

1. ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΗΣ

A. Εργο – Γενικά.

Μία δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα παράγει έργο, όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της. Το πόσο μεγάλο θα είναι το έργο, εξαρτάται από το μέγεθος της δύναμης (F) και τη μετατόπισή της (x) στη διεύθυνση της κίνησης.

Το έργο, ως φυσικό μέγεθος, εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται από ένα σώμα σε ένα άλλο, ή την ενέργεια που μετατρέπεται από μια μορφή σε μια άλλη.

Το έργο μιας δύναμης είναι μονόμετρο μέγεθος, οπότε για να καθοριστεί πλήρως, χρειάζεται μόνο ένας αριθμός (αλγεβρική τιμή) και η μονάδα μέτρησής του, που είναι το $1Joule$.

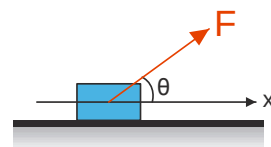
B. Εργο Σταθερής Δύναμης.

Όταν μια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της στην κατεύθυνσή της κατά x , ορίζουμε ως έργο της δύναμης αυτής, το γινόμενο:

$$W = F \cdot x \cdot \sin\theta$$

όπου θ , η γωνία που σχηματίζει η δύναμη F με τον άξονα της μετατόπισης.

Η γωνία θ , μας υποδεικνύει τρεις περιπτώσεις:



B1. αν $\theta=0^\circ$ ($\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{x}$)

Σε αυτήν την περίπτωση, η δύναμη είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση (διπλανό σχήμα), οπότε έχουμε:

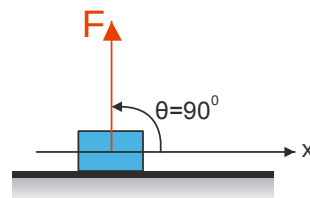
$$W = F \cdot x \cdot \sin\theta \xrightarrow{\theta=0^\circ} W = F \cdot x \cdot \sin 0 \xrightarrow{\sin 0=1} W = F \cdot x$$



B2. αν $\theta=90^\circ$ ($\vec{F} \perp \vec{x}$)

Σε αυτήν την περίπτωση, η δύναμη είναι κάθετη με τη μετατόπιση (διπλανό σχήμα), οπότε έχουμε:

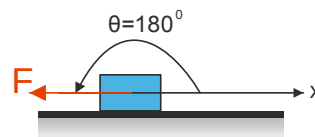
$$W = F \cdot x \cdot \sin\theta \xrightarrow{\theta=90^\circ} W = F \cdot x \cdot \sin 0 \xrightarrow{\sin 90=0} W = 0$$



B3. αν $\theta=180^\circ$ ($\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{x}$)

Σε αυτήν την περίπτωση, η δύναμη είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση (διπλανό σχήμα), οπότε έχουμε:

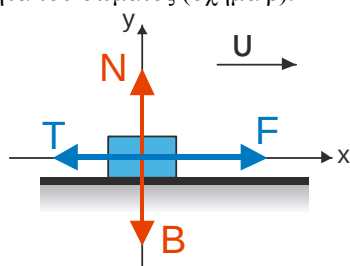
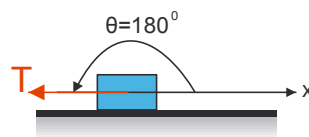
$$W = F \cdot x \cdot \sin\theta \xrightarrow{\theta=180^\circ} W = F \cdot x \cdot \sin 180 \xrightarrow{\sin 180=-1} W = -F \cdot x$$



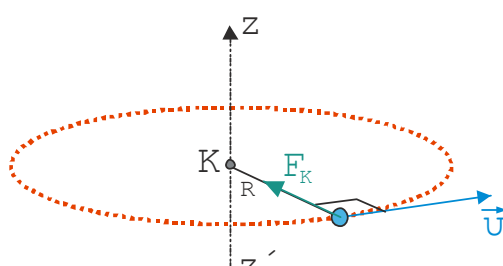
Παρατηρήσεις

- Όπως προκύπτει από τα παραπάνω, το έργο μιας δύναμης μπορεί να είναι θετικό ($W>0$, όταν η γωνία θ είναι οξεία: $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$), αρνητικό ($W<0$, όταν η γωνία θ είναι αμβλεία: $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$) ή μηδέν ($W=0$, όταν η γωνία θ είναι ορθή: $\theta = 90^\circ$).

2. Θετικό είναι το έργο μιας δύναμης όταν είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση (μετακίνηση) του σώματος. Σε αυτήν την περίπτωση η δύναμη προσδίδει επιπλέον ώθηση στο σώμα, επομένως του προσφέρει ενέργεια, για αυτό και το έργο της είναι θετικό.
3. Αρνητικό είναι το έργο μιας δύναμης όταν είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση (μετακίνηση) του σώματος. Σε αυτήν την περίπτωση η δύναμη αντιστέκεται στην κίνηση, επομένως αφαιρεί ενέργεια από το σώμα, για αυτό και το έργο της είναι αρνητικό. Παράδειγμα δύναμης που έχει αρνητικό έργο είναι η τριβή ολίσθησης. Το έργο της τριβής ολίσθησης είναι αρνητικό ($W_T < 0$), γιατί αντιστέκεται πάντα στην κίνηση των σωμάτων.
4. Μηδενικό είναι το έργο μιας δύναμης όταν είναι κάθετη με τη μετατόπιση (μετακίνηση) του σώματος. Σε αυτήν την περίπτωση η δύναμη δεν προσφέρει, ούτε αφαιρεί ενέργεια από το σώμα, για αυτό και το έργο της είναι μηδέν. Παράδειγμα δυνάμεων με μηδενικό έργο είναι το βάρος (B) και η κάθετη δύναμη (N) - όταν η κίνηση γίνεται σε οριζόντιο επίπεδο (σχήμα α) -, όπως επίσης και η κεντρομόλος δύναμη F_K στην κυκλική κίνηση, εφόσον πάντα είναι κάθετη στη (στιγμιαία) μετατόπιση και την ταχύτητα του σώματος (σχήμα β).



σχήμα α



σχήμα β

Στο σχήμα α έχουμε: $W_N = 0$ (γιατί $\vec{N} \perp \vec{x}$),
 $W_B = 0$ (γιατί $\vec{B} \perp \vec{x}$),
 $W_F > 0$ (γιατί $\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{x}$),
 $W_T < 0$ (γιατί $\vec{F} \downarrow \downarrow \vec{x}$).

Στο σχήμα β έχουμε: $W_{F_K} = 0$ (γιατί $F_K \perp \vec{x}$).

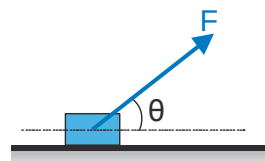
5. Μονάδα μέτρησης του έργου στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (S.I.), είναι το 1 Joule (συμβολίζεται $1J$) και προσδιορίζεται με τη βοήθεια του ορισμού του έργου:

$$W = F \cdot x \xrightarrow[F=1N, x=1m]{W=1J} 1J = 1N \cdot 1m$$

Δηλαδή: το 1 Joule είναι το έργο δύναμης $1N$ για μετατόπιση (στη διεύθυνση της δύναμης), κατά $1m$.

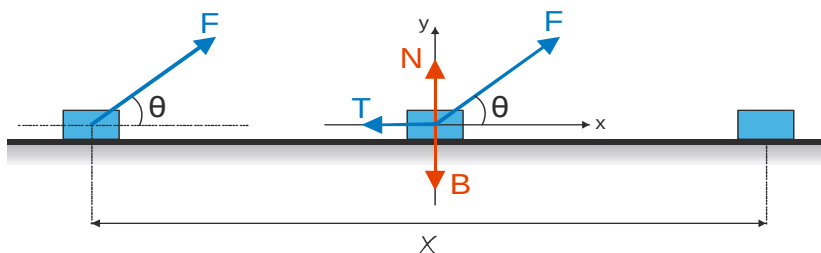
Εφαρμογή

Στο διπλανό σχήμα, το σώμα μάζας $m=2kg$ μετακινείται υπό την επίδραση της δύναμης $F=20N$. Αν $g=10m/s^2$, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$, $\eta\mu\theta=0,6$, $\sigma\upsilon\nu\theta=0,8$, να υπολογιστούν τα έργα όλων των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα για μετακίνηση ίση με $x=10m$.



Λύση

Σχεδιάζουμε το σώμα στην αρχική και τελική θέση και κατόπιν σε μια τυχαία (ενδιάμεση) θέση, στην οποία τοποθετούμε και τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό:



Υπολογισμός έργων:

$$W_F = F \cdot x \cdot \sin\theta = 20 \cdot 10 \cdot 0,8 \rightarrow W_F = 160J$$

$$W_N = N \cdot x \cdot \sin 90^\circ = 20 \cdot 10 \cdot 0 \rightarrow W_N = 0J$$

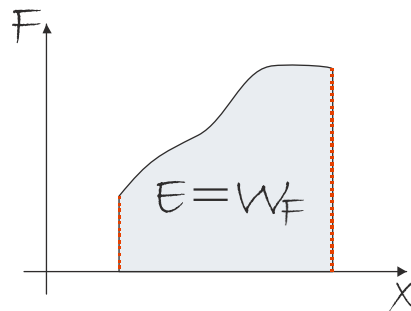
$$W_B = B \cdot x \cdot \sin 90^\circ = m \cdot g \cdot x \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0 \rightarrow W_B = 0J$$

$$W_T = T \cdot x \cdot \sin 180^\circ = \mu \cdot N \cdot x \cdot \sin 180^\circ = \mu \cdot (m \cdot g) \cdot x \cdot \sin 180^\circ = 0,5 \cdot (2 \cdot 10) \cdot 10 \cdot (-1) \rightarrow W_T = -100J$$

Γ. Έργο Δύναμης Παράλληλης με τη Μετατόπιση και Μεταβλητού Μέτρου.

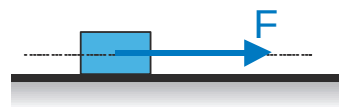
Όταν μια δύναμη $\vec{F}$ μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της και το μέτρο της δεν είναι σταθερό, αλλά μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη μετατόπιση (x), τότε το έργο της υπολογίζεται ως εξής:

- Κάνουμε τη γραφική παράσταση της δύναμης σε συνάρτηση με τη μετατόπιση. Προσοχή, ο άξονας της δύναμης πρέπει να έχει μονάδες *Newton* και ο άξονας της μετατόπισης *m*.
- Το εμβαδόν το οποίο περικλείεται από τη γραμμή που αποδίδει τη δύναμη και από τους αντίστοιχους άξονες, ισούται αριθμητικά με το έργο της δύναμης (διπλανό σχήμα).



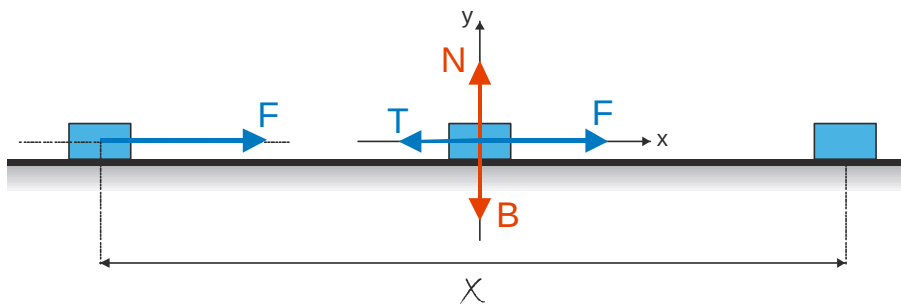
Εφαρμογή

Στο διπλανό σχήμα, το σώμα μάζας $m=2kg$ μετακινείται υπό την επίδραση δύναμης F , το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται με τη μετατόπιση, σύμφωνα με τη σχέση $F = 30 - 2 \cdot x$. Αν $g=10m/s^2$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$, να υπολογιστούν τα έργα όλων των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα για μετακίνηση ίση με $x=10m$.



Λύση

Σχεδιάζουμε το σώμα στην αρχική και τελική θέση και κατόπιν σε μια τυχαία (ενδιάμεση) θέση, στην οποία τοποθετούμε και τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό:



Υπολογισμός έργων: (το έργο της δύναμης F , θα το υπολογίσουμε ξεχωριστά)

$$W_N = N \cdot x \cdot \sin 90^\circ = 20 \cdot 10 \cdot 0 \rightarrow W_N = 0J$$

$$W_B = B \cdot x \cdot \sin 90^\circ = m \cdot g \cdot x \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0 \rightarrow W_B = 0J$$

$$W_T = T \cdot x \cdot \sin 180^\circ = \mu \cdot N \cdot x \cdot \sin 180^\circ = \mu \cdot (m \cdot g) \cdot x \cdot \sin 180^\circ = 0,5 \cdot (2 \cdot 10) \cdot 10 \cdot (-1) \rightarrow W_T = -100J$$

Υπολογισμός έργου δύναμης μεταβλητού μέτρου F :

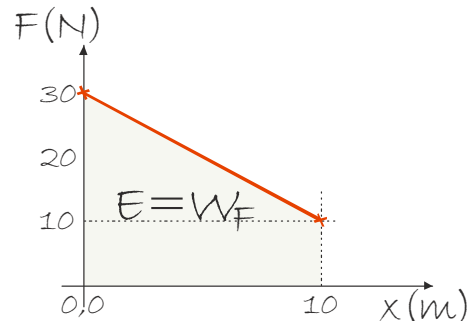
Εφόσον η δύναμη F έχει μεταβλητό μέτρο, το έργο της υπολογίζεται μόνο από το διάγραμμα $F - x$. Επομένως, θα πρέπει να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση. Χρησιμοποιούμε τη σχέση $F = 30 - 2 \cdot x$ για να κάνουμε καταρχήν έναν πίνακα τιμών (η σχέση που μας δίνει τη δύναμη σε συνάρτηση με τη μετατόπιση

παριστάνει ευθεία της μορφής $y = \alpha \cdot x + \beta$), άρα χρειαζόμαστε μόνο δύο τιμές (συνήθως την αρχική και την τελική τιμή της μετατόπισης):

Μετατόπιση x (m)	0	10
Δύναμη F (N)	30	10

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα, δημιουργούμε τη γραφική παράσταση F - x , (διπλανό σχήμα – κόκκινη γραμμή) και κατόπιν υπολογίζουμε το εμβαδόν που περικλείεται από το διάγραμμα και την αρχική ($x=0m$) και τελική ($x=10m$) θέση που μας ενδιαφέρει. Στο παράδειγμά μας το σχήμα που προέκυψε είναι τραπέζιο, οπότε χρησιμοποιούμε τον αντίστοιχο τύπο:

$$W_F = \frac{B + \beta}{2} \cdot \nu = \frac{30 + 10}{2} \cdot 10 \Rightarrow W_F = 200J$$

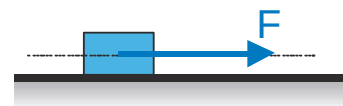


Παρατήρηση:

Ο υπολογισμός του έργου μιας δύναμης από το εμβαδόν σε διάγραμμα F - x , μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση σταθερών δυνάμεων, αλλά σε αυτήν την περίπτωση είναι ευκολότερη η χρησιμοποίηση του τύπου.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το έργο της σταθερής δύναμης $F=20N$ του διπλανού σχήματος, που μετατοπίζει το σώμα κατά $x=10m$ στη διεύθυνση του άξονα x .



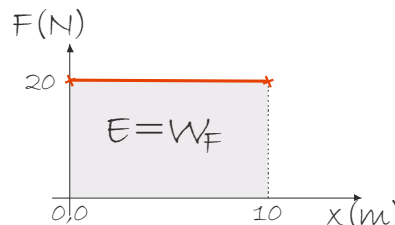
α' τρόπος: (με τον τύπο του έργου)

$$W_F = F \cdot x \cdot \sin 0^\circ = 20 \cdot 10 \cdot 1 \rightarrow W_F = 200J$$

β' τρόπος: (με το διάγραμμα F - x)

Δημιουργούμε το διάγραμμα, το οποίο είναι μια ευθεία γραμμή (εφόσον η δύναμη είναι σταθερή), και κατόπιν από το εμβαδόν παραλληλογράμμου που προκύπτει (διπλανό σχήμα), υπολογίζουμε το έργο:

$$W_F = B \cdot \nu = 20 \cdot 10 \Rightarrow W_F = 200J$$



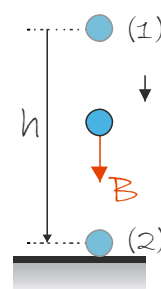
2. ΕΡΓΟ ΒΑΡΟΥΣ

Ανάλογα με την κίνηση που εκτελεί ένα σώμα, για το έργο του βάρους του (σύμφωνα με τον ορισμό του έργου), έχουμε τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις:

Α. Κίνηση σώματος κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω

Όταν ένα σώμα κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω (από τη θέση 1 μεταβαίνει στη θέση 2) κατά h , τότε η δύναμη του βάρους του, έχει την κατεύθυνση της μετατόπισης – σχήμα (α), οπότε το έργο της είναι θετικό και δίνεται από τη σχέση:

$$W_B = B \cdot h \cdot \sin 0^\circ = m \cdot g \cdot h \cdot 1 \rightarrow W_B = + m \cdot g \cdot h$$

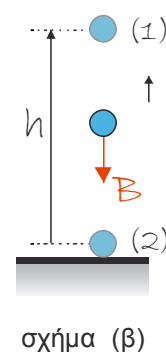


σχήμα (α)

Β. Κίνηση σώματος κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω

Όταν ένα σώμα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω (από τη θέση 2 μεταβαίνει στη θέση 1) κατά h , τότε η δύναμη του βάρους του, έχει αντίθετη κατεύθυνση από τη μετατόπιση – σχήμα (β), οπότε το έργο της είναι αρνητικό και δίνεται από τη σχέση:

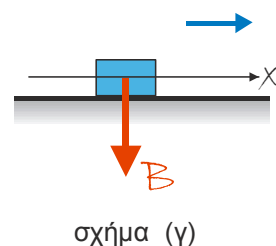
$$W_B = B \cdot h \cdot \sin 180^\circ = m \cdot g \cdot h \cdot (-1) \rightarrow W_B = -m \cdot g \cdot h$$



Γ. Οριζόντια Κίνηση σώματος

Όταν ένα σώμα κινείται οριζόντια, τότε η δύναμη του βάρους του είναι συνεχώς κάθετη στη μετατόπιση – σχήμα (γ), οπότε το έργο της θα είναι μηδενικό:

$$W_B = B \cdot h \cdot \sin 90^\circ = m \cdot g \cdot h \cdot 0 \rightarrow W_B = 0J$$

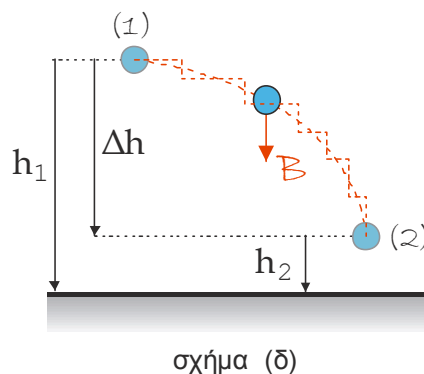


Δ. Τυχαία Κίνηση σώματος

Όταν ένα σώμα κινείται τυχαία, τότε η μετακίνηση μπορεί να θεωρηθεί ότι πραγματοποιείται με διαδοχικές (πολύ μικρές) οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις, οπότε το έργο του βάρους υπολογίζεται ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχειωδών έργων. Στις οριζόντιες μετατοπίσεις όμως είδαμε ότι το έργο του βάρους είναι μηδέν, επομένως το έργο του βάρους θα εξαρτάται μόνο από την κατακόρυφη μετατόπιση – σχήμα (δ) και θα δίνεται από τη σχέση:

$$W_B = B \cdot \Delta h = W_B = m \cdot g \cdot \Delta h \rightarrow W_B = m \cdot g \cdot (h_1 - h_2)$$

όπου $h_1 - h_2$, η υψομετρική διαφορά της αρχικής και της τελικής θέσης.



3. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Όταν ένα σώμα μάζας m , κινείται με ταχύτητα μέτρου v , έχει ενέργεια λόγω κίνησης, η οποία ονομάζεται κινητική ενέργεια, συμβολίζεται με K και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος, με μονάδα μέτρησης στο *S.I.* το *1Joule* (θα πρέπει βέβαια στον παραπάνω τύπο, η μάζα να είναι σε *kg* και η ταχύτητα σε *m/s*).

Παρατήρηση

Η κινητική ενέργεια εξαρτάται από τη μάζα και την ταχύτητα ενός σώματος. Όμως, ισχυρότερη εξάρτηση υπάρχει από την ταχύτητα, παρά από τη μάζα. Αυτό συμβαίνει γιατί στον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας η ταχύτητα υψώνεται στο τετράγωνο, ενώ η μάζα όχι. Έτσι, αν:

- διπλασιάσουμε τη μάζα ενός σώματος (κρατώντας σταθερή την ταχύτητά του), η κινητική ενέργεια θα διπλασιαστεί.

- διπλασιάσουμε την ταχύτητα ενός σώματος (κρατώντας σταθερή τη μάζα του), η κινητική ενέργεια θα τετραπλασιαστεί.

Εφαρμογή

Σώμα μάζας $m=2kg$, εκτελεί ευθύγραμμο ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με επιτάχυνση $a=3m/s^2$. Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t=4s$.

Λύση

Η κινητική ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση $K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$. Υπολογίζουμε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή

$t=4s$:

$$v = a \cdot t = 3 \cdot 4 \rightarrow v = 12m/s$$

Αντικαθιστούμε:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 12^2 \Rightarrow K = 144J$$

4. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στις περισσότερες κινήσεις των σωμάτων το μέτρο της ταχύτητάς τους αλλάζει, επομένως και η κινητική τους ενέργεια μεταβάλλεται. Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας τη συμβολίζουμε ΔK και είναι απλά η μεταβολή των τιμών της κινητικής ενέργειας σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές:

$$\Delta K = K_{TEΛ.} - K_{APX.} \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} m \cdot v_{TEΛ.}^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_{APX.}^2$$

Εφαρμογή

Σώμα μάζας $m=2kg$, εκτελεί ευθύγραμμο ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με επιτάχυνση $a=3m/s^2$. Να υπολογιστούν:

A. η κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1=4s$.

B. η κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2=6s$.

Γ. η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μεταξύ των δύο παραπάνω χρονικών στιγμών.

Λύση

A. Υπολογίζουμε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1=4s$:

$$v_1 = a \cdot t_1 = 3 \cdot 4 \rightarrow v_1 = 12m/s$$

Αντικαθιστούμε:

$$K_1 = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 12^2 \Rightarrow K_1 = 144J$$

B. Υπολογίζουμε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_2=6s$:

$$v_2 = a \cdot t_2 = 3 \cdot 6 \rightarrow v_2 = 18m/s$$

Αντικαθιστούμε:

$$K_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 18^2 \Rightarrow K_2 = 324J$$

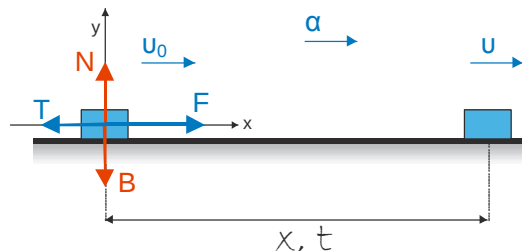
Γ. Υπολογίζουμε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1, t_2 :

$$\Delta K = K_2 - K_1 = 324 - 144 \Rightarrow \Delta K = 180J$$

5. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Θ.Μ.Κ.Ε.)

Έστω ότι σε σώμα μάζας m με αρχική ταχύτητα v_0 , ασκούνται οι δυνάμεις του σχήματος. Το σώμα αποκτά επιτάχυνση μέτρου a στην οριζόντια διεύθυνση και μετατοπίζεται κατά απόσταση x σε χρόνο t . Αν την ίδια χρονική στιγμή η ταχύτητά του έχει γίνει v , θα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + a \cdot t \\ x &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t &= \frac{v - v_0}{a} \\ x &= v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



$$x = v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \Rightarrow x = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \cdot \frac{v^2 - 2v_0 v + v_0^2}{a^2} = \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0 v + v_0^2}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow 2ax = v^2 - v_0^2 \xrightarrow{\cdot m} 2max = mv^2 - mv_0^2 \Rightarrow (m \cdot a) \cdot x = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 \xrightarrow{m \cdot a = F_{OA}} \rightarrow$$

$$F_{OA} \cdot x = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 \xrightarrow{F_{OA} \cdot x = W_{OA}} W_{OA} = K_{TEA} - K_{APX} \quad \text{ή} \quad \Delta K = W_{OA} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{2} mv_{TEA}^2 - \frac{1}{2} mv_{APX}^2 = W_{OA}$$

Και οι τρεις (ισοδύναμες) τελευταίες σχέσεις, αποτελούν το Θεώρημα Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.):

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος, ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που δρουν πάνω του, ή ισοδύναμα, ισούται με το έργο της συνισταμένης δύναμης.

$$\Delta K = W_{OA}$$

όπου $\Delta K = K_{TEA} - K_{APX}$, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος και W_{OA} , το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

Παρατηρήσεις

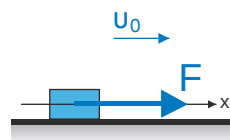
1. Με το Θ.Μ.Κ.Ε. μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός σώματος (αρχική ή τελική), τη μετατόπιση του σώματος ή το έργο μιας άγνωστης δύναμης.
2. Γενικά, το Θ.Μ.Κ.Ε. μας δίνει μία ακόμη εξίσωση για να υπολογίσουμε τον άγνωστο (ή τους άγνωστους) σε ένα πρόβλημα φυσικής. Έτσι, από εδώ και στο εξής, όταν σε μία άσκηση φυσικής γνωρίζουμε την αρχική ταχύτητα ενός σώματος και θέλουμε να υπολογίσουμε την τελική του ταχύτητα, ή το αντίστροφο, εκτός από τις εξισώσεις κίνησης του πρώτου κεφαλαίου, θα σκεφτόμαστε και το Θ.Μ.Κ.Ε..
3. Από τη σχέση $K_{TEA} - K_{APX} = W_{OA}$, έχουμε ότι $K_{TEA} = K_{APX} + W_{OA}$, οπότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:
 - i) αν το ολικό έργο που προσφέρεται στο σώμα είναι θετικό ($W_{OA} > 0$), τότε η τελική κινητική ενέργεια είναι μεγαλύτερη της αρχικής ($K_{TEA} > K_{APX}$) και το σώμα αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα ($v_{TEA} > v_{APX}$).
 - ii) αν το ολικό έργο που προσφέρεται στο σώμα είναι αρνητικό ($W_{OA} < 0$), τότε η τελική κινητική ενέργεια είναι μικρότερη της αρχικής ($K_{TEA} < K_{APX}$) και το σώμα αποκτά μικρότερη ταχύτητα ($v_{TEA} < v_{APX}$).
 - iii) αν το ολικό έργο που προσφέρεται στο σώμα είναι μηδέν ($W_{OA} = 0$), τότε η τελική κινητική ενέργεια είναι ίση με την αρχική ($K_{TEA} = K_{APX}$) και το σώμα έχει σταθερή ταχύτητα ($v_{TEA} = v_{APX}$).
4. Για να λύσουμε μια άσκηση με τη βοήθεια του Θ.Μ.Κ.Ε., κάνουμε τις ακόλουθες διαδικασίες:
 - i) Σχεδιάζουμε, πάνω στο κινούμενο σώμα, όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό και τις αναλύουμε σε δύο άξονες: έναν κατά τη διεύθυνση κίνησης και έναν κάθετο σε αυτόν.

- ii) Καθορίζουμε το διάστημα ή τα διαστήματα κατά τα οποία ασκείται η κάθε μία από αυτές τις δυνάμεις.
 iii) Βρίσκουμε το έργο (θετικό ή αρνητικό), για κάθε μία δύναμη και κατόπιν υπολογίζουμε το ολικό έργο.
 iv) Εφαρμόζουμε το $\Theta.M.K.E.$ για όλη τη διάρκεια της κίνησης, ή επιλέγουμε εμείς το διάστημα που θα το χρησιμοποιήσουμε. Καλό είναι να γράφουμε την αρχική και τελική θέση του σώματος, μεταξύ των οποίων θα χρησιμοποιήσουμε το $\Theta.M.K.E.$. Συγκεκριμένα, θα γράφουμε:
 εφαρμόζουμε το $\Theta.M.K.E.$ από τη θέση (1) $\rightarrow$ (2).
 5. Το $\Theta.M.K.E.$ εφαρμόζεται συνήθως σε ασκήσεις που είτε δεν δίνεται ο χρόνος, είτε δεν μας ενδιαφέρει να τον υπολογίσουμε.

Εφαρμογή

Σε ένα σώμα μάζας $m=2kg$, το οποίο κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $v_0=2m/s$, αρχίζει να ασκείται τη χρονική στιγμή $t_0=0$, οριζόντια δύναμη $F=22N$, με κατεύθυνση εκείνη της ταχύτητας v_1 (διπλανό σχήμα). Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος μετά από μετατόπιση $x=5m$ από τη στιγμή που άρχισε να ασκείται η δύναμη F .

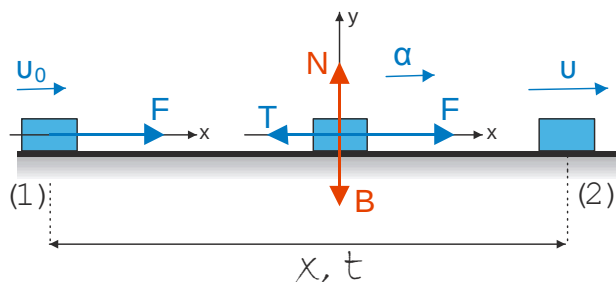
Δίνονται: Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$ και ο συντελεστής τριβής σώματος δαπέδου $\mu=0,5$.



Λύση

α' τρόπος λύσης (με εξισώσεις προηγούμενων κεφαλαίων):

Σχεδιάζουμε το σώμα στην αρχική και τελική θέση, καθώς και σε μία ενδιάμεση για να τοποθετήσουμε τις δυνάμεις:



Εφαρμόζουμε 2^ο νόμο Newton στον άξονα y :

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - B = 0 \rightarrow N = m \cdot g \rightarrow N = 2 \cdot 10 \rightarrow N = 20N$$

Υπολογίζουμε την τριβή, από το νόμο της τριβής:

$$T = \mu \cdot N = 0,5 \cdot 20 \rightarrow T = 10N$$

Εφαρμόζουμε 2^ο νόμο Newton στον άξονα x , για να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του σώματος:

$$\sum F_x = m \cdot a \rightarrow F - T = m \cdot a \rightarrow 22 - 10 = 2 \cdot a \rightarrow a = 6m/s^2$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση της απομάκρυνσης για να υπολογίσουμε το χρόνο στον οποίο έχει μετακινηθεί το σώμα κατά $x=5m$:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow 5 = 2 \cdot t + \frac{1}{2} 6 \cdot t^2 \Rightarrow 3 \cdot t^2 + 2 \cdot t - 5 = 0$$

Η εξίσωση στην οποία καταλήξαμε είναι δευτέρου βαθμού ως προς τον χρόνο, επομένως θα τη λύσουμε με το γνωστό τρόπο:

Υπολογίζουμε διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 64$$

Υπολογίζουμε τις δύο τιμές του χρόνου:

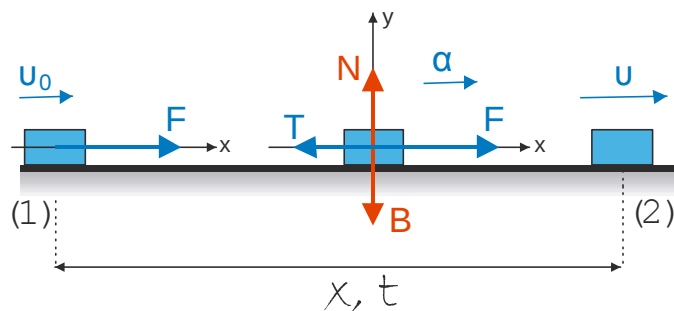
$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 8}{6}, \text{ άρα } t_1 = -5s \text{ (απορρίπτεται)} \text{ και } t_2 = 1s \text{ (δεκτή)}$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας, υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t=1s$:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow v = 2 + 6 \cdot 1 \rightarrow v = 8m/s$$

β' τρόπος λύσης (Θ.Μ.Κ.Ε.):

Σχεδιάζουμε το σώμα στην αρχική και τελική θέση, καθώς και σε μία ενδιάμεση για να τοποθετήσουμε τις δυνάμεις:



Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα, από τη θέση (1) στη θέση (2):

$$K_{TEΛ.} - K_{ΑΡΧ.} = W_{ΟΑ.} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_F + \cancel{W_B} + \cancel{W_N} + W_T \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F \cdot x - T \cdot x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 = (22 - 10) \cdot 5 \Rightarrow v^2 - 4 = 12 \cdot 5 \Rightarrow v^2 = 60 + 4 \Rightarrow v^2 = 64 \Rightarrow v = 8 \text{ m/s}$$

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ και ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Κατά την ελεύθερη πτώση ενός σώματος, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του μεταξύ δύο θέσεων, ισούται με το έργο του βάρους ανάμεσα στις δύο αυτές θέσεις.

Απόδειξη

Στην ελεύθερη πτώση ενός σώματος μάζας m κατά h , το έργο του βάρους από τη θέση (1) στη θέση (2), είναι:

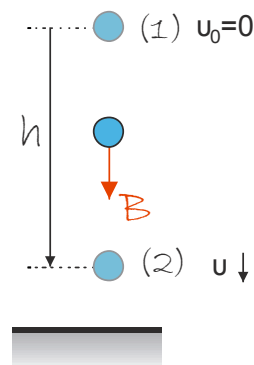
$$W_B = B \cdot h = m \cdot g \cdot h \xrightarrow{h = \frac{1}{2}g \cdot t^2} W_B = m \cdot g \cdot \frac{1}{2}g \cdot t^2 = \frac{1}{2}m \cdot g^2 \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$W_B = \frac{1}{2}m \cdot (g \cdot t)^2 \xrightarrow{g \cdot t = v} W_B = \frac{1}{2}m \cdot v^2 \quad (I)$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων (1) και (2), είναι:

$$\Delta K = K_{TEΛ.} - K_{ΑΡΧ.} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (II)$$

Από τις σχέσεις (I), (II), έχουμε ότι: $W_B = \Delta K$



6. ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ (ή ΔΙΑΤΗΡΗΤΙΚΕΣ) ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Τα σώματα δεν έχουν μόνο ενέργεια λόγω της κίνησής τους, αλλά και άλλες μορφές ενέργειας, είτε λόγω της θέσης τους, είτε λόγω της κατάστασής τους. Για να αναφερθούμε στα υπόλοιπα είδη ενεργειών, θα πρέπει να μάθουμε την έννοια των συντηρητικών ή διατηρητικών δυνάμεων. Σε αυτήν την κατηγορία των δυνάμεων ανήκει το βάρος, οι δυνάμεις ηλεκτροστατικού πεδίου, η άνωση, η δύναμη ιδανικού ελατηρίου. Ο ορισμός της συντηρητικής δύναμης είναι ο ακόλουθος:

Μια δύναμη είναι συντηρητική, αν το έργο που παράγει σε μια κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

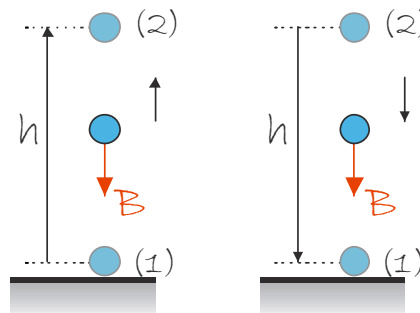
Πράγματι, το βάρος είναι συντηρητική δύναμη γιατί το έργο του στην κλειστή διαδρομή του διπλανού σχήματος $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (1)$ είναι μηδέν:

$$W_{B(1) \rightarrow (2)} = B \cdot h \cdot \sin 180^\circ = m \cdot g \cdot h \cdot (-1) \rightarrow W_{B(1) \rightarrow (2)} = -m \cdot g \cdot h$$

$$W_{B(2) \rightarrow (1)} = B \cdot h \cdot \sin 0^\circ = m \cdot g \cdot h \cdot 1 \rightarrow W_{B(2) \rightarrow (1)} = +m \cdot g \cdot h$$

Επομένως, για το ολικό έργο:

$$W_{B(1) \rightarrow (2) \rightarrow (1)} = -m \cdot g \cdot h + m \cdot g \cdot h = 0$$



Για τις συντηρητικές δυνάμεις υπάρχει και άλλος ισοδύναμος ορισμός:

Μια δύναμη είναι συντηρητική αν το έργο που παράγει πάνω σε ένα σώμα το οποίο κινείται μεταξύ δύο θέσεων, εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος και όχι από τη διαδρομή που θα ακολουθήσει.

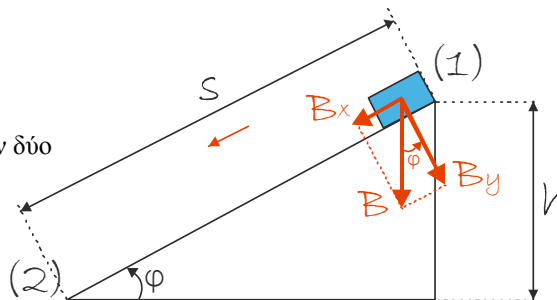
Παράδειγμα

Στο κεκλιμένο επίπεδο του διπλανού σχήματος, αν υπολογίσουμε το έργο του βάρους από τη διαδρομή $(1) \rightarrow (2)$, θα έχουμε:

$$W_B = B_x \cdot s \xrightarrow{B_x = m \cdot g \cdot \eta \mu \phi} W_{(1) \rightarrow (2)} = m \cdot g \cdot \eta \mu \phi \cdot s$$

Ενώ, αν χρησιμοποιήσουμε την κατακόρυφη απόσταση (h), των δύο θέσεων:

$$W_B = B \cdot h \xrightarrow[h = s \cdot \eta \mu \phi]{B = m \cdot g} W_B = m \cdot g \cdot \eta \mu \phi \cdot s$$



Επομένως, το έργο του βάρους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που θα ακολουθήσει το σώμα για να μεταβεί από την αρχική στην τελική του θέση, αλλά μόνο από την κατακόρυφη απόσταση των δύο θέσεων. Για αυτό το λόγο, λέμε ότι το βάρος είναι συντηρητική δύναμη.

Το ίδιο ισχύει και για τις υπόλοιπες δυνάμεις που αναφέραμε (ηλεκτροστατικές, άνωση, ελατήρια), δηλαδή το έργο τους εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σώματος.

7. ΔΥΝΑΜΙΚΗ (ΒΑΡΥΤΙΚΗ) ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Δυναμική ενέργεια είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης ενός συστήματος σωμάτων, με συντηρητικές δυνάμεις.

Επομένως, για να υπάρξει δυναμική ενέργεια απαιτείται ένα σύστημα τουλάχιστον δύο σωμάτων. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει δυναμική ενέργεια ενός μήλου, αλλά η δυναμική ενέργεια του συστήματος μήλο – γη.

Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος που αλληλεπιδρά με τη Γη (σύστημα Γη – σώμα), ονομάζεται βαρυτική δυναμική ενέργεια, είναι μονόμετρο μέγεθος όπως όλες οι ενέργειες, συμβολίζεται με το γράμμα U, έχει μονάδα μέτρησης το 1Joule και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$U = m \cdot g \cdot h$$

όπου:

m , η μάζα του σώματος

g , η επιτάχυνση της βαρύτητας

h , το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σώμα από την επιφάνεια της Γης.

Παρατηρήσεις

1. Ο τύπος υπολογισμού της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ισχύει μόνο για μικρά ύψη h από την επιφάνεια της γης. Αυτό συμβαίνει γιατί αν βρισκόμαστε σε μεγάλο ύψος, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και τη μεταβολή της επιτάχυνσης της βαρύτητας g .

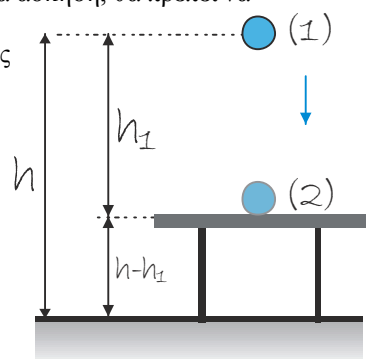
2. Όταν υπολογίζουμε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος σε μία άσκηση, θα πρέπει να καθορίζουμε εμείς το κατώτερο επίπεδο από το οποίο θα μετράμε το ύψος h . Συνήθως, σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας θα καθορίζουμε το κατώτερο επίπεδο στην κίνηση του σώματος, γιατί έτσι οι υπολογισμοί μας απλοποιούνται κατά πολύ (αποφεύγουμε την εμφάνιση αρνητικών τιμών για την δυναμική ενέργεια με αυτόν τον τρόπο).

Για παράδειγμα, στο διπλανό σχήμα, εφόσον το σώμα μάζας m σταματήσει την κίνησή του στο τραπέζι και όχι στο έδαφος, ορίζουμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας το επίπεδο του τραπεζιού.

Επομένως, η δυναμική ενέργεια του σώματος ως προς το τραπέζι, θα είναι:

στην αρχική του θέση (1), $U_1 = m \cdot g \cdot h_1$.

στην τελική του θέση (2) $U_2 = 0$



Αν θέλουμε πάντως να ορίσουμε το έδαφος σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας, τότε θα έχουμε:

στην αρχική του θέση (1), $U_1 = m \cdot g \cdot h$.

στην τελική του θέση (2) $U_2 = m \cdot g \cdot (h - h_1)$.

Προσοχή: Όταν ένα σώμα βρίσκεται πάνω από το επίπεδο που επιλέξαμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας θα έχει θετική δυναμική ενέργεια, ενώ αν βρίσκεται κάτω από το επίπεδο που επιλέξαμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας θα έχει αρνητική δυναμική ενέργεια. Αν έχουμε επιλέξει στο προηγούμενο παράδειγμα το τραπέζι σαν επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και το σώμα φτάσει στο έδαφος, τότε η τελική του βαρυτική δυναμική ενέργεια θα είναι $U_2 = -m \cdot g \cdot (h - h_1)$.

3. Σε μία κίνηση ενός σώματος, αυτό που μας ενδιαφέρει συνήθως, είναι η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ενός σώματος (ΔU). Η μεταβολή αυτή είναι ανεξάρτητη του κατώτερου επιπέδου που θα επιλέξουμε και εξαρτάται μόνο από την κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, θα έχουμε:

Μεταβολή Βαρυτικής Δυναμικής ενέργειας ως προς το τραπέζι:

$$\Delta U = U_1 - U_2 = m \cdot g \cdot h_1 - 0 \rightarrow \Delta U = m \cdot g \cdot h_1$$

Ενώ αν υπολογίσουμε τη Μεταβολή Βαρυτικής Δυναμικής ενέργειας ως προς το έδαφος, θα βρούμε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα:

$$\Delta U = U_1 - U_2 = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot (h - h_1) = \cancel{m \cdot g \cdot h} - \cancel{m \cdot g \cdot h} + m \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow \Delta U = m \cdot g \cdot h_1$$

4. Μεταβολή Δυναμικής Ενέργειας ΔU και έργο βάρους W_B :

Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται στη θέση (1) του διπλανού σχήματος και το αφήνουμε να πέσει μέχρι τη θέση (2), εξαιτίας του βάρους του.

Η μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας θα είναι:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1 = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \Rightarrow \Delta U = -m \cdot g \cdot h$$

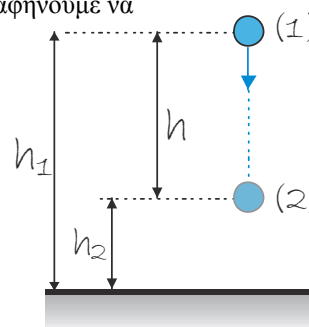
Το έργο του βάρους του σώματος για την ίδια διαδρομή (1) $\rightarrow$ (2), είναι:

$$W_B = B \cdot h \cdot \sin 0^\circ = m \cdot g \cdot h \cdot 1 \Rightarrow W_B = m \cdot g \cdot h$$

Δηλαδή: το έργο του βάρους ενός σώματος κατά τη μετακίνησή του από μία αρχική θέση σε μία τελική, είναι αντίθετο με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας μεταξύ των δύο αυτών θέσεων:

$$W_B = -\Delta U \rightarrow W_B = -(U_{TEA} - U_{APX}) \rightarrow W_B = U_{APX} - U_{TEA}.$$

Αυτό το συμπέρασμα ισχύει γενικά για τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ συντηρητικών δυνάμεων (ηλεκτροστατικών, δυνάμεις ελατηρίων).



8. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Ως μηχανική ενέργεια (E) ενός σώματος, ή ενός συστήματος σωμάτων, ορίζουμε το άθροισμα της κινητικής ενέργειας (K) και της δυναμικής ενέργειας (U) του σώματος ή του συστήματος σωμάτων:

$$E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (Α.Δ.Μ.Ε.)

Αν ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση μόνο συντηρητικών δυνάμεων (όπως είναι το βάρος του), η μηχανική του ενέργεια παραμένει σταθερή.

Απόδειξη

Κατά τη μετακίνηση του σώματος του διπλανού σχήματος από τη θέση (1) στη θέση (2), έχουμε:

$$\Delta K = W_{B(1) \rightarrow (2)} \quad (I) \quad (\Theta.M.K.E.)$$

επίσης:

$$-\Delta U = W_{B(1) \rightarrow (2)} \quad (II) \quad (\text{έργο βάρους} = \text{αντίθετη μεταβολή } \Delta U)$$

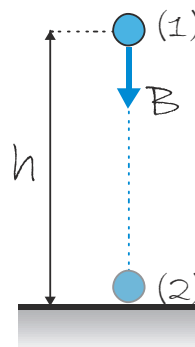
Από τις σχέσεις (I), (II), έχουμε:

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

Αν συνεχίσουμε από την τελευταία σχέση, έχουμε:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \xrightarrow{\Delta K = K_{TEΛ.} - K_{APX.}, \Delta U = U_{TEΛ.} - U_{APX.}} K_{TEΛ.} - K_{APX.} + U_{TEΛ.} - U_{APX.} = 0 \Rightarrow$$

$$K_{TEΛ.} + U_{TEΛ.} = K_{APX.} + U_{APX.} \Rightarrow \underline{E_{TEΛ.} = E_{APX.}}$$



Παρατηρήσεις

1. Η σχέση $\Delta K + \Delta U = 0$, μας υποδεικνύει ότι το άθροισμα της μεταβολής της κινητικής και της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας, είναι μηδέν, όταν στο σώμα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις.
2. Η σχέση $\Delta K = -\Delta U$ μας υποδεικνύει ότι όταν κατά την κίνηση ενός σώματος ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, τότε αν αυξηθεί η κινητική του ενέργεια κατά ένα ποσό (π.χ. $+10 \text{ Joule}$), η δυναμική βαρυτική του ενέργεια θα μειωθεί κατά το αντίστοιχο ποσό (-10 Joule) και αντίστροφα. Με άλλα λόγια, η κινητική ενέργεια που θα χαθεί (ή θα κερδηθεί), θα προκύψει από την αντίστοιχη αύξηση (ή μείωση) της δυναμικής βαρυτικής ενέργειας. Αυτό συμβαίνει γιατί το άθροισμά τους (που είναι η μηχανική ενέργεια), πρέπει να είναι πάντα σταθερό, οπότε οποιαδήποτε αύξηση (ή μείωση) της μιας εκ των δύο ενεργειών, θα γίνει 'εις βάρος' της άλλης.
3. Από τη σχέση $E_{APX.} = E_{TEΛ.}$ αν αντικαταστήσουμε την κινητική και τη δυναμική ενέργεια, έχουμε:

$$E_{APX.} = E_{TEΛ.} \Rightarrow K_{APX.} + U_{APX.} = K_{TEΛ.} + U_{TEΛ.} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h_2$$

Η τελευταία εξίσωση είναι και η μορφή με την οποία θα χρησιμοποιούμε την Α.Δ.Μ.Ε. στις ασκήσεις μας, όταν θέλουμε να συνδέσουμε δύο τυχαίες θέσεις ενός σώματος.

4. Τώρα που έχουμε δει τον ορισμό της μηχανικής ενέργειας, μπορούμε να δώσουμε έναν ακόμη ορισμό των συντηρητικών (ή διατηρητικών) δυνάμεων:

Συντηρητικές (ή διατηρητικές) δυνάμεις, είναι εκείνες που συντηρούν (διατηρούν) την μηχανική ενέργεια ενός σώματος.

Αντίθετα, μη συντηρητικές (ή μη διατηρητικές) δυνάμεις είναι εκείνες που δεν συντηρούν (δεν διατηρούν) την μηχανική ενέργεια ενός σώματος.

Παράδειγμα μη συντηρητικής δύναμης είναι η δύναμη της τριβής και γενικά όλες οι δυνάμεις που αφαιρούν ενέργεια από ένα σώμα (δυνάμεις που αντιστέκονται στην κίνηση).

Το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων εκφράζει την ποσότητα της μηχανικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια και σε ενέργεια μόνιμης παραμόρφωσης. Για αυτό το λόγο, όταν σε

ένα σώμα ασκούνται μη συντηρητικές δυνάμεις (τριβή) η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται, οπότε δεν θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε *Α.Δ.Μ.Ε.* παρά μόνο *Θ.Μ.Κ.Ε.*.

5. Για να χρησιμοποιήσουμε την *Α.Δ.Μ.Ε.* σε μία άσκηση, θα πρέπει καταρχήν να τοποθετήσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, να σιγουρευτούμε ότι οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές και κατόπιν να αναφέρουμε την αρχική και την τελική θέση για την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

Εφαρμογή

Το σώμα του διπλανού σχήματος αφήνεται από ύψος $h=1,8m$ από την επιφάνεια του εδάφους. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία φτάνει στο έδαφος.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

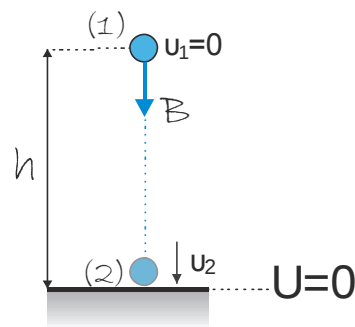
Λύση

Η άσκηση αυτή μπορεί να λυθεί τόσο με τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης, όσο και με *Θ.Μ.Κ.Ε.*. Εμείς ωστόσο, θα τη λύσουμε εφαρμόζοντας την *Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας*, εφόσον στο σώμα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις (το βάρος του).

Επιλέγουμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο του εδάφους και εφαρμόζουμε *Α.Δ.Μ.Ε.* από την αρχική έως την τελική θέση:

Α.Δ.Μ.Ε. (1) → (2)

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v^2 \Rightarrow 10 \cdot 1,8 = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot v^2 \Rightarrow 36 = v^2 \Rightarrow v = 6m/s$$



9. ΙΣΧΥΣ

Ισχύς (P) ενός κινητήρα (γενικά μηχανής), ονομάζεται το πηλίκο του έργου (W) που παράγει ο κινητήρας, προς το χρονικό διάστημα (Δt) στο οποίο παρήχθη το έργο αυτό:

$$P = \frac{W}{t}$$

Η ισχύς είναι μονόμετρο μέγεθος και εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο ο κινητήρας παράγει έργο.

Μονάδα μέτρησης της ισχύος στο διεθνές σύστημα μονάδων (S.I.), είναι το $1Watt$. Από τον ορισμό της ισχύος έχουμε:

$$P = \frac{W}{t} \xrightarrow[W=1Joule, t=1sec]{P=1Watt} 1Watt = \frac{1Joule}{t=1sec}$$

Δηλαδή, μια μηχανή θα λέμε ότι έχει ισχύ $1Watt$, όταν αποδίδει (ή καταναλώνει) ενέργεια $1Joule$ σε $1sec$.

Άλλη μονάδα μέτρησης της ισχύος είναι ο 1 ίππος (1Hp) , ο οποίος ισούται περίπου με $750Watt$ ή $0,75kW$.

Ισχύς κινούμενου οχήματος

Για ένα όχημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα v , έχουμε για την ισχύ του κινητήρα του:

$$P_{KIN} = \frac{W_{KIN}}{t} \xrightarrow{W_{KIN}=F_{KIN} \cdot x} P = \frac{F_{KIN} \cdot x}{t} = F_{KIN} \cdot \frac{x}{t} \xrightarrow{\frac{x}{t}=v} P_{KIN} = F_{KIN} \cdot v$$

Βέβαια, η παραπάνω σχέση δεν ισχύει μόνο όταν η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλή, αλλά σε οποιαδήποτε κίνηση, οπότε θα έχουμε στιγμιαία συνολικά αποδιδόμενη ή καταναλισκόμενη ισχύ:

$$P_{OL} = \frac{\Delta W_{OL}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta W_{OL}=F_{OL} \cdot \Delta x} P = \frac{F_{OL} \cdot \Delta x}{\Delta t} = F_{OL} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{\Delta x}{\Delta t}=v} P_{OL} = F_{OL} \cdot v$$

Κιλοβατώρα

Από τη σχέση $P = \frac{W}{t}$, παίρνουμε για το έργο (άρα και την ενέργεια), τη σχέση:

$$W = P \cdot t$$

από την οποία, αν η ισχύς μετρηθεί σε Watt (1W) και ο χρόνος σε ώρες (1h), η ενέργεια θα έχει σαν μονάδα μέτρησης τη 1Wh (βατώρα).

Αν πολλαπλασιάσουμε τη βατώρα επί 1000, τότε έχουμε μονάδα μέτρησης της ενέργειας την 1kWh (κιλοβατώρα):

1kWh (κιλοβατώρα) είναι η ενέργεια που αποδίδεται (ή καταναλώνεται) από μηχανή ισχύος 1kW, όταν αυτή λειτουργεί για μία ώρα (1h). Ισχύει:

$$1kWh = 1kW \cdot 1h \xrightarrow[1h=3600s]{1kW=1000W} 1kWh = 1000W \cdot 3600s \Rightarrow 1kWh = 36 \cdot 10^5 J$$

Ανακεφαλαίωση 5 ^{ου} κεφαλαίου	
Έργο σταθερής δύναμης:	$W = F \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$
Έργο μεταβλητής δύναμης:	Μόνο από εμβαδόν σε διάγραμμα $F - x$
Κινητική ενέργεια:	$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
Δυναμική βαρυτική ενέργεια:	$U = m \cdot g \cdot h$
Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.):	$K_{TEΛ.} - K_{APX.} = W_{OL.}$
Μηχανική Ενέργεια:	$E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$
Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.):	$E_{APX.} = E_{TEΛ.} \Rightarrow K_{APX.} + U_{APX.} = K_{TEΛ.} + U_{TEΛ.}$
Ισχύς:	$P = \frac{W}{t}$

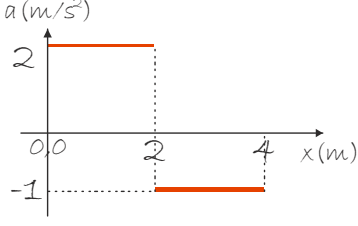
10. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή; Η μηχανική ενέργεια ενός κλειστού συστήματος διατηρείται μόνον όταν:
 - A. Δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις.
 - B. Δεν δρουν καθόλου εσωτερικές δυνάμεις
 - Γ. Οι εσωτερικές δυνάμεις είναι μη διατηρητικές
 - Δ. Όλες οι εσωτερικές δυνάμεις είναι διατηρητικές.
 - Ε. Ο μοναδικός όρος για τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας είναι το σύστημα να είναι κλειστό.
11. Ένα σώμα πέφτει ελεύθερα. Όταν βρίσκεται σε ύψος h η κινητική του ενέργεια είναι $6J$, ενώ σε ύψος $h/2$ η κινητική του ενέργεια γίνεται $10J$. Πόση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος σε ύψος $h/4$:

A. $12J$ B. $14J$ Γ. $16J$ δ) $20J$ ε) $22J$.
12. Ένα σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση:
 - A. το έργο του βάρους είναι θετικό.
 - B. το έργο του βάρους είναι μηδέν.
 - Γ. το έργο του βάρους είναι αρνητικό αν έχουμε ορίσει θετική φορά προς τα πάνω.
 - Δ. τίποτα απ' όλα αυτά.
13. Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος h :
 - A. το έργο του βάρους είναι μεγαλύτερο όταν έχουμε αντιστάσεις.
 - B. το έργο του βάρους είναι μικρότερο όταν έχουμε αντιστάσεις.
 - Γ. είναι ίδιο είτε έχουμε είτε δεν έχουμε αντιστάσεις.
 - Δ. τίποτα απ' όλα αυτά.
14. Σε σώμα κινούμενο σε οριζόντιο επίπεδο ασκούνται μόνο δύο σταθερές δυνάμεις και το συνολικό τους έργο είναι μηδέν:

A. οι δυνάμεις είναι κάθετες μεταξύ τους. B. η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

Γ. οι δυνάμεις είναι αντίθετες. Δ. τίποτα απ' όλα αυτά.
15. Ένα σώμα βάλλεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω και επιστρέφει στο σημείο βολής:
 - A. το έργο του βάρους είναι πάντα θετικό.
 - B. το έργο του βάρους είναι αρνητικό καθώς ανεβαίνει το σώμα.
 - Γ. το έργο του βάρους είναι θετικό καθώς κατεβαίνει το σώμα.
 - Δ. το συνολικό έργο του βάρους είναι μηδέν.
16. Σε ένα σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις. Τότε το έργο μιας δύναμης είναι μηδέν όταν:
 - A. η κίνηση είναι οριζόντια και η δύναμη κατακόρυφη.
 - B. η κίνηση είναι οριζόντια και η δύναμη οριζόντια παράλληλη στη ταχύτητα.
 - Γ. η κίνηση είναι οριζόντια και η δύναμη οριζόντια και κάθετη στη ταχύτητα.
 - Δ. η κίνηση είναι κατακόρυφη και η δύναμη οριζόντια.
17. Το έργο μιας δύναμης:
 - A. είναι αρνητικό μόνο όταν δύναμη και μετατόπιση σχηματίζουν γωνία 180° .
 - B. είναι πάντοτε θετικό.
 - Γ. είναι πάντοτε θετικό όταν η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.
 - Δ. είναι πάντοτε αρνητικό όταν η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη
 - Ε. είναι πάντοτε θετικό όταν η δύναμη έχει την ίδια διεύθυνση με αυτήν της επιτάχυνσης
 - Στ. εξαρτάται η τιμή του απ' το σύστημα αναφοράς.
18. Ένα σώμα βάρους B κινείται οριζόντια σε λείο οριζόντιο επίπεδο και μετατοπίζεται κατά x . Το έργο του βάρους του θα είναι:
 - A. $B \cdot x$
 - B. Μηδέν, διότι το βάρος είναι διατηρητική δύναμη.
 - Γ. Μηδέν, διότι το βάρος είναι κάθετο στη μετατόπιση.
 - Δ. $B \cdot x \cdot \sin\theta$

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

- Σε σώμα δίνεται αρχική ταχύτητα ώστε να κατεβαίνει ένα κεκλιμένο δάπεδο. Διαπιστώθηκε ότι το σώμα κατεβαίνοντας, διατηρεί σταθερή την ταχύτητα του. Με ποιες από τις επόμενες σκέψεις συμφωνείτε; (Σημειώστε: σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)).
 Α. Αν δεν δίνουμε στο σώμα αρχική ταχύτητα, θα παρέμενε ακίνητο πάνω στο κεκλιμένο δάπεδο.
 Β. Καθώς κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα, διατηρεί σταθερή την μηχανική του ενέργεια.
 Γ. Η θερμότητα που παράγεται, είναι κατά μέτρο ίση με το έργο του βάρους του σώματος, καθώς κατεβαίνει.
 Δ. Αν το ίδιο σώμα, το πετούσαμε με αρχική ταχύτητα προς τα πάνω στο ίδιο κεκλιμένο, θα επέστρεφε και πάλι στη βάση του κεκλιμένου με μικρότερη ταχύτητα.
- Ένα σώμα με μάζα 1kg είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη που το θέτει σε κίνηση. Η δύναμη καταργείται μετά από μετατόπιση 2m του σώματος και εκείνο απομένει να κινείται ελεύθερο. Αφού συμβουλευτείτε το διπλανό διάγραμμα, σημειώστε (Σ) και (Λ) στις παρακάτω προτάσεις αν τις θεωρείται σωστές ή λάθος αντίστοιχα.

 Α. Το σώμα κινείται πάνω στο δάπεδο χωρίς τριβές.
 Β. Μετά από μετατόπιση 4m , η κινητική ενέργεια του σώματος είναι 2J .
 Γ. Το σώμα ακινητοποιείται σε απόσταση 4m από την αφετηρία του.
 Δ. Το σώμα ακινητοποιείται σε απόσταση 6m από την αφετηρία του.
- Στη διάρκεια της κίνησης ενός σώματος, διαπιστώθηκε ότι διατηρήθηκε σταθερή η κινητική του ενέργεια, αλλά αυξήθηκε η μηχανική του ενέργεια.
 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις σας φαίνονται σωστές (Σ) και ποιες λάθος (Λ).
 Α. Στο σώμα έργο κάνουν μόνο μη συντηρητικές δυνάμεις.
 Β. Στο σώμα έργο κάνουν μόνο συντηρητικές δυνάμεις.
 Γ. Στο σώμα έργο κάνουν και συντηρητικές και μη συντηρητικές δυνάμεις.
 Δ. Το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων είναι μηδέν.
 Ε. Οι συντηρητικές δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα κάνουν καταναλισκόμενο έργο στη διάρκεια της κίνησης.
- Στη διάρκεια της κίνησης ενός σώματος, διαπιστώθηκε ότι διατηρήθηκε σταθερή η μηχανική του ενέργεια, αλλά μειώθηκε η δυναμική του ενέργεια.
 Ποια από τα παρακάτω συμπεράσματα, σας φαίνονται σωστά (Σ) και ποια λάθος (Λ).
 Α. Το ολικό έργο των δυνάμεων που ασκήθηκαν στο σώμα είναι μηδέν.
 Β. Το σώμα δέχεται συντηρητικές δυνάμεις που παράγουν έργο στη διάρκεια της κίνησης.
 Γ. Στο σώμα έργο κάνουν μόνο συντηρητικές δυνάμεις στη διάρκεια της κίνησης.
 Δ. Το παραγόμενο έργο των συντηρητικών δυνάμεων είναι κατά μέτρο ίσο με το καταναλισκόμενο έργο των μη συντηρητικών.
- Κρατάμε μια μικρή μπάλα με μάζα 200g που μπορεί να επιπλέει στο νερό. Την αφήνουμε να πέφτει ελεύθερα από $9,8\text{m}$ πάνω από την επιφάνεια του νερού μιας λίμνης. Η μπάλα φτάνει στο νερό με ταχύτητα και βουλιάζει κατά 20cm μέσα στο νερό μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα της και στη συνέχεια πετάγεται πάλι προς τα πάνω. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις θεωρείτε σωστές (Σ) και ποιες (Λ) λάθος. (Αντιστάσεις αέρα αγνοούνται, $g=10\text{m/s}^2$).
 Α. Η μπάλα φτάνει στην επιφάνεια του νερού με ταχύτητα 14m/s .
 Β. Μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα της, οι δυνάμεις που δέχτηκε απ' το νερό κάνουν στη μπάλα καταναλισκόμενο έργο με μέτρο $19,6\text{J}$.
 Γ. Μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα της, οι δυνάμεις που δέχτηκε απ' το νερό κάνουν στη μπάλα καταναλισκόμενο έργο με μέτρο 20J .
- Δυο παιδιά βρίσκονται ακίνητα κοντά το ένα στο άλλο, πάνω σε μια παγωμένη λίμνη όπου εμφανίζονται ασημαντες τριβές. Κάποια στιγμή τα παιδιά «σπρώχτηκαν» με αποτέλεσμα να κινηθούν σε αντίθετη κατεύθυνση. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λάθος (Λ).
 Α. Η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.
 Β. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.
 Γ. Η μηχανική ενέργεια κάθε παιδιού διατηρείται σταθερή.
 Δ. Η ορμή και η μηχανική ενέργεια κάθε παιδιού αυξήθηκαν.

7. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις προτάσεις που ακολουθούν, με το γράμμα **Σ** αν η πρόταση είναι σωστή και το γράμμα **Λ** αν είναι λανθασμένη:
 - Α. Το έργο μιας δύναμης είναι ανάλογο προς τη μετατόπιση του σώματος στο οποίο ασκείται η δύναμη.
 - Β. Μονάδα έργου στο S.I. είναι το *1Joule*.
 - Γ. Το έργο μιας δύναμης που το μέτρο της μεταβάλλεται, δίνεται από τη σχέση $W = F \cdot x \cdot \sin\theta$.
 - Δ. Το έργο του βάρους είναι πάντα ίσο με το μηδέν.
8. Η κινητική ενέργεια ενός σώματος:
 - Α. είναι ανάλογη προς τη μάζα και προς την ταχύτητα του σώματος.
 - Β. αυξάνεται εξαιτίας της επίδρασης της τριβής πάνω στο σώμα.
 - Γ. αυξάνεται κατά την ελεύθερη πτώση ενός σώματος.
 - Δ. τετραπλασιάζεται όταν διπλασιαστεί η ταχύτητα του σώματος.
 Ποιες από τις παραπάνω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;
9. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις προτάσεις που ακολουθούν, με το γράμμα **Σ** αν η πρόταση είναι σωστή και το γράμμα **Λ** αν είναι λανθασμένη:
 - Α. Ένα αεροπλάνο που πετά οριζόντια έχει μόνο δυναμική ενέργεια.
 - Β. όταν ένας δύτης καταδύεται, αυξάνεται η δυναμική του ενέργεια.
 - Γ. ένα αεροπλάνο που πετά οριζόντια έχει κινητική και δυναμική ενέργεια.
 - Δ. ένα ακίνητο πτηνό στο κλαδί ενός δέντρου έχει μόνο δυναμική ενέργεια.
10. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις προτάσεις που ακολουθούν, με το γράμμα **Σ** αν η πρόταση είναι σωστή και το γράμμα **Λ** αν είναι λανθασμένη:
 - Α. Το βάρος είναι διατηρητική δύναμη.
 - Β. Το βάρος είναι διατηρητική δύναμη αν ένα σώμα κινείται οριζόντια και μη διατηρητική αν το σώμα κινείται κατακόρυφα.
 - Γ. Η τριβή είναι μη διατηρητική δύναμη.
 - Δ. Η αντίσταση του αέρα είναι διατηρητική δύναμη.
 - Ε. οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι διατηρητικές.
11. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις προτάσεις που ακολουθούν, με το γράμμα **Σ** αν η πρόταση είναι σωστή και το γράμμα **Λ** αν είναι λανθασμένη:
 - Α. για να διατηρείται σταθερή η μηχανική ενέργεια ενός σώματος, θα πρέπει η συνισταμένη των μη διατηρητικών δυνάμεων που δέχεται να είναι μηδέν.
 - Β. η μηχανική ενέργεια ενός σώματος που εκτελεί ελεύθερη πτώση, διατηρείται.
 - Γ. το έργο της τριβής είναι πάντα θετικό.
 - Δ. όταν ένα σώμα δέχεται τριβές, η μηχανική του ενέργεια δεν διατηρείται.
12. Ποια από τα παρακάτω μεγέθη έχουν μονάδα μέτρησης το *Joule*:

Α. το έργο Β. η ισχύς Γ. η κινητική ενέργεια Δ. η δυναμική ενέργεια Ε. η ορμή
13. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (**Σ**) και ποιες λανθασμένες (**Λ**);
 - Α. Κατά την ελεύθερη κατάβαση ενός σκιέρ, οι δυνάμεις τριβής παράγουν αρνητικό έργο.
 - Β. Κατά την ολίσθηση ενός σώματος πάνω σε επιφάνεια πάγου, η δύναμη της κάθετης αντίδρασης του πάγου παράγει θετικό έργο.
 - Γ. Η ορμή του αεροπλάνου, το οποίο πετάει με σταθερή ταχύτητα πάνω σε καμπύλη τροχιά, δε μεταβάλλεται.
 - Δ. Η κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου που κάνει στροφή δίχως να μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητας του, διατηρείται σταθερή.
 - Ε. Το έργο και η ενέργεια έχουν τις ίδιες μονάδες μέτρησης.
 - Στ. Η κινητική ενέργεια εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος και δεν εξαρτάται από τη θέση του.
 - Ζ. Η δυναμική ενέργεια εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος και δεν εξαρτάται από τη θέση του.
 - Η. Όλα τα σώματα που κινούνται με την ίδια ταχύτητα ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς έχουν την ίδια κινητική ενέργεια.
 - Θ. Οι δυνάμεις της παγκόσμιας έλξης είναι διατηρητικές.
 - Ι. Η δύναμη της τριβής δεν είναι διατηρητική.
 - ΙΑ. Όταν η μπάλα του τένις ανυψώνεται, η δυναμική της ενέργεια αυξάνεται, επειδή η δύναμη της βαρύτητας παράγει θετικό έργο.
 - ΙΒ. Η μηχανική ενέργεια ενός κλειστού συστήματος, στο οποίο δρουν μη διατηρητικές δυνάμεις, διατηρείται.

Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενών

- Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές φυσικών μεγεθών στη διάρκεια ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης ενός σώματος. Με τη σειρά, οι διάφορες στήλες παριστάνουν:
 x : Απομακρύνσεις από καθορισμένη αρχή μετρήσεων.
 v : Η ταχύτητα του σώματος κάθε στιγμή.
 Δx : Μετατοπίσεις του κινητού κάθε στιγμή.
 Δt : Χρονική διάρκεια της κίνησης.
 K : Κινητική ενέργεια του σώματος κάθε στιγμή.
 Με βάση τις δεδομένες τιμές να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα.

<u>x (m)</u>	<u>v (m/s)</u>	<u>Δx (m)</u>	<u>Δt (s)</u>	<u>K (J)</u>
	2		0	2
			1	
10		8	2	
			3	
			4	

- Στον παρακάτω πίνακα, η στήλη (1) δείχνει τιμές του ύψους h που απέχει από τη Γη ένα σώμα που κάνει ελεύθερη πτώση. Η στήλη (2) δείχνει τιμές ταχύτητας του σώματος. Η στήλη (3) χρονικές στιγμές κατά την πτώση του. Οι στήλες (4), (5) δείχνουν αντίστοιχες τιμές δυναμικής και κινητικής ενέργειας του σώματος. Με βάση τις δεδομένες τιμές, να συμπληρώσετε τις υπόλοιπες τιμές του πίνακα. Δίνεται ότι ($g=10\text{m/s}^2$).

	<u>h (m)</u>	<u>v (m/s)</u>	<u>t (s)</u>	<u>U (J)</u>	<u>K (J)</u>
Θέση 1		0	0		
Θέση 2			1	900	
Θέση 3	30		2		
Θέση 4			3		
Θέση 5	0				

- Αφήνουμε ένα σώμα να πέσει ελεύθερα προς τη γη, από αρχικό ύψος h , σε τόπο με επιτάχυνση βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$. Οι αντιστάσεις αέρα θεωρούνται ασήμαντες.
 Στο παραπάνω υποθετικό πείραμα, καταγράψαμε κάποιες τιμές των μεγεθών στον παρακάτω πίνακα:
 $1^{\text{η}}$ στήλη: E : Μηχανική Ενέργεια του σώματος.
 $2^{\text{η}}$ στήλη: h : Ύψος από τη Γη.
 $3^{\text{η}}$ στήλη: U : Δυναμική ενέργεια του σώματος.
 $4^{\text{η}}$ στήλη: K : Κινητική Ενέργεια του σώματος.
 $5^{\text{η}}$ στήλη: t : Χρονική στιγμή με αρχή μετρήσεων την έναρξη της κίνησης.

1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
<u>E (J)</u>	<u>h (m)</u>	<u>U (J)</u>	<u>K (J)</u>	<u>t (s)</u>
100				0
	10		50	
	5			
	0			

4. Το 1 Joule είναι που παράγεται όταν μια με μέτρο μετατοπίζει το σημείο της κατά σύμφωνα με την της.
Να τοποθετήσετε τις λέξεις που λείπουν εκεί που είναι οι τελείες.
5. Σε κάθε μετατόπιση ενός σώματος η που παρουσιάζει η του ενέργεια, είναι ίση με το ολικό των που ασκήθηκαν στο σώμα.
Να τοποθετήσετε τις λέξεις που λείπουν εκεί που είναι οι τελείες.
6. Το 1 Watt είναι μιας μηχανής που παράγει 1 Joule σε κάθε λειτουργίας της.
Να τοποθετήσετε τις λέξεις που λείπουν εκεί που είναι οι τελείες.
7. Η σχέση $\Delta K = -\Delta U$ μας υποδεικνύει ότι όταν κατά την κίνηση ενός σώματος ασκούνται μόνο δυνάμεις, τότε αν αυξηθεί η του ενέργεια κατά ένα ποσό (π.χ. $+10 \text{ Joule}$), η δυναμική βαρυτική του ενέργεια θα κατά το αντίστοιχο ποσό και αντίστροφα.
Με άλλα λόγια, η κινητική ενέργεια που θα χαθεί (ή θα κερδηθεί), θα προκύψει από την αντίστοιχη (ή μείωση) της δυναμικής ενέργειας. Αυτό συμβαίνει γιατί το άθροισμά τους (που είναι η ενέργεια), πρέπει να είναι πάντα , οπότε οποιαδήποτε αύξηση (ή μείωση) της μιας εκ των δύο ενεργειών, θα γίνει 'εις βάρος' της άλλης.

Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1. Να κάνετε αντιστοίχιση ανάμεσα στα φυσικά μεγέθη της αριστερής στήλης και τις μονάδες της δεξιάς στήλης:

<u>Φυσικό Μέγεθος</u>	<u>Μονάδα Μέτρησης</u>
1. Έργο Δύναμης	A. Joule
2. Ισχύς	B. Watt
3. Δύναμη	Γ. $\text{Kg} \cdot \text{m/s}^2$
4. Ορμή	Δ. Hp
	E. $\text{Kg} \cdot \text{m/s}$
	Στ. $\text{N} \cdot \text{s}$
	Z. $\text{N} \cdot \text{m}$

2. Να κάνετε αντιστοίχιση μεταξύ των φυσικών μεγεθών των δύο στηλών:

1. Συντηρητικές δυνάμεις	A. Βάρος
	B. Τριβή
	Γ. Δύναμη ιδανικού ελατηρίου
2. Μη συντηρητικές δυνάμεις	Δ. Δύναμη κινητήρα
	E. Αντίδραση δαπέδου

3. Οι προτάσεις της αριστερής στήλης είναι ορισμοί για μερικούς από τους όρους και τα μεγέθη της δεξιάς στήλης. Συνδέστε κάθε έναν ορισμό της αριστερής στήλης με τον αντίστοιχο όρο της δεξιάς στήλης.

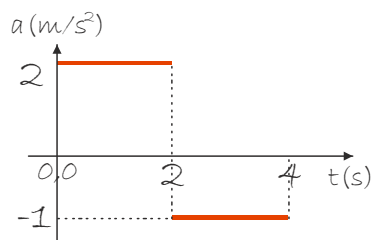
1. Ενέργεια των σωμάτων που βρίσκονται πάνω από την επιφάνεια της γης.	A. Κινητική ενέργεια
2. Φυσικό μέγεθος, η τιμή του οποίου προσδιορίζεται από το μέγεθος και τη διεύθυνση της δύναμης που ασκείται, και από τη μετατόπιση του σώματος	B. Επιτάχυνση
3. Ενέργεια σώματος που κινείται	Γ. Δυναμική βαρυτική ενέργεια
4. Δυνάμεις, στις οποίες αντιστοιχεί καθορισμένο είδος δυναμικής ενέργειας	Δ. Ορμή
5. Μέγεθος που χαρακτηρίζει τα ελαστικά παραμορφωμένα σώματα	E. Διατηρητικές δυνάμεις
6. Έργο ανά μονάδα χρόνου	Στ. Μη διατηρητικές δυνάμεις
	Z. Ελαστική δυναμική ενέργεια
	H. Εσωτερικές δυνάμεις
	Θ. Ισχύ
	I. Έργο

Ασκήσεις

1. Αγωνιστικό αυτοκίνητο της *FORMULA-1* έχει μάζα 600kg και «εγκαταλείπει» την πίστα του αγώνα κατευθυνόμενο προς τα «πιτς» με ταχύτητα 216km/h . Ο διάδρομος που ακολουθεί, θεωρείται ευθύγραμμος και το αυτοκίνητο επιβραδύνεται από δύναμη σταθερή, με μέτρο 2000 N . Ποιο το ελάχιστο μήκος του διαδρόμου για να κατορθώσει να σταματήσει στο σημείο ανεφοδιασμού;
2. Σώμα που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο δέχεται την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης με μέτρο $F=12\text{N}$. Η τριβή που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της κίνησης που προκαλεί η δύναμη F έχει μέτρο $T=4\text{N}$. Να υπολογίσετε τα έργα των δυνάμεων F και T για μετατόπιση του σώματος κατά $s=5\text{m}$.
3. Σώμα με μάζα $m=2\text{kg}$ ισορροπεί πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή (χρονική στιγμή $t=0$) δέχεται την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης F με μέτρο $F=20\text{N}$. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα και το επίπεδο είναι $\mu=0,2$. Να υπολογίσετε το έργο των δυνάμεων F και T ύστερα από χρόνο $t=4\text{s}$ από τότε που ασκήθηκε η δύναμη στο σώμα.
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.
4. Κιβώτιο με μάζα $m=40\text{kg}$ που αρχικά ηρεμούσε, δέχεται δύναμη από έναν εργάτη, ο οποίος το τραβάει ασκώντας του μέσω του σκοινιού τη σταθερή δύναμη με μέτρο $F=200\text{N}$ υπό γωνία $\varphi=45^\circ$ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα και το δάπεδο είναι $\mu=0,2$. Να υπολογίσετε το έργο των δυνάμεων F και T ύστερα από $t=4\text{s}$ από τότε που ασκήθηκε η δύναμη F .
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.
5. Μια αντλία νερού, λειτουργώντας συνεχώς με σταθερούς ρυθμούς, ανεβάζει 1800kg νερού σε ύψος 10m σε μια ώρα. Ποια είναι η ισχύς που αποδίδει η αντλία; Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.
6. Σταθερή οριζόντια δύναμη $F=20\text{N}$, θέτει σε κίνηση ένα σώμα πάνω σε ομοιογενές οριζόντιο δάπεδο. Μετά από χρόνο 4s , το σώμα εμφανίζει ταχύτητα 20m/s .
Α. Ποια η ισχύς της δύναμης F , την στιγμή που το σώμα έχει την παραπάνω ταχύτητα;
Β. Ποια η μέση ισχύς της F , στην παραπάνω χρονική διάρκεια;
7. Στον οριζόντιο πάγκο ενός μπαρ, ένας μπάρμαν δίνει αρχική ταχύτητα 2m/s σε ένα μπουκάλι, στέλνοντάς το προς έναν πελάτη του μπαρ, με ευθύγραμμη κίνηση. Το μπουκάλι εμφανίζει με τον πάγκο σταθερό συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,3$.
Α. σε πόση απόσταση από το σημείο εκκίνησης, το μπουκάλι εμφανίζει ταχύτητα με μέτρο, ίσο με το μισό της αρχικής; Εξαρτάται αυτό από τη μάζα του;
Β. με πόση ταχύτητα φτάνει το μπουκάλι στο χέρι αυτού που το περιμένει, αν αυτός βρίσκεται σε απόσταση $62,5\text{cm}$ από το σημείο εκκίνησης του μπουκαλιού;
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.
8. Αυτοκίνητο μάζας $m=1000\text{kg}$, κινείται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα 72km/h . Ο οδηγός φρενάρει ασκώντας σταθερή δύναμη φρένων, ώστε να ακινητοποιήσει τελικά το όχημα. Η δύναμη που επιβραδύνει το αυτοκίνητο είναι σταθερή, με μέτρο που θα μπορούσε να είναι οποιοδήποτε μεταξύ των τιμών 5000N και 10000N , αναλόγως με τη δύναμη που ασκεί ο άνθρωπος στο πεντάλ του φρένου. Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση στην οποία μπορεί να σταματήσει το αυτοκίνητο.
9. Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$, αρχικά είναι ακίνητο σε οριζόντιο δάπεδο. Το σώμα εμφανίζει με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$. Κάποια στιγμή, στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $F=10\text{N}$.
Α. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος, όταν η ταχύτητά του έχει μέτρο 6m/s .
Β. Πόση από την ενέργεια που δόθηκε στο σώμα "χάθηκε" σαν θερμότητα λόγω τριβής στην παραπάνω διαδρομή;
Γ. Να γίνει το διάγραμμα της κινητικής ενέργειας του σώματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή του από την αρχική θέση, κατά την παραπάνω μετατόπιση.
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.
10. Ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$, ισορροπεί αρχικά πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή ασκείται στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=8,4\text{N}$. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα και

το οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu=0,1$. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος ύστερα από μετατόπιση ίση με $x=10m$. Δίνεται $g=10m/s^2$.

11. Ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $F=6N$ που το θέτει σε κίνηση. Το σώμα εμφανίζει επιταχύνσεις όπως φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα. Η δύναμη καταργείται μετά από μετατόπιση $2m$ του σώματος και εκείνο απομένει να κινείται ελεύθερο. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος, μετά από μετατόπιση $4m$ από την αφετηρία κίνησης.



12. Κιβώτιο μάζας $5kg$ ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Άνθρωπος ασκεί στο κιβώτιο σταθερή δύναμη μέτρου $25 N$, σε διεύθυνση που σχηματίζει με το δάπεδο γωνία φ προς τα πάνω. Για τη γωνία δίνεται $\eta\mu\varphi=4/5$.

Το κιβώτιο παρουσιάζει με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$. Μετά από κίνηση χρονικής διάρκειας $10s$ να υπολογίσετε:

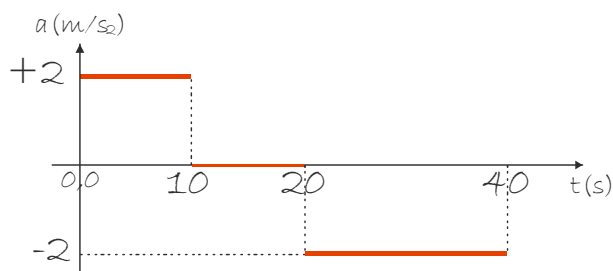
- α) Το ποσό της ενέργειας που μεταφέρθηκε από τον άνθρωπο στο κιβώτιο.
β) Το ποσοστό αυτής της ενέργειας που έγινε θερμότητα λόγω τριβών.
Δίνεται $g=10m/s^2$.

13. Σώμα μάζας $m=1kg$, βρίσκεται αρχικά ακίνητο, σε οριζόντιο δάπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$. Στο σώμα ασκείται δύναμη μέτρου $F = 5\sqrt{2}N$ σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\varphi=45^\circ$ με το δάπεδο, με φορά προς τα πάνω. Η δύναμη θέτει σε κίνηση το σώμα και ασκείται πάνω του για χρόνο $2s$ οπότε και καταργείται.

- α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
β) Να υπολογίσετε τη συνολική μετατόπιση του σώματος πάνω στο οριζόντιο δάπεδο, που θεωρείται μεγάλου μήκους.
γ) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις ταχύτητας - χρόνου και επιτάχυνσης - χρόνου, κατά τη διάρκεια της κίνησης.
Δίνεται $g=10m/s^2$.

14. Σώμα ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο σε απόσταση $10m$ από κατακόρυφο τοίχο. Το σώμα εμφανίζει με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$ και αποκτάει αρχική οριζόντια ταχύτητα $v_0=10m/s$ με κατεύθυνση κάθετη προς τον τοίχο. Κατά την σύγκρουση του με τον τοίχο, χάνει το 20% της ενέργειας του. Να υπολογίσετε την απόσταση της τελικής του θέσης πάνω στο δάπεδο από την αρχική του θέση.

15. Σώμα μάζας $m=1kg$, ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$. Κινητήριος μηχανισμός ασκεί στο σώμα δύναμη που το θέτει σε κίνηση. Στη διάρκεια $40s$ από την εκκίνηση, η επιτάχυνση του σώματος παρουσίασε μεταβολές στις τιμές της, όπως φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα.



- Α. Να κάνετε γραφική παράσταση των μεταβολών που παρουσίασαν οι τιμές της ταχύτητας του σώματος, στη διάρκεια των $40s$.
β) Να υπολογίσετε το συνολικό έργο του κινητήριου μηχανισμού στην παραπάνω χρονική διάρκεια.
Δίνεται $g=10m/s^2$.

16. Ένα σώμα μάζας $m=40kg$ ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο διατηρώντας σταθερή ταχύτητα με μέτρο $2m/s$, με την επίδραση σταθερής δύναμης F που σχηματίζει γωνία 30° προς τα πάνω με το οριζόντιο δάπεδο. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$, να βρεθεί το έργο της δύναμης F σε χρονική διάρκεια κίνησης $3s$. Δίνεται $g=10m/s^2$.

17. Σώμα βάλλεται προς τα πάνω από σημείο κεκλιμένου επιπέδου με αρχική ταχύτητα 8m/s , παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο. Το σώμα εμφανίζει με το κεκλιμένο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Η γωνία του κεκλιμένου με το οριζόντιο δάπεδο είναι 30° και το μήκος του θεωρείται αρκετά μεγάλο
Α. Σε πόση απόσταση από το σημείο βολής θα καταφέρει να φτάσει το σώμα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο;

Β. Δείξτε ότι το σώμα επιστρέφει και πάλι προς τα κάτω.

Γ. Με ποια ταχύτητα περνάει κατεβαίνοντας απ' το σημείο βολής;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

18. Σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $v_0=20\text{m/s}$. Στην κίνηση του σώματος, θεωρούμε σταθερή την επιτάχυνση της βαρύτητας και ίση με $g=10\text{m/s}^2$, ενώ αγνοούμε τις αντιστάσεις του αέρα.

Α. να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος ($h_{\max}$) στο οποίο θα ανέλθει το σώμα.

Β. να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στο μισό του μέγιστου ύψους ($h_{\max}/2$).

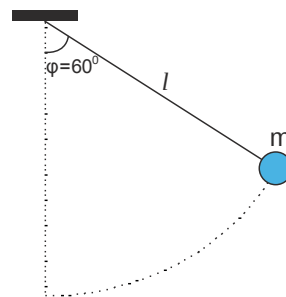
Γ. σε ποιο ύψος από τη γη, το σώμα εμφανίζει κινητική ενέργεια κατά μέτρο τριπλάσια από τη δυναμική;

19. Μικρή σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$ βρίσκεται στην άκρη ενός νήματος, το οποίο είναι δεμένο από την οροφή ενός εργαστηρίου. Το μήκος του νήματος είναι $l=2,5\text{m}$. Εκτρέπουμε το νήμα κατά 60° από την κατακόρυφο (διπλανό σχήμα) και το αφήνουμε ελεύθερο. Αντιστάσεις και τριβές αγνοούνται. Να υπολογίσετε:

Α. το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, όταν το νήμα περνά από την κατακόρυφη θέση.

Β. την τάση του νήματος στη θέση αυτή.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



20. Σώμα ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$.

Οριζόντια δύναμη F μεταβλητού μέτρου και σταθερής κατεύθυνσης ασκείται πάνω στο σώμα (διπλανό σχήμα). Το μέτρο της δύναμης F μεταβάλλεται με την απομάκρυνση x , σύμφωνα με τη σχέση:

$$F = 5 + 2 \cdot x \quad (\text{S.I.})$$

Α. Να υπολογίσετε την ενέργεια που δόθηκε στο κιβώτιο από τη δύναμη F , ύστερα από μετατόπιση $x=10\text{m}$.

Β. Να υπολογίσετε το μέτρο της κινητικής ενέργειας του σώματος, μετά την παραπάνω μετατόπιση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



21. Σώμα μάζας $m=10\text{kg}$, ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,25$. Οριζόντια δύναμη F μεταβλητού μέτρου και σταθερής κατεύθυνσης ασκείται πάνω στο σώμα. Το μέτρο της δύναμης F μεταβάλλεται με την απομάκρυνση x , σύμφωνα με τη σχέση:

$$F = 50 + 2,5 \cdot x \quad (\text{S.I.})$$

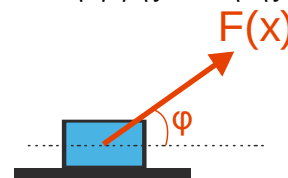
Η δύναμη F , σχηματίζει γωνία φ με το δάπεδο (διπλανό σχήμα), για την οποία γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\varphi=0,8$.

Α. Να υπολογίσετε την απόσταση x στην οποία το σώμα θα χάσει την επαφή με το έδαφος.

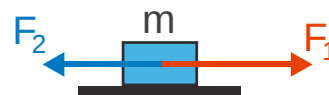
Β. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος, τη στιγμή που σηκώνεται από το έδαφος.

Γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος, τη στιγμή που σηκώνεται από το έδαφος.

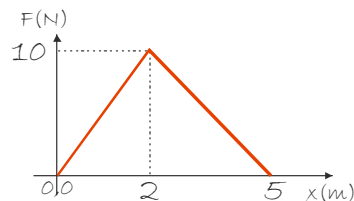
Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



22. Το σώμα του διπλανού σχήματος αρχικά ισορροπεί στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή ασκούνται στο σώμα οι οριζόντιες δυνάμεις F_1 και F_2 με μέτρα 20N και 10N αντίστοιχα που έχουν αντίθετες κατευθύνσεις. Να υπολογίσετε τα έργα που παράγουν αυτές οι δυνάμεις πάνω στο σώμα για μετατόπιση κατά $s=10\text{m}$.



23. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση των μεταβολών του μέτρου μιας δύναμης σταθερής οριζόντιας διεύθυνσης που ασκείται σε ένα σώμα που αρχικά ισορροπούσε πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο. Πόσο έργο παράγει αυτή η δύναμη πάνω στο σώμα για μετατόπιση κατά $x=5m$;



24. Σε σώμα μάζας $m=2kg$ που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο κάποια στιγμή ασκείται μια δύναμη F με οριζόντια σταθερή διεύθυνση που το μέτρο της μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$F = 2 \cdot x + 8 \quad (x: \text{σε } m, F \text{ σε } N).$$

Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα και στο οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu=0,2$.

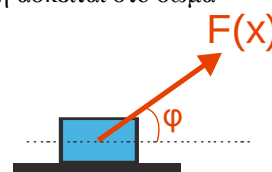
A. Θα κινηθεί το σώμα εξαιτίας της δύναμης F ;

B. Αν ναι να υπολογίσετε το έργο της καθώς και το έργο της τριβής πάνω στο σώμα για μετατόπιση κατά $x=6m$. Δίνεται $g=10m/s^2$.

25. Σώμα με μάζα $m=4kg$ αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή ασκείται στο σώμα μια δύναμη F που η διεύθυνση της είναι σταθερή και σχηματίζει γωνία $\varphi = 45^\circ$ προς τα πάνω με το οριζόντιο επίπεδο (διπλανό σχήμα). Το μέτρο της F μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

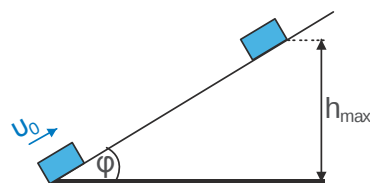
$$F = 2\sqrt{2} \cdot x + 10\sqrt{2} \quad (S.I.)$$

όπου x είναι η μετατόπιση του σώματος από τη θέση στην οποία άρχισε να ασκείται η δύναμη (και άρχισε η κίνηση). Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα και στο οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu=0,2$. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης F και της τριβής, για μετατόπιση του σώματος κατά $x=6m$. Δίνεται $g=10m/s^2$.



26. Ένα σώμα μάζας $m=4kg$ ισορροπεί αρχικά πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή ασκείται στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη με μέτρο $F=20N$.
A. Δίνεται ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος κατά τη διάρκεια του 4^{ου} μέτρου της μετατόπισής του είναι $\Delta K=12J$. Να υπολογίσετε το συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και το οριζόντιο επίπεδο.
B. να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος, για μετατόπιση κατά $x=10m$ από την αρχική θέση ισορροπίας του. Δίνεται $g=10m/s^2$.

27. Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου, γωνία κλίσης $\varphi=45^\circ$, με αρχική ταχύτητα $v_0=10m/s$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και το κεκλιμένο επίπεδο, είναι $\mu=0,2$. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος (h_{max}) στο οποίο θα φτάσει το σώμα. Δίνεται $g=10m/s^2$.



28. Ένα σώμα μάζας m βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω από ύψος $h=20m$ με αρχική ταχύτητα $v_0=10m/s$. Το σώμα χτυπά στο οριζόντιο επίπεδο και αναπηδά χωρίς απώλεια ενέργειας. Να υπολογίσετε το νέο ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα μετά την αναπήδηση. (Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα). Δίνεται $g=10m/s^2$.
29. Στη μια άκρη ενός νήματος με μήκος $L=2m$, δένουμε ένα μικρό σφαιρίδιο μάζας m . Το άλλο άκρο του νήματος το δένουμε στο ταβάνι ενός δωματίου και αφήνουμε το σύστημα να ισορροπήσει σε κατακόρυφη διεύθυνση. Απομακρύνουμε το σφαιρίδιο από την αρχική θέση που ισορροπεί, με το νήμα τεντωμένο, κατά γωνία $\varphi=45^\circ$, και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σφαιριδίου τη στιγμή που διέρχεται από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του. Δίνεται $g=10m/s^2$.