5\ \text{m/s}$ και το κέντρο μάζας του απέχει από το έδαφος $6\ \text{m}$. O αθλητής ζυγίζει $80\ \text{kg}$ και το στρώμα υποδοχής ύψους $1{,}2\ \text{m}$ συμπεριφέρεται ως ιδανικό ελατήριο σταθεράς $20.000\ \text{N/m}$.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του αθλητή ακριβώς πριν ακουμπήσει στο στρώμα.

β) Πόσο θα έχει βυθιστεί το στρώμα τη στιγμή της πρώτης ακινητοποίησης του αθλητή;

Να θεωρήσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $10\ \text{m/s}^2$ και να αγνοήσετε την αντίσταση του αέρα.

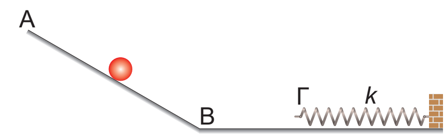
8. Ένας μαθητής παίζει με τη σφεντόνα του, που συμπεριφέρεται ως ιδανικό ελατήριο σταθεράς $1.400\ \text{N/m}$, εκτοξεύοντας μπίλιες μάζας $100\ \text{g}$.

α) Αν σε μια οριζόντια εκτόξευση το λάστιχο της σφεντόνας τεντώνεται κατά $10\ \text{cm}$, να υπολογίσετε την ταχύτητα της μπίλιας, όταν χάνει την επαφή με τη σφεντόνα.

β) Αν η εκτόξευση ήταν κατακόρυφη, σε ποιο μέγιστο ύψος πάνω από το σημείο εκτόξευσης θα έφτανε η μπίλια;

Να θεωρήσετε την αντίσταση του αέρα αμελητέα και την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με $9{,}8\ \text{m/s}^2$.

9. Από την κορυφή Α ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου ύψους $0{,}8\ \text{m}$ αφήνεται να ολισθήσει μια μπάλα μάζας $1\ \text{kg}$. Η μπάλα φτάνει στη βάση Β του κεκλιμένου επιπέδου και εισέρχεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Στη συνέχεια, η μπάλα συναντά στο σημείο Γ το ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $100\ \text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η μπάλα συσπειρώνει το ελατήριο μέχρι που σταματά στιγμιαία και στη συνέχεια αρχίζει να κινείται προς τα πίσω.

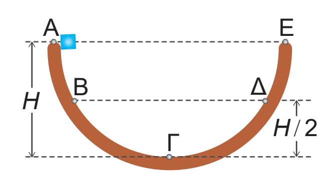
α) Να βρείτε την ταχύτητα της μπάλας στο σημείο Β κατά την κάθοδο.

β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

γ) Με τις υποθέσεις που έγιναν, δηλαδή τελείως λεία δάπεδα, να προβλέψετε πώς θα κινηθεί η μπάλα, όταν χάσει την επαφή της με το ελατήριο.

Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$.

10. Στο ημικυκλικό μαγειρικό σκεύος του σχήματος αφήνεται να γλιστρήσει ένα κομμάτι πάγου αμελητέων διαστάσεων από το άκρο του Α που απέχει από το χαμηλότερο σημείο Γ απόσταση $H = 16\ \text{cm}$. Να αγνοήσετε οποιοδήποτε είδος τριβής και να θεωρήσετε ότι $g = 10\ \text{m/s}^2$.



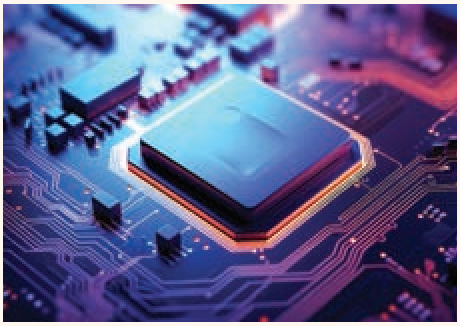
α) Να διερευνήσετε αν ο πάγος θα φτάσει στο άκρο Ε.

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων στα σημεία Β και Δ της τροχιάς του πάγου που απέχουν από το χαμηλότερο σημείο Γ απόσταση $H/2$.

γ) Να κατασκευάσετε σε σύστημα βαθμολογημένων αξόνων τη γραφική παράσταση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του πάγου σε συνάρτηση με το ύψος από το χαμηλότερο σημείο Γ από τη στιγμή που ο πάγος αφήνεται έως τη στιγμή που ακινητοποιείται για πρώτη φορά. Να θεωρήσετε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Γ.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Από τη δύναμη στην ενέργεια

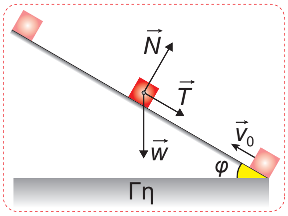


3.5 Διατήρηση και υποβάθμιση της ενέργειας

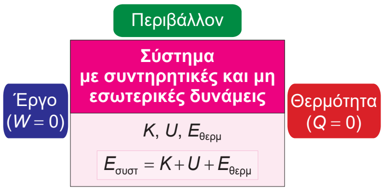
1. Διατήρηση της ενέργειας σε μονωμένα συστήματα όταν υπάρχουν και διασκορπιστικές δυνάμεις

Το κλασικότερο παράδειγμα μη συντηρητικής δύναμης είναι η τριβή ολίσθησης. Ας υποθέσουμε ότι εκτοξεύουμε ένα σώμα κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου με φορά προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο **σχήμα 3.16**. Θα επιλέξουμε ως σύστημα το σώμα μαζί με το κεκλιμένο επίπεδο και τη Γη, οπότε το σύστημα είναι *μονωμένο*.

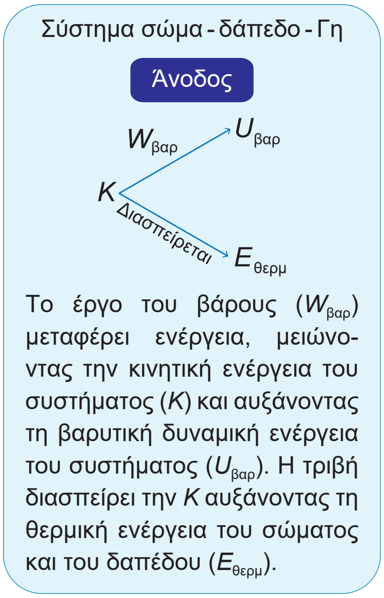
Η ύπαρξη της τριβής προκαλεί την έκλυση θερμικής ενέργειας από το σύστημα, όπως αναφέρθηκε στην υποενότητα 3.2 (7). Αν κάναμε το συγκεκριμένο πείραμα, μετά το τέλος του θα διαπιστώναμε ότι η θερμοκρασία τόσο του σώματος όσο και του κεκλιμένου επιπέδου θα είχε αυξηθεί. Αυτό σημαίνει ότι η μείωση στην κινητική ενέργεια του σώματος αύξησε τη θερμική ενέργεια τόσο του σώματος όσο και του κεκλιμένου επιπέδου. Το **σχήμα 3.18** συνοψίζει τις μεταφορές ενέργειας που συμβαίνουν εντός του συστήματος σώμα-κεκλιμένο επίπεδο-Γη.



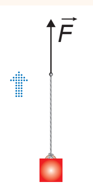
Σχήμα 3.16 Σώμα εκτοξεύεται κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου.



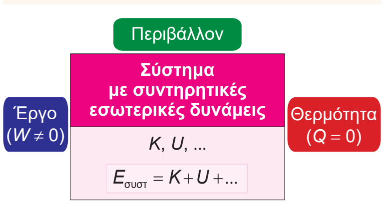
Σχήμα 3.17 Ενεργειακό μοντέλο για το σύστημα



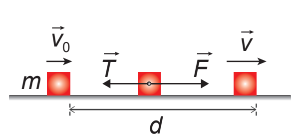
Σχήμα 3.18 Οι μετατροπές ενέργειας που συμβαίνουν στο εσωτερικό του συστήματος σώμα-κεκλιμένο επίπεδο-Γη.



Σχήμα 3.19 Σώμα δέχεται μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ που το ανυψώνει.



Σχήμα 3.20 Ενεργειακό μοντέλο για το σύστημα



Σχήμα 3.21 Εξωτερική και εσωτερική μη συντηρητική δύναμη στο σύστημα σώμα-δάπεδο

Η τριβή διασπείρει την κινητική ενέργεια του σώματος και η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται:

$$E_{μηχ} \neq σταθ.$$

Στην περίπτωση αυτήν η θερμική ενέργεια μάς παρέχει τη δυνατότητα για μια γενικότερη έκφραση της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας που λαμβάνει τη μορφή:

$$E_{μηχ} \neq σταθ. \quad ή \quad \Delta E_{μηχ} + \Delta E_{θερμ} = 0 \quad ή \quad \Delta K + \Delta U + \Delta E_{θερμ} = 0$$

Άρα:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 + \Delta E_{θερμ} \qquad \textbf{(3.14)}$$

2. Διατήρηση της ενέργειας όταν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και όλες οι εσωτερικές δυνάμεις είναι συντηρητικές

Θεωρούμε ότι στο σύστημα που μελετάμε οι εσωτερικές δυνάμεις είναι συντηρητικές και υπάρχουν μία ή περισσότερες εξωτερικές δυνάμεις.

Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι ένα σώμα μάζας m και η Γη. Το σώμα βρίσκεται ακίνητο στην επιφάνεια της Γης και αρχίζει να ανυψώνεται, καθώς δέχεται μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ με φορά προς τα πάνω από ένα συρματόσχοινο, όπως στο **σχήμα 3.19**. Η εξωτερική δύναμη μεταφέρει ενέργεια στο σύστημα και η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται:

$$E_{μηχ} \neq σταθ.$$

Στην περίπτωση αυτήν μπορούμε να εισαγάγουμε το παραγόμενο από τη δύναμη $\vec{F}$ έργο και να αποκαταστήσουμε πλέον μια γενικότερη έκφραση της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας, η οποία θα περιλαμβάνει και τους τρόπους μεταφοράς ενέργειας όπως το έργο (**Σχήμα 3.20**). Η έκφραση αυτή λαμβάνει τη μορφή:

$$E_{μηχ} \neq σταθ. \quad ή \quad \Delta E_{μηχ} = W_{ολ} \quad ή \quad \Delta K + \Delta U = W_{ολ}$$

Άρα:

$$U_1 + K_1 + W_{ολ} = U_2 + K_2 \qquad \textbf{(3.15)}$$

3. Διατήρηση της ενέργειας όταν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και υπάρχουν και μη συντηρητικές εσωτερικές δυνάμεις

Αν το σύστημα που περιγράφεται από το παραπάνω μοντέλο *δεν* είναι μονωμένο και η ανταλλαγή ενέργειας γίνεται με τον μηχανισμό του έργου (**Σχήμα 3.22**), τότε η γενικότερη έκφραση της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας λαμβάνει τη μορφή:

$$E_{μηχ} \neq σταθ. \quad ή \quad \Delta E_{μηχ} + \Delta E_{θερμ} = W_{ολ} \quad ή \quad \Delta K + \Delta U + \Delta E_{θερμ} = W_{ολ}$$

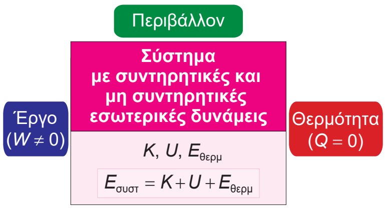
Άρα:

$$U_1 + K_1 + W_{ολ} = U_2 + K_2 + \Delta E_{θερμ} \qquad \textbf{(3.16)}$$

Ένα τέτοιο σύστημα είναι ένα σώμα μάζας m που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με τριβή (**Σχήμα 3.21**). Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα έχει οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_0$, ξεκινά να δρα πάνω του μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Για το σύστημα σώμα-δάπεδο ισχύει:

$$U_1 + K_1 + W_{ολ} = U_2 + K_2 + \Delta E_{θερμ}$$

$$0 + \frac{1}{2}mv_0^2 + Fd = 0 + \frac{1}{2}mv^2 + \Delta E_{θερμ}$$



Σχήμα 3.22 Ενεργειακό μοντέλο για το σύστημα

4. Διατήρηση της ενέργειας όταν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και συμβαίνει ανταλλαγή θερμότητας

Αν το σύστημα που περιγράφεται από το παραπάνω μοντέλο *δεν* είναι μονωμένο και η ανταλλαγή ενέργειας γίνεται τόσο με τον μηχανισμό του έργου όσο και με τον μηχανισμό της θερμότητας (**Σχήμα 3.23**), τότε η γενικότερη έκφραση της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας γράφεται ως εξής:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Μεταβολή της ενέργειας}\\ \text{του συστήματος}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Ποσότητες ενέργειας που ανταλλάσσει}\\ \text{το σύστημα με το περιβάλλον}\end{array}\right)$$

και σε μαθηματική μορφή:

$$\Delta E_{συστ} = W_{ολ} + Q \quad \text{ή} \quad \Delta K + \Delta U + \Delta E_{θερμ} = W_{ολ} + Q$$

Άρα:

$$U_1 + K_1 + W_{ολ} + Q = U_2 + K_2 + \Delta E_{θερμ} \qquad \textbf{(3.17)}$$

Σχήμα 3.23 Ενεργειακό μοντέλο για το σύστημα

Ένα τέτοιο σύστημα είναι ένα σώμα μάζας m που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με τριβή. Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα έχει οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_0$, ξεκινά να δρα πάνω του μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Ο αέρας του περιβάλλοντος λαμβάνεται υπόψη κατά την κίνηση του σώματος.

Έτσι, ένα (έστω και μικρό) μέρος της $\Delta E_{θερμ}$ καταναλώνεται για να αυξήσει τη θερμική ενέργεια του αέρα και το υπόλοιπο αυξάνει τη θερμική ενέργεια του συστήματος σώμα-δάπεδο. Από το σύστημα διαφεύγει θερμική ενέργεια προς τον αέρα, λόγω διαφοράς θερμοκρασίας. Αυτήν τη ροή ενέργειας ονομάσαμε **θερμότητα**.

Ποσοστό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας

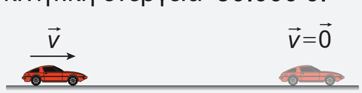
Η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στο παράδειγμα αυτό λαμβάνει τη μορφή:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{θερμ} = W_{ολ} + Q$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 + \Delta E_{θερμ} = Fd + Q$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.5

1. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθεία γραμμή έχοντας κινητική ενέργεια 50.000 J.



Το αυτοκίνητο φρενάρει και σταματά. Πόση είναι η αύξηση της θερμικής ενέργειας (στα φρένα και στα ελαστικά/δρόμο);

Λύση

Είναι προφανές πως το αυτοκίνητο χάνει όλη την κινητική ενέργειά του, δηλαδή χάνει 50.000 J.

Η διατήρηση της ενέργειας στο σύστημα αυτοκίνητο-ελαστικά/δρόμος υπαγορεύει πως η θερμική ενέργεια που θα εκλυθεί είναι ακριβώς αυτά τα 50.000 J. Αυτή η θερμική ενέργεια σχετίζεται με τη φθορά των φρένων, τη φθορά των ελαστικών και τα σημάδια φρεναρίσματος στον δρόμο (skidmarks).

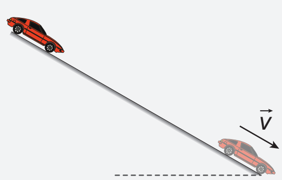
Μπορούμε να γράψουμε αυτήν την απλή διαπίστωση με μαθηματικό, ακριβή αλλά ίσως πιο πολύπλοκο τρόπο ως εξής:

$$\Delta K + \Delta E_{\theta\varepsilon\rho\mu} = 0$$

Επομένως:

$$0 - 50.000\ \text{J} + \Delta E_{\theta\varepsilon\rho\mu} = 0 \ \text{ή}\ \Delta E_{\theta\varepsilon\rho\mu} = 50.000\ \text{J}$$

2. Ένα αυτοκίνητο μάζας 1.000 kg ξεκινά να κατεβαίνει από την κορυφή ενός λόφου ύψους 20 m, ενώ ο οδηγός του πατά ελαφρά μόνο τα φρένα έχοντας σβηστή τη μηχανή. Φτάνοντας στη βάση του λόφου, το αυτοκίνητο έχει αποκτήσει ταχύτητα 15 m/s. Να υπολογίσετε την αύξηση της θερμικής ενέργειας λόγω τριβής.



Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα αυτοκίνητο-δρόμος και θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας τη βάση του λόφου έχουμε:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\theta\varepsilon\rho\mu} = 0$$

ή με ισοδύναμο συμβολισμό:

$$(U+K)_{\alpha\rho\chi} = (U+K)_{\tau\varepsilon\lambda} + \Delta E_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$

$$\left(mgh + \frac{1}{2}mv^2\right)_{\alpha\rho\chi} = \left(mgh + \frac{1}{2}mv^2\right)_{\tau\varepsilon\lambda} + \Delta E_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$

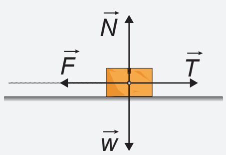
$$200.000\ \text{J} = 112.500\ \text{J} + \Delta E_{\theta\varepsilon\rho\mu}$$

$$\Delta E_{\theta\varepsilon\rho\mu} = 87.500\ \text{J}$$

3. Τριβή και θερμική ενέργεια

Ένας μαθητής ασκεί οριζόντια δύναμη μέτρου F με τη βοήθεια αβαρούς σχοινιού σε κιβώτιο με βιβλία έτσι, ώστε αυτό να κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Να υπολογίσετε τη θερμική ενέργεια λόγω τριβών που αναπτύσσεται κατά τη μετακίνηση του κιβωτίου σε απόσταση d.

Λύση



Θεωρώντας ως σύστημα το κιβώτιο, το δάπεδο και τη Γη, η τριβή είναι μια εσωτερική δύναμη, (οπότε δεν παράγει έργο στο σύστημα), ενώ η μοναδική εξωτερική δύναμη που μεταφέρει ενέργεια μέσω του έργου της στο σύστημα είναι η $\vec{F}$. Αφού το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα σε οριζόντιο δάπεδο, δεν έχουμε μεταβολή της κινητικής ή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Ωστόσο, έχουμε μεταβολή της θερμικής ενέργειας λόγω τριβών. Συνεπώς, από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας προκύπτει:

$$\Delta E_{\theta\varepsilon\rho\mu} = W_F = Fd$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η κίνηση του κιβωτίου γίνεται με σταθερή ταχύτητα. Από τον 1ο Νόμο του Νεύτωνα η δύναμη που ασκείται από το σχοινί στο κιβώτιο ισούται κατά μέτρο με την τριβή που ασκεί το δάπεδο στο κιβώτιο:

$$F = T$$

Επομένως:

$$\Delta E_{\theta\varepsilon\rho\mu} = Td$$

Γενικεύοντας, από τη σχέση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της θερμικής ενέργειας λόγω τριβών μεταξύ ενός σώματος και της επιφάνειας πάνω στην οποία κινείται.

5. Υποβάθμιση της ενέργειας

Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: Εφόσον η ενέργεια διατηρείται και δεν χάνεται, γιατί δεν μπορούμε να την ξαναχρησιμοποιήσουμε και να έχουμε πρακτικά όση ενέργεια θέλουμε;

Στην πραγματικότητα δεν είναι όλες οι μορφές ενέργειας ισοδύναμες. Η έκλυση θερμότητας αποτελεί **υποβάθμιση της ενέργειας**, δηλαδή μετατροπή της ενέργειας σε μη αξιοποιήσιμες μορφές.

Η αιτία για την υποβάθμιση είναι η *διασπορά* της ενέργειας. Η θερμότητα είναι στην ουσία μια έννοια που συνδέεται με την κινητική ενέργεια των σωματιδίων που συγκροτούν την ύλη (άτομα, μόρια, ιόντα). Όταν μηχανική ενέργεια, ή ενέργεια άλλης μορφής, μετατρέπεται σε θερμότητα, ουσιαστικά διασπείρεται σε πάρα πολλά μικροσκοπικά σώματα και είναι πάρα πολύ δύσκολο να την ξανασυγκεντρώσουμε και να την αξιοποιήσουμε.

Θερμικός θάνατος του σύμπαντος

Αν συνεχιστεί η υποβάθμιση της ενέργειας, μπορεί κάποια στιγμή να μην μείνει καθόλου χρήσιμη ενέργεια; Αυτό είναι σίγουρο πως θα συμβεί, αλλά σε χρόνο υπερβολικά μεγάλο. Τότε θα έχει επέλθει ο **θερμικός θάνατος** του σύμπαντος.

6. Ενέργεια και κοινωνία

Η Γη έχει περιορισμένους φυσικούς πόρους, όπως τα ορυκτά καύσιμα (πετρέλαιο, γαιάνθρακες, φυσικό αέριο) που χρησιμοποιούνταν για μεγάλο χρονικό διάστημα σχεδόν αποκλειστικά για την παραγωγή ενέργειας. Αυτό έχει τις εξής συνέπειες:

I. η μετατροπή ενέργειας (π.χ. ηλεκτρικής ή χημικής μέσω των ορυκτών καυσίμων όπως το πετρέλαιο) να γίνεται σταδιακά δυσκολότερη,

II. η τιμή της ενέργειας να αυξάνεται διαρκώς, υποβαθμίζοντας το βιοτικό επίπεδο όλων.

Ακόμη χειρότερα, η αύξηση του πληθυσμού της Γης δυσκολεύει περισσότερο την κατάσταση, αφού απαιτούνται περισσότεροι πόροι για την «παραγωγή ενέργειας». Επιπροσθέτως, η χρήση ορυκτών καυσίμων παράγει ρύπους οι οποίοι επηρεάζουν την ανθρώπινη υγεία, καταστρέφουν οικοσυστήματα και αυξάνουν τη μέση θερμοκρασία του πλανήτη εντείνοντας το φαινόμενο του θερμοκηπίου.

Αυτή η τάση για αυξημένη κατανάλωση των περιορισμένων φυσικών πόρων είναι **μη αειφόρος**, δηλαδή οδηγεί σε αδιέξοδο.

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει μια τάση βελτίωσης όλων των παραπάνω: η αυξητική τάση του πληθυσμού μειώνεται, ενώ επεκτείνεται η χρήση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας (για παράδειγμα ηλιακής ενέργειας – **εικόνα 3.2**) και αποθήκευσης της ενέργειας (για παράδειγμα με ταμιευτήρες νερού – **εικόνα 3.3**) για βελτιστοποίηση του ρυθμού κατανάλωσης. Περισσότερα θα αναφερθούν στην επόμενη υποενότητα.

Εικόνα 3.2 Φωτοβολταϊκά στοιχεία (μετατρέπουν την ηλιακή ενέργεια σε ηλεκτρική).

Εικόνα 3.3 Ταμιευτήρας νερού

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Αεικίνητο (αεί + κίνηση) χαρακτηρίζεται το σώμα ή ο μηχανισμός που βρίσκεται πάντοτε σε κίνηση, χωρίς να δαπανάται ενέργεια ή να απαιτείται κάποια εξωτερική ενεργειακή πηγή, για να συνεχιστεί η κίνησή του. Να κάνετε μια μικρή έρευνα, για να βρείτε προσπάθειες κατασκευής αεικίνητου μέσα στον ιστορικό χρόνο. Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί να κατασκευαστεί.

2. Εκτοξεύουμε με αρχική οριζόντια ταχύτητα μέτρου v μια κασετίνα, ώστε να ολισθήσει πάνω σε ένα τραπέζι. Η κασετίνα σταματά λόγω τριβών μετά από κάποιο διάστημα. Αν δίναμε την ίδια αρχική ταχύτητα στην κασετίνα, ώστε να ολισθήσει πάνω σε ένα διαφορετικό πιο τραχύ τραπέζι, τότε η θερμική ενέργεια λόγω τριβών θα ήταν μεγαλύτερη ίση ή μικρότερη;

3. Από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου εκτοξεύεται ένας κύβος με ταχύτητα παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο και φορά προς την κορυφή του. Ο κύβος ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι που ακινητοποιείται στιγμιαία και στη συνέχεια επιστρέφει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Μεταξύ κύβου και κεκλιμένου επιπέδου υπάρχει τριβή και συνεπώς υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας τόσο κατά την άνοδο, έστω $|\Delta E_{μηχ,1}|$, όσο και κατά την κάθοδο, έστω $|\Delta E_{μηχ,2}|$. Να συγκρίνετε τις απώλειες $|\Delta E_{μηχ,1}|$ και $|\Delta E_{μηχ,2}|$.

4. Ο Παναγιώτης σπρώχνει την τσάντα του ασκώντας συνεχώς δύναμη και η τσάντα ολισθαίνει πάνω στο σχολικό θρανίο. Μεταξύ της τσάντας και του θρανίου υπάρχει τριβή.

Ας θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις:

α) Η τσάντα κινείται με σταθερή ταχύτητα.

β) Η τσάντα κινείται με ταχύτητα αυξανόμενου μέτρου.

Σε κάθε περίπτωση, να αιτιολογήσετε αν η ενέργεια που δαπανά ο Παναγιώτης είναι ίση, μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη θερμική ενέργεια λόγω τριβών.

5. Δύο αυτοκίνητα με κινητικές ενέργειες K_1 και K_2 συγκρούονται και ακινητοποιούνται. Εξηγήστε τις ενεργειακές μετατροπές και μεταφορές που συμβαίνουν στο σύστημα που αποτελείται από τα αυτοκίνητα, το οδόστρωμα και το περιβάλλον τους.

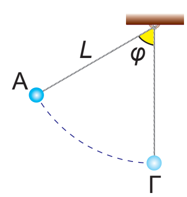
6. Αφήνετε μια μπάλα του basket από ύψος 1 m πάνω από το δάπεδο και μετά την πρώτη αναπήδησή της φτάνει σε ύψος 0,8 m.

α) Να υπολογίσετε το ποσοστό μείωσης της μηχανικής ενέργειας και να εξηγήσετε τη διατήρηση της ενέργειας στο σύστημα μπάλα-δάπεδο-περιβάλλον.

β) Αν το ποσοστό μείωσης της μηχανικής ενέργειας είναι το ίδιο μετά από κάθε αναπήδηση, να προσδιορίσετε το ύψος στο οποίο θα φτάσει η μπάλα μετά την τρίτη αναπήδηση.

7. Ένα παιδί θέτει σε περιστροφή έναν οριζόντιο τροχό παιδικής χαράς γύρω από κατακόρυφο άξονα. Σε χρονικό διάστημα Δt η γωνιακή ταχύτητα του τροχού υποδιπλασιάζεται. Ποιο είναι το ποσοστό % απώλειας της αρχικής κινητικής ενέργειας του τροχού; Σε τι μορφή μετατράπηκε η μηχανική ενέργεια που έχασε ο τροχός;

8. Εκτρέπετε το απλό εκκρεμές του σχήματος κατά γωνία φ από την κατακόρυφο και το αφήνετε ελεύθερο να κινηθεί. Μετά από έναν μεγάλο αριθμό αιωρήσεων το εκκρεμές ακινητοποιείται. Να προσδιορίσετε την απώλεια μηχανικής ενέργειας του απλού εκκρεμούς και να εξηγήσετε σε τι είδους ενέργεια μετατρέπεται.



Δίνονται: m, g, L, φ.

Ασκήσεις

1. Ένα παιδάκι μάζας 12 kg ανεβαίνει σε μια τσουλήθρα ύψους 2 m. Αν ξεκινήσει χωρίς ταχύτητα από την κορυφή της και φτάσει στη βάση της με ταχύτητα 1 m/s, να υπολογίσετε την αύξηση της θερμικής ενέργειας λόγω της τριβής.

Να θεωρήσετε ότι $g = 10\ \text{m/s}^2$.

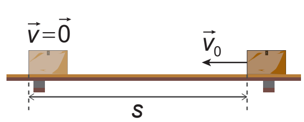
2. Μια πλαστική μπάλα με μάζα 200 g αφήνεται να πέσει από την ταράτσα ενός κτηρίου. Η πτώση βιντεοσκοπείται και με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού βιντεοανάλυσης υπολογίζεται ότι η μπάλα έχει ταχύτητα 10 m/s σε μια θέση Α και 17 m/s σε μια θέση Β που βρίσκεται 15 m χαμηλότερα από την Α.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Β.

β) Να υπολογίσετε την απώλεια μηχανικής ενέργειας. Σε τι μορφή ενέργειας μετατράπηκε η μηχανική ενέργεια που χάθηκε από την μπάλα;

Δίνεται $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

3. Ο Γιάννης εκτοξεύει με ταχύτητα μέτρου v_0 μια μικρή βαλίτσα πάνω στον πάγκο του εργαστηρίου.



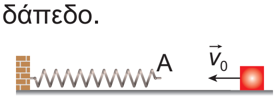
Η βαλίτσα έχει μάζα 500 g και διανύει ολισθαίνοντας διάστημα $s = 1\ \text{m}$ μέχρι να σταματήσει λόγω τριβών. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των επιφανειών της βαλίτσας και του πάγκου είναι 0,1. Να υπολογίσετε:

α) τη θερμική ενέργεια λόγω τριβών κατά την ολίσθηση της βαλίτσας,

β) το μέτρο v_0 της ταχύτητας με την οποία ο Γιάννης εκτόξευσε τη βαλίτσα.

Δίνεται $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

4. Ένας κύβος μάζας 2 kg εκτοξεύεται, όπως στο σχήμα, με ταχύτητα μέτρου v_0 πάνω σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο.

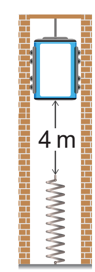


Ο κύβος αφού διανύσει 3 m, συναντά το άκρο Α ενός οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς 200 N/m, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ο κύβος ακινητοποιείται στιγμιαία, όταν το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά 0,2 m. Στη συνέχεια, το ελατήριο αρχίζει να αποσυσπειρώνεται, ο κύβος κινείται πάλι προς την αρχική του θέση και σταματά σε ένα σημείο λόγω τριβών. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ κύβου και δαπέδου είναι 0,5 και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ \text{m/s}^2$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο v_0 της αρχικής ταχύτητας του κύβου.

β) Να προσδιορίσετε την απόσταση από το άκρο Α του σημείου στο οποίο θα σταματήσει ο κύβος κινούμενος προς την αρχική του θέση.

5. Στο σχήμα παριστάνεται ένας ανελκυστήρας μέσα στο φρεάτιό του. Στην οροφή έχει στερεωθεί ένα συρματόσχοινο το οποίο, μέσω κατάλληλου μηχανισμού, ανεβοκατεβάζει τον θάλαμο. Για λόγους ασφαλείας, στην περίπτωση που κοπεί το συρματόσχοινο, στον πυθμένα του φρεατίου υπάρχει ένα ελατήριο το οποίο θα επιβραδύνει τον θάλαμο. Ταυτόχρονα, ενεργοποιείται ένα σύστημα φρένων που αναπτύσσουν δύναμη αντίρροπη της κατεύθυνσης που κινείται ή τείνει να κινηθεί ο θάλαμος. Ο θάλαμος έχει βάρος $2 \cdot 10^4$ N και η σταθερά του ελατηρίου είναι 10^5 N/m. Κάποια στιγμή που ο θάλαμος είναι ακίνητος σε ύψος 4 m από την κορυφή του ελατηρίου, σε μια δοκιμή ασφαλείας αποσυνδέεται το συρματόσχοινο. Ο θάλαμος συγκρούεται με το ελατήριο, εκτελεί ταλαντώσεις και τελικά σταματά με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά 0,3 m. Να υπολογίσετε:



α) το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης που ασκεί το σύστημα φρεναρίσματος στον θάλαμο στη θέση της τελικής ισορροπίας, δηλαδή όταν ο θάλαμος ακινητοποιείται,

β) τη θερμική ενέργεια που αναπτύχθηκε από τη στιγμή που αποσυνδέθηκε το συρματόσχοινο έως τη στιγμή που ακινητοποιήθηκε ο θάλαμος.

6. Από τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου εκτοξεύεται ένας κύβος μάζας $2\,kg$ με ταχύτητα μέτρου $10\,m/s$ παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο με φορά προς τα πάνω. Ο κύβος ολισθαίνει προς τα πάνω για $5\,m$ μέχρι που ακινητοποιείται στιγμιαία και στη συνέχεια επιστρέφει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα μέτρου v. Η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι θ για την οποία δίνεται ότι ημ$\theta = 0{,}6$ και συν$\theta = 0{,}8$. Να υπολογίσετε:

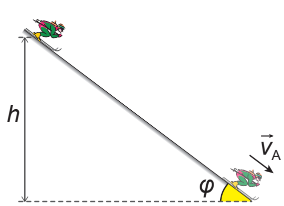
α) τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του κεκλιμένου επιπέδου και του κύβου,

β) τη συνολική θερμική ενέργεια λόγω τριβών,

γ) το μέτρο v της ταχύτητας με την οποία ο κύβος επέστρεψε στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Να θεωρήσετε ότι $g = 10\,m/s^2$.

7. Μια σκιέρ, που μαζί με τον εξοπλισμό της έχει μάζα $m = 60\,kg$, ξεκινά από την ηρεμία από την κορυφή πλαγιάς γωνίας φ με το οριζόντιο επίπεδο και από ύψος $h = 120\,m$ από το οριζόντιο έδαφος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Φτάνοντας στη βάση της πλαγιάς, η σκιέρ έχει χάσει το $1/3$ της αρχικής μηχανικής ενέργειας. Να υπολογίσετε:



α) τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ της σκιέρ και της πλαγιάς,

β) το μέτρο v_A της ταχύτητας με την οποία η σκιέρ φτάνει στη βάση της πλαγιάς.

Να θεωρήσετε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος. Δίνονται: ημ$\varphi = 0{,}6$, συν$\varphi = 0{,}8$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,m/s^2$.

8. Ένα επιβατηγό αυτοκίνητο έχει μάζα μαζί με τον οδηγό του $1.200\,kg$ και κινείται με ταχύτητα μέτρου $15\,m/s$ σε ευθύγραμμο και οριζόντιο δρόμο. Κάποια στιγμή ο οδηγός αφήνει το γκάζι με αποτέλεσμα το αυτοκίνητο να ακινητοποιηθεί, αφού διανύσει διάστημα d. Αν η μέση δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση έχει μέτρο $1.000\,N$, να υπολογίσετε:

α) τη συνολική θερμική ενέργεια που αναπτύχθηκε στο σύστημα αυτοκίνητο-δρόμος-περιβάλλων αέρας από τη στιγμή που ο οδηγός άφησε το γκάζι μέχρι την ακινητοποίηση του οχήματος,

β) το διάστημα d.

9. Ένα αυτοκίνητο μαζί με τον οδηγό του έχει μάζα $1.250\,kg$ και κινείται σε ευθύγραμμο και οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_0. Κάποια στιγμή ο οδηγός αντιλαμβάνεται ότι μπροστά του ο δρόμος είναι κλειστός λόγω έργων, οπότε εφαρμόζει απότομα τα φρένα με αποτέλεσμα οι τροχοί του αυτοκινήτου να μπλοκάρουν. Το αυτοκίνητο κινείται για διάστημα ίσο με $16\,m$ με μπλοκαρισμένους τροχούς και τελικά ακινητοποιείται, αφήνοντας στον δρόμο τη χαρακτηριστική μαύρη γραμμή από τα λιωμένα ελαστικά του (γραμμή φρεναρίσματος). Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των ελαστικών του αυτοκινήτου και του οδοστρώματος είναι $0{,}8$. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $9{,}8\,m/s^2$.

α) Να υπολογίσετε τη συνολική θερμική ενέργεια που αναπτύχθηκε στο σύστημα αυτοκίνητο-δρόμος από τη στιγμή που ο οδηγός εφάρμοσε τα φρένα μέχρι την ακινητοποίηση του οχήματος.

β) Να διερευνήσετε αν ο οδηγός έχει παραβιάσει το όριο ταχύτητας που είναι $80\,km/h$.

γ) Στην άσκηση αγνοήσαμε την αντίσταση του αέρα. Αν τη λαμβάναμε υπόψη μας, το μέτρο της ταχύτητας που υπολογίσατε στο ερώτημα β) θα ήταν μεγαλύτερο ή μικρότερο;

δ) Να εκτιμήσετε πώς επηρεάζουν τη γραμμή φρεναρίσματος οι εξής παράμετροι:

i) βρεγμένος δρόμος, **ii)** παγωμένος δρόμος, **iii)** φθαρμένα ελαστικά, **iv)** σύστημα αντιμπλοκαρίσματος τροχών ABS (Anti-lock Braking System).

10. Σύμφωνα με την επικρατούσα θεωρία, για την εξαφάνιση των δεινοσαύρων ευθύνεται η σύγκρουση με τη Γη ενός αστεροειδούς διαμέτρου περίπου 10 χιλιομέτρων πριν από 65 εκατομμύρια χρόνια. Πέρα από την καταστροφή στην άμεση περιοχή της πρόσκρουσης και τις πυρκαγιές που προκάλεσε, γιγαντιαία κύματα σάρωσαν χαμηλές περιοχές σε όλο τον κόσμο και ένα πέπλο σκόνης κάλυψε την περιοχή και έκρυψε τον Ήλιο για δεκαετίες. Η μάζα του αστεροειδούς εκτιμάται σε 10^{12} kg και η ταχύτητα του σε 40.000 m/s. Να υπολογίσετε την κινητική του ενέργεια και να τη συγκρίνετε με την ενέργεια που απελευθερώθηκε από τη ρίψη της ατομικής βόμβας στη Χιροσίμα (περίπου $6{,}3 \cdot 10^{13}$ J). Να περιγράψετε τις μορφές ενέργειας στις οποίες μετατράπηκε η κινητική ενέργεια του αστεροειδούς.

3.6 Υποβάθμιση της ενέργειας – Θερμικές μηχανές

1. Η κυκλική μεταβολή

Σε ένα αυτοκίνητο με μηχανή εσωτερικής καύσης η κίνηση ξεκινάει από την καύση του αέριου μείγματος της βενζίνης στο εσωτερικό των κυλίνδρων. Σε κάθε κύλινδρο υπάρχει ένα πιστόνι που κλείνει τον κύλινδρο και το οποίο κινείται παλινδρομικά, λόγω της καύσης (**Εικόνα 3.4**). Αυτή η παλινδρομική κίνηση μετατρέπεται σε κίνηση των τροχών με τη βοήθεια του στροφαλοφόρου άξονα. Μετά από κάθε παλινδρομική κίνηση, το πιστόνι επιστρέφει στην αρχική του θέση και νέα βενζίνη εισέρχεται στον κύλινδρο από τις βαλβίδες, ώστε να επαναληφθεί η ίδια διαδικασία.

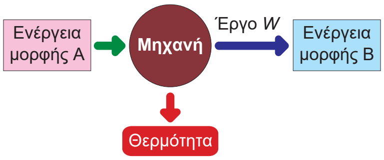
Εικόνα 3.4 Κύλινδροι με πιστόνια μηχανής αυτοκινήτου

Μια διαδικασία στην οποία ένα σύστημα επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση, ώστε να επαναληφθεί από την αρχή η ίδια διαδικασία ονομάζεται **κυκλική μεταβολή**.

Οι κυκλικές μεταβολές είναι απαραίτητες για τη λειτουργία των θερμικών μηχανών.

2. Η θερμική μηχανή

Μηχανή είναι μια διάταξη η οποία μετατρέπει ενέργεια μιας μορφής σε ενέργεια άλλης (χρήσιμης) μορφής (**Σχήμα 3.24**).



Σχήμα 3.24 Σχεδιάγραμμα μηχανής

Στη μηχανή υπάρχει πολλές φορές μια ουσία που υπόκειται σε μεταβολές. Η ουσία αυτή, όταν υπάρχει, ονομάζεται **εργαζόμενο μέσο** και παράγει κάποιο έργο *W*.

Κάθε μηχανή χαρακτηρίζεται από την (ενεργειακή) απόδοσή της. Ο συντελεστής απόδοσης e μιας μηχανής ορίζεται ως λόγος:

$$e = \frac{E_B}{E_A} \qquad (3.18)$$

Ο ορισμός αυτός είναι προφανής, εφόσον στόχος της μηχανής είναι να λάβουμε όσο το δυνατόν περισσότερη ενέργεια της μορφής Β, χρησιμοποιώντας όσο γίνεται λιγότερη ενέργεια της μορφής Α.

Ο συντελεστής e εκφρασμένος ως ποσοστό στα 100 ονομάζεται **απόδοση** της μηχανής.

Επειδή χάνεται πάντα ενέργεια από το σύστημα υπό μορφή θερμότητας, αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει μηχανή με $e = 1$, δηλαδή με απόδοση 100%. Οι περισσότερες μηχανές μάλιστα έχουν απόδοση πολύ μικρότερη από 100%.

Ορισμένα παραδείγματα μηχανών αποτελούν:

Εικόνα 3.5 Τρένο με ατμομηχανή

I) Η ατμομηχανή (όπως τα τρένα του 19ου αιώνα) (**Εικόνα 3.5**).

- Πηγή ενέργειας E_A είναι το κάρβουνο (στον θάλαμο καύσης κάρβουνου).
- Η θερμότητα διαφεύγει προς το περιβάλλον.
- Το έργο και η ενέργεια E_B προσφέρουν κίνηση και κινητική ενέργεια αντίστοιχα.
- Εργαζόμενο μέσο είναι ο ατμός.

Εικόνα 3.6 Μηχανή αυτοκινήτου

II) Η μηχανή (βενζινοκινητήρας) του αυτοκινήτου (**Εικόνα 3.6**).

- Πηγή ενέργειας E_A είναι η βενζίνη (στους κυλίνδρους).
- Η θερμότητα διαφεύγει γύρω από τη μηχανή (η οποία θερμαίνεται) και στο περιβάλλον.
- Το έργο και η ενέργεια E_B προσφέρουν κίνηση στους τροχούς και κινητική ενέργεια αντίστοιχα.
- Εργαζόμενο μέσο είναι το αέριο καύσιμο μείγμα βενζίνης.

Εικόνα 3.7 Πυρηνικό εργοστάσιο στην Πολωνία

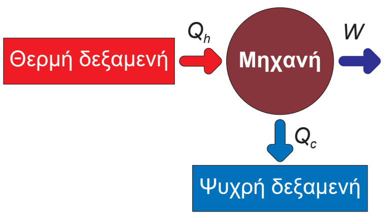
III) Το πυρηνικό εργοστάσιο (**Εικόνα 3.7**).

- Πηγή ενέργειας E_A είναι το ουράνιο.
- Η θερμότητα διαφεύγει προς το περιβάλλον (συνήθως σε νερό ποταμού ή λίμνης).
- Το έργο και η ενέργεια E_B συντελούν στη λειτουργία εναλλακτήρα (γεννήτρια που παράγει ρεύμα).
- Εργαζόμενο μέσο είναι το νερό σε μορφή ατμού.

Εικόνα 3.8 Σταθμός μετρό

IV) Ο ηλεκτρικός κινητήρας (π.χ. μετρό) (**Εικόνα 3.8**).

- Πηγή ενέργειας E_A είναι ο ηλεκτρισμός.
- Η θερμότητα διαφεύγει προς το περιβάλλον, (λόγω τριβής ανάμεσα στα διάφορα μέρη του κινητήρα).
- Το έργο και η ενέργεια E_B προσφέρουν κίνηση και κινητική ενέργεια αντίστοιχα.
- Εργαζόμενο μέσο δεν υπάρχει.



Σχήμα 3.25 Σχεδιάγραμμα θερμικής μηχανής

Οι **θερμικές μηχανές** (**Σχήμα 3.25**) αποτελούν υποκατηγορία των μηχανών (παραδείγματα I, II, III), όπου η ενέργεια μορφής Α είναι και αυτή θερμότητα. Σε αυτήν την περίπτωση η πηγή της ενέργειας ονομάζεται **θερμή δεξαμενή** και η ενέργεια E_A συμβολίζεται με Q_h, δηλαδή θερμότητα από τη θερμή δεξαμενή (h από το hot).

Στις θερμικές μηχανές η θερμότητα που αποβάλλεται συμβολίζεται με Q_c δηλαδή θερμότητα προς την **ψυχρή δεξαμενή** (c από το cold). Όπως είδαμε στα παραπάνω παραδείγματα, η ψυχρή δεξαμενή είναι συνήθως το περιβάλλον της μηχανής.

Στο εσωτερικό της μηχανής υπάρχει μια ουσία (**εργαζόμενο μέσο**), συνήθως αέρια, η οποία υπόκειται σε *κυκλική μεταβολή*.

Θερμικές μηχανές

3. Απόδοση θερμικής μηχανής

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για τη λειτουργία των θερμικών μηχανών ισχύει:

$$Q_h = W + |Q_c| \qquad (3.19)$$

Η θερμότητα Q_c αποβάλλεται από τη μηχανή/σύστημα και για αυτό θεωρείται αρνητική ποσότητα. Για να εκφράσουμε τη διατήρηση της ενέργειας στη μορφή της **εξίσωσης 3.19**, γράφουμε την απόλυτη τιμή της Q_c που είναι θετική ποσότητα.

Ο **τύπος 3.18** για τον συντελεστή απόδοσης της θερμικής μηχανής γράφεται:

$$e = \frac{W}{Q_h} \qquad (3.20)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3.6

1. Στον κινητήρα εσωτερικής καύσης ενός αυτοκινήτου εκλύονται 1.000.000 J θερμότητας από την καύση ορισμένης ποσότητας βενζίνης. Ως αποτέλεσμα, η κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου αυξάνεται κατά 300.000 J.

α) Να υπολογίστε την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα.

β) Πόση είναι η απόδοση του κινητήρα του αυτοκινήτου;

Λύση

α) Είναι προφανές πως σε θερμότητα θα μετατραπούν:

$$1.000.000\ \text{J} - 300.000\ \text{J} = 700.000\ \text{J}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε πως το έργο της μηχανής είναι $W = 300.000$ J, αφού αυτή είναι η αύξηση της κινητικής ενέργειας και $Q_h = 1.000.000$ J, οπότε σύμφωνα με την **εξίσωση 3.19** έχουμε:

$$|Q_c| = Q_h - W = 700.000\ \text{J}$$

β) Από την **εξίσωση 3.20** έχουμε:

$$e = \frac{W}{Q_h} = \frac{300.000\ \text{J}}{1.000.000\ \text{J}} = 0,30$$

Άρα, η απόδοση είναι 30%.

Οι ηλεκτρικές μηχανές έχουν γενικά πολύ μεγαλύτερη απόδοση από τις θερμικές μηχανές. Απαιτούν ηλεκτρική ενέργεια για να λειτουργήσουν, η οποία για να παραχθεί χρειάζεται κάποια διαδικασία που περιλαμβάνει απώλεια ενέργειας σε θερμότητα.

2. Σε ηλεκτρικό κινητήρα τρένου χρειάζονται 500.000 J ηλεκτρικής ενέργειας, για να παραχθούν 400.000 J χρήσιμης (κυρίως κινητικής) ενέργειας του τρένου. Να υπολογίσετε την ενέργεια που χάνεται σε θερμότητα, καθώς και την απόδοση του κινητήρα.

Λύση

Η απώλεια ενέργειας σε θερμότητα είναι:

$$Q = 500.000\ \text{J} - 400.000\ \text{J} = 100.000\ \text{J}$$

Ο συντελεστής απόδοσης του κινητήρα είναι:

$$e = \frac{400.000\ \text{J}}{500.000\ \text{J}} = 0,80$$

Άρα, η απόδοση του κινητήρα είναι 80%.

Επεκτάσεις

Το πρόβλημα της ενέργειας είναι ιδιαίτερα σύνθετο. Η γενική τάση είναι να χρησιμοποιείται όλο και περισσότερη ηλεκτρική ενέργεια η οποία να παράγεται μέσω *ανανεώσιμων πηγών* ενέργειας. Έτσι, θα επιτευχθούν μακροπρόθεσμα τρεις στόχοι:

I. Ενεργειακή επάρκεια.

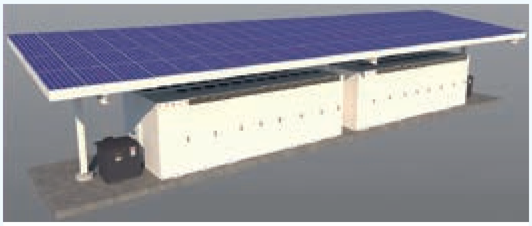
II. Μικρότερη επιβάρυνση του περιβάλλοντος με ρύπους.

III. Μείωση του κόστους προμήθειας της ενέργειας.

Αυτό οδηγεί σε έντονες αυξητικές τάσεις τα εξής:

- Χρήση ηλεκτρισμού για θέρμανση (αντλίες θερμότητας, κλιματιστικά) και κίνηση [ηλεκτρικά αυτοκίνητα (**Εικόνα 3.9**) και φορτηγά, ηλεκτρικά τρένα, προσπάθεια κατασκευής ηλεκτρικών πλοίων και αεροσκαφών].
- Χρήση φωτοβολταϊκών στοιχείων (ηλιακή ενέργεια), ανεμογεννητριών (αιολική ενέργεια), παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας από υδροηλεκτρικές εγκαταστάσεις (φράγματα), παλίρροιες, θαλάσσια κύματα.
- Χρήση μεθόδων αποθήκευσης ηλεκτρικής ενέργειας, όπως οι ταμιευτήρες και μεγάλες εγκαταστάσεις μπαταριών (**Εικόνα 3.10**).

Εικόνα 3.9 Ηλεκτρικό αυτοκίνητο φορτίζεται



Εικόνα 3.10 Μπαταρίες μεγάλης κλίμακας για αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Εκτοξεύουμε ένα βιβλίο πάνω σε δάπεδο και, αφού διανύσει ορισμένο διάστημα, σταματά λόγω τριβών. Αν υποθέσουμε ότι ήταν δυνατόν να συγκεντρώσουμε όλη τη θερμική ενέργεια και να τροφοδοτήσουμε μια θερμική μηχανή που εκτοξεύει αντικείμενα, θα ήταν δυνατόν να εκτοξευτεί το βιβλίο με την ίδια αρχική ταχύτητα;

2. Ποιος είναι ο βασικός σκοπός των θερμικών μηχανών και πώς λειτουργούν για να επιτύχουν αυτόν τον σκοπό;

3. Από τον Ήρωνα, τον Newcomen και τον Watt οι ατμομηχανές βελτιώθηκαν και εξελίχθηκαν οδηγώντας την ανθρωπότητα στη μετάβαση από τη γεωργική στη βιομηχανική επανάσταση. Ποιοι παράγοντες επηρεάζουν την απόδοση μιας ατμομηχανής και πώς θα μπορούσε να αυξηθεί η απόδοσή της;

4. Να συγκρίνετε τη λειτουργία μιας ατμομηχανής με αυτήν μιας μηχανής εσωτερικής καύσης. Να περιγράψετε τη δομή τους και να αναφέρετε εφαρμογές τους.

5. Αν η απόδοση μιας θερμικής μηχανής είναι 40%, να προσδιορίσετε τον λόγο της θερμότητας που αποβάλλεται στην ψυχρή δεξαμενή προς τη θερμότητα που απορροφάται από τη θερμή δεξαμενή $|Q_c| / Q_h$.

6. Σε δύο θερμικές μηχανές Α, Β προσφέρεται το ίδιο ποσό θερμότητας Q_h. Αν η μηχανή Α αποβάλλει περισσότερη θερμότητα από τη μηχανή Β, ποια από τις δύο έχει μεγαλύτερη απόδοση;

Ασκήσεις

1. Μια θερμική μηχανή έχει απόδοση 25% και για χρονικό διάστημα Δt αποβάλλεται στην ψυχρή δεξαμενή ποσό θερμότητας 120.000 J. Να υπολογίσετε το ωφέλιμο έργο που παράγει η μηχανή στο χρονικό διάστημα Δt.

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τις τιμές των μεγεθών τριών θερμικών μηχανών Α, Β, Γ.

Μηχανή	Q_h / J	Q_c / J	W / J	Απόδοση
Α	50.000	20.000		
Β		15.000	10.000	
Γ			15.000	30%

3. Μια θερμική μηχανή με απόδοση 30% απορροφά σε 1 h ποσό θερμότητας $9 \cdot 10^6$ J από τη θερμή δεξαμενή. Να υπολογίσετε την ισχύ της μηχανής σε kW.

4. Μια θερμική μηχανή έχει συντελεστή απόδοσης 0,3. Το ωφέλιμο έργο που παράγει η μηχανή ανά κύκλο λειτουργίας της είναι 600 J. Να υπολογίσετε σε κάθε κύκλο λειτουργίας της μηχανής:

α) τη θερμότητα που απορροφά το αέριο από τη δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας,

β) τη θερμότητα που αποβάλλει το αέριο στη δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας.

5. Η ισχύς του κινητήρα ενός αυτοκινήτου για την παραγωγή ωφέλιμου έργου είναι 120 kW και η απόδοσή του 30%. Να υπολογίσετε τη θερμότητα που εισέρχεται ανά δευτερόλεπτο στον κινητήρα με την καύση του μείγματος της βενζίνης, καθώς και τον ρυθμό αποβολής θερμότητας από τον κινητήρα προς το περιβάλλον.

6. Ένα αναβατόριο ανεβάζει ένα ψυγείο βάρους 1.000 N σε ύψος 9 m σε χρόνο 1,5 min με σταθερή ταχύτητα.

α) Να υπολογίσετε την ωφέλιμη ισχύ της μηχανής του αναβατορίου.

β) Αν η προσφερόμενη ισχύς της μηχανής είναι 250 W, σύμφωνα με τον κατασκευαστή, να υπολογίσετε την απόδοσή της.

3ο ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

(Προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας: 2)

Πειράματα – Αξιοποίηση ραβδογραμμάτων και γραφικών παραστάσεων στην ενέργεια

Βήμα 1ο: Έναυσμα ενδιαφέροντος
Βήμα 2ο: Προϋπάρχουσες γνώσεις – Προβληματισμός – Διατύπωση υποθέσεων
Βήμα 3ο: Δραστηριότητες – Πειραματισμός
Βήμα 4ο: Συμπεράσματα – Νέες γνώσεις – Εφαρμογές
Βήμα 5ο: Γενικεύσεις – Ερμηνείες – Διαθεματικότητα

Γενίκευση

	1ο	2ο
Πειράματα		
Απαντήσεις		

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΠΕ3)

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Προσδιορίστε ποια σώματα ανήκουν στο σύστημα και ποια είναι στο περιβάλλον. Εάν είναι δυνατόν, επιλέξτε ένα σύστημα χωρίς τριβή ή άλλες διασκορπιστικές δυνάμεις. Σε ορισμένα προβλήματα μπορεί να απαιτείται το σύστημα να υποδιαιρεθεί σε δύο ή περισσότερα μέρη.

ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

Έχετε στη διάθεσή σας πολλαπλές αναπαραστάσεις, για να οπτικοποιήσετε το μοντέλο.

I. Μπορείτε να σχεδιάσετε μια πρόχειρη εικόνα για την αναπαράσταση των διαφόρων θέσεων των σωμάτων.

II. Ένα διάγραμμα δυνάμεων ελεύθερου σώματος (ΔΕΣ) μπορεί να είναι χρήσιμο, όταν πρόκειται να υπολογίσετε έργο.

III. Το πρόβλημα μπορεί να απαιτεί αξιοποίηση της γραφικής αναπαράστασης της ενέργειας ή των ραβδογραμμάτων ενέργειας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο σύστημα που μελετάμε γράφουμε την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας:

Ως προς την ανταλλαγή ενέργειας	Ως προς τις εσωτερικές δυνάμεις	Αρχή διατήρησης	Τύποι
Μονωμένο	Μόνο συντηρητικές	ΑΔΜΕ	$E_{μηχ} = σταθ., \ \Delta E_{συστ} = 0$ $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$
	συντηρητικές και διασποράς	ΑΔΕ	$E_{μηχ} \neq σταθ., \ \Delta E_{συστ} = 0$ $U_1 + K_1 = U_2 + K_2 + \Delta E_{θερμ}$
Κλειστό με εξωτερικές δυνάμεις	Μόνο συντηρητικές	ΑΔΕ	$E_{μηχ} \neq σταθ., \ \Delta E_{συστ} = W$ $U_1 + K_1 + W_{ολ} = U_2 + K_2$
	συντηρητικές και διασποράς	ΑΔΕ	$E_{μηχ} \neq σταθ., \ \Delta E_{συστ} = W$ $U_1 + K_1 + W_{ολ} = U_2 + K_2 + \Delta E_{θερμ}$
Κλειστό με εξωτερικές δυνάμεις και ανταλλαγή θερμότητας	Μόνο συντηρητικές	ΑΔΕ	$E_{μηχ} \neq σταθ., \ \Delta E_{συστ} = W + Q$ $U_1 + K_1 + W_{ολ} + Q = U_2 + K_2$
	συντηρητικές και διασποράς	ΑΔΕ	$E_{μηχ} \neq σταθ., \ \Delta E_{συστ} = W + Q$ $U_1 + K_1 + W_{ολ} + Q = U_2 + K_2 + \Delta E_{θερμ}$

Μπορεί να χρειαστούν οι Νόμοι του Νεύτωνα και οι τύποι της κινηματικής για ορισμένα προβλήματα.

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

Ελέγξτε αν το αποτέλεσμά σας:

- έχει τις σωστές μονάδες,
- είναι αναμενόμενο με βάση το μοντέλο που ορίσατε,
- απαντά στο ερώτημα του προβλήματος.

Προβλήματα

1. Ένας μαθητής σπρώχνει ένα έπιπλο ασκώντας οριζόντια δύναμη μέτρου $180\ \mathrm{N}$, προκειμένου να το μετακινήσει με ολίσθηση πάνω στο οριζόντιο δάπεδο του διαδρόμου ενός σχολείου. Η μάζα του επίπλου είναι $40\ \mathrm{kg}$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ επίπλου και δαπέδου είναι $0{,}4$.

α) Να σχεδιάσετε ένα απλό σχήμα όπου να αναπαριστάνονται το έπιπλο και οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό κατά τη διάρκεια της ολίσθησης.

β) Να υπολογίσετε το έργο καθεμίας από τις δυνάμεις που σχεδιάσατε για τα πρώτα $4\ \mathrm{s}$ της κίνησης του επίπλου.

γ) Να υπολογίσετε στο παραπάνω χρονικό διάστημα τη χημική ενέργεια που κατανάλωσε ο μαθητής, καθώς και τη θερμική ενέργεια λόγω τριβών.

δ) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του επίπλου στο τέλος του χρονικού διαστήματος των $4\ \mathrm{s}$.

Παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ των ποσών ενέργειας που υπολογίσατε;

Θεωρήστε ότι $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

2. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένας γερανός αρχίζει να ασκεί κατακόρυφη δύναμη μέτρου $1.080\ \mathrm{N}$ σε ένα δέμα μάζας $100\ \mathrm{kg}$ το οποίο είναι αρχικά ακίνητο στο έδαφος, προκειμένου να το ανεβάσει στον 2ο όροφο μιας οικοδομής.

α) Να σχεδιάσετε ένα σχήμα όπου να αναπαριστάνονται το δέμα και οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό κατά τη διάρκεια της ανόδου.

β) Να υπολογίσετε από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = 2\ \mathrm{s}$ το έργο καθεμίας από τις δυνάμεις που σχεδιάσατε.

γ) Να υπολογίσετε στο παραπάνω χρονικό διάστημα την ενέργεια που κατανάλωσε ο γερανός.

δ) Να υπολογίσετε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια του δέματος τη χρονική στιγμή $t = 2\ \mathrm{s}$.

Θεωρήστε ότι στην αρχική θέση του δέματος η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν. Παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ των ποσών ενέργειας που υπολογίσατε; Δίνεται $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

3. Σε ένα εργοστάσιο επεξεργασίας μαρμάρου τα μεγάλα κομμάτια μαρμάρου σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου σέρνονται με οριζόντια δύναμη από ένα μοτέρ μέσω συρματόσχοινου πάνω σε οριζόντιο διάδρομο, προκειμένου να κοπούν σε μια μηχανή. Ένα τέτοιο κομμάτι μαρμάρου έχει μάζα $500\ \mathrm{kg}$ και στα πρώτα $4\ \mathrm{s}$ ασκείται σε αυτό σταθερή δύναμη από το συρματόσχοινο, ώστε να διανύσει $3{,}2\ \mathrm{m}$. Να θεωρήσετε ότι ο συντελεστής τριβής μεταξύ μαρμάρου και δαπέδου είναι $0{,}2$ και $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

α) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κομματιού μαρμάρου.

β) Να σχεδιάσετε ένα απλό σχήμα στο οποίο να αναπαριστάνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο κομμάτι μαρμάρου και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

γ) Να υπολογίσετε στο χρονικό διάστημα των $4\ \mathrm{s}$ τη θερμική ενέργεια λόγω τριβών σε J και cal.

δ) Να υπολογίσετε τη μέση ισχύ της δύναμης που ασκείται στο μάρμαρο μέσω του συρματόσχοινου.

ε) Να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο το συρματόσχοινο προσφέρει ενέργεια στο μάρμαρο τη χρονική στιγμή $t = 4\ \mathrm{s}$, θεωρώντας ότι η δύναμη αρχίζει να ασκείται τη χρονική στιγμή $t = 0$.

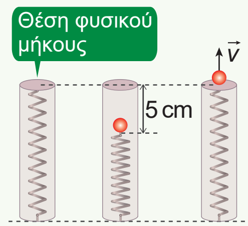
4. Από ύψος $1{,}25\ \mathrm{m}$ πάνω από το δάπεδο αφήνουμε μια μπάλα να πέσει ελεύθερα. Η μπάλα προσκρούει στο δάπεδο και αναπηδά μερικές φορές. Με κατάλληλη εφαρμογή σε ένα κινητό τηλέφωνο καταγράφουμε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των διαδοχικών κρούσεων της μπάλας με το δάπεδο. Το χρονικό διάστημα μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης κρούσης στο δάπεδο είναι $0{,}8\ \mathrm{s}$. Θεωρήστε αμελητέα την αντίσταση του αέρα και $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία η μπάλα προσκρούει την πρώτη φορά στο δάπεδο.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία αναπηδά από το δάπεδο η μπάλα και το μέγιστο ύψος που φτάνει μετά την πρώτη κρούση.

γ) Να βρείτε το επί τοις εκατό ποσοστό απώλειας της μηχανικής ενέργειας κατά την πρώτη κρούση της μπάλας με το δάπεδο.

5. Ένα όπλο-παιχνίδι εκτοξεύει μικρές μπίλιες μάζας 20 g. Στην κάννη υπάρχει ελατήριο σταθεράς 208 N/m. Στο φυσικό μήκος του ελατηρίου το ένα άκρο βρίσκεται στο στόμιο της κάννης, ενώ το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο. Η μπίλια που θα εκτοξευτεί τοποθετείται στο στόμιο της κάννης και με έναν πλαστικό λεπτό κυλινδρικό μοχλό σπρώχνεται έτσι, ώστε το ελατήριο να συμπιεστεί κατά 5 cm. Σε αυτήν τη θέση υπάρχει σύστημα που συγκρατεί την μπίλια με το ελατήριο συμπιεσμένο. Μόλις πατηθεί η σκανδάλη, η μπίλια απελευθερώνεται, οπότε το ελατήριο αποσυμπιέζεται και την εκτοξεύει. Θεωρήστε κατακόρυφη προς τα πάνω τη βολή μιας μπίλιας με αμελητέες αντιστάσεις/τριβές και $g = 10\ m/s^2$.

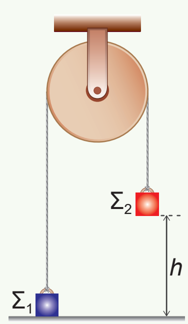


α) Να υπολογίσετε την αρχική ελαστική δυναμική ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο ελατήριο πριν πατηθεί η σκανδάλη.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία η μπίλια αποδεσμεύεται από το ελατήριο στο στόμιο της κάννης.

γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος που θα ανέβει η μπίλια πάνω από το στόμιο της κάννης.

6. Δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζα 1 kg και 3 kg αντίστοιχα είναι συνδεδεμένα με αβαρές και μη εκτατό νήμα το οποίο είναι τυλιγμένο σε αβαρή τροχαλία, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα σώματα συγκρατούνται ακίνητα σε κατακόρυφη απόσταση $h = 2$ m και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνονται ελεύθερα να κινηθούν.



α) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του συστήματος που αποτελείται από τα $Σ_1$, $Σ_2$ και το νήμα.

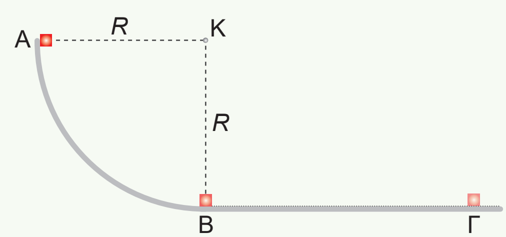
β) Να υπολογίσετε το έργο όλων των δυνάμεων που ασκούνται στα $Σ_1$, $Σ_2$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή που τα σώματα φτάνουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο των ταχυτήτων των δύο σωμάτων, όταν φτάνουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

δ) Να περιγράψετε τις ενεργειακές μετατροπές που συμβαίνουν στο σύστημα που αποτελείται από τα $Σ_1$, $Σ_2$ και το νήμα, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή που τα σώματα φτάνουν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

Να θεωρήσετε ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα και ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

7. Ένα σώμα μικρών διαστάσεων και μάζας 100 g αφήνεται να κινηθεί από την κορυφή Α λείου κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ακτίνας R και φτάνει στη βάση (σημείο Β) έχοντας κινητική ενέργεια 0,2 J. Στη συνέχεια, εισέρχεται σε τραχύ οριζόντιο δάπεδο με το οποίο το σώμα παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0,2 και τελικά ακινητοποιείται στο σημείο Γ.



α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του τεταρτοκυκλίου.

β) Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος σε ένα σημείο της τροχιάς που απέχει κατακόρυφη απόσταση $R/2$ από το οριζόντιο δάπεδο.

γ) Να υπολογίσετε τη θερμική ενέργεια κατά τη μετατόπιση του σώματος από το Β στο Γ.

δ) Να περιγράψετε όλες τις μετατροπές/μεταφορές ενέργειας που συμβαίνουν στο σύστημα σώμα-δάπεδο-περιβάλλων αέρας κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος από το Α στο Γ.

Δίνονται: συν$60° = 0,5$ και $g = 10\ m/s^2$.

Προβλήματα

ΣΥΝΟΨΗ

Η **ενέργεια** αποθηκεύεται σε διάφορες μορφές (κινητική, δυναμική, θερμική, χημική κ.ο.κ.), *μεταφέρεται* με δύο σημαντικούς τρόπους που είναι το **έργο** (W) και η **θερμότητα** (Q), *μετατρέπεται* από μια μορφή σε κάποια άλλη, *υποβαθμίζεται* μετατρεπόμενη σε θερμική ενέργεια, αλλά πάντα *διατηρείται*. Η μονάδα της στο SI είναι το 1 joule, ενώ άλλες μονάδες είναι: η $1\,\text{kWh}$, η 1 θερμίδα (cal) και η $1\,\text{Btu}$. Η διατήρηση ενέργειας μπορεί να εκφραστεί για ένα σύστημα στη μορφή $\Delta E_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = W + Q$.

Κινητική ενέργεια $\left(K = \frac{1}{2}mv^2\right)$ έχει κάθε σώμα που κινείται, ενώ στην περίπτωση ενός άκαμπτου σώματος που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω αποδεικνύεται ότι η κινητική ενέργεια των σωματιδίων που το απαρτίζουν είναι $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Η **δυναμική ενέργεια** αναφέρεται πάντα σε σύστημα σωματιδίων μεταξύ των οποίων δρα μια συντηρητική δύναμη όπως η βαρυτική δύναμη ή βάρος, οπότε έχουμε τη **βαρυτική δυναμική ενέργεια** $(U = mgh)$, ή η δύναμη ελατηρίου, οπότε έχουμε την **ελαστική δυναμική ενέργεια** $\left(U = \frac{1}{2}kx^2\right)$.

Συντηρητικές είναι οι δυνάμεις που το έργο τους είναι ανεξάρτητο της διαδρομής (ή το έργο τους σε κάθε κλειστή διαδρομή είναι ίσο με το μηδέν), γεγονός που σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο τους από τη διαφορά των τιμών της αντίστοιχης δυναμικής ενέργειας ως $W_{\kappa\upsilon\kappa\lambda} = -\Delta U$.

Το άθροισμα κινητικής και δυναμικών ενεργειών ονομάζεται **μηχανική ενέργεια** του συστήματος και είναι σταθερό, αν οι δυνάμεις στο σύστημα είναι μόνο συντηρητικές και δεν προσφέρεται ενέργεια από το περιβάλλον.

Η ύπαρξη ορισμένων μη συντηρητικών δυνάμεων, με χαρακτηριστικότερο παράδειγμα την τριβή, συνδέονται με τη μετατροπή της ενέργειας σε **θερμική**. Πρόκειται ουσιαστικά για το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωματιδίων ενός συστήματος λόγω της άτακτης κίνησης.

Το **έργο** είναι ένας τρόπος μεταφοράς ενέργειας που συνδέεται με τη δράση μιας δύναμης $\vec{F}$ που προκαλεί μια μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ με τα δύο αυτά διανύσματα να σχηματίζουν γωνία θ και υπολογίζεται ως $W_F = F\Delta x \sigma\upsilon\nu\theta$.

Το πρόσημό του δείχνει αν μεταφέρεται ενέργεια προς ή από το σύστημα. Μια δύναμη κάθετη στη μετατόπιση δεν παράγει έργο.

Η **θερμότητα** είναι εκείνος ο τρόπος μεταφοράς ενέργειας που συνδέεται με τη διαφορά θερμοκρασίας και ουσιαστικά αναφέρεται στις ανταλλαγές ενέργειας μεταξύ των μορίων.

Η **ισχύς** $P = \frac{E}{\Delta t}$ μετρά τον ρυθμό με τον οποίο μεταφέρεται η ενέργεια. Μπορούμε να διακρίνουμε τη **μέση ισχύ**, που αφορά σε ένα χρονικό διάστημα και τη **στιγμιαία ισχύ** που αφορά σε μια χρονική στιγμή.

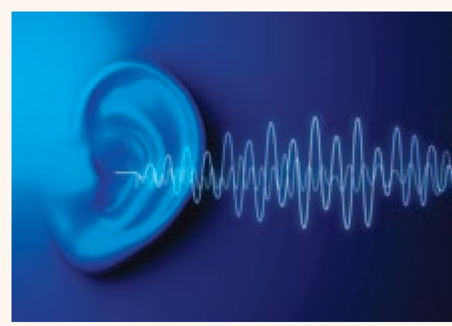
Κυκλικές είναι οι μεταβολές κατά τις οποίες το σύστημα καταλήγει στην κατάσταση από την οποία ξεκίνησε.

Οι **θερμικές μηχανές** αποτελούνται από ένα **μέσο** (συνήθως αέριο) που υφίσταται μια *κυκλική μεταβολή* και από δύο δεξαμενές θερμότητας, μια σε υψηλή θερμοκρασία και μια σε χαμηλή θερμοκρασία. Κάθε θερμική μηχανή κατά τη λειτουργία της απορροφά θερμότητα Q_h από τη **θερμή δεξαμενή**, παράγει έργο W και αποβάλλει την υπόλοιπη ενέργεια Q_c στην **ψυχρή δεξαμενή**.

Ο **συντελεστής απόδοσης** κάθε θερμικής μηχανής ορίζεται από τον λόγο $e = \frac{W}{Q_h}$ και είναι πάντοτε μικρότερος του 1.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Ήχος



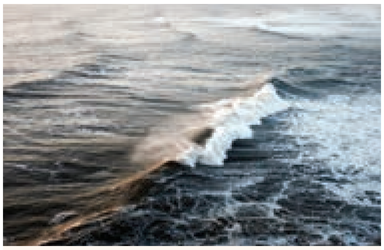
Η Αναστασία επιστρέφει στο σπίτι μετά τη δουλειά. Ανοίγει την πόρτα του γκαράζ με το τηλεχειριστήριο και παρκάρει. Μπαίνοντας στο σπίτι, σερβίρει μια μερίδα φαγητό και τη βάζει στον φούρνο μικροκυμάτων για να ζεσταθεί. Καθώς βγάζει τα υλικά για τη σαλάτα από το ψυγείο, ανοίγει το ραδιόφωνο. Κάποια στιγμή, ενώ ήταν στη δουλειά, είχε την εντύπωση ότι ένιωσε μια σεισμική δόνηση και θέλει να ακούσει τα νέα. Δυναμώνει την ένταση, για να καλύψει το βουητό του φούρνου. Πηγαίνει στον νεροχύτη για να πλύνει το μαρούλι και τις ντομάτες και βλέπει τη μικρή λεκάνη που τοποθέτησε το πρωί πριν φύγει. Η βρύση έσταζε και, μέχρι να έρθει ο υδραυλικός, σκέφτηκε να μαζέψει το νερό για να το χρησιμοποιήσει στο πότισμα. Οι σταγόνες που πέφτουν δημιουργούν ομόκεντρους κύκλους στην επιφάνεια του νερού. Μεταφέρει τη λεκάνη στην άκρη για να κάνει την δουλειά της. Ανοίγει τη βρύση και, καθώς πλένει τα υλικά της σαλάτας, ρίχνει μια ματιά στον κήπο. Το αυτόματο πότισμα έχει τεθεί σε λειτουργία και οι ακτίνες του Ήλιου δημιουργούν ένα μικρό ουράνιο τόξο με τη βοήθεια των αιωρούμενων σταγόνων νερού. Εκείνη τη στιγμή ακούει τον χαρακτηριστικό ήχο λήψης μηνύματος στο κινητό της. Την ειδοποιούν από το ιατρικό κέντρο ότι η ακτινογραφία θώρακα είναι έτοιμη και μπορεί να περάσει να την πάρει. Σκέφτεται ότι προτεραιότητα έχει η επισκευή της βρύσης, αφού ο υδραυλικός είναι δυσεύρετος. Εντοπίζει τον αριθμό του στον κατάλογο του κινητού της και κάνει μια κλήση για να συνεννοηθεί μαζί του…

Στο παραπάνω κείμενο υπάρχουν τουλάχιστον 12 αναφορές σε κύματα. Μπορείτε να τις βρείτε;

4.1 Μηχανικά-Ηχητικά κύματα (χαρακτηριστικά και εφαρμογές)

1. Μηχανικά κύματα

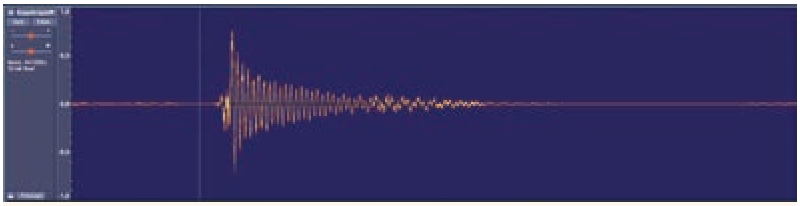
Κύματα της θάλασσας, σεισμικά κύματα, ήχος, φως, … Είμαστε περιτριγυρισμένοι από κύματα.
Τι είναι όμως ένα κύμα;


Εικόνα 4.1 Θαλάσσια κύματα

Γενικά, **κύμα** είναι μια διαταραχή η οποία διαδίδεται σε κάποιο μέσο από ένα σημείο του σε ένα άλλο. Η ιδιότητα του μέσου να παραμορφώνεται και στη συνέχεια να ανακτά το αρχικό του σχήμα ονομάζεται *ελαστικότητα*. Αυτή είναι που επιτρέπει στη διαταραχή να διαδίδεται από το ένα σημείο του μέσου στο άλλο, δηλαδή επιτρέπει τη διάδοση των κυμάτων. Για αυτόν τον λόγο το μέσο ονομάζεται **ελαστικό**.

Με αυτόν τον τρόπο η διαταραχή *μεταφέρει ενέργεια* από σημείο σε σημείο, αλλά όχι μάζα.

Το ελαστικό μέσο μπορεί να είναι το νερό (στα θαλάσσια κύματα), ο αέρας (στον ήχο), το έδαφος (ο φλοιός της Γης στα σεισμικά κύματα) κ.λπ.


Εικόνα 4.2 Ηχητικά κύματα όπως αποτυπώνονται στην οθόνη υπολογιστή μέσω κατάλληλης εφαρμογής.

Δεν είναι όμως απαραίτητο να υπάρχει πάντοτε κάποιο ελαστικό μέσο. Υπάρχουν και κύματα που διαδίδονται στο κενό (τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα).

Τα κύματα που χρειάζονται ελαστικό μέσο για να διαδοθούν ονομάζονται **μηχανικά κύματα**.

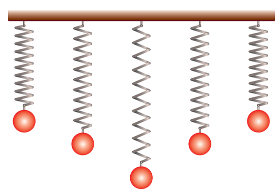
Παραδείγματα μηχανικών κυμάτων είναι:

- ο ήχος με ελαστικό μέσο τον αέρα ή οποιοδήποτε στερεό ή υγρό (**Εικόνα 4.2**),
- τα πρωτεύοντα σεισμικά κύματα (P) με ελαστικό μέσο τον φλοιό ή το υλικό του μανδύα ή το υλικό του πυρήνα της Γης (**Εικόνα 4.3**),
- τα δευτερεύοντα σεισμικά κύματα (S) με ελαστικό μέσο οποιοδήποτε στερεό υλικό στο εσωτερικό της Γης (**Εικόνα 4.4**),
- τα θαλάσσια κύματα με ελαστικό μέσο την επιφάνεια της θάλασσας (**Εικόνα 4.1**).


Εικόνα 4.3 Αποτελέσματα σεισμικών κυμάτων (από τον σεισμό στην Τουρκία το 2023)


Εικόνα 4.4 Καταγραφή σεισμικών κυμάτων από σεισμογράφο

Το σημαντικό είναι τι διαταράσσεται κάθε φορά. Υπάρχει κάποια ποσότητα η οποία το περιγράφει; Για παράδειγμα, στα θαλάσσια κύματα χρησιμοποιείται το ύψος ή το βάθος στο οποίο φτάνουν περιοχές του νερού σε σχέση με την αδιατάρακτη επιφάνεια. Αυτή η αλλαγή στο ύψος λέγεται **απομάκρυνση**.



Σχήμα 4.1 Η σφαίρα εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση.

Πώς ξεκινάει όμως ένα κύμα; Υπάρχει κάπου στο μέσο μια **πηγή** η οποία προκαλεί κάποιου είδους διαταραχή σε ένα μικρό τμήμα του μέσου. Για παράδειγμα, ο άνεμος μπορεί να διαταράσσει την επιφάνεια του νερού και έτσι δημιουργείται ένα θαλάσσιο κύμα.

Αν η διαταραχή είναι *αρμονική ταλάντωση*, δηλαδή περιοδική παλινδρομική κίνηση γύρω από μια θέση, όπως για παράδειγμα η κίνηση ενός σώματος προσδεδεμένου στο άκρο ελατηρίου (**Σχήμα 4.1**), τότε δημιουργείται ένα **αρμονικό κύμα**. Όπως σε κάθε περιοδική κίνηση, έτσι και στην ταλάντωση, γνωρίζουμε ότι βασικά χαρακτηριστικά της είναι η περίοδος T και η συχνότητα f.

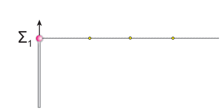
Λογισμικό

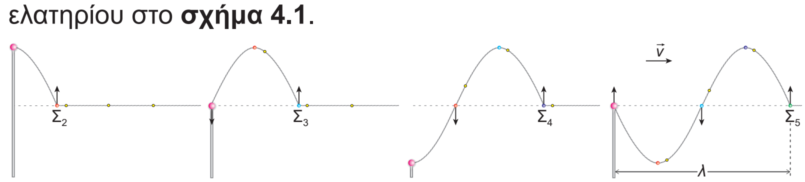
Από την ταλάντωση στο κύμα

Ένα τέτοιο κύμα μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια διαγραμμάτων όπως αυτά του **σχήματος 4.2**. Με τη βοήθεια αυτών των διαγραμμάτων, μπορούμε να μελετήσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά ενός μηχανικού αρμονικού κύματος.

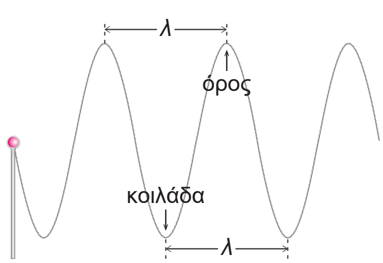
Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη των χαρακτηριστικών των αρμονικών κυμάτων, θα κάνουμε μια διάκριση. Τα αρμονικά κύματα διακρίνονται σε *εγκάρσια* και *διαμήκη*.

Ας θεωρήσουμε ένα σχοινί (**Σχήμα 4.2**) και ότι μέσω ενός εμβόλου το άκρο $Σ_1$ του σχοινιού αρχίζει να εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση, όπως το σώμα που είναι δεμένο στο άκρο του ελατηρίου στο **σχήμα 4.1**.





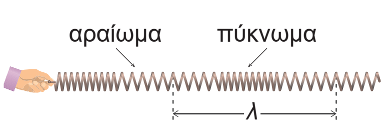
Σχήμα 4.2 Διάδοση κύματος και μήκος κύματος αυτού



Σχήμα 4.3 Μήκος κύματος για εγκάρσιο κύμα

Σε αυτήν την περίπτωση το κύμα λέγεται **εγκάρσιο**. Κάθε σημείο του ταλαντώνεται κατακόρυφα, δηλαδή *κάθετα* στην οριζόντια διεύθυνση διάδοσης και δημιουργούνται *όρη* και *κοιλάδες*.

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ορέων ή κοιλάδων ονομάζεται **μήκος κύματος** (**Σχήμα 4.3**).



Σχήμα 4.4 Μήκος κύματος για διάμηκες κύμα

Υπάρχει όμως και η περίπτωση δημιουργίας κύματος όπως στο ελατήριο του **σχήματος 4.4**.

Σε αυτήν την περίπτωση τα σημεία του «μέσου» διάδοσης ταλαντώνονται *παράλληλα* στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος και έχουμε δημιουργία *πυκνωμάτων* και *αραιωμάτων*. Αυτά τα κύματα ονομάζονται **διαμήκη** (**Σχήμα 4.4**). Σε αυτήν την περίπτωση:

Το **μήκος κύματος** είναι η απόσταση μεταξύ των *κεντρικών σημείων* δύο διαδοχικών πυκνωμάτων ή αραιωμάτων.

2. Χαρακτηριστικά μεγέθη των αρμονικών μηχανικών κυμάτων

Η περίοδος T του κύματος είναι ίση με την περίοδο ταλάντωσης της πηγής. Η συχνότητα f του κύματος ισούται με τη συχνότητα ταλάντωσης της πηγής. Ισχύει:

$$f = \frac{1}{T} \tag{4.1}$$

Το πλάτος A του κύματος ορίζεται ως η μέγιστη απομάκρυνση (σε απόλυτη τιμή) κάθε σημείου από τη θέση ισορροπίας. Το μήκος κύματος λ του κύματος ορίζεται ως η απόσταση στην οποία διαδίδεται το κύμα σε χρόνο μίας περιόδου. Η ταχύτητα διάδοσης v του κύματος είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η ενέργεια (ή η διαταραχή) σε ένα κύμα. Η ταχύτητα εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του ελαστικού μέσου (και συνεπώς, από το πόσο γρήγορα μπορεί να διαδοθεί σε αυτό η διαταραχή). Για τη διάδοση μιας διαταραχής στο ίδιο ελαστικό μέσο ισχύει:

$$v = \frac{x}{t} \tag{4.2}$$

Εφαρμόζοντας αυτήν την εξίσωση για χρόνο μίας περιόδου $(t = T)$, θα πρέπει, από τον ορισμό του μήκους κύματος, να είναι $x = \lambda$. Έχουμε:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T}$$

ή

$$v = \lambda f \tag{4.3}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής**.

Εγκάρσια μηχανικά κύματα

1 2

3 4

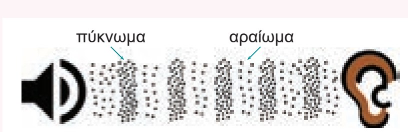
Ταχύτητα ήχου

Ταχύτητα υπερήχων

Ας μελετήσουμε την περίπτωση ενός **ηχητικού κύματος**.

I. Ο ήχος παράγεται όταν μια ποσότητα ενέργειας θέτει σε παλμική κίνηση τα μόρια ενός σώματος, όπως η χορδή μιας κιθάρας ή η μεμβράνη ενός τυμπάνου. Αυτά τα σώματα ονομάζονται **πηγές ήχου**. Η ενέργεια μεταφέρεται στα μόρια του περιβάλλοντος υλικού (όπως είναι τα μόρια του αέρα) μέχρι που φτάνει στα αυτιά μας.

II. Τα ηχητικά κύματα στον αέρα είναι *διαμήκη*. Όταν ο ήχος διαδίδεται στον αέρα, τα μόρια που διαταράσσονται από την πηγή κινούνται προς τα γειτονικά τους και συγκρούονται μαζί τους, μεταβιβάζοντας έτσι την ενέργεια του κύματος. Στην περιοχή των συγκρούσεων σχηματίζεται ένα **πύκνωμα**, ενώ στην περιοχή που εγκατέλειψαν σχηματίζεται ένα **αραίωμα**.



Σχήμα 4.5 Διάδοση του ήχου από την πηγή έως το τύμπανο του αυτιού

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με γειτονικά μόρια, ώσπου η ενέργεια να φτάσει στο τύμπανο του αυτιού μας. Αυτό είναι μια μεμβράνη που πάλλεται/ταλαντώνεται αναγκαστικά με τρόπο ίδιο με αυτόν της πηγής του ήχου. Στη συνέχεια, η ταλάντωση μετατρέπεται σε ηλεκτρικό σήμα («νευρική ώση») και μεταδίδεται στον εγκέφαλο για αποκωδικοποίηση.

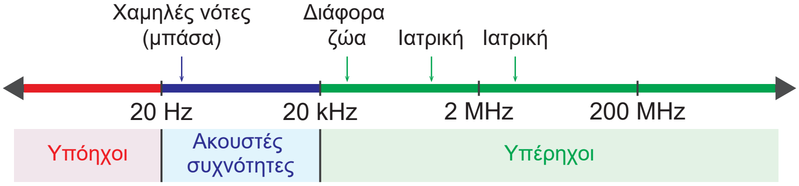
III. Ο ήχος διαδίδεται πιο γρήγορα στα στερεά (5.100 m/s στο ατσάλι), βραδύτερα στα υγρά (1.500 m/s στο νερό) και ακόμη πιο αργά στα αέρια (περίπου 340 m/s στον αέρα). Αυτή η διαβάθμιση στην ταχύτητα είναι αναμενόμενη, αφού στα στερεά τα σωματίδια της ύλης αλληλεπιδρούν με δυνάμεις μεγαλύτερου μέτρου σε σχέση με τα μόρια των υγρών (και αντίστοιχα αλληλεπιδρούν τα μόρια των υγρών σε σχέση με τα μόρια των αερίων), με αποτέλεσμα οι ταλαντώσεις να μπορούν να μεταδίδονται πιο γρήγορα. Άλλος παράγοντας από τον οποίο εξαρτάται η ταχύτητα του ήχου είναι η *θερμοκρασία*. Προφανώς, ο ήχος δεν μπορεί να διαδοθεί αν δεν υπάρχει κάποιο μέσο, άρα δεν διαδίδεται στο κενό. Επειδή τα μόρια των στερεών ασκούν μεταξύ τους και ελκτικές δυνάμεις, τα *ηχητικά κύματα στα στερεά μπορούν να είναι και εγκάρσια*.

IV. Τα ηχητικά κύματα λαμβάνονται από τους δέκτες κάποιων οργάνων (βλ. παράδειγμα 3) και είναι δυνατόν να μετρηθούν οι τιμές χαρακτηριστικών μεγεθών, όπως η συχνότητα και το πλάτος. Υπάρχουν όμως και τα **υποκειμενικά χαρακτηριστικά** του ήχου που αναφέρονται στο πώς τον αντιλαμβανόμαστε. Αυτά είναι το *ύψος*, η *ακουστότητα* και η *χροιά*.

α. Η συχνότητα και η σχέση της με το ύψος του ήχου

Το **ύψος** του ήχου σχετίζεται με το αν ένας ήχος γίνεται αντιληπτός ως «χαμηλός»/«βαρύς» ή «υψηλός»/«λεπτός». Αυτό το υποκειμενικό χαρακτηριστικό συνδέεται με τη συχνότητα και όχι με το πόσο δυνατά ακούμε κάποιον ήχο. Ο χαμηλός ήχος έχει μικρή συχνότητα, ενώ ο υψηλός ήχος έχει μεγάλη συχνότητα.

Λόγω κατασκευής, το ανθρώπινο αυτί μπορεί να αντιληφθεί ήχους μόνο μιας περιορισμένης περιοχής συχνοτήτων (η οποία ονομάζεται **φάσμα ακουστών συχνοτήτων**), από περίπου 20 Hz έως περίπου 20.000 Hz.

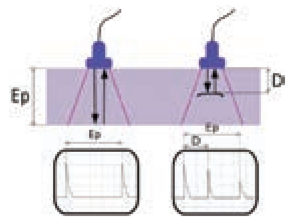


Σχήμα 4.6 Φάσμα ηχητικών συχνοτήτων

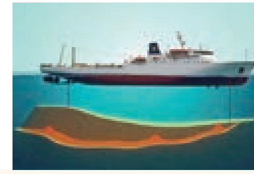
Ηχητικά κύματα με συχνότητα μικρότερη από 20 Hz ονομάζονται **υπόηχοι**. Μέρος των σεισμικών κυμάτων έχει τέτοιες συχνότητες και αυτές χρησιμοποιούνται για τη διερεύνηση του εσωτερικού της Γης. Ζώα όπως οι ελέφαντες και οι αγελάδες μπορούν να ακούσουν τέτοια ηχητικά κύματα.

Ηχητικά κύματα με συχνότητα μεγαλύτερη από 20.000 Hz ονομάζονται **υπέρηχοι**. Ενώ το ανθρώπινο αυτί δεν μπορεί να τα ακούσει, δεν ισχύει το ίδιο για τις γάτες και τους σκύλους. Οι σφυρίχτρες σκύλου παράγουν ηχητικά κύματα μη αισθητά από τους ανθρώπους, αλλά αισθητά από τους σκύλους.

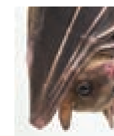
Οι υπέρηχοι αξιοποιούνται σε συσκευές για τη δημιουργία τρισδιάστατων εικόνων σε περιοχές οι οποίες δεν είναι άμεσα προσβάσιμες. Παραδείγματα και εφαρμογές υπερήχων φαίνονται στις **εικόνες 4.5-4.7** και στο **σχήμα 4.7**.



Σχήμα 4.7 «Μη καταστρεπτικός» έλεγχος ελαττωμάτων σε υλικό (όπως ανεπιθύμητα κενά) σε υλικά και κατασκευές. Στους ελέγχους αυτούς, ο υπέρηχος διεισδύει στο υλικό και σε περίπτωση ύπαρξης κάποιου κενού, ένα μέρος του ανακλάται, επιστρέφει σε έναν ανιχνευτή και καταγράφεται.



Εικόνα 4.5 Αποτύπωση του βυθού της θάλασσας μέσω χρήσης σόναρ



Εικόνα 4.6 Οι νυχτερίδες μπορούν να παράγουν και να αισθάνονται υπερήχους. Τους χρησιμοποιούν για εντοπισμό εμποδίων σε σκοτεινούς χώρους (σαν φυσικό σόναρ).

Εικόνα 4.7 Υπερηχογράφημα εμβρύου. Το υπερηχογράφημα είναι μια δισδιάστατη ή τρισδιάστατη εικόνα των εσωτερικών οργάνων και ιστών. Τέτοιες εικόνες λαμβάνονται στη διάρκεια της εγκυμοσύνης, απεικονίζοντας την ανάπτυξη του εμβρύου. Το πλεονέκτημά τους είναι πως δεν έχουν γνωστούς κινδύνους για τους ανθρώπινους ιστούς (σε αντίθεση για παράδειγμα με τις ακτινογραφίες), ενώ τα μηχανήματα δεν είναι ιδιαίτερα ακριβά (σε σχέση για παράδειγμα με τους μαγνητικούς τομογράφους).

β. Η ένταση και η σχέση της με την ηχηρότητα του ήχου

Όσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος ενός ηχητικού κύματος, τόσο περισσότερη ενέργεια μεταφέρει και τόσο δυνατότερος θα ακούγεται ο ήχος.

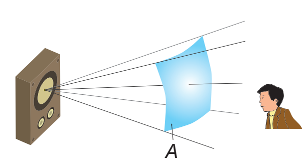
Καθώς το ηχητικό κύμα διαδίδεται, μόνο ένα μέρος του θα φτάσει στο τύμπανο του αυτιού μας (**Σχήμα 4.8**). Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τη συνολική ισχύ που θα φτάσει στο αυτί μας (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου), χρειαζόμαστε την έννοια της έντασης του ήχου. **Ένταση του ήχου** I είναι το πηλίκο της ισχύος που μεταφέρεται διαμέσου μιας επιφάνειας, προς το εμβαδόν της επιφάνειας.

$$I = \frac{P}{A} \tag{4.4}$$

Η μονάδα μέτρησης της έντασης στο SI είναι το $1\ \mathrm{W/m^2}$.

Το ανθρώπινο αυτί μπορεί να αισθανθεί ήχους ελάχιστης έντασης περίπου $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$.

Η ένταση του ήχου είναι *ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους* του ηχητικού κύματος, δηλαδή ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους της ταλάντωσης των σωματιδίων στο μέσο διάδοσης. Αυτό είναι διαισθητικά αναμενόμενο: όσο πιο μεγάλο είναι το πλάτος τόσο περισσότερη ενέργεια χρειάζεται να ξοδέψουμε για να δημιουργήσουμε το κύμα. Ο ακριβής υπολογισμός δίνει ότι διπλάσιο πλάτος αντιστοιχεί σε τετραπλάσια ενέργεια, δηλαδή η ενέργεια είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους.



Σχήμα 4.8 Ηχητικό κύμα που διαδίδεται γύρω από πηγή και διαμέσου επιφάνειας.

Η **ακουστότητα** είναι το υποκειμενικό χαρακτηριστικό που σχετίζεται με το πόσο ισχυρό αντιλαμβανόμαστε ένα ήχο. Αυτό το χαρακτηριστικό εξαρτάται κυρίως από το πόσο μεγάλη είναι η τιμή της έντασης του ήχου. Σε έναν βαθμό παίζει ρόλο και η συχνότητα, καθώς το ανθρώπινο αυτί είναι πιο ευαίσθητο σε συχνότητες στην περιοχή των 1.000 Hz.

Στην πράξη, για να περιγράψουμε το πόσο ισχυρός είναι ένας ήχος χρησιμοποιούμε την **ηχηρότητα** ή **επίπεδο έντασης ήχου** που βασίζεται στη σύγκριση ανάμεσα στην ένταση του ήχου και στην ελάχιστη ένταση ήχου που μπορεί να αισθανθεί το ανθρώπινο αυτί. Η μονάδα επιπέδου έντασης ήχου είναι το 1 decibel (dB). Το ανθρώπινο αυτί αντιλαμβάνεται την ηχηρότητα και όχι απευθείας την ένταση.

Πίνακας 4.1 Παραδείγματα επιπέδου έντασης ήχου

Είδος ήχου	dB
Εκτόξευση πυραύλου	170-190
Απογείωση αεροπλάνου	140
Ήχοι στο κέντρο της πόλης	110
Συζήτηση ανάμεσα σε δύο άτομα	70
Ψίθυρος	60

Η μονάδα dB είναι ορισμένη με τέτοιο τρόπο, ώστε να ισχύουν τα εξής:

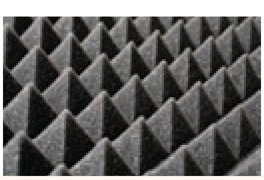
- 0 dB: ήχος έντασης οριακά αισθητής από το ανθρώπινο αυτί.
- 120 dB: ήχος τόσο δυνατός, ώστε βρίσκεται στο όριο του πόνου για το ανθρώπινο αυτί.
- Αύξηση του επιπέδου έντασης ήχου:
    - κατά 10 dB, σημαίνει αύξηση της έντασης του ήχου κατά 10 φορές,
    - κατά $20\ \text{dB} = 2 \times 10\ \text{dB}$, σημαίνει αύξηση της έντασης του ήχου κατά $10^2 = 100$ φορές,
    - κατά $30\ \text{dB} = 3 \times 10\ \text{dB}$, σημαίνει αύξηση της έντασης του ήχου κατά $10^3 = 1.000$ φορές.

  Η κλίμακα dB είναι μια *λογαριθμική κλίμακα*.
- Αρνητικές τιμές dB περιγράφουν ήχο τόσο μικρής έντασης, ώστε το ανθρώπινο αυτί δεν μπορεί καν να τον αντιληφθεί.

Λογαριθμική κλίμακα

Στα κέντρα των πόλεων η ποιότητα ζωής είναι ιδιαίτερα υποβαθμισμένη εξαιτίας των δυνατών ήχων που επικρατούν (**ηχορύπανση**). Η μείωση της έντασης του ήχου που φτάνει στα αυτιά των κατοίκων από τον περιβάλλοντα χώρο είναι ένα βασικό μέλημα των αρχιτεκτόνων. Για αυτόν τον σκοπό χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές όπως τα ηχομονωτικά υλικά, αλλά και το σχήμα των δωματίων.

Ένας από τους παράγοντες που κάνουν τον ήχο να ακούγεται πιο ηχηρός είναι η ανάκλασή του (**αντήχηση**) από τα διάφορα αντικείμενα και τους τοίχους κλειστών χώρων. Όταν αδειάσουμε ένα δωμάτιο από τα έπιπλά του, έχουμε συνήθως την αίσθηση πως κάθε ήχος ακούγεται πιο έντονα, λόγω της αυξημένης αντήχησης. Το αντίθετο συμβαίνει, αν οι τοίχοι είναι σκεπασμένοι από μαλακό υλικό το οποίο μειώνει την αντήχηση. Αυτό χρησιμοποιείται, για παράδειγμα, στα στούντιο ηχογράφησης μουσικής (**Εικόνα 4.8**).



Εικόνα 4.8 Ηχοαπορροφητικό υλικό στους τοίχους στούντιο ηχογράφησης

Σε συναυλιακούς χώρους καταβάλλεται προσπάθεια για τη βελτίωση της ποιότητας του ήχου που φτάνει στα αυτιά των ακροατών. Χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές που σχετίζονται με τις ιδιότητες των κυμάτων, όπως η ανάκλαση και η υπέρθεση που θα μελετήσουμε στην επόμενη υποενότητα.

Εικόνα 4.9 Αίθουσα συναυλιών

γ. Χροιά

Μπορούμε εύκολα να ξεχωρίσουμε δύο ήχους που προέρχονται από δύο διαφορετικά μουσικά όργανα, χωρίς να τα βλέπουμε, ακόμα και αν παίζουν την ίδια μελωδία. Αν ακούσουμε για παράδειγμα ήχους με ίδιο ύψος από βιολί και πιάνο, δεν θα δυσκολευτούμε να τους διαφοροποιήσουμε. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι δύο ήχοι έχουν διαφορετική χροιά. Η **χροιά** είναι συνεπώς εκείνο το υποκειμενικό χαρακτηριστικό που μας δίνει τη δυνατότητα να διακρίνουμε τις πηγές των ήχων. Μπορούμε να ξεχωρίζουμε τις φωνές των γνωστών μας, χωρίς να τους βλέπουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.1

1. Όταν ένας ήχος ορισμένης συχνότητας περάσει από τον αέρα στο θαλασσινό νερό, η ταχύτητα διάδοσης αυξάνεται αρκετά. Το μήκος κύματος θα αυξηθεί, θα μειωθεί ή θα παραμείνει σταθερό;

Λύση

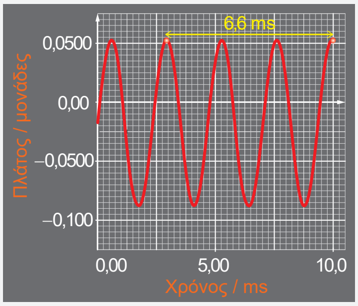
Η συχνότητα του ήχου εξαρτάται μόνο από την πηγή και δεν μεταβάλλεται, όταν αλλάζει το μέσο διάδοσης. Συνεπώς, από τη **σχέση 4.3** προκύπτει πως, όταν αυξηθεί η ταχύτητα, θα αυξηθεί και το μήκος κύματος.

2. Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση ήχου 90 dB από την ένταση ήχου 70 dB;

Λύση

Για κάθε 10 dB έχουμε αύξηση της έντασης του ήχου κατά 10 φορές. Τα 90 dB είναι κατά 20 dB περισσότερα από τα 70 dB. Άρα, η αντίστοιχη ένταση είναι κατά $10 \cdot 10 = 100$ φορές μεγαλύτερη.

3. Πώς «βλέπουμε» τον ήχο για να τον μελετήσουμε; Όταν ο δέκτης του ήχου είναι ένα ηλεκτρικό μικρόφωνο, οι μηχανικές δονήσεις στο εσωτερικό του μετατρέπονται σε μεταβολές του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαρρέει. Αν με αυτό το ρεύμα τροφοδοτήσουμε έναν παλμογράφο, γίνεται δυνατή η απεικόνιση του ήχου στην οθόνη. Τέτοιες λειτουργίες μπορούν να επιτελέσουν και τα κινητά τηλέφωνα με αξιοποίηση κατάλληλων εφαρμογών. Στο σχήμα βλέπουμε την απεικόνιση ενός ήχου σταθερής συχνότητας σε ένα κινητό τηλέφωνο στο οποίο εκτελείται κατάλληλη εφαρμογή (επιλογή «ηχητικός παλμογράφος» της εφαρμογής Phyphox). Στο σχήμα φαίνεται η χρονική διαφορά δύο σημείων που επέλεξε ο χρήστης.



Να υπολογίσετε τη συχνότητα και το μήκος κύματος του συγκεκριμένου ήχου, αν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι 340 m/s.

Λύση

Παρατηρούμε ότι η χρονική διαφορά που επέλεξε ο χρήστης αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα τριών περιόδων. Συνεπώς, η περίοδος του ήχου είναι:

$$T = \frac{6{,}6\ \text{ms}}{3} = 2{,}2\ \text{ms}$$

Η συχνότητα του ήχου είναι:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}2 \cdot 10^{-3}}\ \text{Hz} = 450\ \text{Hz}$$

Το μήκος κύματος του ήχου είναι:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\ \text{ms}^{-1}}{450\ \text{s}^{-1}} = 0{,}76\ \text{m}$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Ήχος ορισμένης συχνότητας που παράγεται από ηχητική πηγή περνά από τον αέρα του υπνοδωματίου ενός σπιτιού στον αέρα του σαλονιού μέσω τοίχου. Κατά τη διάδοση του ήχου από τον αέρα στον τοίχο, ποια από τα παρακάτω μεγέθη μεταβάλλονται;

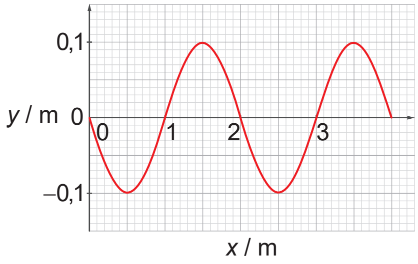
Α) Η συχνότητα

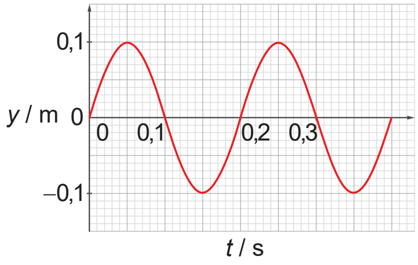
Β) Η ταχύτητα διάδοσης

Γ) Το μήκος κύματος

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Ένα κύμα διαδίδεται πάνω σε μια χορδή προς τη θετική φορά του *x*-άξονα. Θεωρούμε ότι το σημείο της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$. Δίνεται η αναπαράσταση y-x του κύματος, καθώς και η απομάκρυνση y του σημείου που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ σε συνάρτηση με τον χρόνο t.





Να προσδιορίσετε το μήκος κύματος, τη συχνότητα και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

3. Ήχος ορισμένης συχνότητας διαδίδεται στον αέρα και το μήκος κύματός του είναι $3{,}4$ mm. Θα μπορούσατε να ακούσετε έναν τέτοιο ήχο; Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι 340 m/s.

4. Τα πυροβόλα όπλα παράγουν ήχους έντασης πάνω από 140 dB και για αυτόν τον λόγο προτείνεται οι χρήστες να φορούν ωτοασπίδες. Αν με τις ωτοασπίδες ο χρήστης ακούει ήχο 110 dB, πόσες φορές μειώνουν οι ωτοασπίδες την ένταση του ήχου;

5. Εάν δώσετε μια μικρή ώθηση στο πρώτο τουβλάκι ενός ντόμινο από έναν μεγάλο αριθμό όμοιων τούβλων που βρίσκονται σε ευθεία, τα βλέπετε να πέφτουν διαδοχικά το ένα μετά το άλλο. Θα μπορούσε αυτό να θεωρηθεί ως παράδειγμα ενός αρμονικού κύματος; Να εξηγήσετε πώς θα στήνατε τα τουβλάκια, αν θέλατε:

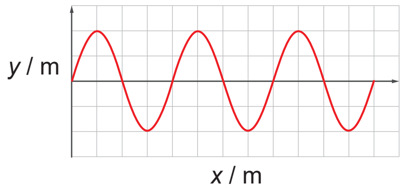
α) να αυξήσετε,

β) να μειώσετε

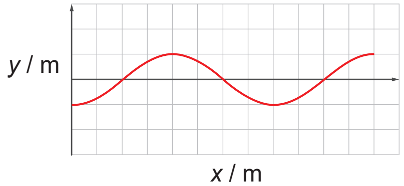
την ταχύτητα με την οποία πέφτουν διαδοχικά.

6. Γιατί η ένταση του ήχου που ακούτε εξασθενίζει όσο πιο μακριά βρίσκεστε από την πηγή του; Να εξηγήσετε δίνοντας παραδείγματα από την καθημερινή ζωή όπως ο χτύπος μιας καμπάνας.

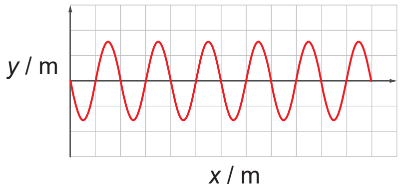
7. Τα κύματα Α, Β και Γ που απεικονίζονται στα σχήματα είναι ηχητικά και διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο διάδοσης.



Κύμα Α



Κύμα Β



Κύμα Γ

Αντλώντας πληροφορίες από τα σχήματα και γνωρίζοντας ότι οι κλίμακες στις γραφικές παραστάσεις είναι ίδιες, να ταξινομήσετε τα κύματα σε αύξουσα σειρά ως προς:

α) το μήκος κύματος,

β) την ένταση,

γ) τη συχνότητα,

δ) την περίοδο.

8. Η εξάρτηση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου στον αέρα από τη θερμοκρασία περιβάλλοντος μπορεί να περιγράφεται από την εμπειρική σχέση:

$$v = v_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\theta}{273}}$$

όπου $v_0 = 331\,\mathrm{m/s}$ και θ η θερμοκρασία περιβάλλοντος σε βαθμούς Κελσίου.

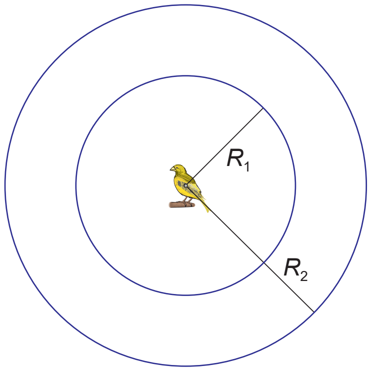
α) Να προσδιορίσετε τις ταχύτητες διάδοσης του ήχου στον αέρα για θερμοκρασίες $\theta = 0\ ^\circ\mathrm{C}$ και $\theta = 25\ ^\circ\mathrm{C}$.

β) Να εξηγήσετε ποιοτικά γιατί ο ήχος «ταξιδεύει» πιο αργά στον ψυχρό αέρα σε σχέση με τον θερμό.

9. Οι γάτες μπορούν να ακούσουν ήχους με συχνότητα έως 60.000 Hz. Οι νυχτερίδες εκπέμπουν και λαμβάνουν πολύ υψηλές συχνότητες έως 120.000 Hz. Οι γάτες ή οι νυχτερίδες ακούν ήχους με μεγαλύτερο μήκος κύματος; Μπορεί το ανθρώπινο αυτί να ακούσει σε αυτές τις περιοχές συχνοτήτων;

Ασκήσεις

1. Πώς μεταβάλλεται η ένταση του ήχου σε συνάρτηση με την απόσταση από την ηχητική πηγή; Θεωρώντας ως σημειακή ηχητική πηγή ένα καναρίνι που κελαηδά, να βρείτε μια σχέση που δίνει την ένταση του ήχου ως συνάρτηση της απόστασης από αυτό. Συγκεκριμένα, να δείξετε ότι η ένταση του ήχου είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή του.



Δίνεται ότι το εμβαδόν A μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R υπολογίζεται από τη σχέση $A = 4\pi R^2$.

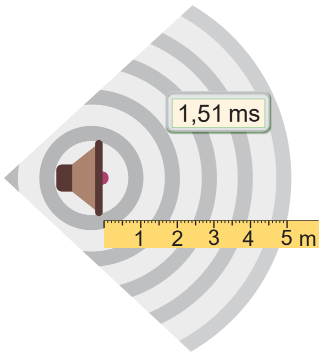
Υπόδειξη

Να φανταστείτε δύο σφαιρικές επιφάνειες με ακτίνες R_1 και R_2, στο κέντρο των οποίων βρίσκεται το καναρίνι. Να θεωρήσετε ότι όση ενέργεια μεταφέρεται ανά δευτερόλεπτο διαμέσου της μικρότερης σφαιρικής επιφάνειας τόση θα μεταφέρεται και μέσω της άλλης. Στη συνέχεια, να βρείτε τον λόγο των εντάσεων του ήχου στις δύο αυτές επιφάνειες.

2. Τα διαμήκη κύματα ταχύτητας v_1 και τα εγκάρσια ταχύτητας v_2 $(v_2 < v_1)$ που παράγονται σε έναν σεισμό φθάνουν σε έναν τόπο Α με διαφορά χρόνου Δt. Να αποδείξετε ότι το επίκεντρο του σεισμού απέχει από τον τόπο Α απόσταση:

$$x = \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} \Delta t$$

3. Στο σχήμα απεικονίζεται ένα στιγμιότυπο προσομοίωσης της εκπομπής ηχητικών κυμάτων από ένα μεγάφωνο.



Το μεγάφωνο αρχίζει να εκπέμπει ήχο τη χρονική στιγμή $t = 0$. Στην προσομοίωση φαίνονται η διάδοση του κύματος, ένας χάρακας για τη μέτρηση μηκών και ένα χρονόμετρο το οποίο ξεκινά να μετρά όταν το μεγάφωνο αρχίζει να εκπέμπει ήχο. Αντλώντας δεδομένα από το σχήμα, να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης, το μήκος κύματος και τη συχνότητα του συγκεκριμένου ηχητικού κύματος.

4. Στην ήρεμη επιφάνεια νερού δημιουργείται ένα κύμα από μια ακίδα η οποία ταλαντώνεται κατακόρυφα με σταθερή συχνότητα. Το κύμα διαδίδεται σε απόσταση $4{,}2\ \text{m}$ μέσα σε χρονικό διάστημα $2\ \text{s}$. Η απόσταση δύο διαδοχικών ορέων είναι $1{,}4\ \text{m}$. Να υπολογίσετε τη συχνότητα ταλάντωσης της ακίδας.

5. Η μέση ένταση του ήχου που ακούει ένας εργαζόμενος σε οικοδομή είναι $10^{-2}\ \text{W/m}^2$. Αν η επιφάνεια του τυμπάνου του αυτιού του είναι $0{,}2\ \text{cm}^2$, να υπολογίσετε πόση ενέργεια απορροφάται από το αυτί σε μια εξάωρη βάρδια εργασίας.

6. Η ένταση του ήχου που εκπέμπεται από ένα μαχητικό αεροσκάφος σε κάποια απόσταση από τον διάδρομο απογείωσης είναι $0{,}50\ \text{W/m}^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός συλλέκτη ήχου που απαιτείται έτσι, ώστε από τη συλλεγόμενη ενέργεια να λειτουργήσει μια τοστιέρα ισχύος $750\ \text{W}$. Να εξηγήσετε γιατί στην πράξη θα χρειαζόταν η δημιουργία ενός μεγαλύτερου σε εμβαδόν συλλέκτη από αυτόν που υπολογίσατε.

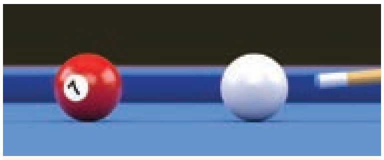
7. Μια σειρήνα συναγερμού εκπέμπει σφαιρικά ηχητικά κύματα με ισχύ $100\ \text{W}$.

α) Να υπολογίσετε την ένταση του ήχου σε απόσταση $5\ \text{m}$ από τη σειρήνα.

β) Αν η ένταση του ήχου σε απόσταση $5\ \text{m}$ από τη σειρήνα είναι I και σε απόσταση $25\ \text{m}$ από τη σειρήνα είναι I', να υπολογίσετε τον λόγο I/I'.

4.2 Αρχή της υπέρθεσης – Στάσιμο ηχητικό κύμα (χορδές – ηχητικοί σωλήνες)

1. Υπέρθεση



Εικόνα 4.10 Μπάλες μπιλιάρδου

Είναι προφανές πως δύο στερεά αντικείμενα δεν μπορούν να καταλάβουν τον ίδιο χώρο. Για παράδειγμα, μια μπάλα του μπιλιάρδου θα σπρώξει μια άλλη μπάλα του μπιλιάρδου και θα καταλάβει τη θέση της. Δεν μπορούν και οι δύο να βρίσκονται στο ίδιο σημείο.

Αυτό που είναι προφανές για στερεά υλικά αντικείμενα (και για σωματίδια) δεν ισχύει και για τα κύματα. Όσο και αν φαίνεται ενάντια στη διαίσθησή μας, δύο κύματα μπορούν να περάσουν το ένα μέσα από το άλλο και να βρίσκονται και τα δύο στο ίδιο σημείο την ίδια στιγμή. Για παράδειγμα, ακούμε ταυτόχρονα πολλούς ήχους. Αυτό σημαίνει πως όλοι διαδίδονται στον αέρα γύρω από τα αυτιά μας την ίδια στιγμή. Τα κινητά τηλέφωνα λειτουργούν χρησιμοποιώντας ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Πολλοί άνθρωποι στο ίδιο δωμάτιο μπορούν να χρησιμοποιούν ταυτόχρονα τα κινητά τους τηλέφωνα. Άρα, τα αντίστοιχα κύματα διαδίδονται ταυτόχρονα στον χώρο του δωματίου.

Υπέρθεση όμοιων παλμών 1

Αυτή η ιδιότητα περιγράφεται μέσω της **αρχής της υπέρθεσης**:

Όταν σε ένα ελαστικό μέσο διαδίδονται δύο ή περισσότερα κύματα, η απομάκρυνση y ενός σημείου του μέσου είναι ίση με τη συνισταμένη των απομακρύνσεων που οφείλονται στα επιμέρους κύματα:

$$y = y_1 + y_2 + \dots \qquad \textbf{(4.5)}$$

Στην περίπτωση που οι απομακρύνσεις δύο κυμάτων σε ένα σημείο είναι αντίθετες, η συνισταμένη απομάκρυνση θα είναι μηδενική και τα δύο κύματα θα εξουδετερώνονται στο σημείο αυτό.

2. Στάσιμα κύματα

Ως συνέπεια της αρχής της υπέρθεσης, μπορεί να δημιουργηθεί μια μορφή κύματος το οποίο έχει σχήμα που δεν διαδίδεται από σημείο σε σημείο. Η μορφή αυτή είναι το αποτέλεσμα της υπέρθεσης δύο κυμάτων της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους που διαδίδονται στο ίδιο μέσο σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί, όταν ένα κύμα ξεκινήσει να διαδίδεται από το ένα άκρο μιας χορδής και ανακλαστεί στο άλλο άκρο της. Έτσι, στην ενδιάμεση περιοχή παρατηρείται το αποτέλεσμα της υπέρθεσης δύο κυμάτων ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους. Για παράδειγμα, τεντώνουμε οριζόντια ένα σχοινί και αρχίζουμε να κουνάμε πάνω-κάτω (ταλαντώνουμε κατακόρυφα) το ελεύθερο άκρο του. Το κύμα που διαδίδεται στο σχοινί ανακλάται στο τελικό σημείο στο οποίο το σχοινί είναι δεμένο (π.χ. σε τοίχο ή εργαστηριακή ράβδο, όπως στο **σχήμα 4.9**).

Τα κύματα αυτά ονομάζεται **στάσιμα**. Σε ένα στάσιμο κύμα:

- Υπάρχουν σημεία που δεν κινούνται καθόλου, τα οποία ονομάζονται **δεσμοί** (σε αυτά τα σημεία οι απομακρύνσεις είναι πάντα *αντίθετες* και λέμε ότι προστίθενται *ακυρωτικά* ή *καταστρεπτικά*).
- Υπάρχουν σημεία που κινούνται με μέγιστο πλάτος, τα οποία ονομάζονται **κοιλίες** (σε αυτά τα σημεία οι απομακρύνσεις είναι πάντα *ομόρροπες* και λέμε ότι προστίθενται *ενισχυτικά*).
- Όλα τα σημεία που δεν είναι δεσμοί ή κοιλίες ταλαντώνονται με ενδιάμεσες τιμές πλάτους.

3. Τρεις βασικές παραλλαγές των στάσιμων κυμάτων

I. Στάσιμο κύμα δεσμός-δεσμός, όπως αυτό σε μια τεντωμένη χορδή (π.χ. χορδή κιθάρας)

Σε αυτήν την περίπτωση τα δύο άκρα της χορδής (μήκους L) είναι ακίνητα (είναι δηλαδή δεσμοί). Ανάλογα με τη σχέση μήκους χορδής και μήκους κύματος, μπορούν να σχηματιστούν διάφορα στάσιμα κύματα (**Σχήμα 4.10**).

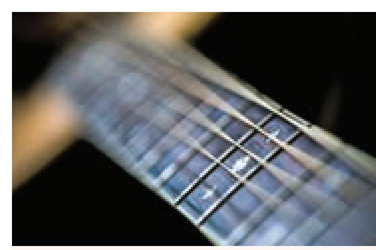
Υπέρθεση διαφορετικών παλμών

2

3

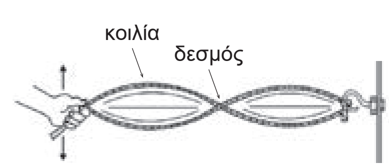
4

Υπέρθεση κυμάτων



Εικόνα 4.11 Στάσιμα κύματα σε χορδές

Υπέρθεση κυμάτων Στάσιμο κύμα

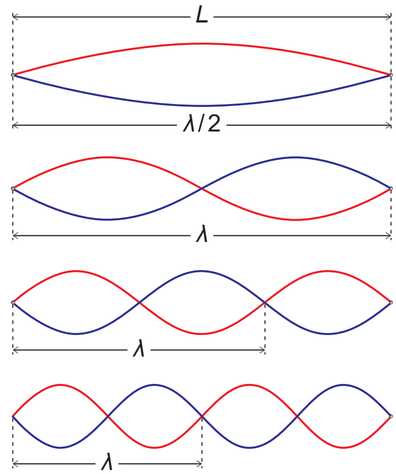


Σχήμα 4.9 Στάσιμο κύμα

Λογισμικό

Στάσιμο κύμα σε μονοδιάστατη χορδή

Εικόνα 4.12α Κιθάρα



Σχήμα 4.10 Στάσιμα κύματα δεσμός-δεσμός

Κύμα σε χορδή

Δεν μπορεί, όμως, οποιαδήποτε συχνότητα να προκαλέσει τον σχηματισμό στάσιμου κύματος σε μια χορδή. Από το σχήμα γίνεται φανερό πως το μήκος κύματος θα πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε:

$$\lambda = \frac{2L}{1}, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{4}, \ldots \qquad \textbf{(4.6)}$$

Η περίπτωση $\lambda = \frac{2L}{1} = 2L$ περιγράφει το μεγαλύτερο δυνατό μήκος στάσιμου κύματος.

Στάσιμο κύμα σε χορδή

Η αντίστοιχη συχνότητα είναι:

$$f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L} \qquad \textbf{(4.7)}$$

και ονομάζεται **θεμελιώδης συχνότητα** της χορδής.

Τα υπόλοιπα μήκη κύματος $\left(\frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{4}, \ldots\right)$ αντιστοιχούν σε συχνότητες οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.

- Αν $\lambda = \frac{2L}{2}$, τότε:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{2L}{2}} = 2f_0 \quad (\textbf{1η αρμονική} \text{ της } f_0)$$

- Αν $\lambda = \frac{2L}{3}$, τότε:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{2L}{3}} = 3f_0 \quad (\textbf{2η αρμονική} \text{ της } f_0)$$

κ.ο.κ.

Γενικά, τα στάσιμα κύματα δεσμός-δεσμός στη χορδή έχουν συχνότητες:

$$f = 1f_0, 2f_0, 3f_0, 4f_0, \ldots$$

Εικόνα 4.12β Κλαρινέτο και φλάουτο

II. Στάσιμο κύμα δεσμός-κοιλία, όπως αυτό σε κλαρινέτο

Σχηματίζεται σε σωλήνα με το ένα άκρο ανοικτό και το άλλο άκρο κλειστό από ηχητικό κύμα που διαδίδεται κατά μήκος του σωλήνα (**Σχήμα 4.11**). Σε αυτήν την περίπτωση, στο ένα άκρο υπάρχει δεσμός και στο άλλο κοιλία. Ανάλογα με τη σχέση μήκους ηχητικού σωλήνα και μήκους κύματος, μπορούν πάλι να σχηματιστούν διάφορα στάσιμα κύματα.

Δεν μπορεί, όμως, οποιαδήποτε συχνότητα να προκαλέσει τον σχηματισμό στάσιμου κύματος σε έναν ηχητικό σωλήνα. Από το σχήμα γίνεται φανερό πως το μήκος κύματος θα πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε:

$$\lambda = \frac{4L}{1}, \frac{4L}{3}, \frac{4L}{5}, \ldots \qquad \textbf{(4.8)}$$

Η περίπτωση $\lambda = \dfrac{4L}{1} = 4L$ περιγράφει το μεγαλύτερο δυνατό μήκος στάσιμου κύματος.

Η αντίστοιχη συχνότητα είναι:

$$f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L} \qquad \textbf{(4.9)}$$

και ονομάζεται επίσης **θεμελιώδης συχνότητα**.

Τα υπόλοιπα μήκη κύματος $\left(\dfrac{4L}{3}, \dfrac{4L}{5}, \ldots\right)$ αντιστοιχούν σε συχνότητες οι οποίες είναι περιττά πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.

- Αν $\lambda = \dfrac{4L}{3}$, τότε:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{4L}{3}} = 3f_0 \quad (\textbf{1η αρμονική} \text{ της } f_0)$$

- Αν $\lambda = \dfrac{4L}{5}$, τότε:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{4L}{5}} = 5f_0 \quad (\textbf{2η αρμονική} \text{ της } f_0)$$

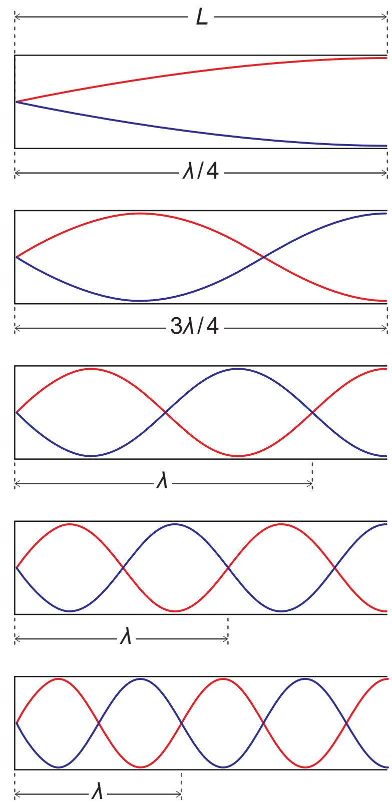
κ.ο.κ.

Γενικά, τα στάσιμα κύματα δεσμός-κοιλία έχουν συχνότητες:

$$f = 1f_0, 3f_0, 5f_0, \ldots$$

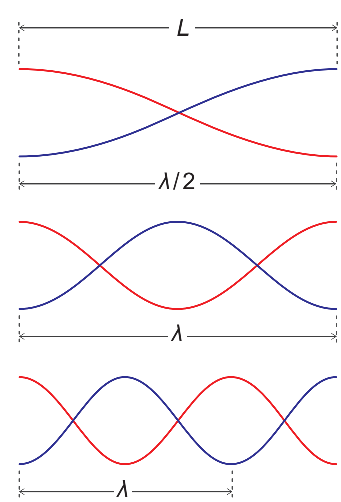
III. Στάσιμο κύμα κοιλία-κοιλία, όπως αυτό σε φλάουτο

Σχηματίζεται σε σωλήνα με δύο ανοικτά άκρα από ηχητικό κύμα που διαδίδεται κατά μήκος του σωλήνα. (**Σχήμα 4.12**) Σε αυτήν την περίπτωση, και στα δύο άκρα υπάρχουν κοιλίες. Ανάλογα με τη σχέση μήκους ηχητικού σωλήνα και μήκους κύματος, μπορούν πάλι να σχηματιστούν διάφορα στάσιμα κύματα.



Σχήμα 4.11 Στάσιμα κύματα δεσμός-κοιλία

Έγχορδα και πνευστά μουσικά όργανα

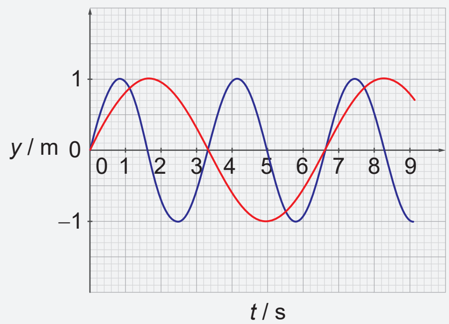


Σχήμα 4.12 Στάσιμα κύματα κοιλία-κοιλία

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τα δυνατά μήκη κύματος και συχνότητες σε ένα τέτοιο στάσιμο κύμα είναι ίδιες με αυτές στο στάσιμο κύμα δεσμός-δεσμός, δηλαδή τις **εξισώσεις 4.6** και **4.7**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.2

1. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης-χρόνου για δύο κύματα τα οποία περνούν από το ίδιο σημείο ενός ελαστικού μέσου. Να σχεδιάσετε το αποτέλεσμα που προκύπτει από την υπέρθεσή τους.



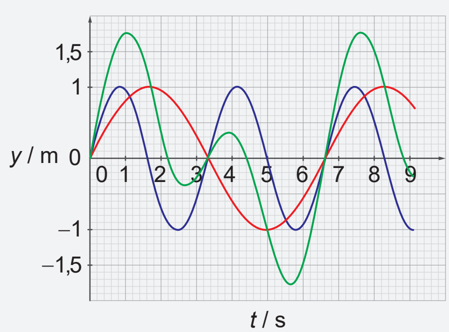
Δύο κύματα, καθώς περνούν από το ίδιο σημείο.

Λύση

Χρησιμοποιώντας την **εξίσωση 4.5**, υπολογίζουμε τη συνολική απομάκρυνση για ορισμένες τιμές του t, σχεδιάζουμε το αντίστοιχο σημείο και στη συνέχεια ενώνουμε τα σημεία. Για παράδειγμα, όταν $t = 2\ \mathrm{s}$, έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = (0{,}90\ \mathrm{m}) + (-0{,}75\ \mathrm{m}) = 0{,}15\ \mathrm{m}$$

Επαναλαμβάνοντας για πολλά σημεία και ενώνοντάς τα, η τελική γραφική παράσταση διαμορφώνεται όπως η πράσινη γραμμή στο παρακάτω σχήμα.



Το αποτέλεσμα της υπέρθεσης δύο αρμονικών κυμάτων

Παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα της υπέρθεσης παρουσιάζει περιοδικότητα, αλλά δεν είναι αρμονικό κύμα, κάτι που συμβαίνει συχνά (αλλά όχι πάντα).

2. Σε μια χορδή κιθάρας, πιέζοντας σε κατάλληλο σημείο, αφήνουμε ελεύθερο ένα μήκος $L = 62{,}0\ \mathrm{cm}$. Να υπολογίσετε:

α) τα μήκη κύματος των στάσιμων κυμάτων που μπορούν να παραχθούν σε αυτήν, αν χρησιμοποιηθεί ολόκληρο το ελεύθερο μήκος της,

β) τις συχνότητες των ήχων που μπορούν να παραχθούν από τη χορδή, αν η ταχύτητα των κυμάτων σε αυτήν είναι $325\ \mathrm{m/s}$.

Λύση

α) Από την **εξίσωση 4.6** βρίσκουμε τα επιτρεπόμενα μήκη κύματος:

$$\lambda = \frac{2L}{1}, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{4}, \ldots$$
$$= \frac{2\cdot(0{,}62\ \mathrm{m})}{1}, \frac{2\cdot(0{,}62\ \mathrm{m})}{2},$$
$$\frac{2\cdot(0{,}62\ \mathrm{m})}{3}, \frac{2\cdot(0{,}62\ \mathrm{m})}{4}, \ldots$$
$$= 1{,}24\ \mathrm{m}, 0{,}62\ \mathrm{m}, 0{,}413\ \mathrm{m}, 0{,}31\ \mathrm{m}, \ldots$$

β) Η θεμελιώδης συχνότητα είναι:

$$f_0 = \frac{v}{2L} = \frac{325\ \mathrm{m/s}}{2\cdot(0{,}62\ \mathrm{m})} = 262\ \mathrm{Hz}$$

Οι αρμονικές είναι:

$$2\cdot 262\ \mathrm{Hz} = 524\ \mathrm{Hz}$$
$$3\cdot 262\ \mathrm{Hz} = 786\ \mathrm{Hz}$$
$$\ldots$$

Αν σχηματιστεί το στάσιμο κύμα με τη θεμελιώδη συχνότητα, η χορδή θα παραγάγει ηχητικά κύματα ίσης συχνότητας (η κίνηση-ταλάντωση των σημείων της χορδής θα προκαλέσει κίνηση με ίση συχνότητα των μορίων του αέρα γύρω από την κιθάρα).

Ένα ηχητικό κύμα με συχνότητα 262 Hz αντιστοιχεί στη νότα C_4 ή κεντρική ντο. Αντίστοιχα, ένα κύμα συχνότητας 524 Hz αντιστοιχεί στη νότα C_5 ή υψηλή ντο.

Προσοχή!

Η ταχύτητα των κυμάτων στη χορδή δεν είναι η ταχύτητα του ήχου! Η συχνότητα, όμως, των κυμάτων στη χορδή θα είναι ίση με τη συχνότητα του ήχου.

3. Θεωρώντας την ταχύτητα του ήχου ίση με 341 m/s, να υπολογίσετε το ελάχιστο μήκος ενός σωλήνα ανοικτού από τη μια πλευρά και κλειστού από την άλλη, ώστε να μπορεί στο εσωτερικό του να σχηματιστεί η κεντρική ντο.

Λύση

Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, η κεντρική ντο έχει συχνότητα 262 Hz. Για να έχουμε το μικρότερο δυνατό μήκος, θα πρέπει αυτή να είναι η θεμελιώδης συχνότητα. Επομένως:

$$f_0 = \frac{v}{4L} \quad \text{ή} \quad 262\ \text{Hz} = \frac{341\ \text{m/s}}{4L} \quad \text{ή} \quad L = 0{,}325\ \text{m}$$

4. Να συγκρίνετε το ελάχιστο μήκος που πρέπει να έχει ένας σωλήνας ανοικτός και από τις δύο πλευρές με το ελάχιστο μήκος ενός σωλήνα ανοικτού από τη μια πλευρά και κλειστού από την άλλη, ώστε να είναι δυνατόν στο εσωτερικό του καθενός να σχηματιστεί η κεντρική ντο.

Λύση

Για να έχουμε το μικρότερο δυνατό μήκος, θα πρέπει η συχνότητα της νότας να είναι η θεμελιώδης συχνότητα. Επομένως:

- $f_0 = \dfrac{v}{4L}$ για τον κλειστό από τη μια πλευρά σωλήνα,
- $f_0' = \dfrac{v}{2L'}$ για τον ανοικτό και από τις δύο πλευρές σωλήνα.

Για να ισχύει $f_0 = f_0'$ (να παραγάγουν την ίδια νότα), είναι φανερό πως πρέπει:

$$L' = 2L$$

Άρα, πρέπει το μήκος του ανοικτού και από τις δύο πλευρές σωλήνα να είναι διπλάσιο από αυτό του κλειστού από τη μια πλευρά σωλήνα.

4ο ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

(Προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας: 2)

Ταχύτητα του ήχου

Α. Στρατηγική προετοιμασίας (περιλαμβάνει τα βήματα 1ο και 2ο)

Βήμα 1ο: Έναυσμα ενδιαφέροντος

Να σχολιάσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α. Το διάστημα είναι από τα ησυχότερα μέρη του σύμπαντος!

β. Η επικρατούσα άποψη είναι ότι στο διαμάντι επιτυγχάνεται η μεγαλύτερη ταχύτητα του ήχου, επειδή είναι το πιο σκληρό υλικό.

Βήμα 2ο: Προϋπάρχουσες γνώσεις – Προβληματισμός – Διατύπωση υποθέσεων

Διατυπώνουμε τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής.

Β. Ερευνητικό στάδιο (περιλαμβάνει το 3ο βήμα)

Βήμα 3ο: Δραστηριότητες – Πειραματισμός

Ταχύτητα ήχου – Συντονισμός

Συμπληρωμένος πίνακας

Γ. Παρουσίαση των αποδεικτικών στοιχείων (περιλαμβάνει τα βήματα 4ο και 5ο)

Βήμα 4ο: Συμπεράσματα - Νέες Γνώσεις - Εφαρμογές

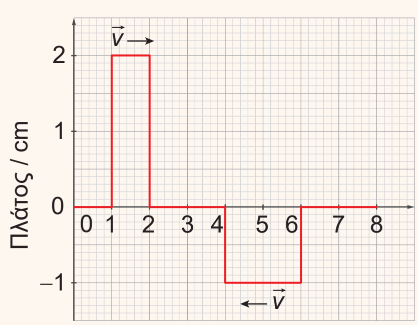
Βήμα 5ο: Γενικεύσεις - Ερμηνείες - Διαθεματικότητα

Line of best fit

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Οι κυματικοί παλμοί που φαίνονται στο σχήμα κινούνται αντίθετα μεταξύ τους με το ίδιο μέτρο ταχύτητας 10 cm/s.



Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση πλάτους-θέσης, εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης για τις χρονικές στιγμές 0,1 s, 0,2 s και 0,3 s. Να θεωρήσετε ως $t=0$ τη χρονική στιγμή που έχει ληφθεί το στιγμιότυπο του σχήματος.

2. Σε μια χορδή, της οποίας τα άκρα είναι ακλόνητα στερεωμένα, δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα. Για συχνότητα f_1 δημιουργούνται 2 κοιλίες κατά μήκος της χορδής, ενώ για συχνότητα f_2 δημιουργούνται 4 κοιλίες. Να υπολογίσετε τον λόγο των συχνοτήτων f_2/f_1.

3. Ποιο μήκος πρέπει να έχει ένας σωλήνας ανοικτός και από τις δύο πλευρές έτσι, ώστε να παράγει μια θεμελιώδη συχνότητα στάσιμου κύματος ίση με 110 Hz, μια μέρα όπου η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι 343 m/s;

4. Σε έναν σωλήνα ανοικτό και από τις δύο πλευρές είναι η θεμελιώδης συχνότητα μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη από τη θεμελιώδη συχνότητα σε έναν σωλήνα ίδιου μήκους με μια ανοικτή και μια κλειστή πλευρά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Σε μια χορδή, της οποίας τα άκρα είναι ακλόνητα στερεωμένα, δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα. Για συχνότητα f_1 δημιουργούνται δύο κοιλίες κατά μήκος της χορδής. Στη συνέχεια, κόβουμε τη χορδή στη μέση και στερεώνουμε τα άκρα του μισού τμήματος. Σε αυτό, για συχνότητα f_2 δημιουργείται επίσης στάσιμο κύμα με δύο κοιλίες. Να υπολογίσετε τον λόγο των συχνοτήτων f_2 / f_1.

6. Σε μια χορδή μήκους L, της οποίας τα άκρα είναι ακλόνητα στερεωμένα, παράγεται ένα στάσιμο κύμα. Για συχνότητα ταλάντωσης f δημιουργούνται 4 κοιλίες κατά μήκος της χορδής. Εάν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι διπλάσια από την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων κατά μήκος της χορδής, να υπολογίσετε ως συνάρτηση του L το μήκος του ηχητικού κύματος που παράγεται από τη χορδή.

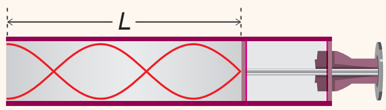
7. Στο σχήμα παριστάνεται ένα στιγμιότυπο στάσιμου κύματος σε χορδή μια χρονική στιγμή t_1 όπου όλα τα σημεία της χορδής έχουν ταχύτητα μηδέν.

Αφού αντιγράψετε το διάγραμμα, να σχεδιάσετε πάνω στους ίδιους άξονες με διαφορετικά χρώματα το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1 + T/4$ και $t_1 + T/2$, όπου T η περίοδος ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής.

8. Σε έναν σωλήνα, στον οποίον έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο ηχητικό κύμα, η θεμελιώδης συχνότητα είναι 160 Hz και οι επόμενες δύο υψηλότερες συχνότητες είναι 320 Hz και 480 Hz (1η και 2η αρμονική αντίστοιχα). Από αυτήν την πληροφορία, μπορείτε να συμπεράνετε αν ο σωλήνας είναι ανοικτός στο ένα άκρο και κλειστός στο άλλο ή αν είναι ανοικτός και στα δύο άκρα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις

1. Ο σωλήνας του Kundt είναι ένας ανοικτός από τη μια πλευρά ηχητικός σωλήνας, ενώ η απέναντι κλειστή πλευρά μπορεί να μετακινείται με ένα έμβολο, ώστε να αλλάζει το μήκος L του σωλήνα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Με έναν τέτοιον σωλήνα υπολογίζουμε πειραματικά την ταχύτητα του ήχου στον αέρα. Συγκεκριμένα, με μια γεννήτρια συχνοτήτων παράγουμε έναν ήχο σταθερής συχνότητας f και μετακινώντας αργά το έμβολο ακούμε ήχο μέγιστης έντασης, όταν πετύχουμε στάσιμο κύμα όπως στο σχήμα.



Από τη συχνότητα f και τη μέτρηση της μετακίνησης ΔL του εμβόλου μεταξύ δύο διαδοχικών ηχητικών μεγίστων ή ελαχίστων του στάσιμου κύματος, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ήχου.

Εφαρμογή

Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα για $f = 850$ Hz και $\Delta L = 20$ cm.

2. Να υπολογίσετε τον λόγο της θεμελιώδους αρμονικής συχνότητας προς τη διαδοχική της 1η αρμονική στην περίπτωση στάσιμου κύματος:

α) σε ηχητικό σωλήνα με τα δύο άκρα ανοικτά,

β) σε ηχητικό σωλήνα με το ένα άκρο ανοικτό και το άλλο κλειστό.

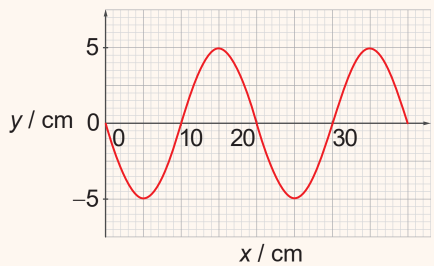
Μπορεί ο υπολογισμός σας να γενικευτεί για οποιεσδήποτε διαδοχικές συχνότητες και στις δύο περιπτώσεις ηχητικών σωλήνων;

3. Δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους 5 cm και ίδιας συχνότητας 25 Hz διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις μέσα σε κάποιο υλικό με ταχύτητα μέτρου 50 m/s. Από την υπέρθεσή τους προκύπτει στάσιμο κύμα. Να υπολογίσετε:

α) το πλάτος ταλάντωσης των σημείων που βρίσκονται στις θέσεις των κοιλιών και

β) την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών του στάσιμου κύματος.

4. Στο σχήμα φαίνεται ένα στιγμιότυπο στάσιμου κύματος σε χορδή μήκους 40 cm. Το στιγμιότυπο αναπαριστά μια στιγμή που όλα τα σημεία της χορδής έχουν ταχύτητα μηδέν.

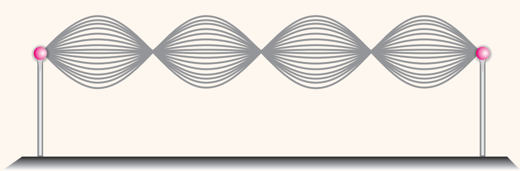


Το σύστημα αξόνων δεν είναι ορθοκανονικό για λόγους ευκρίνειας. Να υπολογίσετε:

α) το πλάτος και το μήκος κύματος των οδεύοντων κυμάτων, η υπέρθεση των οποίων οδηγεί στη δημιουργία του στάσιμου κύματος του σχήματος,

β) τη συχνότητα ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής, αν η ταχύτητα διάδοσης των οδεύοντων κυμάτων στη χορδή είναι $10\ m/s$.

5. Στο σχήμα φαίνεται το στάσιμο κύμα που δημιουργεί ένας πειραματιστής σε μια ελαστική χορδή μήκους $80\ cm$.



Αν η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος στη χορδή είναι $170\ m/s$, να υπολογίσετε:

α) τη συχνότητα ταλάντωσης των υλικών σημείων της χορδής,

β) το μήκος κύματος του ήχου που παράγεται.

Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι $340\ m/s$.

6. Η θεμελιώδης συχνότητα που αντιστοιχεί στη νότα ΜΙ είναι $330\ Hz$. Εάν γνωρίζετε ότι αυτή παράγεται από χορδή κιθάρας, να υπολογίσετε την κατάλληλη απόσταση μεταξύ των ακλόνητων σημείων (δεσμών), για να ακούσετε ήχο που αντιστοιχεί σε αυτήν τη νότα. Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στη χορδή είναι $523\ m/s$.

7. Η 1η, 2η και 3η αρμονική σε έναν σωλήνα, στον οποίον έχει δημιουργηθεί ένα στάσιμο ηχητικό κύμα, είναι αντίστοιχα $480\ Hz$, $800\ Hz$ και $1.120\ Hz$.

α) Από αυτήν την πληροφορία, να αιτιολογήσετε αν ο σωλήνας είναι ανοικτός στο ένα άκρο και κλειστός στο άλλο ή αν είναι κλειστός και στα δύο άκρα.

β) Να υπολογίσετε τη θεμελιώδη συχνότητα.

γ) Να υπολογίσετε με ακρίβεια χιλιοστού το μήκος του σωλήνα.

Δίνεται ότι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $342\ m/s$.

8. Σε μια χορδή, της οποίας το ένα άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο (δεσμός) και το άλλο ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος (κοιλία), δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα. Εάν η συχνότητα της 1ης αρμονικής είναι $270\ Hz$, να υπολογίσετε:

α) το μήκος της χορδής,

β) το μήκος κύματος του παραγόμενου ήχου.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τη θεμελιώδη συχνότητα.

Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή είναι $300\ m/s$ και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι $340\ m/s$.

4.3 Συντονισμός – Διακροτήματα

1. Έγχορδα και πνευστά μουσικά όργανα

Στην προηγούμενη υποενότητα μάθαμε ότι τα στάσιμα κύματα συνδέονται με την παραγωγή ήχων από μουσικά όργανα. Ας δούμε με περισσότερες λεπτομέρειες πώς παράγονται οι νότες τόσο σε **έγχορδα** όσο και σε **πνευστά** όργανα.

2. Συντονισμός

Κάθε σώμα χαρακτηρίζεται από την **ιδιοσυχνότητά** του, που είναι η συχνότητα στην οποία θα ταλαντωθεί, όταν κάποια στιγμή διεγερθεί και κατόπιν αφεθεί ελεύθερο. Παράδειγμα αποτελούν οι χορδές. Τραβώντας μια χορδή και αφήνοντάς την ελεύθερη, μπορεί να σχηματιστεί σε αυτήν, όπως είδαμε, ένα στάσιμο κύμα με τη θεμελιώδη συχνότητα ή με τις αρμονικές της. Οι συχνότητες αυτές αποτελούν τις ιδιοσυχνότητες της χορδής.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το παιχνίδι της παιδικής χαράς που βλέπουμε στην **εικόνα 4.13**. Αν πιέσουμε το αλογάκι προς τα κάτω και το αφήσουμε ελεύθερο, θα αρχίσει να ταλαντώνεται πάνω-κάτω. Η συχνότητα της ταλάντωσης δεν καθορίζεται από εμάς, αλλά από τη μάζα του παιχνιδιού και τη σκληρότητα του ελατηρίου. Η συχνότητα αυτή (μειώνεται για μεγαλύτερες μάζες και αυξάνεται για πιο δύσκαμπτα ελατήρια) αποτελεί την ιδιοσυχνότητα του παιχνιδιού. Σκοπός του συγκεκριμένου παιχνιδιού είναι ένα παιδί που θα ανέβει πάνω στο αλογάκι να ταλαντώνεται μαζί του πολύ έντονα. Για να επιτευχθεί αυτό, θα πρέπει το παιδί να αρχίσει να κουνάει το σώμα του πάνω-κάτω, σπρώχνοντας αντίστοιχα το αλογάκι. Ο ρυθμός με τον οποίον γίνεται αυτό (συχνότητα ταλάντωσης), καθορίζει το πόσο μεγάλου πλάτους θα είναι οι ταλαντώσεις. Υπάρχει μία τιμή της συχνότητας με την οποία ταλαντώνεται το παιδί πάνω στο αλογάκι, για την οποία το πλάτος της ταλάντωσης μεγιστοποιείται. Αυτή η τιμή είναι ίδια με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος αλογάκι-ελατήριο-παιδί. Όταν αυτό επιτευχθεί, έχουμε το φαινόμενο του συντονισμού.

Εικόνα 4.13 Παιχνίδι με ελατήριο σε παιδική χαρά

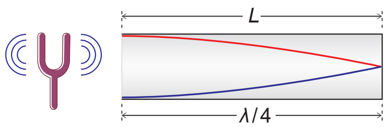
Συντονισμός είναι η μεγιστοποίηση του πλάτους της ταλάντωσης ενός σώματος, η οποία προκαλείται από μια εξωτερική περιοδική δύναμη, όταν η συχνότητά της ισούται με την ιδιοσυχνότητα του σώματος.

Συντονισμός και ηχητικοί σωλήνες

Το φαινόμενο του συντονισμού μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια ενός διαπασών και ενός σωλήνα.

Το διαπασών είναι ένα μεταλλικό αντικείμενο σε σχήμα U με βάση (**Εικόνα 4.14**). Όταν χτυπηθεί σε σκληρή επιφάνεια ή με άλλο αντικείμενο (π.χ. σφυρί), παράγει ηχητικά κύματα συγκεκριμένης

Εικόνα 4.14 Διαπασών



Σχήμα 4.13 Διαπασών μπροστά από έναν σωλήνα (κλειστό από δεξιά) με στήλη αέρα, όπου παράγεται ηχητικό στάσιμο κύμα με τη θεμελιώδη συχνότητα.

Ακούγοντας, βλέποντας και μετρώντας το διακρότημα

Ηχητικό διακρότημα

Λογισμικό

Μελέτη διακροτήματος

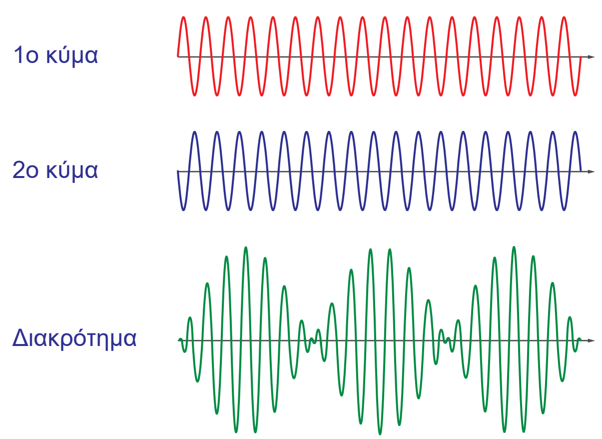
Το κούρδισμα της κιθάρας

συχνότητας. Κάθε διαπασών είναι κατασκευασμένο για να παράγει μόνο αυτήν τη συγκεκριμένη συχνότητα (νότα).

Χτυπώντας το διαπασών και τοποθετώντας το μπροστά από το ανοικτό άκρο ενός σωλήνα, κλειστού από την άλλη πλευρά, είναι δυνατόν να δημιουργηθεί ένα στάσιμο ηχητικό κύμα στον σωλήνα και ως επακόλουθο να ακουστεί ένας δυνατός ήχος, εφόσον η συχνότητα που παράγει το διαπασών είναι ίση με τη θεμελιώδη ή με μία από τις αρμονικές για τον σωλήνα (συντονισμός) (**Σχήμα 4.13**).

3. Διακροτήματα

Στο **σχήμα 4.14** αναπαριστώνται δύο ηχητικά κύματα με ίσα πλάτη (π.χ. ένα από χορδή και ένα από διαπασών), των οποίων οι συχνότητες διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Πρόκειται για αναπαράσταση που γίνεται για λόγους οπτικοποίησης, στην οποία ο ήχος παρουσιάζεται ως εγκάρσιο κύμα!



Σχήμα 4.14 Υπέρθεση δύο ηχητικών κυμάτων και δημιουργία διακροτήματος

Το αποτέλεσμα της υπέρθεσης αυτών των δύο ηχητικών κυμάτων, που έχουν ίσα πλάτη και λίγο διαφορετικές συχνότητες, αποτελείται από μια χρονική εναλλαγή στιγμών όπου τα δύο κύματα εξουδετερώνουν το ένα το άλλο (*καταστρεπτική υπέρθεση*) και στιγμών όπου τα δύο κύματα προστίθενται το ένα στο άλλο (*ενισχυτική υπέρθεση*).Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **διακρότημα** (beat).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 4.3

1. Η ταχύτητα των κυμάτων σε μια χορδή αυξάνεται όσο πιο καλά τεντωμένη είναι η χορδή (δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η τάση της). Σε μια κιθάρα παρατηρούμε πως τα ηχητικά κύματα που παράγει μια χορδή έχουν συχνότητα λίγο μεγαλύτερη από ό,τι θα έπρεπε, δηλαδή η χορδή δεν παράγει τις σωστές νότες και χρειάζεται κούρδισμα.

Να εξηγήσετε αν πρέπει να σφίξουμε ή να χαλαρώσουμε τη χορδή στο κλειδί.

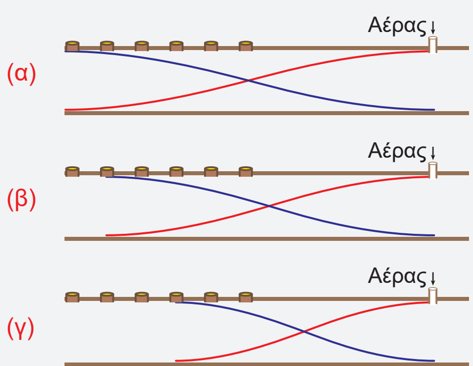
Λύση

Θεωρώντας πως κάθε φορά παράγεται η θεμελιώδης συχνότητα, από την **εξίσωση 4.7** ισχύει:

$$f_0 = \frac{v}{2L}$$

όπου L είναι το ελεύθερο μήκος της χορδής, δηλαδή από το τάστο που πιάνουμε έως τη γέφυρα. Παρατηρούμε πως η συχνότητα είναι ανάλογη της ταχύτητας των κυμάτων. Θέλουμε να μειώσουμε τη συχνότητα για να πετύχουμε τη σωστή νότα, οπότε θα πρέπει η ταχύτητα των κυμάτων να μειωθεί. Αφού η ταχύτητα αυξάνεται με την τάση, θα πρέπει να χαλαρώσουμε τη χορδή.

2. Με βάση το απλοποιημένο πνευστό του σχήματος να διερευνήσετε αν η συχνότητα της νότας που παράγεται κάθε φορά, καθώς περνάμε από το **σχήμα (α)** στο **σχήμα (β)** και στη συνέχεια στο **σχήμα (γ)**, αυξάνεται ή μειώνεται.



Λύση

Θεωρώντας πως κάθε φορά παράγεται η θεμελιώδης συχνότητα, όπως ακριβώς στο σχήμα, από την **εξίσωση 4.7** ισχύει:

$$f_0 = \frac{v}{2L}$$

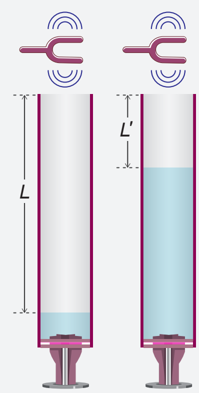
όπου L είναι το μήκος της στήλης αέρα όπου δημιουργείται το στάσιμο κύμα. Παρατηρούμε ότι από το **σχήμα (α)** στο **σχήμα (γ)** το μήκος L μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι η θεμελιώδης συχνότητα, άρα και η συχνότητα της παραγόμενης νότας, αυξάνεται.

3. Στην περίπτωση του παιχνιδιού της **εικόνας 4.13**, αν ένα μεγαλύτερο παιδί προσπαθήσει να ανέβει στο αλογάκι, θα διαπιστώσει πως δεν πρέπει να κινηθεί πάνω-κάτω πολύ γρήγορα (με αποτέλεσμα να μην μπορεί να ευχαριστηθεί τον ρυθμό που δίνει το παιχνίδι), αντίθετα με ό,τι μπορεί να κάνει ένα μικρότερο παιδί. Να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό.

Λύση

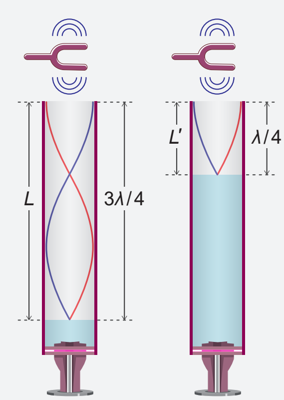
Ένα μεγαλύτερο παιδί έχει μεγαλύτερη μάζα. Αυτό σημαίνει πως η μάζα του συστήματος παιδί-παιχνίδι θα αυξηθεί, οπότε η ιδιοσυχνότητα θα μειωθεί. Για να επιτευχθεί ταλάντωση μεγάλου πλάτους (συντονισμός), το παιδί θα πρέπει να ταλαντώνεται πάνω-κάτω με αργό ρυθμό και άρα δεν πρέπει να κινείται αρκετά γρήγορα.

4. Στο σχήμα ένα διαπασών, που μπορεί να παράγει ήχο συχνότητας f, τοποθετείται μπροστά από το ανοικτό στόμιο ενός ογκομετρικού κυλίνδρου. Με δοκιμές βρίσκουμε πως για δύο διαφορετικές ποσότητες νερού στον κύλινδρο τα ηχητικά κύματα από το διαπασών ενισχύονται και ακούγονται πιο έντονα. Αν τα αντίστοιχα μήκη της στήλης αέρα είναι L και L', να βρείτε τη σχέση ανάμεσα σε αυτά και στη συχνότητα f.



Λύση

Αφού τα ηχητικά κύματα ενισχύονται, συμβαίνει το φαινόμενο του συντονισμού, δηλαδή η συχνότητα f είναι σε κάθε περίπτωση ίση με τη θεμελιώδη συχνότητα ή μία από τις αρμονικές της. Επειδή έχουμε δύο μήκη στήλης αέρα, θα υπάρχουν δύο διαδοχικές συχνότητες συντονισμού (π.χ. η θεμελιώδης και η 1η αρμονική).



Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε πως στο μήκος L' αντιστοιχεί η θεμελιώδης και στο μήκος L η 1η αρμονική, όπως στο σχήμα.

Με τη βοήθεια του σχήματος έχουμε:

$$L - L' = \frac{3\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

Το μήκος κύματος είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις, γιατί καθορίζεται από το διαπασών μέσω της σχέσης:

$$v = \lambda f \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{v}{f}$$

όπου v είναι η ταχύτητα του ήχου.

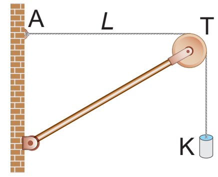
Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε:

$$L - L' = \frac{v}{2f}$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ – ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ

Ερωτήσεις

1. Το άκρο Α μιας ελαστικής χορδής στερεώνεται σε κατακόρυφο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο άλλο άκρο της χορδής δένεται ένας κύλινδρος Κ και η χορδή περνά μέσα από το αυλάκι τροχαλίας Τ. Το τμήμα της τεντωμένης χορδής από το Α έως την τροχαλία έχει μήκος L. Διεγείρουμε σε ταλάντωση το τμήμα L της χορδής, οπότε δημιουργείται στάσιμο κύμα με μία κοιλία και παράγεται ήχος συχνότητας f. Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία με βαρύτερο κύλινδρο, η συχνότητα του ήχου θα είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη από την f;

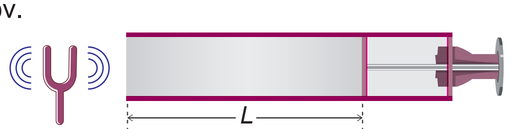


2. Δύο πνευστά όργανα ίδιου τύπου θεωρούνται σωλήνες ανοικτοί και από τις δύο πλευρές. Το ένα έχει μήκος L_1 και το άλλο $L_2 > L_1$. Αν f_1 και f_2 είναι οι θεμελιώδεις συχνότητες των ήχων που παράγουν με όλες τις οπές κλειστές, θα ισχύει:

Α) $f_1 = f_2$ **Β)** $f_1 > f_2$ **Γ)** $f_1 < f_2$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

3. Στο ακόλουθο σχήμα μετακινώντας το έμβολο, μπορούμε να μεταβάλλουμε το μήκος L του σωλήνα, μπροστά από τον οποίο πάλλεται ένα διαπασών.



Διαπιστώνουμε ότι η ελάχιστη μετατόπιση του εμβόλου, ώστε να έχουμε δύο μεγιστοποιήσεις της έντασης του ήχου είναι 20 cm. Ποιο είναι το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει το διαπασών;

4. Αφού μελετήσετε το παράδειγμα 1 για το κούρδισμα της χορδής μιας κιθάρας, να περιγράψετε τη σχέση μεταξύ της τάσης της χορδής μιας κιθάρας, της συχνότητας συντονισμού της και της συχνότητας των ηχητικών κυμάτων που παράγονται από αυτήν. Πώς μπορούμε να ρυθμίσουμε την τάση, για να επιτύχουμε τον επιθυμητό συντονισμό και τις σωστές νότες;

5. Πώς το παράδειγμα του παιδιού που ταλαντώνεται στο αλογάκι της παιδικής χαράς αντικατοπτρίζει το φαινόμενο του συντονισμού και σε ποια συχνότητα το πλάτος των ταλαντώσεων μεγιστοποιείται; Εάν ένα παιδί μάζας m_1 ανέβαινε στο αλογάκι και πετύχαινε συντονισμό ταλαντούμενο με συχνότητα f_1, τι συμβουλές θα δίνατε σε έναν φίλο σας με μικρότερη μάζα $m_2 < m_1$ έτσι, ώστε να πετύχει και αυτός συντονισμό και να ευχαριστηθεί το παιχνίδι;

6. Γιατί οι στρατιώτες δεν περνούν με «βήμα» τις γέφυρες; Γιατί οι πίστες χορού «τρέμουν», όταν οι χορευτές χορεύουν συγκεκριμένους χορούς; Γιατί οι κερκίδες των γηπέδων ταλαντώνονται, όταν οι θεατές χτυπούν ρυθμικά τα πόδια τους; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Τι πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους οι μηχανικοί που κατασκευάζουν γέφυρες, γήπεδα κ.λπ., για να μην υπάρχει πιθανότητα ατυχήματος λόγω ταλάντωσης; Να κάνετε μια έρευνα για τέτοιου τύπου δυστυχήματα που έχουν συμβεί κατά το παρελθόν.

Ασκήσεις

1. Ένας κατασκευαστής έγχορδων οργάνων πειραματίζεται με μια τεντωμένη χορδή μήκους $1\,\text{m}$. Με τη βοήθεια ακουστικού παλμογράφου βρίσκει ότι η θεμελιώδης συχνότητα του ήχου που εκπέμπεται από την παλλόμενη χορδή είναι ίση με $680\,\text{Hz}$. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του παραγόμενου ήχου και την ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος στη χορδή, αν η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι $340\,\text{m/s}$.

2. Το μήκος L ενός σωλήνα μπορεί να μεταβάλλεται με τη μετακίνηση του εμβόλου, όπως στο σχήμα. Μπροστά από τον σωλήνα πάλλεται ένα διαπασών με συχνότητα $850\,\text{Hz}$.

Αν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $340\,\text{m/s}$, να υπολογίσετε το ελάχιστο μήκος για το οποίο πετυχαίνουμε συντονισμό, δηλαδή μεγιστοποίηση της έντασης του ήχου που ακούγεται.

3. Δίνεται η πληροφορία ότι το τετράγωνο της ταχύτητας διάδοσης ενός κύματος σε μια χορδή είναι ανάλογο της δύναμης F που τεντώνει τη χορδή. Αν θέλουμε να αυξήσουμε κατά 20% τη θεμελιώδη συχνότητα σε μια χορδή ενός έγχορδου οργάνου, πόσο τοις εκατό πρέπει να αυξήσουμε με τη βοήθεια του κλειδιού τη δύναμη που τεντώνει τη χορδή;

4. Δίνεται ότι η νότα SI παράγεται από μια χορδή κιθάρας, η οποία έχει κουρδιστεί έτσι, ώστε η παραγόμενη συχνότητα f_0 που αντιστοιχεί στη νότα να είναι η θεμελιώδης. Εάν η απόσταση από το τάστο έως τη γέφυρα της κιθάρας κατά την ταλάντωση της χορδής είναι $0{,}530\,\text{m}$, να υπολογίσετε:

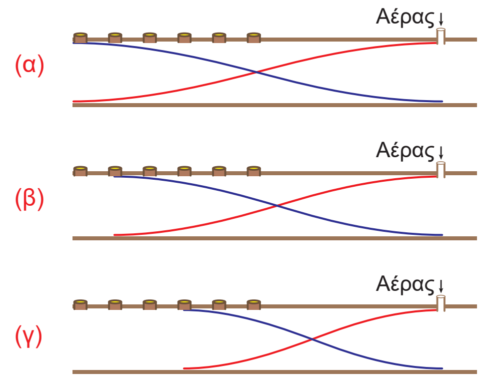
α) το μήκος κύματος,

β) τη θεμελιώδη συχνότητα f_0.

Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στη χορδή είναι $524\,\text{m/s}$.

5. Το ανθρώπινο αυτί έχει ένα κανάλι μήκους περίπου $2{,}5\,\text{cm}$ το οποίο καταλήγει στη μεμβράνη του τυμπάνου. Αν το κανάλι του αυτιού θεωρηθεί ως ένας σωλήνας που είναι ανοικτός στο ένα άκρο και κλειστός στην περιοχή του τυμπάνου, να υπολογίσετε τη θεμελιώδη συχνότητα κοντά στην οποία αναμένεται η ακοή να έχει τη μεγαλύτερη ευαισθησία. Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι $340\,\text{m/s}$.

6. Στο σχήμα 4.3.3 αναπαρίσταται ένα απλοποιημένο πνευστό.



Εάν το μήκος του είναι $66\,\text{cm}$, να υπολογίσετε:

α) τη συχνότητα της χαμηλότερης νότας που μπορεί να παίξει αυτό το όργανο,

β) τη μεταβολή της συχνότητας σε σχέση με αυτήν που υπολογίσατε στο α), όταν, κλείνοντας μία οπή, το μήκος κύματος του στάσιμου κύματος μειώνεται στο μισό.

Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι $340\,\text{m/s}$.

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (ΠΕ4)

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1. Προβλήματα με στάσιμα κύματα

I) Αναγνωρίζουμε ποιος από τους τρεις τύπους στάσιμου κύματος περιγράφεται από την άσκηση και ποια είναι τα αντίστοιχα μήκη κύματος και οι αντίστοιχες συχνότητες.

Διάταξη	Τύπος στάσιμου	Συχνότητες	Μήκη κύματος
Χορδή με σταθερά άκρα	Δεσμός-Δεσμός	$1f_0, 2f_0, 3f_0, 4f_0, \ldots$	$\frac{2L}{1}, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{4}, \ldots$
Σωλήνας με δύο ανοικτά άκρα	Κοιλία-Κοιλία	$1f_0, 2f_0, 3f_0, 4f_0, \ldots$	$\frac{2L}{1}, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{4}, \ldots$
Σωλήνας με ένα ανοικτό και ένα κλειστό άκρο	Κοιλία-Δεσμός	$1f_0, 3f_0, 5f_0, \ldots$	$\frac{4L}{1}, \frac{4L}{3}, \frac{4L}{5}, \ldots$

II) Προσπαθούμε να εντοπίσουμε αν το πρόβλημα αφορά στη θεμελιώδη (πρώτος τύπος) ή στις αρμονικές της (κατά σειρά οι υπόλοιποι τύποι).

III) Στην περίπτωση χορδής δεν ξεχνάμε πως η ταχύτητα v στον τύπο της θεμελιώδους συχνότητας δεν είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, αλλά η ταχύτητα των κυμάτων στη χορδή. Ο ήχος που παράγεται θα έχει συχνότητα ίση με αυτήν του στάσιμου κύματος στη χορδή.

2. Προβλήματα με ένταση ήχου

Η ένταση ενός κύματος είναι:

$$I = \frac{P}{A}$$

όπου P η ισχύς και A το εμβαδόν της επιφάνειας στην οποία απλώνεται το κύμα.

Αν από μια πηγή ήχου το ηχητικό κύμα διαδίδεται σφαιρικά (εμβαδόν σφαίρας: $A = 4\pi R^2$) για την ένταση σε απόσταση R θα ισχύει:

$$I = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Η ηχηρότητα (σε dB) εξαρτάται από την ένταση ως εξής:

- για κάθε 10 dB αύξησης της ηχηρότητας, η ένταση αυξάνεται 10 φορές
- για κάθε 20 dB αύξησης της ηχηρότητας, η ένταση αυξάνεται 100 φορές κ.ο.κ.

Προβλήματα

1. Σε απόσταση 4 m από μια σημειακή ηχητική πηγή η ένταση του ήχου είναι $1\ \mathrm{W/m^2}$.

α) Ποια είναι η ισχύς που εκπέμπεται από την πηγή;

β) Αν το επίπεδο έντασης του ήχου σε απόσταση 4 m από την πηγή είναι 120 dB, σε ποια απόσταση από την πηγή το επίπεδο έντασης του ήχου θα είναι 100 dB;

Υπόδειξη

Το εμβαδόν A μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας R υπολογίζεται από τη σχέση $A = 4\pi R^2$.

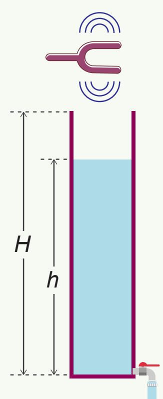
2. Μια χορδή μήκους 0,60 m είναι τεντωμένη και ακλόνητα στερεωμένη στα δύο άκρα της. Όταν διεγείρεται, παράγει ήχο του οποίου η πρώτη αρμονική μετράται με ακουστικό παλμογράφο ίση με 220 Hz. Να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή,

β) το μήκος κύματος του ηχητικού κύματος που παράγεται, αν ο ήχος διαδίδεται στον αέρα με ταχύτητα 340 m/s,

γ) το μήκος κύματος που θα έχει ο ήχος, αν περάσει από τον αέρα στο νερό, όπου διαδίδεται με ταχύτητα 1.500 m/s.

3. Στο σχήμα φαίνεται ένα διαπασών που εκπέμπει ήχο συχνότητας 425 Hz πάνω από έναν σωλήνα ύψους $H = 110$ cm, ανοικτό από την πάνω πλευρά. Ο σωλήνας είναι αρχικά γεμάτος με νερό και στη βάση του υπάρχει μια στρόφιγγα που επιτρέπει την έξοδο του νερού με αργό ρυθμό. Όταν το ύψος της στήλης του νερού γίνει $h = 90$ cm, έχουμε για πρώτη φορά μεγιστοποίηση της έντασης του ήχου (συντονισμό).



α) Να βρείτε το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπεται από το διαπασών.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του ήχου στον αέρα.

γ) Πόσες επιπλέον φορές μπορεί να επιτευχθεί μεγιστοποίηση της έντασης του ήχου, καθώς εξέρχεται το νερό και σε ποια ύψη h της στήλης του νερού συμβαίνει αυτή η μεγιστοποίηση;

4. Ένας σωλήνας έχει μήκος 1,2 m.

α) Να προσδιορίσετε τις συχνότητες των πρώτων τριών αρμονικών, αν ο σωλήνας είναι ανοικτός στο ένα και κλειστός στο άλλο άκρο και έχουν δημιουργηθεί σε αυτόν στάσιμα ηχητικά κύματα.

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των αρμονικών συχνοτήτων αυτού του σωλήνα που βρίσκονται στο ανθρώπινο ακουστό εύρος (από 20 Hz έως 20.000 Hz).

γ) Να απαντήσετε στα ερωτήματα α) και β) στην περίπτωση που ο σωλήνας είναι ανοικτός και στα δύο άκρα.

Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι 342 m/s.

5. Σε ένα μουσικό όργανο Α, που θεωρείται σωλήνας με τα δύο άκρα ανοικτά, δημιουργείται ένα στάσιμο ηχητικό κύμα με θεμελιώδη συχνότητα 250 Hz. Σε ένα μουσικό όργανο Β, που θεωρείται σωλήνας με το ένα άκρο ανοικτό και το άλλο κλειστό, δημιουργείται ένα στάσιμο ηχητικό κύμα, του οποίου η 4η αρμονική είναι ίση με την 3η αρμονική του μουσικού οργάνου Α. Να υπολογίσετε τα μήκη των σωλήνων Α και Β.

Δίνεται ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι 340 m/s.

ΣΥΝΟΨΗ

Ο **ήχος** είναι ένα *διάμηκες* μηχανικό κύμα που διαδίδεται στα *στερεά*, στα *υγρά* και στα *αέρια*. Κάθε ηχητικό κύμα χαρακτηρίζεται από το **πλάτος** A και τη **συχνότητα** f (ή την **περίοδο** T) που καθορίζονται από την *πηγή*, το **μήκος κύματος** λ που είναι η απόσταση μεταξύ δύο πυκνωμάτων (ή αραιωμάτων) και την **ταχύτητα διάδοσης** v που εξαρτάται από το *μέσο διάδοσης*. Αυτά τα τελευταία τρία μεγέθη συνδέονται μεταξύ τους μέσω της **θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής**:

$$v = \lambda f$$

Το τετράγωνο του πλάτους συνδέεται με την **ένταση** I του ήχου που ορίζεται ως η ενέργεια που διέρχεται στη μονάδα του χρόνου (ισχύς) από τη μονάδα της επιφάνειας:

$$I = \frac{P}{A}$$

Η φυσιολογία του ανθρώπινου αυτιού είναι προσαρμοσμένη στο να αντιλαμβάνεται το **επίπεδο έντασης ενός ήχου**, που μετράται με τη βοήθεια των *decibels*, αντί για την ίδια την ένταση. Εκτός από τα προηγούμενα μετρήσιμα-*αντικειμενικά* χαρακτηριστικά, σε κάθε ήχο υπάρχουν και τα *υποκειμενικά* χαρακτηριστικά του **ύψους**, της **ακουστότητας** και της **χροιάς**. Το ανθρώπινο αυτί μπορεί να αντιληφθεί ένα περιορισμένο εύρος συχνοτήτων $(20 - 20.000\ \text{Hz})$. Έξω από τα όρια αυτά, οι **υπέρηχοι** και οι **υπόηχοι** έχουν σημαντικές τεχνολογικές και ιατρικές εφαρμογές.

Ενώ δύο σωματίδια δεν μπορούν να συνυπάρχουν στο ίδιο σημείο του χώρου, δύο (ηχητικά) κύματα μπορούν να συνυπάρχουν στην ίδια περιοχή του χώρου, με τα αποτελέσματά τους να υπακούουν στην **αρχή της υπέρθεσης** σύμφωνα με την οποία:

Η συνολική απομάκρυνση είναι ίση με τη συνισταμένη των επιμέρους απομακρύνσεων.

Μια συνέπεια της αρχής αυτής είναι η δημιουργία **στάσιμων** (ηχητικών) κυμάτων τα οποία παράγονται από (ηχητικά) κύματα με ίδια πλάτη και ίδιες συχνότητες που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Σε κάθε τέτοιο κύμα διακρίνονται οι **δεσμοί**, σημεία που παραμένουν διαρκώς ακίνητα, και οι κοιλίες, σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

Οι **θεμελιώδεις συχνότητες** των στάσιμων κυμάτων που δημιουργούνται σε ένα γραμμικό μέσο μήκους L (χορδή, ηχητικός σωλήνας) είναι:

$$f_0 = \frac{v}{2L} \quad \text{(αν τα δύο άκρα είναι αμφότερα δεσμοί ή κοιλίες)}$$

και

$$f_0 = \frac{v}{4L} \quad \text{(αν το ένα άκρο είναι δεσμός και το άλλο κοιλία)}$$

ενώ τα υπόλοιπα στάσιμα κύματα έχουν συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια αυτών των θεμελιωδών συχνοτήτων και για τον λόγο αυτόν ονομάζονται **1η αρμονική**, **2η αρμονική** κ.ο.κ.

Όταν τα (ηχητικά) κύματα που υπερτίθενται έχουν ίσα πλάτη και παραπλήσιες συχνότητες, το αποτέλεσμα είναι ένα (ηχητικό) κύμα του οποίου η ένταση μεταβάλλεται περιοδικά και είναι γνωστό ως **διακρότημα**.

Ο **συντονισμός** εμφανίζεται όταν η συχνότητα με την οποία διεγείρουμε ένα σύστημα είναι ίση με μια από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος, οπότε έχουμε ταλάντωση μέγιστου πλάτους. Μπορεί να γίνει αντιληπτός με τη διέγερση και τη μεγιστοποίηση της έντασης του ήχου σε ηχητικούς σωλήνες.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1 Δύναμη

1.1 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1.** 2 N/mm, 10 N **2.** Η δύναμη από το νερό στα κουτιά **3. α)** Α **β)** Δ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** 11 N **2. α)** 1.600 N/m **β)** 73,75 cm **3.** $-\vec{F}$

1.2 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1.** Θα μειώνεται **2. α)** 3 N **β)** –3 N **3.** 60 N, 80 N **4.** 0 N

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** $1{,}9 \cdot 10^5$ N **2. α)** 40 N **β)** 12,7° **4.** 84 N, 48,5 N **5. α)** –160 N **β)** –120 N **γ)** 30 N **7. α)** 0,6 N **β)** 0,06 N/mm, 60 N/m

1.3 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1.** Όχι **2.** Στο σαλόνι **4.** Α **5.** Α (Μεγαλύτερη τριβή)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** 0,2 **2.** 300 N **3. α)** 0,4 **β)** 10 N **4. β)** 11,2 N

1.4 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1.** Μεγαλύτερη στο Γ **4.** $x = y/3$ **5.** Α **6.** Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** 40 N·m, 29,3 N·m, –40 N·m **2. α)** 1,68 N·m **β)** 3,12 N·m **3.** 8 N, 55 cm από το Α **4.** 30° **5. α)** $\tau = 3ημθ$ **6.** 160 N·m, 10 N·m, 120 N·m, –60 N·m **7.** 80 cm από την Α

1.5 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1.** Κατακόρυφο δοκάρι **3.** Ίσες **4.** $0{,}4R_Γ$ **5.** $w_B = w_Γ = w_A/4$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1. α)** 162 N β) 370 N **2. α)** $3{,}5 \cdot 10^{22}$ N **β)** $2{,}7 \cdot 10^{17}$ N **3.** $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg **4.** $w_{δ,A} = 2w_{δ,B}$ **5.** $54R_Γ$ από το κέντρο της Γης

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: **1.** Όχι **2. α)** 3 cm έως 16 cm **δ)** 2 cm **3. α)** 6 N, 12 N **β)** 18 N **γ)** 300 N/m **4.** 173 N **5.** 12 N **7. α)** $199GM^2/50R^2$ **β)** $7GM^2/18R^2$ **γ)** $226GM^2/121R^2$

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 2 Από τη δύναμη στην κίνηση

2.1 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1. α)** $v_A < v_B$, $v_y = 0$ **β)** $v_A = v_B = v_Γ$ **2. α)** Πέφτει κατακόρυφα **β)** Αρχικά ανεβαίνει κατακόρυφα και στη συνέχεια πέφτει ελεύθερα **3. α)** Ακίνητο **β)** ΕΟΚ **4.** Μεγαλύτερη **5.** $s_{100} < s_{400}$, $\Delta x_{100} > \Delta x_{400}$ **7. α)** 0,01 s, 0,05 s, 0,04 s **β)** –1,5 cm, +2,5 cm **γ)** –4 cm **9. β)** $a_1 = a_2$, $v_1 = 2v_2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1. α)** 1,21 s **β)** 4,99 m/s **γ)** Πρακτικά μηδέν **4. α)** 2 cm **β)** 10 cm **γ)** 25 s **5. α)** 1,25 m/s **β)** 1 m/s **γ)** 1,11 m/s **6. α)** 10 s **β)** 5,5 m/s^2

2.2 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **2.** Δεν απαιτούνται καύσιμα **3.** $T_1 > T_2$ **4.** Το σχοινί ΚΛ **5.** Ίσες **7.** Όταν το σχοινί είναι πλάγιο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** $T = 15$ N, $F = 9$ N **3.** 0,1 m **4.** 10 N ομόρροπη της τάσης **5. α)** 100 N **β)** 20 N **γ)** 50 N **7. β)** 50 N **γ)** 50 N, εφθ = 0,75 **8.** $T_1 = 542$ N, $T_2 = 575$ N, $T_3 = 433$ N

2.3 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1.** 10 kg **4. β)** $m_φ/m_α = a_α/a_φ$ **5.** Α **6.** Στατική τριβή **7. β)** $0{,}1g$ **γ)** $19w/20$ **9.** Ίσες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** 0,25 **2. α)** 108 N **β)** 9,6 N **3. β)** $T_1 = 19{,}6$ N, $T_2 = 9{,}8$ N **γ)** 14,8 N **δ)** 44,4 N **ε)** Ίδια επιτάχυνση, διαφορετική τάση **4.** 2 m/s^2 **5.** 1.080 N **6. β) i)** 500 N **ii)** 550 N **iii)** 450 N **7. α)** $T_1 = 50$ N, $T_2 = 25$ N **β)** 5 m/s^2 **8. α)** 2 N **β)** 6 m/s^2 **9. α)** 3 m/s^2 **β)** 30 N

2.4 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **2.** 2 **3.** 2 **5.** 2 **7.** 12 m **8. α)** Ίσα **β)** Ίσες **9. α) i)** Β, Δ, Ζ **ii)** Γ, Η **iii)** Α, Ε **β)** Α **10. α) i)** Ε **ii)** Α, Β, Γ, Δ **iii)** Ζ **β)** Ζ **11.** 2 m/s^2 **12.** –1,8 m/s, +0,2 m/s, +2,2 m/s **13.** Ίσες **14.** $t_ξ = 2t_σ$ **15.** $h_Γ/h_Σ = 6$ **16. β)** 9,74 m/s^2 **17.** 5 m **18. β)** $v_1 > v_2$ **19.** $y = 20 + 10t - 4{,}9t^2$ (SI)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1. γ)** 7 m/s **3.** 85 km/h, 68,6 km/h **4.** 75 m **5.** 100 m **6. α)** 10 s, 12 s, 8 s **β)** 420 m **7. α)** $x_1 = t^2$ (SI), $x_2 = 36 - 5t$ (SI) **β)** 4 s, 16 m **8. α)** 4 s, 4 m/s **β)** 12 m **9. β)** 5 s, $-2\ \text{m/s}^2$ **γ)** 0 m, 50 m **10. α)** 2.700 m, 5 min, 1.800 m, 900 m **β)** 6 m/s, –3 m/s, $x_1 = 6t$ (SI), $x_2 = 2.700 - 3t$ (SI) **γ)** 450 s, 900 s **13. β)** $4\ \text{m/s}^2$ **γ)** 8 m/s, 12 m/s **14. α)** 2 s, 40 cm **β)** –10 cm/s **15. α)** 37,5 m **β)** 6,875 m/s **γ)** 1 N, 0 N, –2 N, –2 N **16. α)** 6 s **β)** 8 m/s **γ)** 100 m **17.** 47,1 cm **18.** 20,4 m **19. α)** 9,8 m **β)** 2 s **γ)** 13,9 m/s **20.** 873 km/h **21. α)** 4 s, 39,2 m/s **β)** 34,3 m **22.** 10 m/s, 29,6 m/s **23. α)** 2 s, 20 m **β)** 4 s, 20 m/s **γ)** 1 s, 10 m/s, 3 s, –10 m/s

2.5 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **3. α)** Δ **4.** 24 **5.** 1/3, 1/3 **6. α)** $v_A < v_B$ **β)** $\omega_A = \omega_B$ **γ)** $a_{\kappa,A} < a_{\kappa,B}$ **8.** Μπλε

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** 0,128 rad/s **2. α)** 0,2π m/s, π rad/s, $0{,}2\pi^2\ \text{m/s}^2$ **β)** $0{,}02\pi^2$ N **3.** 1 h 5 min 27 s **4.** $7 \cdot 10^{24}$ kg **5.** $6{,}6 \cdot 10^{15}$ περιφορές **6.** 0,2 **7.** 1.000 m **8.** 3 m/s **9.** 1 Hz **10. α)** $10{,}1 \cdot 10^2$ m/s **β)** $2{,}7 \cdot 10^{-6}$ rad/s **γ)** $2{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2$ **11. β)** 6.360 m/s

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: **1. α)** 08.06 **β)** 11 km **2.** Να φρενάρει **3. α) i)** $6\ \text{m/s}^2$ **ii)** 12 N **β)** 0,5 **4. α)** 1.000 N **β)** 800 N **γ)** 5 s, 10 m **5.** 2 **6.** 6,7 m/s **7.** 600 m **8. α)** 200 N **β)** 200 N, $\varepsilon\varphi\theta = 0{,}75$ **9.** 5 rad/s **10. α)** $6g$ **β)** 37 περ./min

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 3 Από τη δύναμη στην ενέργεια

3.1 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1.** Μονωμένο **2. Α)** Ανοικτό **Β)** Κλειστό **Γ)** Κλειστό **Δ)** Ανοικτό **Ε)** Ανοικτό **3.** Το δεμένο είναι κλειστό, το όχι δεμένο είναι ανοικτό **4.** Όχι

3.2 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1. α)** $U = 0$ **β)** $U = mgh_2$ **γ)** $U = -mgh_1$ **2.** $K_\beta < K_\varphi < K_\alpha$ **3.** Β **4.** Γ **6.** Β

7. $E_{\mu\eta\chi,\text{I}} = \frac{1}{2}mv_0^2$, $E_{\mu\eta\chi,\text{II}} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k(\Delta L_1)^2$, $E_{\mu\eta\chi,\text{III}} = \frac{1}{2}k(\Delta L_{max})^2$

8. α) $E_{\mu\eta\chi} = mgH$, $E'_{\mu\eta\chi} = mg(H - h) + \frac{1}{2}mv^2$ **β)** Μεγαλύτερη μετά την κρούση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1. α)** 0,225 m **β)** 0,0625 J **γ)** 0,0625 J **2.** 50 N/m, –1 J, 2 J, 1 J **3. α)** 100 J **β)** 200 J **4.** 7,5 m, 10 m/s **5. α) i)** 0 J, –0,5 J **ii)** 0,5 J, 0 J **β)** –0,5 J, Όχι **6. α)** 200.000 J **β)** 20 m, Όχι **7. α)** 32 m **β)** 63.587,5 J

3.3 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **2.** $5 \cdot 10^5$ J **3.** 10 °C **4.** 3,6 m **5.** Όχι **6.** $\Delta U_1 = \Delta U_2$, $P_1 > P_2$ **9. α)** $W = 0$ **β)** $W < 0$ **γ)** $W > 0$ **10.** 280 m

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1. α)** 0,8 **β)** $W_w = 0$, $W_N = 0$, $W_F = 400$ J, $W_T = -400$ J **2. α)** $W_w = 120$ J, $W_N = 0$, $W_T = -120$ J **β)** $\Delta U_{A\Gamma} = -120\ \text{J} = -W_w$ **3.** 37,5 J **4. α)** 2 N **β)** $W_F = 96$ J **5. β)** 80 N **6.** 3.000 N **7.** 3 m/s **8.** 9.000 kg **9.** 2.107.400 kWh

3.4 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **2.** $v = \sqrt{2gh}$ **4.** $4K$ **5.** 0,8 m **6.** (1)→Α, (4)→Γ, (5)→Β, (3)→Δ, (2)→Ε **8.** Ίσα **9. α)** mgh **β)** mgh **10. α)** 0 **β)** $-2\mu mg\Delta L_{max}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** 20 m/s **2.** 5,6 m/s **3.** 24 m/s **4.** 0,2 m **5.** 10 rad/s **6. α)** 5 m, Μικρότερη **7. α)** 9,8 m/s **β)** 0,62 m **8. α)** 11,8 m/s **β)** 7,1 m **9. α)** 4 m/s **β)** 0,4 m **10. α)** Ναι **β)** 1,26 m/s

3.5 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **2.** Ίση **3.** Ίσες **4. α)** Ίση **β)** Μεγαλύτερη **6. α)** 20% **β)** 0,512 m **7.** 75% **8.** $mgL(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** 234 J **2. β)** 10,5 J **3. α)** 0,49 J **β)** 1,4 m/s **4. α)** 6 m/s **β)** 0,2 m **5. α)** 10^4 N, **β)** $8{,}15 \cdot 10^4$ J **6. α)** 0,5 **β)** 80 J **γ)** 4,47 m/s **7. α)** 0,25 **β)** 40 m/s **8. α)** 135.000 J **β)** 135 m **9. α)** 156.800 J **β)** Όχι **10.** $8 \cdot 10^{20}$ J

3.6 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1.** Όχι **5.** 0,6 **6.** Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** 40.000 J **3.** 0,75 kW **4. α)** 2.000 J **β)** 1.400 J **5.** 400 kW, 280 kW **6. α)** 100 W **β)** 40%

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: **1. β)** $W_w = 0$, $W_N = 0$, $W_F = 720$ J, $W_T = -640$ J **γ)** $E_{μηχ} = 720$ J, $E_{θερμ} = 640$ J **δ)** $K = 80$ J **2. β)** 2.160 J, –1.960 J **δ)** 1.960 J, 200 J **3. α)** 0,4 m/s^2 **γ)** 3.200 J **δ)** 960 W **ε)** 1.920 W **4. α)** 5 m/s **β)** 4 m/s, 0,8 m **γ)** 36% **5. α)** 0,26 J **β)** 5 m/s **γ)** 1,25 m **6. α)** 5 m/s^2 **β)** 30 J, –10 J, –15 J, 15 J **γ)** 3,16 m/s **7. α)** 0,2 m **β)** 0,1 J **γ)** 0,2 J **8. α) i)** 0,2 m **ii)** 0,1 m **β) i)** 0,12 J **ii)** 0,6 N **9. α)** 100 m **β)** –40.000 J **γ)** 280.000 J **δ)** 28.000 W **10. α)** 2,4 m **β)** –1.280 J **γ)** 3.200 J **δ)** 40%

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 4 Ήχος

4.1 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1.** Β, Γ **2.** 2 m, 5 Hz, 10 m/s **3.** 10^5 Hz, Όχι **4.** 1.000 **5. α)** Πιο πυκνά **β)** Πιο αραιά **7. α)** $\lambda_Γ < \lambda_Α < \lambda_Β$ **β)** $I_Β < I_Γ < I_Α$ **γ)** $f_Β < f_Α < f_Γ$ **δ)** $T_Γ < T_Α < T_Β$ **8. α)** 331 m/s, 346 m/s **9.** Οι γάτες, Όχι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R_2^2}{R_1^2}$ **3.** 331 m/s, 0,833 m, 397 Hz **4.** 1,5 Hz **5.** $4{,}32 \cdot 10^{-3}$ J **6.** 1.500 m^2 **7. α)** 1/π W/m^2 **β)** 25

4.2 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **2.** 2 **3.** 1,56 m **4.** Μεγαλύτερη **5.** 2 **6.** $\lambda = L$ **8.** Ανοικτός και στα 2 άκρα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** 340 m/s **2. α)** 2 **β)** 3 **3. α)** 10 cm **β)** 1 m **4. α)** 2,5 cm, 20 cm **β)** 50 Hz **5. α)** 425 Hz **β)** 0,8 m **6.** 79,2 cm **7. α)** Είναι ανοικτός-κλειστός **β)** 160 Hz **γ)** 0,53 m **8. α)** 0,833 m **β)** 3,8 m

4.3 **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ:** **1.** Αυξάνεται η τάση και η ταχύτητα διάδοσης **2.** Β **3.** 40 cm **6.** Συντονισμός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: **1.** 0,5 m, 1.360 m/s **2.** 0,1 m **3.** 44% **4. α)** 1,06 m **β)** 494 Hz **5.** 3.400 Hz **6. α)** 258 Hz **β)** 258 Hz

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: **1. α)** 201 W **β)** 40 m **2. α)** 132 m/s **β)** 1,55 m **γ)** 6,82 m **3. α)** 0,8 m **β)** 340 m/s **γ)** 2 φορές, 50 cm και 10 cm **4. α)** 71 Hz, 213 Hz, 355 Hz **β)** 140 αρμονικές **γ)** 142,5 Hz, 285 Hz, 427,5 Hz, 140 αρμονικές **5.** 0,68 m, 0,77 m

Ευρετήριο όρων

Γλωσσάρι

Φύλλα για γραφικές παραστάσεις και πίνακες

Τυπολόγιο

Αναλυτικές απαντήσεις – λύσεις